

# Guía del profesor

2

bachillerato

## Éter Física

Salvador Lorente  
Fernando Sendra  
Eloy Enciso  
Juan Quilez  
Jesús Romero



# Guía Didáctica

bachillerato 2



## Éter Física

Salvador Lorente  
Fernando Sendra  
Eloy Enciso  
Juan Quílez  
Jesús Romero

## Éter (Física)

### 2 bachillerato

©ES PROPIEDAD

Salvador Lorente

Fernando Sendra

Eloy Enciso

Juan Quílez

Jesús Romero

Editorial ECIR, S.A.

ISBN: 978-84-9826-528-6

Diseño de interior: Diseño gráfico ECIR

Edición: Editorial ECIR

Impresión: Industrias gráficas Ecir (IGE)

Ilustraciones: Diseño Gráfico ECIR

Diseño e ilustración cubierta: Valverde e Iborra / Diseño gráfico ECIR

Cualquier forma de reproducción, distribución, comunicación pública o transformación de esta obra solo puede ser realizada con la autorización de sus titulares, salvo excepción prevista por la ley. Diríjase a CEDRO (Centro Español de Derechos Reprográficos, [www.cedro.org](http://www.cedro.org)) si necesita fotocopiar o escanear algún fragmento de esta obra.

La presente Guía del profesorado forma parte, con el Proyecto, de los Materiales Auxiliares que acompañan al Libro del alumnado de la Editorial ECIR.

Esta Guía no pretende ser un instrumento dirigista, sino que desea facilitar el trabajo de los docentes, así como justificar los contenidos, las actividades, los experimentos y los ejercicios propuestos en cada uno de los temas.

Los diferentes temas se tratan en la Guía del profesorado de acuerdo con el siguiente esquema general:

1. **INTRODUCCIÓN AL TEMA.** En ella se hace una breve presentación del papel del tema en la Unidad Didáctica correspondiente y del hilo conductor bajo el cual se desarrollan sus contenidos.
2. **CONTENIDOS.** Aparecen los diferentes epígrafes del tema, con sus correspondientes subapartados, como visión panorámica del contenido del tema.
3. **OBJETIVOS ESPECÍFICOS.** En una parrilla se muestran las capacidades a desarrollar en cada tema, diferenciando conceptos, procedimientos y actitudes.
4. **SOLUCIONARIO.** Este apartado es el núcleo fundamental de la Guía del profesorado y ofrece la justificación y, sobre todo, la solución pormenorizada de las diferentes actividades de desarrollo del tema y de los ejercicios propuestos al final del libro del alumnado, bien sean cuestiones, ejercicios numéricos o experimentos (facilitando en este caso información respecto al procedimiento más conveniente a seguir en el laboratorio). También se presenta la repuesta al ejercicio de autoevaluación que aparece en la última página de cada tema del libro del alumnado.
5. **CRITERIOS DE EVALUACIÓN.** Considerando que los criterios de evaluación oficiales son muy generales y atendiendo a los objetivos señalados en el apartado 3, se establecen unos criterios de evaluación específicos del tema, con el fin de ayudar al profesorado en la tarea de evaluar el grado de aprendizaje de los alumnos.
6. **EJERCICIOS PROPUESTOS PARA LA EVALUACIÓN FINAL.** Además de la prueba de autoevaluación que aparece en el libro del alumnado al final de cada tema, en esta guía sugerimos una serie de ejercicios como orientación al profesorado a la hora de confeccionar una prueba de evaluación sumativa para cada uno de los temas.
7. **RECURSOS DIDÁCTICOS Y BIBLIOGRAFÍA.** Se citan una serie de libros y de artículos de especial interés para analizar cuáles son los preconceptos que se necesitan al abordar el tema, cuáles

les son los errores conceptuales más frecuentes relacionados con el tema en cuestión, en qué orden se deben desarrollar los contenidos, cuál es el tratamiento didáctico aconsejable de algún aspecto del tema más conflictivo, etc. También se enumeran algunos programas de video que pueden servir de ayuda en una presentación motivadora de alguna parte del tema.

Esperamos que la información contenida en esta Guía del profesorado le sea útil en su tarea diaria, con lo cual habremos conseguido nuestro objetivo al elaborarla.

**LOS AUTORES**

Índice interactivo. Situar el cursor sobre el tema al que se desee ir y hacer clic.



# Índice

1	VIBRACIONES Y ONDAS .....	6
2	OPTICA .....	24
3	FÍSICA CUÁNTICA .....	54
4	GRAVITACIÓN.....	76
5	CAMPO ELÉCTRICO Y CAMPO MAGNÉTICO .....	98
6	INDUCCIÓN Y SÍNTESIS DEL ELECTROMAGNETISMO .....	122
7	LA FÍSICA RELATIVISTA .....	136
8	FÍSICA NUCLEAR .....	150



# VIBRACIONES Y ONDAS

## 1

### 1. PRESENTACIÓN GENERAL DEL TEMA

El objetivo principal del tema es establecer y analizar otro modelo “clásico” para interpretar y predecir el comportamiento de la materia, el *modelo ondulatorio*, que junto con el corpuscular explican la mayor parte de los fenómenos físicos y químicos.

Existen unos fenómenos de naturaleza compleja y poco evidente, llamados movimientos *ondulatorios* o simplemente *ondas*. Vamos a describir primero sus características y posteriormente establecer un modelo interpretativo que permita comprender y explicar este comportamiento de la naturaleza; a él pertenecen importantes fenómenos físicos en los que se aprecia un hecho común: existe transmisión de energía de un punto a otro de un sistema pero sin un transporte neto de materia.

Comenzaremos estudiando los fenómenos vibratorios, y en concreto el *movimiento armónico simple* (MAS), origen de los fenómenos ondulatorios más importantes. Estableceremos la ecuación de la elongación y a partir de ella analizaremos las

características de la velocidad y la aceleración (resaltando que  $a = -\omega^2 x$ ), así como los aspectos energéticos.

La propagación en el espacio de un MAS genera un *movimiento ondulatorio*; así se originan las *ondas armónicas*, cuya ecuación analizaremos con detalle en primer lugar.

Trataremos a continuación un aspecto esencial del MO, el transporte de energía, describiendo la variación de la intensidad con la distancia, en casos especiales, y con la absorción.

Estudiaremos las propiedades de las ondas (reflexión, refracción, difracción, interferencias...), aplicando en algunos casos el principio de Huygens y considerando el caso especial de interferencias que produce las ondas estacionarias.

Y finalmente, aplicaremos todo ello a una onda mecánica excepcional, el *sonido*, tratando sus propiedades y algunas de sus aplicaciones e inconvenientes, como la contaminación acústica.



## 2. CONTENIDOS

### 1 *Movimiento ondulatorio*

### 2 *Movimiento vibratorio y movimiento armónico simple*

- Movimiento de una masa sujeta a un muelle ( $x$ ,  $v$  y  $a$ )
- Periodo de la oscilación y movimiento pendular
- Estudio energético del MAS

### 3 *Ondas mecánicas: características*

- Producción y propagación de ondas
- Tren de ondas, frente de ondas y rayo
- Ondas mecánicas y ondas electromagnéticas
- Dos tipos de ondas mecánicas

### 4 *Magnitudes necesarias para caracterizar la onda*

### 5 *Ondas armónicas: ecuación general*

- Doble periodicidad de las ondas armónicas
- Concordancia y oposición de fase

### 6 *Energía transmitida por las ondas*

- Estudio energético del foco
- Intensidad de la onda
- Dependencia de la intensidad con la amplitud y la frecuencia
- Variación de la intensidad con la distancia al foco
- Absorción

### 7 *Reflexión, refracción y difracción*

- Leyes de la reflexión
- Refracción de ondas
- Reflexión total
- Difracción

### 8 *Superposición de ondas: interferencias*

- Interferencia de ondas armónicas
  - 1º Interferencia constructiva
  - 2º Interferencia destructiva

### 9 *Modelo del movimiento ondulatorio: principio de Huygens*

- Explicación por el modelo de Huygens de los fenómenos ondulatorios

### 10 *Caso particular: ondas estacionarias*

- Relación entre la longitud de onda y la longitud de la cuerda o del muelle

### 11 *Polarización y efecto Doppler*

### 12 *Ondas sonoras*

- Producción y propagación del sonido
- Rapidez de propagación
- Clasificación de los sonidos
- Energía de los sonidos
- Influencia de la intensidad en la audición: nivel de intensidad sonora y sonoridad
- Ruido y contaminación sonora

### 3. OBJETIVOS ESPECÍFICOS (Capacidades que hay que desarrollar)

CONCEPTOS	PROCEDIMIENTOS	ACTITUDES
<div>1. Reconocer el movimiento vibratorio como una consecuencia de las fuerzas elásticas.</div> <div>2. Establecer que la onda es la propagación en el tiempo y por el espacio de la perturbación producida en un punto.</div> <div>3. Definir los conceptos básicos de las ondas (rayo, frente de onda, intensidad, frecuencia, longitud de onda, rapidez de propagación...).</div> <div>4. Analizar la reflexión y la refracción y establecer sus leyes.</div> <div>5. Describir la interferencia de movimientos ondulatorios como la superposición en un punto del medio de más de una onda.</div> <div>6. Realizar el estudio energético de las ondas.</div> <div>7. Identificar el modelo del movimiento ondulatorio como un transporte de energía y cantidad de movimiento, sin desplazamiento neto de materia.</div> <div>8. Estudiar el sonido como un tipo de onda mecánica con sus particularidades.</div> <div>9. Aplicar las propiedades de las ondas al sonido.</div>	<div>1. Identificar el movimiento vibratorio como la causa de una onda.</div> <div>2. Reconocer que el movimiento ondulatorio es uno de los más abundantes y cotidianos de la naturaleza.</div> <div>3. Construir un modelo teórico para explicar las vibraciones de la materia y su propagación en forma de ondas.</div> <div>4. Identificar los fenómenos que llevan asociados energía y cantidad de movimiento sin transporte neto de materia.</div> <div>5. Distinguir con precisión las magnitudes que definen un movimiento ondulatorio y caracterizar a nivel teórico y experimental las propiedades de las ondas.</div> <div>6. Diseñar y realizar experimentos que pongan de manifiesto las propiedades de las ondas mecánicas y validen el modelo propuesto.</div> <div>7. Elaborar informes para comunicar los resultados y las conclusiones obtenidas en los trabajos de laboratorio con movimientos ondulatorios.</div> <div>8. Realizar lecturas sobre aplicaciones de nuevas tecnologías basadas en las ondas.</div>	<div>1. Asumir la existencia de los movimientos vibratorios y los movimientos ondulatorios.</div> <div>2. Valorar como un hecho característico de la ciencia el carácter provisional y no dogmático de las explicaciones y los modelos científicos.</div> <div>3. Reconocer como problema derivado de la aplicación de las ondas el ruido y otras vibraciones asociadas al desarrollo tecnológico y a sus soluciones.</div> <div>4. Tomar conciencia de la importancia de los fenómenos ondulatorios en nuestra civilización y la trascendencia social de sus aplicaciones.</div> <div>5. Fomentar el respeto mutuo en clase y la claridad en los informes y en los trabajos de laboratorio.</div> <div>6. Sensibilizar con respecto al orden y la limpieza del material y del lugar de trabajo.</div>

## 4. SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS PROPUESTOS

### 4.1 ACTIVIDADES PROPUESTAS

#### A.1

- a) El periodo es  $2 \times 2 = 4$  s.  
La frecuencia es  $N = 1/T = 1/4 \text{ s}^{-1} = 0,25 \text{ Hz}$ .  
La amplitud es  $A = 10 \text{ cm}/2 = 5 \text{ cm}$ .
- b) La rapidez es máxima en el punto central del segmento barrido en la oscilación ( $x = 0$ ) y mínima (nula) en los extremos.

#### CD 1 El MVAS como proyección del movimiento circular

- a) En el MC el vector  $\vec{v}$  es siempre tangente a la trayectoria y su módulo es constante; la aceleración es siempre la *aceleración normal*, de módulo  $a_n = \omega^2 R = v^2/R$ . En este movimiento se cumple la relación  $v = \omega R$ .  
En el MAS,  $\vec{v}$  y  $\vec{a}$  tienen siempre la misma dirección, en este caso la del diámetro de proyección. En cuanto a los valores numéricos,  $v$  varía entre los valores  $-A\omega$  y  $+A\omega$ , pasando por 0.
- b) Si aumentamos el valor de la velocidad angular del MC,  $\omega$ , también aumenta  $v$  en el MC y como consecuencia  $v_{\text{máx}} = A\omega$ . Como sabemos  $\omega = 2\pi N$ , y por tanto, si  $\omega$  aumenta, aumentará la frecuencia  $N$  y disminuirá  $T$ .

#### A.2

Derivando  $x = A \cos(\omega t + \varepsilon_0)$  obtenemos  $v$ :

$$v = dx/dt = -A\omega \sin(\omega t + \varepsilon_0)$$

A partir de la ecuación trigonométrica

$$\sin^2(\omega t + \varepsilon_0) + \cos^2(\omega t + \varepsilon_0) = 1$$

obtenemos:  $(v/A\omega)^2 + (x/A)^2 = 1$

y aislando  $v$ :

$$v = \omega \sqrt{A^2 - x^2}$$

El valor de  $v$  y de  $v_{\text{máx}}$  no dependen de la fase inicial, es decir, del instante en que empezamos a contar el tiempo. Sin embargo, el valor de  $v = -A\omega \sin(\omega t + \varepsilon_0)$  sí que depende de la fase inicial.

#### A.3

- a) Como  $v_{\text{máx}} = A\omega = A 2\pi N$ , tenemos:

$$N = \frac{v_{\text{máx}}}{2\pi A} = \frac{4 \text{ m/s}}{2\pi \cdot 3 \cdot 10^{-4} \text{ m}} = 212 \text{ Hz}$$

- b) Para contestar tendremos en cuenta las ecuaciones  $v_{\text{máx}} = A\omega$ ;  $a_{\text{máx}} = \omega^2 A$ .

b1) Ambas magnitudes se duplican.

b2) Al duplicar  $T$ ,  $\omega$  se divide por 2; por tanto,  $v_{\text{máx}}$  se divide por 2;  $a_{\text{máx}}$  se divide por 4.

b3) En este caso,  $v_{\text{máx}}$  no cambia;  $a_{\text{máx}}$  se reduce a la mitad.

#### CD2

- 1) La fuerza opuesta al peso de la caja está aplicada en la Tierra; la opuesta a la fuerza de recuperación elástica está aplicada en el muelle (ya que procede de la interacción caja-muelle).
- 2) Para ver cómo varían las gráficas  $x$ - $t$ ,  $v$ - $t$  y  $a$ - $t$  al aumentar  $k$ , arrancamos el MAS para  $k = 3 \text{ N/m}$  y, por ej.  $A = 10 \text{ m}$  y visualizamos 3 periodos; detenemos el movimiento, cambiamos al valor  $k = 5 \text{ N/m}$ , también con  $A = 10 \text{ m}$ , y visualizamos 3 periodos, sin borrar las gráficas anteriores; finalmente, repetimos para  $k = 7 \text{ N/m}$ . Observamos que:

– el periodo disminuye ( $T = \text{cte}/\sqrt{k}$ )

–  $v_{\text{máx}}$  aumenta, lo que está de acuerdo con

$$v_{\text{máx}} = A\omega = A\sqrt{k/m} = \text{cte} \sqrt{k}$$

–  $a_{\text{máx}}$  aumenta, lo que está de acuerdo con la ec.:

$$a_{\text{máx}} = A\omega^2 = Ak/m = \text{cte} k.$$

- 3) La forma gráfica de calcular el periodo es arrancar el movimiento en  $x = +A$  y clicar en cualquiera de las gráficas sobre el eje de los tiempos en la posición  $t = T$ . Se observa que si  $k$  aumenta  $T$  disminuye (por ej, con valores aproximados, si  $k = 2 \text{ N/m}$ ,  $T = 13,9 \text{ s}$ ; si  $k = 4 \text{ N/m}$ ,  $T = 10 \text{ s}$ ; si  $k = 6 \text{ N/m}$ ,  $T = 8,1 \text{ s}$ ..., de acuerdo con la relación  $T = \text{cte}/\sqrt{k}$ .

Para el valor  $k = 12 \text{ N/m}$ , el periodo valdrá

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{10 \text{ kg}}{12 \text{ N/m}}} = 5,74 \text{ s}$$

#### A.4

De la ecuación  $T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$  despejamos  $g$ :

$$g = \frac{4\pi^2 L}{T^2} = \frac{4\pi^2 \cdot 1,000 \text{ m}}{(20,08/10)^2 \text{ s}^2} = 9,79 \text{ m/s}^2$$

#### A.5

- a) Recordando la ecuación obtenida en la actividad 2,

$v = \omega \sqrt{A^2 - x^2}$  la expresión de  $E_c$  queda así:

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 (A^2 - x^2)$$

y recordando que  $\omega^2 = k/m$ , resulta

$$E_c = \frac{1}{2} k (A^2 - x^2)$$

- b) Como acabamos de demostrar,  $E = \frac{1}{2} k A^2$ . Para expresarla en función de la frecuencia, utilizamos la relación  $\omega^2 = k/m$ , con  $\omega = 2\pi N$ :

$$E = \frac{1}{2} \omega^2 m A^2 = \frac{1}{2} (2\pi N)^2 m A^2 = \text{cte} \cdot A^2 N^2$$

- c) La gráfica de  $E_p$  es parabólica, como corresponde a la ecuación  $E_p = \frac{1}{2} k x^2$ .

Como  $E_c = \frac{1}{2} k (A^2 - x^2)$ , su valor máximo corresponde a la posición  $x = 0$  y en  $x = +A$ ,  $x = -A$ , es nula.

Finalmente,  $E = \text{cte}$ . Y por eso su gráfica es una recta horizontal, cuya altura equivale al valor máximo de  $E_p$  o de  $E_c$ .

## A.6

Si  $N$  se reduce a la mitad:

- a)  $T$  se duplica, ya que  $T = 1/N$ .  
 b) Como  $v_{\text{máx}} = 2\pi N A$ , su valor se reduce a la mitad.  
 c) Como  $E = \text{cte} \cdot A^2 N^2$ , su valor se reduce a la cuarta parte.

## CD3 Estudio energético del MAS

2. La ecuación de la *energía potencial* es

$$E_p = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k A^2 \cos(\omega t)^2$$

La ecuación de la *energía cinética* se puede expresar en función del tiempo así:

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m A^2 \omega^2 \sin(\omega t)^2 = \frac{1}{2} k A^2 \sin(\omega t)^2$$

ecuaciones que explican la forma de las gráficas.

Por otra parte,  $E_m = \frac{1}{2} k A^2$ , y por tanto su valor no cambia con el tiempo (la gráfica es una línea recta horizontal).

- 3a) Si queremos analizar la influencia de  $k$  *pero manteniendo  $A$  constante*, podemos proceder así: elegimos  $k = 100 \text{ N/m}$  y la amplitud máxima permitida; arrancamos el movimiento y tras 2 oscilaciones detenemos el movimiento, disminuimos el valor de  $k$ , continuamos con otras 2 oscilaciones, disminuimos de nuevo  $k$ , etc. En la gráfica de  $E_m$  es muy fácil comprobar que la energía mecánica  $E_m$  disminuye, de acuerdo con la relación  $E_m = \frac{1}{2} k A^2$ . Veamos algunos valores para la máxima amplitud permitida:

$k \text{ (N/m)}$	$E_m \text{ (J)}$
100	3320
80	2600
60	2020
40	1300

- 3b) Puedes aprovechar el CD para realizar el ajuste por mínimos cuadrados y comprobar que la relación entre  $E_m$  y  $k$  es de proporcionalidad directa.

## A.7

Además de los muelles y de las cuerdas, es muy práctico recurrir a las ondas producidas en el agua, para lo que es suficiente un pequeño recipiente y un cuentagotas. Las figuras del texto y la actividad nos llevan a comprender el mecanismo de los movimientos ondulatorios, *cuyo origen es un movimiento vibratorio* que se produce en un lugar, llamado foco, y que se propaga con una rapidez por un medio. La *onda* es la propagación en el espacio y durante el tiempo de la perturbación inicial producida en el foco, sin que exista desplazamiento neto de las partículas del medio.

## A.8

Es muy interesante esta actividad para insistir en una característica del MO: hay transmisión de energía sin que exista propagación neta de materia. En efecto, la cuerda se perturba por la sacudida, y a través de ella se propaga una perturbación o *pulso*; cuando llega al extremo, la otra persona percibe una energía transferida de la cuerda a la mano.

## A.9

En esta actividad es necesario insistir en que es la idea de la variación espacio-temporal simultáneamente en todo el medio de una determinada propiedad, lo que es propio y característico de un MO. Sobre la conducción térmica en una barra metálica sabemos que se produce un estado estacionario de los valores de la temperatura en cada punto, es decir que no cambian con el tiempo, lo mismo que ocurre con las ondulaciones de arena que se forman en una playa.

## A.10

Debemos diferenciar un *pulso* de una onda o de un *tren de ondas*. Como ejemplo sencillo sería producir un único golpe en una campana o hacer repicar la campana agitando continuamente la cuerda que mueve el badajo.

La forma más cómoda de producir un tren de ondas de amplitud uniforme es hacer vibrar un objeto que golpee rítmicamente la superficie del agua, como puede verse en una cubeta de ondas.

## A.11

La frecuencia es  $N = 3 \text{ Hz}$  y el periodo su inversa,  $T = 1/N = 1/3 \text{ s}$ .

### A.12

Cambia la velocidad de propagación y con ella la longitud de onda. Por eso, como cada medio determina la rapidez y la clase de onda, tenemos las ondas P (longitudinales) y S (transversales) que se transmiten con distinta rapidez, unas por todos los medios y las otras solamente en los sólidos.

### A.13

Como la relación entre las magnitudes implicadas es  $\lambda = v/N$ , calculamos directamente:

$$\lambda_1 = \frac{v_1}{N} = \frac{36 \text{ m/s}}{50 \text{ s}^{-1}} = 0,72 \text{ m}$$

$$\lambda_2 = \frac{v_2}{N} = \frac{9 \text{ m/s}}{50 \text{ s}^{-1}} = 0,18 \text{ m}$$

### A.14

Los datos son:  $\omega = 100 \text{ s}^{-1}$  y  $k = 50 \text{ m}^{-1}$ .

Determinamos  $v$  a partir de  $k = \omega/v$ :

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{100 \text{ s}^{-1}}{50 \text{ m}^{-1}} = 2 \text{ m/s}$$

De la ecuación  $\omega = 2\pi N$  eliminamos

$$N = \omega/2\pi = 100 \text{ s}^{-1}/2\pi = 15,92 \text{ Hz}$$

Y el periodo,  $T = 1/N = 0,0628 \text{ s}$ .

### A.15

a) Comparando con la ecuación

$$y(x, t) = A \cos(\omega t - kx + \varphi_0) \text{ m}$$

obtenemos:

$$A = 0,05 \text{ m}; \omega = 2\pi N = 50\pi \rightarrow N = 25 \text{ Hz};$$

$$k = 20 = 2\pi/\lambda \rightarrow \lambda = \pi/10 \text{ m} = 0,314 \text{ m};$$

$$\varphi_0 = \pi/3 \text{ rad.}$$

b) Derivando la ecuación de la onda, obtenemos la rapidez de un punto en función de  $x$  y  $t$ :

$$v = -0,05 \cdot 50\pi \cdot \sin(50\pi t - 20x + \pi/3) \text{ m/s}$$

y con las condiciones  $x = 0,5 \text{ m}$ ,  $t = 2,05 \text{ s}$ , resulta:

$$v = -7,854 \sin(50\pi \cdot 2,05 - 20 \cdot 0,5 + \pi/3) = -7,854 \cdot (-0,454) = 3,56 \text{ m/s}$$

### A.16

De la ecuación deducimos que el número de ondas es:  $k = 20 \text{ m}^{-1}$ , y recordando su relación con  $\lambda$ ,  $k = 2\pi/\lambda$ , tenemos:

$$\lambda = \frac{2\pi}{20 \text{ m}^{-1}} = \frac{\pi}{10} \text{ m} = 0,314 \text{ m}$$

a) Están en fase si la distancia mínima es igual a  $\lambda = 0,314 \text{ m}$ .

b) Están en oposición de fase si la distancia mínima es:

$$d = \lambda/2 = 0,157 \text{ m.}$$

c) Utilizamos la educación de proporcionalidad

$$\frac{\lambda}{d} = \frac{360^\circ}{\Delta\varphi} \rightarrow \frac{0,314 \text{ m}}{d \text{ m}} = \frac{360^\circ}{75^\circ}$$

$$d = 0,065 \text{ m.}$$

### A.17

Evidentemente, la energía dependerá de la amplitud del movimiento (golpear con más o menos fuerza el diapasón...); por otra parte, a igualdad de amplitud, la energía transferida al aire por el diapasón o la cuerda deberá aumentar al hacerlo la frecuencia de oscilación. En efecto, como demostramos al estudiar el MAS,  $E = \text{cte} \cdot A^2 N^2$ .

### A.18

Como hemos demostrado,  $I = \text{cte} \cdot A^2 N^2$ .

Sustituyendo en la ecuación de la potencia,  $P = IS$ , y teniendo en cuenta que la amplitud es la misma para los dos focos, obtenemos la ecuación que nos interesa en este caso concreto:

$$P = \text{cte} \cdot A^2 N^2 S = \text{cte} \cdot N^2.$$

Por tanto,

$$\frac{P_1}{N_1^2} = \frac{P_2}{N_2^2} \rightarrow P_2 = P_1 \frac{N_2^2}{N_1^2} = 2 \text{ W} \frac{50^2}{30^2} = 5,56 \text{ W}$$

### A.19

La ecuación de la absorción es  $I = I_0 e^{-\beta x}$ .

Si hacemos en la ecuación  $I = I_0/2$  y  $x = a$ , siendo  $a$  el espesor de semiabsorción, tenemos:

$$I_0/2 = I_0 e^{-\beta a}; 1/2 = e^{-\beta a}; \ln 2 = \beta a; a = \ln 2/\beta$$

Comprobamos que si  $\beta$  aumenta,  $a$  disminuye, como es lógico.

### A.20

En la ecuación de la absorción

$$I = I_0 e^{-\beta x}$$

aislamos  $\beta$ :

$$\beta = \frac{-\ln(I/I_0)}{x} = \frac{-\ln(0,5/6)}{10 \text{ cm}} = 0,248 \text{ cm}^{-1}$$

Hay que remarcar que el coeficiente de absorción lineal tiene dimensiones ( $L^{-1}$ ), lo que hay que tener en cuenta al elegir la unidad en que se exprese el espesor del material absorbente.

#### CD4

Un ejemplo de reflexión total:

$$v_1 = 300 \text{ m/s}, v_2 = 200 \text{ m/s}, \hat{i}_L = 41,82^\circ.$$

#### A.21

Como la intensidad para un frente esférico disminuye con  $1/r^2$ , tenemos:

$$I_1 = \frac{P_1}{4\pi r_1^2} = \frac{30 \text{ mW}}{4\pi \cdot 12^2 \text{ m}^2} = 0,0166 \text{ mW}$$

$$I_2 = \frac{P_2}{4\pi r_2^2} = \frac{30 \text{ mW}}{4\pi \cdot 20^2 \text{ m}^2} = 0,006 \text{ mW}$$

Para determinar el tipo de interferencia entre los dos sonidos hay que calcular el desfase entre ambos, debido a la diferencia de distancias entre los focos y el micrófono; la longitud de onda de los sonidos es:

$$\lambda = \frac{v}{N} = \frac{340 \text{ m/s}}{600 \text{ s}^{-1}} = 0,57 \text{ m}$$

La diferencia de caminos es  $20 - 12 = 8 \text{ m}$ ; en esta longitud caben  $8/0,57 = 14$  longitudes de onda, lo que significa que la interferencia es totalmente constructiva.

Por tanto,

$$I_{\text{total}} = I_1 + I_2 = 0,0166 \text{ mW} + 0,006 \text{ mW} = 0,0226 \text{ mW}$$

#### CD5 Interferencias con ondas

- 4a) Cambiar la longitud de onda. Para ver la influencia de un cambio de la longitud de onda, elegimos  $N = 20 \text{ Hz}$  y "separación de focos =  $48 \text{ m}$ " y la opción "Ver interferencias constructivas y destructivas" y partimos del valor  $\lambda = 20 \text{ m}$ , el mínimo permitido; hacemos clic en "Iniciar el movimiento" y después clic en "Reiniciar el applet", momento en el que se ve muy bien el perfil de todas las hipérbolas. Al repetir la operación para valores crecientes de  $\lambda$  vemos que van desapareciendo hipérbolas, de modo que desde el valor  $\lambda = 34 \text{ m}$ , sólo hay una hipérbola de IC y otra de ID y para  $\lambda = 50 \text{ m}$  sólo se existe ID.
- 4b) Cambiar la distancia entre focos. Eligiendo el mismo modo de visualización que en 4a, y por ejemplo  $N = 20 \text{ Hz}$  y  $\lambda = 20 \text{ m}$ , comprobamos que la IC empieza en  $d = 22 \text{ m}$  y al aumentar este valor disminuye la curvatura de cada hipérbola, al tiempo que aumenta su número.

#### Exp.4

En el montaje utilizado, la lámina de acero es atraída alternativamente por el núcleo de hierro que se ha coloca-

do en el interior de la bobina, que está conectada a la red. Con el vibrador se pueden originar ondas estacionarias según se estiren más o menos la cuerda elástica o el muelle; en la goma se producen ondas estacionarias transversales y en el muelle longitudinales.

En este caso la frecuencia de la vibración es  $50 \text{ Hz}$ , la frecuencia de la tensión eléctrica alterna de la red. Al cambiar la fuerza (tensión) que estira el muelle o la cuerda elástica, cambiamos la rapidez de propagación de la onda, y con ello la longitud de onda ( $\lambda = v/N$ ), detectándose para determinadas tensiones ondas estacionarias que cumplen la condición  $L = n \lambda/2$ .

#### A.22

En la goma de  $60 \text{ cm}$  caben dos ondas completas,  $d = 60 \text{ cm} = 2\lambda$ ; por tanto,  $\lambda = 30 \text{ cm}$ .

De la relación  $\lambda = v/N$  obtenemos

$$v = \lambda N = 0,3 \text{ m} \cdot 50 \text{ s}^{-1} = 0,006 \text{ m/s}$$

#### A.23

- a) Si foco y observador se alejan entre sí, tanto por razonamiento como por el análisis de la ecuación, deducimos que la frecuencia percibida *disminuye*.
- b) Se trata del caso contrario al anterior, luego la frecuencia percibida *aumenta*.

#### Ampliación: Applet sobre el efecto Doppler

En el CD puedes profundizar en este fenómeno manipulando el applet "El efecto Doppler"; lee atentamente la introducción, realiza las simulaciones que consideres oportuno y contesta a las cuestiones que se plantean.

#### A.24

El que la velocidad del sonido dependa del material y, en cada material, de la temperatura, se justifica teniendo en cuenta la teoría corpuscular de la materia; cuanto mayor sea la densidad del medio, más cerca se encuentran las partículas entre sí y la perturbación producida en el foco sonoro se desplazará con mayor rapidez a través del medio material.

#### Exp. 5 Experimentando con la resonancia

- a) Cogiendo el diapasón con la mano, comprobamos que el sonido apenas es audible y la vibración se amortigua rápidamente. En cambio, acoplado a su caja de resonancia, el sonido se percibe con bastante intensidad y tarda mucho más en anularse.
- b) Enfrentando adecuadamente las aberturas de las cajas de resonancia, percibimos cómo el 2º diapasón se pone a vibrar, aunque con amplitud bastante menor que la del



1°. Pero para percibir este fenómeno de *resonancia* es necesario que ambos diapasones sean iguales (de la misma frecuencia, por ej. 440 Hz).

### A.25

Los fenómenos más conocidos son el eco y la reverberación.

Al hacer trompetilla con las manos, conseguimos que éstas reflejen el sonido y lo dirijan hacia el tímpano, es decir aumentamos la superficie captora de energía sonora.

### A.26

a) De la relación  $\lambda = v/N$  obtenemos

$$\lambda_1 = v/N_1 = 340 \text{ ms}^{-1}/40\,000 \text{ s}^{-1} = 8,5 \text{ mm.}$$

$$\lambda_2 = v/N_2 = 340 \text{ ms}^{-1}/80\,000 \text{ s}^{-1} = 4,25 \text{ mm.}$$

b) La difracción es una propiedad general de las ondas. El fenómeno se hace más apreciable si el tamaño del orificio es del orden de magnitud de la longitud de onda sonora; para  $N_1 = 100 \text{ Hz}$ ,

$$\lambda_1 = \frac{v}{N_1} = \frac{340 \text{ m/s}}{100 \text{ s}^{-1}} = 3,4 \text{ m}$$

Y para  $N_2 = 10\,000 \text{ Hz}$ ,

$$\lambda_2 = 3,4 \text{ m}/100 = 3,4 \text{ cm.}$$

### Exp.6 Medida de la rapidez del sonido en el aire

Para realizar el experimento basta seguir las indicaciones del texto. Con los tubos de vidrio normales, podremos percibir dos situaciones de resonancia, que para un diapason de 440 Hz corresponden a las distancias:

$$d_1 = \lambda/4 = v/4N = 340/1760 = 19,3 \text{ cm}$$

$$d_2 = 3\lambda/4 = 3v/4N = 3 \cdot 340/1760 = 58 \text{ cm}$$

Con un diapason diferente, las posiciones de resonancia serían distintas; es más conveniente un diapason de frecuencia mayor de 440 Hz.

### A.27

La tabla de la figura 12.13 nos proporciona valores para los *coeficientes de absorción relativos* (al valor 1 para la ventana abierta).

La absorción será mayor en aquel sistema que proporcione el valor mayor para el producto  $\beta x$  (debiendo usar la misma unidad para  $x_{\text{corcho}}$  que para  $x_{\text{madera}}$  al hacer la comparación).

$$\beta_{\text{corcho}} x_{\text{corcho}} = 0,72 \cdot 1,5 = 1,08$$

$$\beta_{\text{moqueta}} x_{\text{moqueta}} = 0,20 \cdot 10 = 2$$

Vemos que el menor poder absorbente de la moqueta queda compensado por el mayor espesor (6,7 veces) de la misma.

## 4.2 SOLUCIONES DE LOS PROBLEMAS FINALES

### MOVIMIENTO VIBRATORIO

#### PROBLEMA 1

La afirmación es verdadera para la dirección, pero no para el sentido de los vectores  $\vec{v}$  y  $\vec{a}$ .

#### PROBLEMA 2

Los datos que nos proporciona el enunciado son:

$$A = 10^{-3} \text{ m}; N = 440 \text{ Hz}; T = 1/440 \text{ s}; \omega = 880\pi \text{ rad/s.}$$

Para escribir la ecuación, usamos la función coseno (en  $t = 0$ , es  $x = +A$ ):

$$x = A \cos(\omega t) = 10^{-3} \cdot \cos(880\pi t) \text{ m};$$

y derivando obtenemos la velocidad:

$$v = -0,880\pi \cdot \sin(880\pi t) \text{ m/s}$$

#### PROBLEMA 3

Para contestar las preguntas, supondremos que la masa del resorte es despreciable.

a) Si se duplica la masa, como  $\omega = 2MN = \sqrt{\frac{k}{m}}$ ,  $N$  y  $\omega$  disminuyen,  $T$  aumenta. Por otra parte,  $v_{\text{máx}} = (v_{\text{máx}} = A\omega)$  y  $a_{\text{máx}} (a_{\text{máx}} = \omega^2 x)$  disminuyen.

b) Si la frecuencia se reduce a la mitad (y suponiendo amplitud constante)  $T$  se duplica,  $\omega$  ( $\omega = 2\pi N$ ) y  $v_{\text{máx}} (v_{\text{máx}} = A\omega)$  se reducen a la mitad y  $a_{\text{máx}} (a_{\text{máx}} = \omega^2 x)$  se divide por 4.

#### PROBLEMA 4

a) Comparando con la ec. general, obtenemos:

$$A = 0,3 \text{ m}; \omega = 2 \text{ rad/s}; T = 1/\pi \text{ s}; N = \pi \text{ Hz}; \varphi_0 = \pi/6 \text{ rad.}$$

b)  $v = dx/dt = -0,6 \sin(2t + \pi/6)$ ; en  $t = 0$ :

$$v_0 = -0,6 \sin(\pi/6) = -0,3 \text{ m/s.}$$

$$a = dv/dt = -1,2 \cos(2t + \pi/6)$$
; en  $t = 0$ :

$$a_0 = -1,2 \cos(\pi/6) = -1,04 \text{ m/s}^2$$

#### PROBLEMA 5

a) Como  $a = -\omega^2 x = -16x$ ,  $\omega = 4 \text{ rad/s}$ . Luego:  $N = 2/\pi \text{ Hz}$ ,  $v_{\text{máx}} = A\omega = 8 \text{ m} \cdot 4 \text{ rad/s} = 32 \text{ m/s}$ .

b) Si utilizamos la ec.  $x = A \sin(\omega t)$ , en este caso es  $x = 8 \sin(4t)$ .

$$\text{Para } x_1 = 2 \text{ m, } \sin(4t_1) = 2/8 = 0,25$$

$$4t_1 = \arcsin 0,25 = 0,2527 \text{ rad}$$

$$t_1 = 0,063 \text{ s.}$$

$$\text{Para } x_2 = 4 \text{ m, } \sin(4t_1) = 4/8 = 0,5$$

$$4t_2 = \arcsin 0,5 = 0,524 \text{ rad}$$

$$t_2 = 0,131 \text{ s.}$$



Luego el tiempo invertido es:

$$t_2 - t_1 = 0,131 - 0,063 = 0,068 \text{ s.}$$

### PROBLEMA 6

Según los datos,  $A = 7,2 / 2 = 3,6 \text{ cm}$ ,

$$\omega = 3000 \cdot 2\pi / 60 \text{ rad/s} = 100 \pi \text{ rad/s.}$$

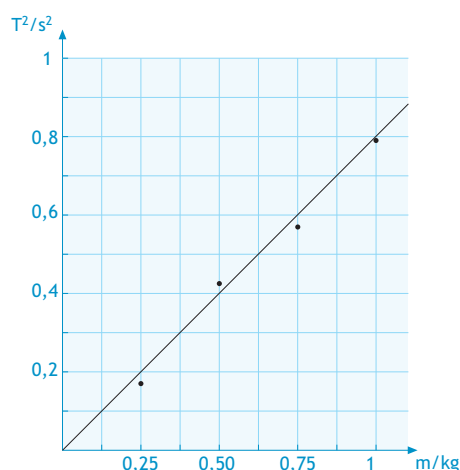
$$v_{\text{máx}} = A\omega = 0,036 \text{ m} \cdot 100 \pi \text{ rad/s} = 3,6 \pi \text{ m/s.}$$

$$a_{\text{máx}} = \omega^2 A = (100 \pi \text{ rad/s})^2 \cdot 0,036 \text{ m} = 360 \pi^2 \text{ m/s}^2.$$

### PROBLEMA 7

Supondremos que la masa del resorte es despreciable.

m(kg)	5T (s)	T(s)	T <sup>2</sup> (s <sup>2</sup> )
0,25	2,1	0,42	0,1764
0,50	3,3	0,66	0,4356
0,75	3,8	0,76	0,5776
1,00	4,5	0,9	0,81



$$T = 2\pi\sqrt{m/k}; \quad T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{k}\right)m$$

y por tanto, la pendiente de la recta de ajuste es  $P = 4\pi^2/k$ ; finalmente:

$$k = 4\pi^2 / P = 4\pi^2 / 0,79 = 50 \text{ N/m.}$$

### PROBLEMA 8

a)  $A = 10 \text{ cm}$ .

b) De la ecuación  $|a| = \omega^2 x$  despejamos  $\omega$ :

$$\omega = \sqrt{\frac{|a|}{A}} = \sqrt{\frac{5}{0,1}} = 7,071 \text{ rad/s}$$

$$T = 2\pi/\omega = 2\pi/7,071 = 0,89 \text{ s.}$$

c) La energía mecánica no depende de la posición del punto oscilante; luego

$$E = E_{c, \text{máx}} = \frac{1}{2} m v_{\text{máx}}^2 = \frac{1}{2} m (A \cdot 2\pi/T)^2 = \frac{1}{2} \cdot 0,01 \text{ kg} \cdot (0,1 \text{ m} \cdot 2\pi/0,89 \text{ s})^2 = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ J.}$$

### PROBLEMA 9

a) De la gráfica deducimos que  $T = 1 \text{ s}$ ; luego  $\omega = 2\pi/T = 2\pi \text{ rad/s}$ .

De  $v_{\text{máx}} = A\omega$  aislamos  $A$ :

$$A = \frac{v_{\text{máx}}}{\omega} = \frac{2 \text{ m/s}}{2\pi \text{ rad/s}} = 0,32 \text{ m.}$$

b) En el instante  $t = 0,5 \text{ s}$ , la energía cinética es máxima:

$$E = E_{c, \text{máx}} = \frac{1}{2} m v_{\text{máx}}^2 = \frac{1}{2} m (A \cdot 2\pi/T)^2 = \frac{1}{2} \cdot 0,01 \text{ kg} \cdot (0,32 \text{ m} \cdot 2\pi/1 \text{ s})^2 = 2 \cdot 10^{-2} \text{ J.}$$

Sí coinciden, porque en  $t = 0,5 \text{ s}$  la velocidad es la máxima y  $x = 0 \text{ m}$  y en  $t = 0,75 \text{ s}$  ocurre al revés,  $v = 0 \text{ m/s}$  y  $x = A$ ; en el primer caso toda la energía es cinética y en el segundo toda es potencial.

### PROBLEMA 10

a) El valor máximo de la aceleración, según la gráfica es  $a_{\text{máx}} = 10 \text{ m/s}^2$ , y el periodo  $T = 0,2 \text{ s}$ . Por tanto:

$$N = 1/T = 1/0,2 = 5 \text{ Hz,}$$

$$\omega = 2\pi N = 10\pi \text{ rad/s.}$$

Y como  $a_{\text{máx}} = 10 \text{ m/s}^2 = A\omega^2$ , aislamos  $A$ :

$$A = \frac{10 \text{ m/s}^2}{(10\pi \text{ rad/s})^2} = 0,01 \text{ m.}$$

b) La ec. del MAS es  $x = A \cos(\omega t)$ , ya que según la gráfica, en  $t = 0 \text{ s}$ ,  $a$  es negativa y de valor absoluto máximo (o sea,  $x = +A$ ).

$$\text{Por tanto, } v = dx/dt = -A\omega \cdot \sin(\omega t)$$

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m A^2 \omega^2 \sin^2(10\pi t) = 4,93 \cdot 10^{-3} \cdot \sin^2(10\pi t) \text{ J.}$$

Al representar la gráfica entre  $t = 0 \text{ s}$  y  $t = T = 0,2 \text{ s}$ , se obtiene, como sabemos una parábola como la representada en la fig.2.11 del texto.

### PROBLEMA 11

a) Los datos son:  $T = 2 \text{ s}$ ,  $A = 0,05 \text{ m}$ ,

$\omega = 2\pi/T = \pi \text{ rad/s}$ , y la ec. del MAS es

$$x = A \sin(\omega t) = 0,05 \cdot \sin(\pi t) \text{ m}$$

La velocidad de la bolita es:

$$v = dx/dt = 0,05\pi \cdot \cos(\pi t) \text{ m/s}$$

y la gráfica la que muestra la figura 2.6 del texto.

b) Para hallar el periodo en la Luna, siendo  $T_T = 2 \text{ s}$ , podemos relacionar ambos periodos dividiendo uno por otro:

$$\frac{T_T}{T_L} = \frac{2\pi \sqrt{L/g_T}}{2\pi \sqrt{L/g_L}}; \quad \frac{T_T}{T_L} = \frac{\sqrt{g_L}}{\sqrt{g_T}}$$

y eliminando  $T_L$ :

$$T_L = T_T \frac{\sqrt{g_T}}{\sqrt{g_L}} = 2\sqrt{6} = 4,9 \text{ s}$$

Se cumple, lógicamente, que  $T_L > T_T$ .

## MOVIMIENTO ONDULATORIO

### PROBLEMA 12

- a) El ejemplo más conocido de onda longitudinal es *el sonido*; en las ondas sonoras se propaga una variación de presión, y esta onda necesita un medio material para propagarse, de modo que su velocidad es mayor en los sólidos que en el aire.

Las ondas transversales más importantes son las *electromagnéticas* (OEM), como la luz visible o los rayos X. Estas ondas se propagan con la máxima velocidad en el vacío.

- b) En las ondas *longitudinales*, el movimiento vibratorio, o más general, la variación de la perturbación o magnitud física que caracteriza a la onda (altura, presión...) se produce *en la misma dirección* que la propagación de la onda.

Por el contrario, en las ondas *transversales*, el movimiento vibratorio, o más general, la variación de la perturbación o magnitud física que caracteriza a la onda (altura, presión...) se produce *en dirección perpendicular* a la propagación de la onda.

### PROBLEMA 13

- a) Utilizamos la ecuación  $\lambda = v T = v/N$ .  
Si se duplica el periodo,  $\lambda$  se duplica.
- b) La velocidad de una onda en una cuerda depende de las características de la cuerda (m/L) y de la tensión; como ésta no varía, tampoco variará  $v$ .

### PROBLEMA 14

La razón es que  $\sin \varphi = \sin (\pi - \varphi)$ .

- a) De la ecuación deducimos que  $k = 2 \text{ m}^{-1}$  y  $\omega = 4 \text{ rad/s}$ ; luego

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{4 \text{ rad/s}}{2 \text{ m}^{-1}} = 2 \text{ m/s}$$

- b) En la ecuación de la velocidad  
 $v = dx/dt = d(0,1 \cdot \sin(2x - 4t))/dt = -0,4 \cdot \cos(2x - 4t)$   
se sustituyen los valores  $x = 1 \text{ m}$  y  $v = 0$ :

$$0 = -0,4 \cdot \cos(2 - 4t); \cos(2 - 4t) = 0$$

Pero como la fase se expresa en radianes:

$$2 - 4t = \pi/2; t = 0,1073 \text{ s}$$

y en general siempre que se cumpla que

$$t = (0,1073 + nT) \text{ s.}$$

### PROBLEMA 15

Comparando con la ecuación

$y(x, t) = A \sin(\omega t - kx + \varphi_0)$  obtenemos:

- a)  $A = 0,005 \text{ m}$ ;  
 $\omega = 2\pi N = 600\pi \rightarrow N = 300 \text{ Hz}$ ;  
 $k = 6 \pi = 2\pi/\lambda \rightarrow \lambda = 1/3 \text{ m}$ ;  
 $v = \omega/k = 600\pi \text{ s}^{-1}/6\pi \text{ m}^{-1} = 100 \text{ m/s}$ .
- b)  $v_{\text{máx}} = A\omega = 0,005 \text{ m} \cdot 600\pi \text{ s}^{-1} = 9,42 \text{ m/s}$ .
- c) Utilizamos la relación de proporcionalidad  
 $\frac{\lambda}{d} = \frac{2\pi}{\Delta\varphi}; \frac{1/3}{d} = \frac{2\pi}{\pi/4}; d = 0,0417 \text{ m}$

### PROBLEMA 16

- a) Utilizamos la relación de proporcionalidad

$$\frac{\lambda}{d} = \frac{2\pi}{\Delta\varphi}; \frac{0,05 \text{ m}}{d} = \frac{2\pi}{\pi/3}; d = 0,0083 \text{ m}$$

- b) La ecuación de la onda, de acuerdo con el enunciado es:

$$y = A \cos(\omega t - kx)$$

y sustituyendo  $\omega = 20\pi \text{ rad/s}$ ,  $k = 40\pi \text{ m}^{-1}$ :

$$y = 8 \cdot \cos(20 \cdot 1,25\pi - 40\pi \cdot 0,22) \text{ mm} = 8 \cdot \cos(16,2\pi) \text{ mm} = 8 \cdot 0,809 \text{ mm} = 6,47 \text{ mm.}$$

### PROBLEMA 17

- a) Las características de la onda son:  
 $\omega = 2\pi N = 50\pi \text{ s}^{-1}$ ;  $k = 2\pi/\lambda = 10\pi \text{ m}$ ;  
 $v = \omega/k = 50\pi \text{ s}^{-1} / 10\pi \text{ m}^{-1} = 5 \text{ m/s}$ .
- b) Como en  $t = 0$  y  $x = 0$  ha de ser  $\psi = 0$ , tomaremos la función seno y el signo positivo en  $(\omega t \pm kx)$  al desplazarse la perturbación en el sentido negativo del eje X:

$$\psi = 3 \cdot 10^{-2} \sin(50\pi t + 10\pi x) \text{ m.}$$

- c)  $v_{\text{máx}} = A\omega = 0,03 \text{ m} \cdot 50\pi \text{ s}^{-1} = 4,71 \text{ m/s}$ ;  
 $a_{\text{máx}} = A\omega^2 = 0,03 \text{ m} \cdot (50\pi \text{ s}^{-1})^2 = 740,2 \text{ m/s}^2$ .

### PROBLEMA 18

La ecuación general es:

$$y(x, t) = A \sin(\omega t - kx)$$

y comparando con la dada, obtenemos:

- a)  $A = 0,25 \text{ m}$ ;  
 $\omega = 2\pi N = 2 \text{ rad/s} \rightarrow N = 1/\pi = 0,32 \text{ Hz}$ ;  
 $k = 5 = 2\pi/\lambda \rightarrow \lambda = 2\pi/5 = 1,26 \text{ m}$ .

- b) La velocidad de propagación de la onda es  $v_{\text{onda}} = \lambda N = 2/5 = 0,4 \text{ m/s}$ . Al cabo de 4 s de iniciarse la perturbación, el frente inicial de onda ha avanzado  $d = v t = 0,4 \text{ m/s} \cdot 4 \text{ s} = 1,6 \text{ m}$  y por tanto no ha llegado al punto situado en  $x = 2 \text{ m}$ . La perturbación es por tanto nula.
- c) La diferencia de fase en un punto entre dos instantes distintos, es:
- $$\varphi = \omega (t_2 - t_1) = 2 \cdot (10 - 0) = 20 \text{ rad}.$$

#### PROBLEMA 19

- a) De la gráfica deducimos que la amplitud es  $A = 2 \text{ m}$  y que  $\lambda = 8 \text{ m}$ ; el periodo será:
- $$T = \lambda/v = 8/4 = 2 \text{ s}.$$
- Por tanto los valores de  $\omega$  y  $k$  son:
- $$\omega = 2\pi/T = 2\pi/2 = \pi \text{ rad/s};$$
- $$k = 2\pi/\lambda = 2\pi/8 = \pi/4 \text{ m}^{-1}.$$
- Finalmente, la ecuación de la onda es:
- $$y = A \sin(\omega t - kx); y = 2 \sin(\pi t - \pi x/4) \text{ m}.$$
- b)  $v_{\text{vib}} = dx/dt = 2\pi \cos(\pi t - \pi x/4) \text{ m/s}$ .  
Para  $x = 4 \text{ m}$ , la velocidad de vibración es
- $$v_{\text{vib}} = 2\pi \cos(\pi t - \pi) \text{ m/s}$$
- y su valor máximo:  $v_{\text{máx}} = 2\pi \text{ m/s}$ .

### ENERGÍA DE LAS ONDAS

#### PROBLEMA 20

Como para un frente esférico la intensidad decrece con  $1/r^2$ , la intensidad en A es  $3^2 = 9$  veces la intensidad en B.

#### PROBLEMA 21

Como se trata de un frente de ondas esféricas ( $S = 4\pi r^2$ ) tenemos:

#### PROBLEMA 22

Porque el segundo diapason resuena con menor intensidad a medida que interponemos en la dirección diapasón-oido materiales más o menos absorbentes o bien diferentes grosores del mismo material.

#### PROBLEMA 23

- a)  $I_{50} = \frac{P}{4\pi r^2} = \frac{10 \text{ J/5 s}}{4\pi \cdot (0,5 \text{ m})^2} = 0,637 \text{ W/m}^2$

Al duplicar la distancia, la intensidad se divide por 4, o sea:  $I_{100} = 0,159 \text{ W/m}^2$ .

- b) La intensidad decrece porque la superficie del frente de onda aumenta con  $r^2$ .
- c) Recordando que la potencia es 2 W, despejamos  $r$  de la ecuación general:

- d) Como se muestra en el texto,  $I = \text{cte} \cdot A^2$ . Por tanto, se cumple que

Si sustituimos valores y extraemos la raíz cuadrada tenemos:

#### PROBLEMA 24

Datos:  $x = 10 \text{ m}$ ,  $I = 0,13 I_0$ .

Tomando logaritmos neperianos en la ecuación  $I/I_0 = e^{-\beta x}$  y despejando el coeficiente de absorción obtenemos:

#### PROBLEMA 25

Teniendo en cuenta los datos, la ecuación más cómoda es  $\ln(I/I_0) = -\beta x$ .

Operando, obtenemos con facilidad  $\beta$ :

Si el espesor aumenta a 3 cm, la intensidad final será:

Es decir, se ha reducido el 87,5%.

#### PROBLEMA 26

Teniendo en cuenta los datos (el coeficiente es  $\beta = 0,4 \text{ cm}^{-1}$ ,  $I = I_0/4$ ), la ecuación más cómoda es  $\ln(I/I_0) = -\beta x$ .

Operando, obtenemos con facilidad  $x$ :

## PROPIEDADES DE LAS ONDAS

### PROBLEMA 27

Para ver si es posible la refracción, calculamos primero el ángulo límite para el sonido al incidir desde el aire al agua:

$$\sin \hat{i}_L = v_1/v_2 = 340/1500 ; \hat{i}_L = 13,1^\circ$$

Luego se produce reflexión total porque el ángulo de incidencia ( $15^\circ$ ) es mayor que el ángulo límite aire-agua para el sonido ( $13,1^\circ$ ). Por geometría, deducimos que la desviación del haz es

$$\delta = 75^\circ + 75^\circ = 150^\circ$$

### PROBLEMA 28

Como  $\lambda_1 = v_1/N$ , deducimos el valor de N:.

$$N = v_1/\lambda_1 = 20 \text{ ms}^{-1}/0,1 \text{ m} = 200 \text{ Hz.}$$

- a)  $v_2 = \lambda_2 N = 0,5 \text{ m} \cdot 200 \text{ s}^{-1} = 100 \text{ m/s.}$
- b) Como se propaga en un líquido, la onda es longitudinal.
- c) En efecto, como  $v_2 > v_1$ , se produce la reflexión total para un ángulo de reflexión superior al ángulo límite:

$$\hat{i}_L = \sin^{-1}(v_1/v_2) = \sin^{-1}(20/100) = 11,5^\circ.$$

### PROBLEMA 29

- b) Podemos aplicar la ley de la reflexión

$$\frac{\sin \hat{\epsilon}_1}{v_1} = \frac{\sin \hat{\epsilon}_2}{v_2}$$

y aislar  $\sin \hat{\epsilon}_2$ :

$$\sin \hat{\epsilon}_2 = \frac{v_2 \sin \hat{\epsilon}_1}{v_1} = \frac{17 \text{ m/s} \cdot \sin 30^\circ}{10 \text{ m/s}} = 0,85$$

Luego  $\hat{\epsilon}_2 = 58,21^\circ$ . En efecto, debe ser  $\hat{\epsilon}_2 > \hat{\epsilon}_1$ .

La longitud de onda en el medio 1, es:

$$\lambda_1 = v_1 T = v_1/N = 10 \text{ ms}^{-1}/10 \text{ s}^{-1} = 1 \text{ m.}$$

### PROBLEMA 30

Debido a la relación entre la longitud de onda (varios cientos de metros) y el tamaño del obstáculo, las ondas moduladas en amplitud (AM) se difractan al interaccionar con grandes edificios o montañas. Por el contrario, las ondas de las emisoras de FM (longitud de onda del orden de 1 m) apenas se difractan al interaccionar con los citados obstáculos, por lo que no los pueden superar y contornear; por ello, para ser captadas deben llegar directamente al receptor de radio, bien desde la antena emisora o a través de un repetidor de TV.

### PROBLEMA 31

- a) Según los datos,  $\lambda/2 = 60 \text{ cm}$ , luego  
 $\lambda = 2 \cdot 60 \text{ cm} = 120 \text{ cm} = 1,2 \text{ m};$   
 $v = \lambda/T = 1,20 \text{ m}/0,2 \text{ s} = 6 \text{ m/s.}$
- b) Como el intervalo de tiempos considerado es múltiplo entero de T ( $\Delta t = 2 \text{ s} = 10 T \text{ s}$ ), la diferencia de fase será  $\Delta\phi = 10 \cdot 2\pi \text{ rad}$ , es decir, las fases serán equivalentes.

### PROBLEMA 32

Comparando con la ecuación general

$$y(x, t) = A \cos(\omega t - kx)$$

obtenemos:

- a)  $\omega = 2\pi N = 40\pi \rightarrow N = 20 \text{ Hz};$   
 $k = 2\pi/\lambda = 4\pi \rightarrow \lambda = 0,5 \text{ m.}$
- b)  $v = \omega/k = 40\pi \text{ s}^{-1}/4\pi \text{ m}^{-1} = 10 \text{ m/s.}$
- c) Suponiendo que el punto x equidista de los dos focos, la perturbación resultante será la suma de las dos individuales, es decir:  
 $y(x, t)_{\text{total}} = 2 \cdot 0,5 \cos(40\pi t - 4\pi x) \text{ m} = \cos(40\pi t - 4\pi x) \text{ m}$
- d) El desfase entre ambas perturbaciones se calcula a partir de la diferencia de distancias de ambos focos al punto donde se produce la interferencia:

$$\Delta\delta = 2\pi \frac{\Delta d}{\lambda} = 2\pi \frac{(0,5 - 0,25) \text{ m}}{0,5 \text{ m}} = \pi \text{ rad.}$$

Luego las perturbaciones llegan en oposición de fase y por tanto  $y(x, t)_{\text{total}} = 0$ .

## ONDAS ESTACIONARIAS

### PROBLEMA 33

En ambos experimentos la frecuencia es la misma (no ha cambiado la frecuencia de vibración del émbolo) y el número de nodos también; pero sí cambia la rapidez de propagación y con ello la longitud de onda.

Como  $N = v/\lambda = \text{cte}$ , tenemos:

$$\frac{n\lambda_1}{v_1} = \frac{n\lambda_2}{v_2}; \frac{25 \text{ cm}}{340 \text{ m/s}} = \frac{35 \text{ cm}}{v_2}$$

$$v_2 = 476 \text{ m/s.}$$

### PROBLEMA 34

Comparando con la ecuación general

$$y(x, t) = A \cos(kx - \omega t)$$

obtenemos:

- a)  $\omega = 2\pi N = 100 \rightarrow N = 50/\pi \text{ Hz}$ ;  
 $k = 2\pi/\lambda = 0,2 \rightarrow \lambda = 10\pi \text{ m}$ .  
 $v = \omega/k = 100 \text{ s}^{-1} / 0,2 \text{ m}^{-1} = 500 \text{ m/s}$ .
- b) Cuando  $y_1 = 0,3 \cos(0,2x - 100t) \text{ m}$  interfiere con la que se propaga en sentido contrario,  $y_2 = 0,3 \cos(0,2x + 100t) \text{ m}$ , se produce una onda estacionaria cuya ecuación es:  
 $y_{\text{total}} = 0,3 \cos(0,2x - 100t) + 0,3 \cos(0,2x + 100t) =$   
 $= 0,6 \cos(0,2x) \cos(100t) \text{ m}$ .

### PROBLEMA 35

La longitud del tubo equivale a  $\lambda/4$ , la distancia entre nodo y vientre consecutivos; por tanto:  $\lambda = 4 \cdot 0,3 \text{ m} = 1,2 \text{ m}$ .

Finalmente,

$$v = \lambda N = 1,2 \text{ m} \cdot 280 \text{ Hz} = 336 \text{ m/s}.$$

### PROBLEMA 36

- a) La longitud de la cuerda equivale a  $\lambda/2$  cuando se emite el sonido fundamental; por tanto:  $\lambda = 2 \cdot 0,66 \text{ m} = 1,32 \text{ m}$ .
- b)  $v = \lambda N = 1,32 \text{ m} \cdot 440 \text{ Hz} = 580,8 \text{ m/s}$ .

### PROBLEMA 37

Desplazamiento máximo:

Cada punto de la cuerda realiza un MAS cuya amplitud viene dada por la ecuación  $y(x,t) = 0,02 \cdot \sin(4\pi x)$ .

$$\text{Si } x = 1,1 \text{ m}, y_{\text{máx}} = 0,02 \cdot \sin(4\pi \cdot 1,1) \text{ m} = 0,019 \text{ m}.$$

$$\text{Si } x = 0,25 \text{ m}, y_{\text{máx}} = 0,02 \cdot \sin(4\pi \cdot 0,25) \text{ m} = 0 \text{ m}.$$

$$\text{Si } x = 0,5 \text{ m}, y_{\text{máx}} = 0,02 \cdot \sin(4\pi \cdot 0,5) \text{ m} = 0 \text{ m}.$$

$$\text{Si } x = 0,125 \text{ m}, y_{\text{máx}} = 0,02 \cdot \sin(4\pi \cdot 0,125) \text{ m} = 0,02 \text{ m}.$$

Los resultados son coherentes con el valor de la longitud de onda:

$$\lambda = 2\pi/k = 2\pi/4\pi = 0,5 \text{ m}$$

y por ello la amplitud de oscilación es cero para los puntos  $x = \lambda/2$  y  $x = \lambda$ .

Para  $x = 1,1 \text{ m}$ ,

$$v_{\text{máx}} = y_{\text{máx}} \omega = 0,019 \text{ m} \cdot 60\pi = 3,58 \text{ m/s}.$$

Para  $x = 0,25 \text{ m}$ ,

$$v_{\text{máx}} = y_{\text{máx}} \omega = 0 \text{ m} \cdot 60\pi = 0.$$

Para  $x = 0,5 \text{ m}$ ,

$$v_{\text{máx}} = y_{\text{máx}} \omega = 0 \text{ m} \cdot 60\pi = 0.$$

Para  $x = 0,125 \text{ m}$ ,

$$v_{\text{máx}} = y_{\text{máx}} \omega = 0,02 \text{ m} \cdot 60\pi = 3,77 \text{ m/s}.$$

## SONIDO

### PROBLEMA 38

Es muy importante diferenciar la velocidad de propagación de la onda de la velocidad de oscilación (MAS) de cada uno de los puntos que son afectados por la perturbación:

$$v_{\text{onda}} = \lambda N = 0,7 \text{ m} \cdot 486 \text{ s}^{-1} = 340,2 \text{ m/s};$$

$$v_{\text{máx}} = \omega A = 2\pi N A = 2\pi \cdot 486 \text{ s}^{-1} \cdot 2,5 \cdot 10^{-4} \text{ m} = 0,763 \text{ m/s}.$$

### PROBLEMA 39

- a) Comparando con la ecuación general

$$\Delta P = A \cos(\omega t + kx)$$

obtenemos:

$$\omega = 2\pi N = 1900 \rightarrow N = 950/\pi = 302,4 \text{ Hz};$$

$$k = 2\pi/\lambda = 5,72 \rightarrow \lambda = 0,35\pi \text{ m} = 1,1 \text{ m};$$

$$v = \omega/k = 1900 \text{ s}^{-1} / 5,72 \text{ m}^{-1} = 332,2 \text{ m/s}.$$

### PROBLEMA 40

Como conocemos  $v$  y  $N$ :

$$\lambda = v/N = 340/2000 = 0,17 \text{ m}.$$

La diferencia de fase con que llegan las dos fuentes es:

$$\Delta\phi = 2\pi \frac{\Delta d}{\lambda} = 2\pi \frac{(25 - 8) \text{ m}}{0,17 \text{ m}} = 200 \pi \text{ rad}$$

Como las perturbaciones llegan en fase (no hay desfase "efectivo") se produce una interferencia constructiva.

### PROBLEMA 41

A partir de la ecuación  $LI = 10 \log(I/I_0)$ , deducimos la intensidad producida por una persona, siendo  $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$ :

$$49 = 10 \log(I/I_0); I/I_0 = 79433;$$

$$I = 79433 \cdot 10^{-12} \text{ W/m}^2 \simeq 8 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2.$$

Si hablan a la vez 3 personas, la intensidad total es:  $I_{\text{total}} = 3 I = 24 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2$ ; el nivel de intensidad sonora correspondiente es:

$$LI_{\text{total}} = 10 \log(I/I_0) = 10 \log(24 \cdot 10^{-8} / 10^{-12}) = 53,8 \text{ dB}.$$

### PROBLEMA 42

La longitud de onda del sonido fundamental es:

$$\lambda = v/N = 340 \text{ ms}^{-1} / 256 \text{ s}^{-1} = 1,328 \text{ m}.$$

Si el tubo está abierto por ambos lados, la longitud del tubo debe ser  $\lambda/2 = 0,664 \text{ m}$ .

Pero si está cerrado por un lado, ha de ser

$$L_{\text{cerrado}} = \lambda/4 = 0,332 \text{ m}.$$

### PROBLEMA 43

a) Cierto; b) falso, aunque las ondas electromagnéticas sí son transversales; c) cierto.

### EFECTO DOPPLER

### PROBLEMA 44

Sólo es cierta la afirmación c).

### PROBLEMA 45

a) Cuando el foco emisor (el delfín) se acerca al observador (el detector del barco, en reposo), la ecuación que debemos usar es:

$$N' = N_0 \frac{v}{v - v_F} = 10000 \text{ Hz} \cdot \frac{1500}{1500 - 10} = 10067 \text{ Hz}$$

b) Cuando el foco emisor (el delfín) se aleja del barco (observador en reposo), en la ecuación anterior debemos cambiar el signo de  $v_F$ :

$$N' = N_0 \frac{v}{v + v_F} = 10000 \text{ Hz} \cdot \frac{1500}{1500 + 10} = 9937 \text{ Hz}$$

## 4.3 AUTOEVALUACIÓN

**EJERCICIO 1.** Permite diferenciarlas el fenómeno de la polarización; las longitudinales no se polarizan.

### EJERCICIO 2

a) Recordando la fórmula del periodo de oscilación de masa sujeta a un muelle

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

elevamos al cuadrado y eliminamos  $k$ :

$$k = \frac{4\pi^2 m}{T^2} = \frac{4\pi^2 \cdot 0,085 \text{ kg}}{(0,4 \text{ s})^2} = 21 \text{ N/m}$$

$$b) E = \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} \cdot 21 \text{ N/m} \cdot (0,15 \text{ m})^2 = 0,236 \text{ J.}$$

Si  $x = 0,075 \text{ m}$ , la energía potencial se calcula directamente:

$$E_p = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} \cdot 21 \text{ N/m} \cdot (0,075 \text{ m})^2 = 0,06 \text{ J}$$

y por diferencia la energía cinética:

$$E_c = E - E_p = 0,236 \text{ J} - 0,06 \text{ J} = 0,176 \text{ J.}$$

### EJERCICIO 3

$$a) T = 1/N = 1/20 \text{ s}^{-1} = 0,05 \text{ s}; \omega = 40\pi \text{ rad/s}$$

$$\lambda = v/N = 10 \text{ ms}^{-1}/20 \text{ s}^{-1} = 0,5 \text{ m}$$

$$k = \omega/v = 40\pi \text{ s}^{-1}/10 \text{ ms}^{-1} = 4\pi \text{ m}^{-1}.$$

b) Si suponemos que en  $t = 0 \text{ s}$  es  $x = A$ , tenemos que la ecuación del MO es

$$y = A \cos(\omega t \pm kx) = 1,5 \cdot 10^{-2} \cos(40\pi t \pm 4\pi x) \text{ m.}$$

### EJERCICIO 4

a) De la ecuación se deduce que:  $k = 1 \text{ m}^{-1}$  y  $\omega = 8 \text{ rad/s}$ ; por tanto:  $T = \pi/4 \text{ s}$ ,  $\lambda = 2\pi \text{ m}$ ,

$$v = \lambda/T = (2\pi \text{ m})/(\pi/4 \text{ s}) = 8 \text{ m/s.}$$

$$b) \Delta\varphi = 2\pi \frac{\Delta d}{\lambda} = 2\pi \frac{0,1 \text{ m}}{2\pi \text{ m}} = 0,1 \text{ rad}$$

### EJERCICIO 5

La potencia del oscilador se puede expresar en función de  $A$  y  $N$ :

$$P = \text{cte} \cdot N^2 A^2$$

Deducimos que si la frecuencia aumenta debe disminuir la amplitud, y viceversa.

### EJERCICIO 6

Utilizamos la ecuación principal:

$$I/I_0 = e^{-\beta x} = e^{-0,2 \cdot 2,5} = 0,607$$

es decir,  $I$  es el 60,7% de  $I_0$ , lo que equivale a decir que la intensidad ha disminuido el 39,3%.

## 5. CRITERIOS DE EVALUACIÓN

Al terminar el desarrollo de este tema los alumnos y alumnas serán capaces de:

- Utiliza correctamente las unidades, así como los procedimientos apropiados para la resolución de problemas.
  - Conoce la ecuación matemática de una onda unidimensional.
  - Deduce a partir de la ecuación de una onda las magnitudes que intervienen: amplitud, longitud de onda, periodo, etc. La aplica a la resolución de casos prácticos.
  - Asocia también esas magnitudes a la percepción sensorial.
  - Reconoce que el movimiento vibratorio no es ni longitudinal ni transversal, pero sí lo es el movimiento ondulatorio.
- Comprende que la frecuencia de vibración y la amplitud es propia del movimiento vibratorio; la rapidez y el tipo de onda es característica del medio de propagación, y la longitud de onda es función de los dos.
  - Asume que el movimiento ondulatorio es un mecanismo de transferencia de energía sin que lo haga la materia que la transmite.
  - Conoce los fenómenos básicos de las ondas: reflexión, refracción, difracción, interferencias...
  - Explica a nivel general el funcionamiento del habla y del oído.



## 6. EJERCICIOS PROPUESTOS PARA LA EVALUACIÓN FINAL DEL TEMA

El profesor o profesora puede buscar más ejercicios de referencia para elaborar sus pruebas de evaluación en las siguientes páginas WEB:

COMUNIDAD	DIRECCIÓN DE INTERNET DE BÚSQUEDA
Aragón	<a href="http://wzar.unizar.es/servicios/acceso/logse/indice.htm">http://wzar.unizar.es/servicios/acceso/logse/indice.htm</a>
Andalucía	<a href="http://www.ujaen.es/">http://www.ujaen.es/</a> En la ventana <b>PERFILES</b> , escoge <b>Nuevo Alumno</b> , y seguidamente en la etiqueta <b>SELECTIVIDAD</b> , pulsa <i>Exámenes anteriores</i> .
Castilla-La Mancha y León	<a href="http://www.uclm.es">http://www.uclm.es</a> Elige en la ventana <b>Estudiantes</b> la opción <b>Estudiante nuevo</b> ; seguidamente pulsa <b>PAU</b> . Y finalmente escoger <b>Modelos Propuestos en las PAU</b> . <a href="http://www.usal.es">http://www.usal.es</a> Escoge en la ventana <b>Futuros estudiantes</b> , la opción <b>Acceso</b> , <b>preinscripción</b> y <b>matrícula</b> . En el apartado <b>"Acceso"</b> pulsa <b>Pruebas de acceso: Selectividad</b>
Catalunya	<a href="http://www.gencat.cat/">http://www.gencat.cat/</a> En la ventana <b>TEMES</b> escoge <b>Universitats</b> para en la opción <b>Accés a la universitat</b> , pulsar <b>Proves d'Accés a la Universitat (PAU)</b> y finalmente <b>Exàmens i informació de les matèries</b>
C. Valenciana	<a href="http://www.ua.es">http://www.ua.es</a> En la ventana <b>Estudios y acceso</b> , escoge la opción <b>Acceso</b> y activa: <b>Selectividad alumnos de bachillerato LOGSE</b> y finalmente pulsa exámenes del apartado <b>Currículo de las asignaturas y Exámenes de años anteriores</b> .
Islas Baleares	<a href="http://www.uib.es/depart/dfs/apl/aac/paufisica/">http://www.uib.es/depart/dfs/apl/aac/paufisica/</a>
Madrid	<a href="http://www.uc3m.es/">http://www.uc3m.es/</a> En la ventana <b>Futuros estudiantes</b> elegir la opción <b>trámites de admisión</b> , y a continuación el rótulo <b>Pruebas de Acceso</b> y posteriormente en <b>Selectividad</b> pulsar la opción <b>Modelos de examen y criterios de corrección</b> .

### MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

- 1 Una butaca está montada sobre un resorte. Cuando se sienta una persona de 75 kg, oscila con una frecuencia de 1 Hz. Si sobre ella se sienta ahora otra persona de 50 kg, ¿cuál será la nueva frecuencia de vibración?

2 La fuerza máxima que actúa sobre una partícula que realiza un movimiento armónico simple es  $2 \cdot 10^{-3}$  N y la energía total es de  $5 \cdot 10^{-4}$  J.

a) Escribe la ecuación del movimiento de esa partícula si el período es de 4 s y la fase inicial es de  $30^\circ$ .
- b) ¿Cuánto vale la velocidad al cabo de 1 s de comenzar el movimiento?

3 Un péndulo simple oscila con una elongación de  $5^\circ$  dando 10 oscilaciones cada 15 segundos. Tomando como instante inicial la posición de equilibrio:

a) Escribe su elongación en función del tiempo.

b) Determina su período de oscilación en la Luna, donde la gravedad es aproximadamente un sexto de la terrestre.

## ONDAS ARMÓNICAS

- 4 Al producir ondas circulares en el agua dejando gotear en una cubeta de onda, observamos que la distancia entre dos crestas consecutivas es de 4 cm y que por un punto pasan 30 crestas cada minuto; con estos datos determina la rapidez de propagación de este movimiento ondulatorio.
- 5 El extremo de una cuerda, situada sobre el eje OX, oscila con un movimiento armónico simple con una amplitud de 5 cm y una frecuencia de 34 Hz. Esta oscilación se propaga, en el sentido positivo del eje OX, con una velocidad de 51 m/s. Si en el instante inicial la elongación del extremo de la cuerda es nula, escribe la ecuación que representa la onda generada en la cuerda. ¿Cuál es la elongación del extremo de la cuerda en el instante  $t = 0,1$  s?
- 6 La ecuación de una onda plana es  $y = 1,6 \cos 2\pi (60 t - 0,55 x)$  m. Determina la longitud de onda, el periodo, la frecuencia y la rapidez de propagación. Indica qué magnitudes son propias del movimiento vibratorio y cuáles del movimiento ondulatorio.
- 7 Dados los movimientos ondulatorios definidos por las ecuaciones:  
 $y_1 = 0,09 \cos 2\pi(50 t - 4 x)$  e  $y_2 = 0,05 \sin (\pi t - 2\pi x)$  m, deduce las magnitudes características de cada uno de ellos y escribe la expresión del MAS que los origina.
- 8 Por una cuerda tensa se propaga una onda transversal con amplitud 5 cm, frecuencia 50 Hz y velocidad de propagación 20 m/s. Calcula:  
a) La ecuación de onda  $y(x,t)$ .  
b) Los valores del tiempo para los que  $y(x,t)$  es máxima en la posición  $x = 1$  m.
- 9 Sea una onda armónica dada por la ecuación  $Y = 5 \sin \pi(4x - 20t)$  expresada en el SI. a) Determina la amplitud, la frecuencia, longitud de onda, el número de ondas, la fase inicial y la velocidad de propagación; b) si exigimos que en el instante inicial, el movimiento tenga una elongación de 2 m, ¿cuál será la expresión de la nueva onda?
- 10 La velocidad de propagación de una onda es de 330 m/s y su frecuencia 1 000 Hz. Calcula: a) la diferencia de fase para dos posiciones de una misma partícula que se producen en intervalos de tiempo de 0,0005 s; b) la diferencia de fase entre dos partículas, en un determinado instante, que distan entre sí 2,75 m en el mismo medio de propagación.

- 11 Dos MO de 420 Hz y rapidez de propagación 34 m/s que provienen de dos focos que oscilan en fase, concurren en un mismo punto del medio de propagación tras recorrer 15,35 y 18,40 m respectivamente desde cada foco. Determina el desfase entre ellos en ese punto.

## FENÓMENOS ONDULATORIOS

- 12 El Sol emite radiación visible con una potencia aproximada de  $2,7 \cdot 10^{20}$  MW. ¿Cómo variará la intensidad recibida en cada uno de los planetas del Sistema Solar? Si la distancia de la Tierra al Sol es  $1,5 \cdot 10^8$  km, ¿qué intensidad luminosa se detecta en la superficie terrestre? ¿Qué energía capturarán toda la superficie terrestre?
- 13 Dibuja de forma cualitativa la curva que representa la amplitud de una onda con la distancia de avance para: a) una onda lineal; b) una onda plana circular y c) una onda esférica.
- 14 A 40 m de la base de un aerogenerador de 45 m de altura el nivel de sonoridad es de 60 dB. ¿Qué nivel de sonoridad registrará aproximadamente un micrófono situado a 300 m de la base?
- 15 Indica si hay alguna relación entre hablar gritando y la rapidez de propagación de estas ondas por el aire.
- 16 Un material tiene un coeficiente de absorción de  $2,8 \text{ m}^{-1}$ . ¿Qué espesor debe tener para al atravesarlo una onda plana armónica su intensidad se reduzca desde  $0,9 \text{ W/m}^2$  hasta  $0,2 \text{ W/m}^2$ ?
- 17 En un experimento preparado para obtener el coeficiente de absorción de un material de 15 cm de espesor se mide la intensidad de una onda de sonido antes y después de atravesarlo y se obtienen los siguientes valores: 5,0 y  $0,8 \text{ W/m}^2$ . Deduce este valor.
- 18 La distancia entre un nodo y el tercer vientre consecutivo de una onda estacionaria transversal producida con una cuerda es de 80 cm. Deduce el valor de la longitud de onda de este MO. Si la onda se ha producido con una frecuencia de agitación de 15 Hz, calcula la velocidad de propagación.
- 19 En un muelle se propagan ondas longitudinales con una rapidez de 50 m/s; si en este muelle de 7,8 m de longitud se ha producido una onda estacionaria con 5 nodos (sin contar los de los extremos), determina: a) la longitud de onda y b) la frecuencia.

## 7. RECURSOS DIDÁCTICOS Y BIBLIOGRAFÍA DE CONSULTA

### LIBROS

CORTEL ORTUÑO, A. 1997. *Las ondas, la luz y el sonido*. ICE-Horsori: Barcelona.

FERNÁNDEZ, E. y GARCÍA, J. 1989. *Energía y ondas*. Zaragoza.

LÓPEZ BARRIO, I. y CARLES, J.L. 1997. *La calidad sonora de Valencia. Espacios sonoros representativos*. Bancaixa: València.

MÉRIDA, M. 1997. *El ruido*. Medio ambiente y escuela. Zaragoza.

### ARTÍCULOS

AA VV. 2002. Monografía. *Alambique*, 33.

CONCARI, S.B. et al. 1997. Introducción al movimiento oscilatorio a través del redescubrimiento. *Revista Española de Física* 11 (1), 32-37.

MOCH, A. 1988. Los efectos psicológicos del ruido. *Mundo Científico*, nº 86.

PERALES, F.J. 1997. Escuchando el sonido: concepciones sobre Acústica en alumnos de distintos niveles educativos. *Enseñanza de las Ciencias*, vol. 15, n. 2, pp.233-247.

PERALES, F.J. 2003. El estudio del sonido en la educación secundaria. *Alambique*, 35, pp. 9-16.

SALTIEL, E. 1991. Un ejemplo de aportación de la didáctica de la Física a la enseñanza: los ejercicios cualitativos y los razonamientos funcionales. *Enseñanza de las Ciencias* 9 (3), 257-262.

SENDRA, F.; ESPINOSA, V. 2002. *Un experimento sobre la influencia del medio en las propiedades de las ondas*. pp. 135. 2º Congreso Internacional: Docencia Universitaria e Innovación. Universidad de Tarragona.

### VÍDEOS

- 1 **Ones**. Colección de programas sobre el movimiento ondulatorio de los Serveis de cultura popular de la Generalitat de Catalunya, autor Robert Polak.

Tratan sobre los fenómenos ondulatorios en líquidos, muelles y cuerdas, ondas elementales, reflexión, refracción, reflexión total, ondas estacionarias difracción, interferencias, superposición de ondas y ondas longitudinales y transversales.

- 2 De la colección **El universo mecánico** podemos seleccionar los títulos:

- Movimiento vibratorio
- Ondas
- Resonancia.

Cada uno de los programas dura unos 30 min.

# ÓPTICA

# 2

## 1. PRESENTACIÓN GENERAL DEL TEMA

El nombre de *Óptica* se debe a que era la parte de la ciencia que estudiaba la *luz visible* y sus aplicaciones más evidentes, sin tener en cuenta ningún modelo teórico que explicara estos hechos; con el tiempo la *óptica* fue ampliando su campo de acción hacia otras radiaciones que aparentemente nada tenían en común con la luz, pero que presentaban unas propiedades semejantes.

Como ya sabemos, lo que llamamos *luz visible* forma parte de una fracción muy pequeña de la energía emitida por un cuerpo luminoso o de la reflejada o transmitida por un cuerpo iluminado; comprende desde la radiación llamada ultravioleta hasta la denominada infrarroja.

El desarrollo del tema lo estructuramos en los siguientes apartados que establecen el eje conductor:

- La controversia sobre la naturaleza de la luz. En este apartado inicial resumimos la evolución de las concepciones de la luz desde las teorías antiguas hasta la cuántica. Finalmente establecemos tres concepciones independientes para estudiar la gran variedad de fenómenos asociados a la luz. Estas concepciones se engloban en la óptica geométrica, que se fundamenta en el concepto teórico de rayo, la ondulatoria, que concibe la luz como una onda, y la cuántica, que proporciona una naturaleza compleja a la luz.
- Las características de la luz. Se establece la entidad física de luz al atribuirle un origen, un proceso de propagación y una naturaleza compuesta. En este apartado se

rema el carácter teórico del rayo, representación de una posible trayectoria de la luz, que usaremos para estudiar su propagación.

- La interacción de la luz con las superficies de separación entre medios. Aquí exponemos, a nivel descriptivo, los fenómenos de reflexión, refracción y absorción estableciendo las leyes empíricas que los rigen. Un aspecto importante es el estudio del fenómeno de dispersión de la luz, explicado para las interacciones entre la luz y los prismas y que nos sirve para justificar el fenómeno óptico del arco iris.
- Los sistemas ópticos. A partir del establecimiento de los principios de la óptica geométrica estudiamos tanto a nivel cualitativo (diagramas de rayos) como cuantitativo (ecuaciones que relacionan el objeto con su imagen óptica) los dioptrios, las lentes y los espejos.
- La visión de los objetos a través del ojo como instrumento óptico. En este apartado establecemos un modelo de visión simple (fuente de luz (objeto), lente (cristalino), pantalla (retina tricromática) que nos permite justificar el proceso de visión, sus anomalías y correcciones más habituales y la percepción del color.
- Fenómenos ondulatorios de la luz. Para finalizar el tema exponemos los fenómenos que evidencian el carácter ondulatorio de la luz.

Por otra parte, a lo largo del tema se analizan aplicaciones prácticas de la óptica.

## 2. CONTENIDOS

### 1 *La naturaleza de la luz*

- Las teorías antiguas
- El inicio de la óptica moderna
- El problema de la luz y la hegemonía de la teoría corpuscular
- Consolidación del modelo ondulatorio
- La revolución cuántica

### 2 *Las características de la luz*

- Un origen
- Un proceso de propagación
- Su naturaleza compuesta

### 3 *La interacción de la luz con la superficie de separación entre dos medios*

- Reflexión
- Refracción
- Reflexión total
- Absorción

### 4 *La interacción de la luz con láminas planoparalelas y con prismas*

- Lámina planoparalela
- Prismas
- Dispersión de la luz
- El arco iris

### 5 *Óptica geométrica. Dioptrios*

- El concepto de objeto óptico
- El concepto de imagen
- El sistema óptico perfecto
- El dioptrio óptico
- Las invariantes del dioptrio
- Construcción geométrica de la imagen en un dioptrio
- Aumento lateral
- El dioptrio plano

### 6 *Lentes*

- Deducción de la ecuación de la lente delgada
- Potencia de una lente
- Construcción geométrica de la imagen en una lente
- Aumento lateral

### 7 *Espejos*

- Invariante de Abbe de los espejos
- Posiciones focales
- Construcción geométrica y aumento lateral en los espejos
- Estudio experimental de los espejos planos
- Aplicación de las relaciones a los espejos

### 8 *La visión. El ojo, sus defectos visuales y la percepción del color*

- El modelo del ojo como instrumento óptico
- Acomodación
- La percepción del color
- Anomalías visuales y su corrección con lentes

### 9 *Instrumentos ópticos*

- La lupa
- El microscopio
- El telescopio
- Fenómenos relacionados con el aspecto ondulatorio de la luz

### 10 *Fenómenos relacionados con la naturaleza ondulatoria de la luz*

- Interferencia
- Procesos de difracción
- Polarización

### 11 *Algunas aplicaciones médicas y tecnológicas*

- La fibra óptica
- Endoscopia

### 3. OBJETIVOS ESPECÍFICOS (Capacidades que hay que desarrollar)

CONCEPTOS	PROCEDIMIENTOS	ACTITUDES
<div>1. Comprender el origen e implicaciones de la controversia sobre la naturaleza ondulatoria o corpuscular de la luz.</div> <div>2. Establecer las propiedades físicas de la luz y caracterizarla, desde el punto de vista óptico, por su índice de refracción.</div> <div>3. Comprender el significado y las implicaciones de las leyes de reflexión y refracción.</div> <div>4. Diferenciar los fenómenos de reflexión especular, difusa y total, estableciendo cuándo y por qué se origina.</div> <div>5. Explicar el fenómeno de descomposición de la luz.</div> <div>6. Establecer los principios en que se fundamenta la óptica geométrica.</div> <div>7. Comprender y diferenciar los conceptos de dioptrio, lente y espejo, estableciendo sus características ópticas.</div> <div>8. Explicar el proceso de formación de imágenes de objetos en dioptrios, lentes y espejos.</div> <div>9. Distinguir entre el proceso de formación y la percepción de las imágenes.</div> <div>10. Asumir un modelo del proceso de visión correcto que explique las características, los defectos visuales y la corrección de los mismos.</div> <div>11. Comprender el fundamento de instrumentos ópticos básicos.</div> <div>12. Explicar los fenómenos ópticos relacionados con la naturaleza ondulatoria de la luz.</div> <div>13. Establecer los límites de la óptica geométrica.</div>	<div>1. Comparar el modelo ondulatorio y corpuscular de la luz para justificar sus propiedades.</div> <div>2. Aplicar las leyes de reflexión y refracción para calcular las magnitudes implicadas en el proceso de propagación de la luz.</div> <div>3. Realizar representaciones del proceso de propagación de la luz a través de distintos medios.</div> <div>4. Calcular las características físicas de sistemas ópticos simples (dioptrios, lentes y espejos).</div> <div>5. Realizar estudios cualitativos (diagramas de rayos) para deducir las relaciones entre las características del objeto y su imagen originada por acción de sistemas ópticos simples.</div> <div>6. Realizar estudios cuantitativos (aplicación de las invariantes) para calcular las características del objeto y su imagen originada por acción de un sistema óptico simple.</div> <div>7. Calcular las características de las lentes apropiadas para corregir los defectos visuales más habituales.</div> <div>8. Aplicar el modelo de visión para justificar nuestra percepción de los objetos.</div> <div>9. Elaborar y analizar mapas conceptuales que permitan estructurar de forma lógica los conceptos ópticos.</div> <div>10. Planificar y realizar experimentos simples para contrastar hipótesis referidas a las características de las imágenes originadas en espejos y lentes.</div>	<div>1. Valorar la importancia de la óptica para explicar nuestra percepción de la realidad.</div> <div>2. Reconocer el carácter provisional de las explicaciones de la ciencia y los modelos propuestos como un hecho diferenciador del conocimiento científico.</div> <div>3. Aceptar el carácter no dogmático de la ciencia.</div> <div>4. Apreciar el sentido crítico de la ciencia y el interés por las aplicaciones tecnológicas basadas en las propiedades de la luz.</div> <div>5. Adquirir pautas para cuidar los ojos, nuestro instrumento de visión.</div> <div>6. Fomentar la curiosidad y el interés por investigar fenómenos relacionados con la luz.</div> <div>7. Valorar las aportaciones de los conocimientos sobre la luz en la mejora de la calidad de vida.</div> <div>8. Apreciar la utilidad de los conocimientos ópticos.</div> <div>9. Identificar e interpretar situaciones de la vida cotidiana relacionadas con la óptica.</div>



# 4. SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS PROPUESTOS

## 4.1 ACTIVIDADES PROPUESTAS

### A.1

La rapidez de la luz en el vacío interestelar fue determinada por primera vez por el astrónomo danés Olaf Römer (1644-1710) en 1675. El método de Römer se fundamentaba en:

- Suponer una rapidez constante de la luz que viaja por el espacio.
- Medir el periodo del satélite de un planeta, suficientemente alejado de la Tierra, de tal modo que se puedan apreciar diferencias del valor en función de la posición de la Tierra. El satélite de referencia usado por Römer fue una luna de Júpiter, Io.

El periodo de Io, que gira supuestamente con MCU alrededor de Júpiter, se determina midiendo el tiempo que transcurre entre dos desapariciones (eclipses) consecutivas por detrás de Júpiter. En principio, este intervalo de tiempo debe variar al medirse desde la Tierra, puesto que los planetas de referencia se desplazan alrededor del Sol. En consecuencia, la distancia entre Io (objeto de referencia) y la Tierra (observador), que denominaremos  $L$ , será variable.

Si la primera desaparición de Io se produce en el instante  $t_1$  será detectada en la Tierra en  $t_1 + L_1 / c$ , siendo  $c$  la rapidez de la luz. Y si la segunda desaparición se produce en el instante  $t_2$ , será detectada en la Tierra en  $t_2 + L_2 / c$ . El periodo real del satélite es:  $T_{\text{real}} = t_2 - t_1$ . Pero en la Tierra el periodo medido será:

$$T_{\text{medido}} = (t_2 + L_2 / c) - (t_1 + L_1 / c) = (t_2 - t_1) + (L_2 - L_1) / c$$

El periodo real ( $T_{\text{real}}$ ) y el medido ( $T_{\text{medido}}$ ) sólo coinciden cuando la Tierra y Júpiter están alineados, respecto al Sol, puesto que ello implica que  $L_1 = L_2$ . En otras situaciones, la diferencia  $L_2 - L_1$  equivale al desplazamiento realizado por la Tierra durante el intervalo del periodo de Io, ya que Júpiter se mueve muy lentamente respecto a la Tierra. Es decir:

$$L_2 - L_1 = v_{\text{media, Tierra}} \cdot T_{\text{real}} \cdot \text{Por tanto:}$$
$$T_{\text{medido}} = T_{\text{real}} + (v_{\text{media, Tierra}} T_{\text{real}} / c)$$

Lo que permite determinar el valor de  $c$  al establecer la variación del periodo, que debe ser la máxima posible a fin de reducir posibles errores experimentales.

En base a este procedimiento Römer determinó un valor de aproximadamente  $c = 200\,000 \text{ km/s}$

Posteriormente el valor de la rapidez fue determinado por varios métodos obteniendo:

Fecha	Procedimiento	Científico	Valor
1727	Aberración estelar	J. Bradley	309397 km/s
1849	Rueda dentada	Fizeau	313000 km/s
1850	Espejo giratorio	Foucault	298000 km/s
1880-1930	Interferómetro	Michelson	299793 km/s

La determinación de la rapidez de la luz permitió evidenciar:

- a) El valor de la rapidez es prácticamente constante (salvo imprecisiones experimentales) con independencia del método de obtención, lo que confirma que sea constante.
- b) La luz posee una rapidez finita aunque muy elevada. A efectos de visión de objetos próximos este valor tan elevado implica que su propagación sea prácticamente instantánea. En consecuencia, sólo pueden apreciarse los tiempos de propagación para distancias inmensas, como ocurre en los métodos astronómicos.
- c) La existencia de una rapidez finita, conlleva que la luz pueda viajar por el espacio aunque su fuente deje de emitirla. Por ello la luz adquiere el carácter de entidad física independiente de la fuente y del ojo.

El profesor o profesora puede obtener una información más extensa en la dirección web:

<http://museovirtual.csic.es/>

Eligiendo las opciones:

Salas del museo → Sala de óptica → La medida de la velocidad de la luz.

### A.2

En 1862, el método de **Léon Foucault** se basaba en medir la velocidad de la luz usando sólo un recorrido de aproximadamente 5 m para la luz (se puede aumentar información del método de Foucault en la dirección web, <http://museovirtual.csic.es/salas/luz/luz18.htm>).

Por ello este método permitió usar un tubo lleno de agua y medir, por primera vez en la historia, la rapidez de la luz en un medio transparente.

El resultado de ese experimento se planteaba en su tiempo como crucial, puesto que permitía evaluar la teoría corpuscular (que predecía una mayor rapidez de la luz en el agua) frente la teoría ondulatoria (predecía una menor rapidez). El resultado experimental evidenciaba que la rapidez de la luz en el agua (226 000 km/s) es inferior a la rapidez de la luz en el aire (298 000 km/s); este hecho impulsó la teoría ondulatoria frente la corpuscular.



El profesor o profesora puede reflexionar sobre que las teorías no se modifican por hechos aislados que no pueden ser explicados (hechos que se incorpora al núcleo de conocimientos como efectos, puesto que discrepan del paradigma vigente) o por dar lugar a alguna predicción errónea (como ocurre en este caso). Por ello, la teoría ondulatoria fue sólo ampliamente aceptada al evidenciar los fenómenos de difracción, interferencias y polarización de la luz. Una teoría sólo es sustituida por otra cuando la comunidad científica acepta la nueva teoría cómo válida y mejor que la anterior.

## ANÁLISIS DE LA FIGURA 2.2

Previamente a explicar el fenómeno de los eclipses debemos analizar la figura 2.2 del libro de texto.

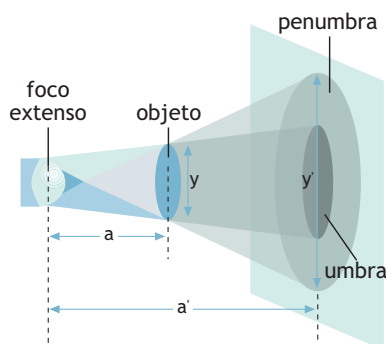
Es conveniente diferenciar las sombras originadas por fuentes puntuales de las fuentes extensas. Cuando la fuente es puntual, la transición de la zona oscura (sombra), originada al interponer un cuerpo opaco entre la fuente y la pantalla, a la iluminada es brusca o de alto contraste. Sin embargo, las fuentes extensas (como el Sol) dan lugar una transición más suave entre la zona oscura (sombra) y la iluminada, existiendo una zona de iluminación intermedia o parcial, denominada penumbra.

El tamaño de la sombra o penumbra ( $Y'$ ) proyectadas por un foco extenso al interponerle un objeto opaco (de tamaño  $Y$ ) sobre una pantalla depende de la distancias relativas del foco al objeto ( $a$ ) y del foco a la pantalla ( $a'$ ). De forma general podemos establecer la relación:

$$\frac{Y'}{Y} = \frac{a'}{a}$$

Al variar la intensidad de la luz emitida, sin modificar las distancias relativas foco-objeto opaco-pantalla, el tamaño de la sombra y la penumbra no varían, sólo se suaviza el contraste de transición entre las distintas zonas. En definitiva, el tamaño de una sombra o penumbra depende solamente de las posiciones relativas fuente-objeto opaco-pantalla. El profesor o profesora puede realizar diagramas de rayos (como los de la figura 1 profesorado) para argumentar ésta conclusión, indicando que las líneas rectas que dibujamos (rayos) representan posibles caminos de la luz en su propagación.

No obstante, debemos remarcar que el rayo no es un ente real sino una representación que sirve para indicar una posible trayectoria de la luz que se fundamenta en su propagación rectilínea.



## A.3

El término **eclipse** se aplica indistintamente a dos fenómenos, en realidad muy diversos, provocados por las posiciones relativas del Sol, emisor luminoso, de la Tierra y de la Luna, cuerpos opacos que interceptan la luz solar. Un aspecto importante al estudiar los eclipses es que el plano de la órbita lunar está inclinado con respecto al plano de la eclíptica aproximadamente unos  $5^\circ$ . La órbita lunar y la eclíptica interseccionan en dos puntos llamados **nodos**, que tienen la particularidad de no ser fijos. La línea que une ambos nodos se denomina **línea de los nodos o nodal**.

Un eclipse de Sol se produce cuando el Sol es ocultado por el globo lunar, que se interpone entre la Tierra y el Sol. Por lo tanto, un eclipse de Sol tiene lugar siempre en fase de Luna Nueva y cuando la Luna se encuentra en la línea nodal o en sus proximidades. Es decir, *cuando los tres astros están alineados o aproximadamente en línea recta*.

En el **eclipse solar** la Luna proyecta una sombra sobre la superficie terrestre. Esta sombra, por provenir la luz de un foco extenso, está compuesta de dos zonas diferenciadas: la penumbra o sombra exterior y la umbra (sombra propiamente) o sombra interior. Desde la penumbra sólo se oculta una fracción del disco solar: el eclipse es parcial. La umbra, en cambio, es una sombra absoluta, puesto que desde ella se tapa plenamente el Sol, es decir, el eclipse es total.

Para representar y visualizar las zonas de la Tierra por las que será visible un eclipse solar se utilizan mapas terrestres que llevan superpuestas unas curvas que delimitan las áreas desde las cuales será visible el fenómeno, pero no se pueden observar a la vez en todos los puntos del área terrestre de visibilidad ni en los lugares no situados en el área de observación.

El **eclipse de Luna** es determinado por el paso de nuestro satélite por la sombra de la Tierra. Como la Luna se halla en una posición opuesta a la del Sol, los eclipses lunares siempre suceden en fase de Luna Llena. Además la Luna debe estar en el punto nodal, o en sus proximidades, para conseguir alinear los tres astros.

Los eclipses de Luna se observan desde cualquier lugar de nuestro planeta donde la Luna sea visible a la hora del eclipse. Por ello, los eclipses lunares no se restringen a zonas geográficas limitadas como ocurre en los solares.

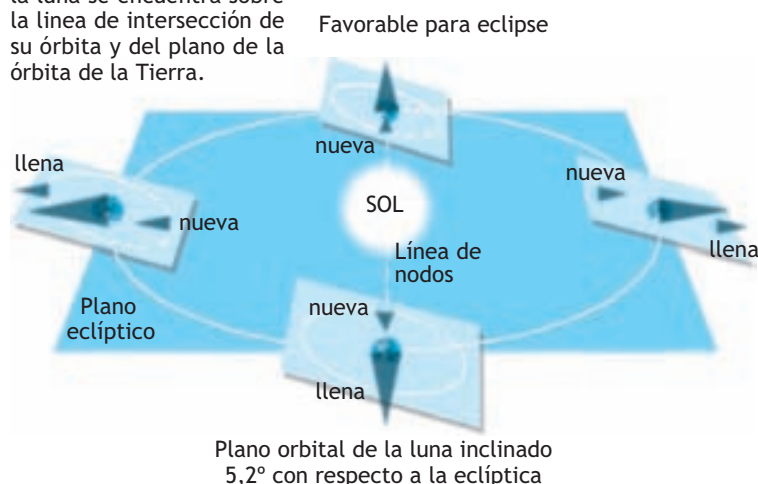
El profesor o profesora puede obtener más información o imágenes en las direcciones web:

<http://www.tierrayestrellas.com/>

<http://www.saros.org/>

<http://www.shelios.com/>

Las condiciones son favorables para los eclipses cuando la luna se encuentra sobre la línea de intersección de su órbita y del plano de la órbita de la Tierra.



#### A.4

Para definir el índice de refracción relativo debemos tomar de referencia dos medios.

Medio 1	Medio 2
$n_1 = \frac{c}{v_1}$	$n_2 = \frac{c}{v_2}$
Índice de refracción relativo $n_{1,2}$	
$n_{1,2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{v_2}{v_1}$	

Al analizar la expresión del índice de refracción relativo, establecemos:

$$n_{1,2} < 1 \text{ cuando } v_1 > v_2$$

$$n_{1,2} > 1 \text{ cuando } v_2 > v_1.$$

#### A.5

En el resumen podemos establecer:

PROPIEDADES FÍSICAS DE LA LUZ
a) La luz la emiten las fuentes luminosas, sean primarias o secundarias, en todas las direcciones.
b) Las fuentes extensas de luz (objetos) pueden considerarse como un conjunto de fuentes puntuales superpuestas.
c) La luz se propaga con movimiento uniforme en un medio transparente y homogéneo, es decir en línea recta y con rapidez constante.
d) Para representar las distintas trayectorias de la luz usamos el concepto teórico de "rayo luminoso", que son únicamente líneas ideales no visibles.
e) Los medios materiales por los que se propaga la luz, se caracterizan óptimamente por su índice de refracción, $n = c / v_{\text{medio}}$ , siendo $n \geq 1$ .

#### ACTIVIDAD CD1

- $n_1 (1,5) > n_2 (1)$ . El ángulo de refracción es *mayor* que el ángulo de incidencia. Para el caso de que  $\hat{i} = 30^\circ$  se obtiene un ángulo de refracción de  $\hat{r} = 48,59^\circ$ .
- $n_1 (1) < n_2 (1,5)$ . El ángulo de refracción es *menor* que el ángulo de incidencia. Para el caso de  $\hat{i} = 30^\circ$  se obtiene un ángulo de refracción de  $\hat{r} = 19,47^\circ$ .
- En el caso de que  $n_1 > n_2$  al aumentar el ángulo de incidencia aumenta el valor del ángulo de refracción, de modo que  $\hat{r} > \hat{i}$  hasta que se alcanza un ángulo límite a partir del cual sólo se produce el fenómeno de reflexión.
- En el caso de que  $n_1 < n_2$  aunque el ángulo de refracción aumenta al incrementar el ángulo de incidencia se verifica siempre que  $\hat{r} < \hat{i}$  y, por ello, nunca se puede producir el fenómeno de reflexión total.

#### A.6

La siguiente actividad experimental tiene como objetivo verificar que cuando la luz incide perpendicularmente a la superficie de separación no se produce un cambio en su dirección. Por tanto puede haber refracción sin cambio de dirección. En el caso de la reflexión ocurre lo mismo.

#### A.7

Si tenemos en cuenta las conclusiones establecidas en la actividad CD1, podemos razonar que para que se produzca la reflexión total el  $\hat{r} > \hat{i}$  situación que sólo se produce cuando  $n_1 > n_2$ . Por otra parte, podemos realizar un razonamiento matemático; puesto que la función trigonométrica seno debe ser inferior o igual a 1 y el fenómeno de reflexión total se produce a partir, situación límite, de  $\hat{r} = 90^\circ$ , aplicando la ley de Snell establecemos:

$$n_1 \cdot \sin \hat{i}_{\text{lim}} = n_2 \cdot \sin 90^\circ$$

Despejando el ángulo límite establecemos que:

$$\hat{i}_{\text{lim}} = \arcsin \frac{n_2}{n_1}$$

Relación que sólo es correcta cuando  $n_1 > n_2$ .

#### A.8

Al analizar el diagrama podemos diferenciar dos ejes conceptuales:

- Las características físicas de la luz; su rapidez de propagación, constante que permite definir el índice de refracción como  $n = c/v$ .
- Los fenómenos que se originan al interaccionar la luz con una superficie de separación; reflexión, refracción y absorción.

La comparación de estos tres fenómenos permite establecer una tabla del siguiente tipo.

Propiedad	Reflexión	Refracción	Absorción
Origen	Superficie de separación		Al propagarse por un medio
Frecuencia	Se mantiene invariable		
Longitud de onda	No cambia	Se modifica $n_1 \lambda_1 = n_2 \lambda_2$	No cambia en un determinado medio
Rapidez	Se mantiene constante	Se modifica al cambiar de medio	No cambia en un determinado medio
Intensidad	La intensidad de la luz incidente se distribuye entre la reflejada y la refractada		Disminuye con la distancia y depende de las características del medio
Leyes	Constancia del plano de incidencia		$I_x = I_0 e^{-\alpha x}$
	$\hat{I} = \hat{R}$	$n_1 \sin \hat{I} = n_2 \sin \hat{r}$	

## ACD 2

Al analizar el applet podemos establecer las siguientes conclusiones:

Variable Independiente	Variables de control	Variable dependiente	Conclusión
Ángulo de incidencia ( $\hat{I}$ )	$n_{\text{medio}}, n_{\text{lámina}},$ espesor lámina (e)	Desplazamiento lateral	Al aumentar el ángulo de incidencia, respecto a la normal, aumenta el desplazamiento lateral del rayo que atraviesa la lámina
Espesor de la lámina (e)	$n_{\text{medio}}, n_{\text{lámina}},$ ángulo de incidencia ( $\hat{I}$ )	Desplazamiento lateral	Al aumentar el espesor de la lámina, aumenta el desplazamiento lateral del rayo que atraviesa la lámina

Estudio de la influencia del índice de refracción:

- Caso en que  $n_{\text{lámina}} = n_{\text{medio}}$ . No se produce ningún desplazamiento lateral puesto que el rayo no se desvía de su trayectoria al no producirse el fenómeno de refracción. La lámina y el medio son ópticamente idénticos puesto que poseen el mismo índice de refracción.
- Caso en que  $n_{\text{lámina}} > n_{\text{medio}}$ . Se produce el fenómeno de refracción de modo que el ángulo de refracción en la primera cara (medio-lámina), es menor que el ángulo de incidencia. El desplazamiento lateral del rayo aumenta al incrementar la diferencia entre los índices de refracción, en este caso al aumentar el índice de refracción de la lámina.
- Caso en que  $n_{\text{lámina}} < n_{\text{medio}}$ . En este caso podemos observar que al aumentar el índice de refracción del medio, manteniendo las otras variables constante, aumenta el ángulo de refracción en la primera cara (medio-lamina), que es siempre mayor que el ángulo de incidencia, y el desplazamiento lateral. Pero a partir de un determinado valor del índice de refracción, que corresponde al máximo desplazamiento, la luz ya no atraviesa la lámina por producirse el fenómeno de reflexión total en la cara exterior.

## A.9

- Cálculo del primer ángulo de refracción.  
Punto de incidencia: aire-primera cara de la lámina de plástico.  
Aplicación de la ley de refracción:  
$$\sin \hat{r}_1 = \frac{1 \cdot \sin 30^\circ}{1,4} = 0,357$$
  
despejando,  
$$\hat{r}_1 = \arcsen 0,357 = 20,92^\circ$$

- Cálculo del segundo ángulo de refracción.  
Punto de incidencia: segunda cara de la lámina de plástico - agua.  
Aplicación de la ley de refracción:  
$$\sin \hat{r}_2 = \frac{1,4 \cdot \sin 20,92^\circ}{1,33} = 0,376$$
  
despejando,  
$$\hat{r}_2 = \arcsen 0,376 = 22,1^\circ$$

Por tanto, en este caso el ángulo de incidencia del rayo sobre la lámina es distinto al ángulo de salida, y en consecuencia, las trayectorias del rayo al incidir y al salir de la lámina no son paralelas y, por ello, no podemos establecer un desplazamiento lateral.

#### A.10

Si analizamos el ejemplo 5 podemos establecer las siguientes conclusiones:

- El haz de luz se descompone como consecuencia de la variación del índice de refracción con la longitud de onda de cada una de las luces integrantes.
- La dispersión del haz de luz se incrementa en la segunda refracción al atravesar el prisma. En la primera cara del prisma la dispersión angular es de sólo  $0,31^\circ$  mientras que en la segunda cara es de  $4,22^\circ$ .
- El efecto dispersivo de un prisma depende del ángulo de incidencia del haz de luz (repite el problema con otro ángulo de incidencia, por ejemplo  $\alpha = 60$ ) y de la naturaleza del prisma (repite el problema con otro material de la tabla de la figura 2.4 del libro de texto). La dispersión es más efectiva en aquellos prismas cuyos valores de "n" presenten variaciones más bruscas en función del tipo de luz, prismas denominados *dispersivos*.
- Los prismas son objetos ópticos muy eficaces para descomponer la luz.

#### A.11

Según los datos de la actividad y en base al convenio de signos  $R = +20$  cm.

a) Las posiciones de los focos son:

Foco objeto:

$$f = -\frac{n_1}{n_2 - n_1} R = -\frac{1}{\frac{4}{3} - 1} 20 \text{ cm} = -60 \text{ cm}$$

Foco imagen.

$$f' = \frac{n_2}{n_2 - n_1} R = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{4}{3} - 1} 20 \text{ cm} = 80 \text{ cm}$$

b) Para determinar las características de la imagen del objeto situado en  $s = -100$  cm. Calculamos, en primer lugar, la posición de su imagen ( $s'$ ) aplicando la invariante de Abbe:

$$\frac{\frac{4}{3}}{s'} - \frac{1}{-100 \text{ cm}} = \frac{\frac{4}{3} - 1}{20 \text{ cm}}$$

Operando, obtenemos:

$$\frac{\frac{4}{3}}{s'} = \frac{1}{60} - \frac{1}{100}$$

Despejando  $s'$ ,

$$s' = +200 \text{ cm}$$

En consecuencia, el aumento lateral es:

$$A_L = \frac{1}{\frac{4}{3}} \frac{200}{(-100)} = -\frac{6}{4} = -1,5$$

El tamaño de la imagen es:

$$y' = -1,5 \cdot (10 \text{ cm}) = -15 \text{ cm}$$

Por tanto, la imagen es real, invertida y aumentada respecto al objeto.

#### A.12

Cuando una haz de luz, procedente de un foco, incide desde un medio de mayor índice de refracción (menor rapidez de propagación), como el agua, a uno con menor índice de refracción (mayor rapidez de propagación), como el aire, la luz se aleja de la normal como consecuencia de la ley de refracción; ello da lugar a que al mirar un cuerpo sumergido, desde fuera, el ojo perciba, al prolongar las trayectorias de los rayos de haz, el foco más cerca de la superficie de separación, a menor profundidad que la real. Este fenómeno depende de los índices de refracción de los medios implicados y de la profundidad real del foco.

#### A.13

Para que se produzca la imagen de un punto emisor de luz (O) debe ocurrir que el haz procedente del punto después de refractarse, en las distintas superficies de la lente, vuelva a converger realmente o virtualmente en otro punto, denominado imagen (O'). En el caso de que las dos caras de la supuesta lente sean paralelas no se puede producir la convergencia del haz, al originarse sólo un desplazamiento lateral del haz, tal como se ha estudiado en el apartado de la interacción de la luz con láminas planoparalelas.

#### Comentario de la figura 6.6

El análisis del diagrama permite establecer las siguientes conclusiones:

- La imagen se forma trazando haces divergentes de luz emitidos por cada punto del objeto.
- No existe imagen sin observador ya que esa "representación" se ve en la pantalla porque forma una imagen en la retina.

- Sólo vemos imagen para una única posición de la pantalla, posición en que el haz de luz que atraviesa la lente converge.
- Si quitamos la lente no se forma la imagen.
- Si tapamos la mitad de la lente dejamos pasar la mitad del haz de luz, por lo que la imagen será menos luminosa pero se verá en la misma posición y con el mismo tamaño.

### ACD3

Al experimentar con el applet, “**Las lentes y la formación de las imágenes**”, el alumnado puede variar la posición del objeto respecto la lente y comprobar las características de la imágenes originadas. Al analizar los diferentes diagramas podemos sistematizar las características de las imágenes posibles en la siguiente tabla.

LENTE CONVERGENTE					
Objeto	Imagen				¿Qué le ocurre a la imagen del objeto?
Posición del objeto	Tipo	Orientación	Tamaño	Posición	
$s < 2 f$	Real	Invertida	Menor	$f' < s' < 2 f'$	Al alejarlo de la posición $2 f$ el tamaño de la imagen disminuye
$s = 2f$	Real	Invertida	Mismo tamaño	$s' = 2 f'$	Imagen real, del mismo tamaño que el objeto pero invertida
$2 f < s < f$	Real	Invertida	Mayor tamaño	$2 f' < s' < \infty$	El tamaño de la imagen aumenta al acercar el objeto al punto $F$ , siendo siempre mayor que la del objeto
$s = f$	$\infty$				Caso límite en que la imagen se forma en el infinito, y por ello no se puede representar
$f < s < 0$	Virtual	Derecha	Mayor	$s' < s$	El tamaño de la imagen se aproxima a la del objeto al acercarlo a la lente. De modo que en el caso límite, objeto próximo a la superficie de la lente, coinciden los tamaños

El alumnado puede verificar que cuando la lente es divergente siempre se originan imágenes virtuales, con la misma orientación y de menor tamaño que el objeto. Al acercar el objeto a la lente divergente aumenta el tamaño de la imagen, siendo siempre menor que el del objeto, sin variar las características de la imagen. De modo que en el caso límite, objeto próximo a la superficie de la lente, coinciden los tamaños del objeto y la imagen.

### A.14

Al analizar el mapa conceptual podemos diferenciar tres ejes conceptuales:

- Las características geométricas de las lentes que permite diferenciarlas en convexas (más gruesas en el centro) y cóncavas (más delgadas en el centro).
- La característica física de la lente relacionada con su capacidad de desviar las direcciones de los haces de luz que la atraviesan, su *potencia*. La magnitud física de la potencia de las lentes permite clasificarlas en convergentes ( $P > 0$ ) y divergentes ( $P < 0$ ). La potencia de la lente depende tanto de los índices de refracción del medio y del material de la lente como de su geometría.
- La capacidad de las lentes para formar imágenes de objetos cuya luz interacciona con ellas. Se exponen las ecuaciones que determina la posición y el tamaño de la imagen. También se analiza la clasificación de las imágenes, en relación a su orientación y a su tamaño respecto al objeto de que proceden.

### EXP 1

- Para verificar que la distancia del espejo al objeto es la misma que su distancia a la imagen se pueden usar dos lápices y un espejo plano de altura inferior a los lápices. Se fija uno de los lápices y el otro, situado al otro lado del espejo fijo y vertical, se mueve hasta que se superponen un lápiz con la imagen del otro, de modo que se tenga la impresión que sólo hay un lápiz detrás del espejo. Este experimento debe realizarse tanto fijando el lápiz de delante del espejo como el de detrás, y observando la imagen desde distintas posiciones. El profesorado puede encontrar experimentos parecidos en el libro: “Las ondas. La luz y el sonido”, de Adolf Cortel Ortuno editado por la editorial Horsori.
- La posición de la imagen observada no depende del observador, puesto la imagen siempre es equidistante al objeto, respecto al espejo, y se observa detrás del mismo. El campo de visión de un objeto en un espejo depende de la posición relativa del objeto, respecto al espejo, y del tamaño del espejo. Estas conclusiones se pueden deducir teóricamente aplicando las leyes de reflexión.



c) Este experimento puede usarse para introducir el concepto del *calidoscopio*. El número de imágenes observadas depende del ángulo que formen los espejos entre ellos. De forma cualitativa se aprecia que al disminuir el ángulo entre los espejos aumenta el número de imágenes. Para realizar un estudio cuantitativo se recomienda que los alumnos elaboren una tabla que relacione el ángulo entre los espejos, 180°, 120°, 90°, 60°, 45°..., con el número de objetos observados (cuerpo más imágenes). Es conveniente que previamente marquen en un papel las líneas de referencia, con los ángulos calculados con un transportador, para situar los espejos con la inclinación apropiada. El cuerpo debe situarse entre los espejos, aproximadamente de forma equidistante. Al analizar los resultados deben establecer la ecuación:

$$\text{cuerpo} + \text{imágenes} = \frac{360^\circ}{\text{ángulo } (^\circ)}$$

Cuando el ángulo se hace muy pequeño el número de objetos aumenta de forma significativa. De modo que para espejos paralelos, ángulo cero, el número de imágenes observadas sería infinito.

#### ACD4

Al experimentar con el applet, “Los espejos y la formación de las imágenes”, el alumnado puede variar la posición del objeto respecto al espejo y comprobar las características de la imagen originadas. Al analizar los diferentes diagramas podemos sistematizar las características de las imágenes posibles en la siguiente tabla.

ESPEJO CÓNCAVO					
Objeto	Imagen				¿Qué le ocurre a la imagen del objeto?
Posición del objeto	Tipo	Orientación	Tamaño	Posición	
$s < R$	Real	Invertida	Menor	$R < s' < f$	Al alejar el objeto de la posición C (R) el tamaño de la imagen disminuye acercándose su posición al foco. Sin embargo, al acercar el objeto a C el tamaño de la imagen, sin superar la del objeto, aumenta acercándose su posición a C.
$s = R$	Real	Invertida	Mismo tamaño	$s' = R$	Imagen real, del mismo tamaño que el objeto pero invertida.
$R < s < f$	Real	Invertida	Mayor tamaño	$s' < R$	El tamaño de la imagen aumenta al acercar el objeto al punto F, siendo siempre mayor que la del objeto. Por otra parte, la posición de la imagen se aleja del espejo al acercar el objeto a F.
$s = f$	$\infty$				Caso límite en que la imagen se forma en el infinito, y por ello no se puede representar.
$f < s < 0$	Virtual	Derecha	Mayor	$s' > 0$	El tamaño de la imagen, superior al objeto, disminuye al acercar el objeto al vértice del espejo. En el caso límite de situar el objeto cerca de la superficie del espejo el tamaño de la imagen y el objeto son iguales.

Las características de la imagen de un objeto real formada por un espejo esférico convexo son siempre: virtual, derecha y menor que el objeto. La posición de la imagen se localiza entre:  $0 < s' < f'$ , aumentando la imagen su tamaño al acercar el objeto al espejo, pero siendo siempre de menor tamaño que el objeto.

#### A.15

El cristalino funciona como una lente de potencia variable que debe hacer converger el haz de luz procedente del objeto sobre la retina, lugar donde se localizan las células relacionadas con la visión. Puesto que consideramos la distancia cristalino-retina de 25 mm, la posición de la imagen siempre debe ser  $s' = 25 \cdot 10^{-3}$  m. Para calcular los valores extremos de la potencia del cristalino aplicaremos la ecuación:

$$P = \frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{25 \cdot 10^{-3} \text{ m}} - \frac{1}{s} = 40 \text{ D} - \frac{1}{s}$$

a las dos situaciones extremas en que podemos visualizar objetos:

Punto próximo:  $s = -0,25 \text{ m}$

La potencia del cristalino es:

$$P = 40 \text{ D} - \frac{1}{-0,25 \text{ m}} = 44 \text{ D}$$

Punto lejano:  $s = \infty$

$$P = 40 \text{ D} - \frac{1}{\infty} = 40 \text{ D}$$

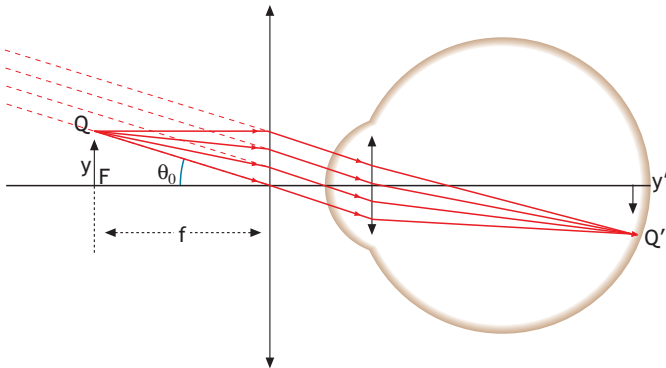
Por tanto:  $40 \text{ D} < P_{\text{cristalino}} < 44 \text{ D}$

Así pues, en el proceso de acomodación la potencia del ojo varía en tan sólo 4 D.

#### A.16

En primer lugar aclaremos que en los instrumentos de visión la propiedad más importante es el aumento angular o poder amplificador. Este factor se define como el cociente entre el ángulo subtendido al visualizar el objeto con la lupa ( $\theta$ ) y el mayor ángulo subtendido al observarlo sólo con el ojo (visión directa), situación que corresponde al punto próximo ( $\theta_0 = y / x_{pp}$ ). Con la lupa podemos obtener ángulos de observación mayores que dan lugar a una imagen retiniana mayor. Teóricamente el máximo aumento angular corresponde a ( $\theta = y / f$ ) y vale:

$$M = \frac{\theta}{\theta_0} = \frac{x_{pp} (0,25 \text{ m})}{f'} = \frac{P}{4}$$



Por ello con una lente de  $P = 20 \text{ D}$  el máximo aumento angular debe ser  $M = 5$ . Sin embargo, el problema se refiere a aumentos laterales cuyo máximo valor teórico es infinito, situación que corresponde al objeto en el foco de la lente (situación ideal).

Para resolver el problema partimos de la ecuación general

$$P = \frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = 20 \text{ D} \quad (\text{Primera ecuación})$$

e imponiendo las condiciones de aumento lateral:

$$A_L = \frac{s'}{s} = 10$$

Establecemos que:

$$s' = 10 s \quad (\text{segunda ecuación caso a})$$

Al aplicar esta relación a la primera ecuación obtenemos:

$$\frac{1}{10 s} - \frac{1}{s} = 20 \text{ D}$$

Que al resolver proporciona:

$$s = -\frac{9}{200} \text{ m}$$

Para el segundo caso establecemos la condición:

$$A_L = \frac{s'}{s} = 20 \quad s' = 20s \quad (\text{segunda ecuación caso b})$$

Que permite establecer que:  $s' = 20 s$

Y al combinar con la primera ecuación da lugar a la relación:

$$\frac{1}{20 s} - \frac{1}{s} = 20 \text{ D}$$

Que permite calcular el valor de s:

$$s = -\frac{19}{400} \text{ m}$$

Teóricamente el tamaño de la imagen aumenta al acercar el objeto observado al foco de la lupa. Sin embargo, cuando el objeto se localiza en el foco la imagen debe estar en el infinito y teóricamente no se vería, no obstante la lente y el ojo forman un sistema capaz de producir una imagen real sobre la retina. Y además, en esta situación, nuestro ojo no se cansa ya que cuando enfoca al infinito está completamente relajado. Este factor, se llama **acomodación infinita**.

En general, obtenemos un aumento mayor angular cuanto menor es la distancia focal de la lente (es decir mayor es su potencia). Pero entonces, como aproximamos más el objeto a la lente, nos salimos de la zona paraxial, por lo que aumenta la aberración esférica y se pierde nitidez. En la práctica, lo más que podemos conseguir con una lupa son 10 aumentos angulares.

#### A.17

Los telescopios son instrumentos ópticos diseñados para la observación de objetos muy lejanos, estrellas o astros celestes. Estos instrumentos constan de un objetivo y un ocular. Puesto que el objeto luminoso está muy alejado, los rayos inciden paralelamente, y por ello la imagen originada por el objetivo se forma en su foco. En el telescopio de reflexión el objetivo es un espejo parabólico o cóncavo que concentra el haz de luz en un espejo secundario, espejo pequeño orientable, para desviarlo al ocular. En el telescopio de refracción el objetivo es una lente que forma la imagen en el foco del ocular. Para comparar ambos tipos de telescopios podemos considerar:

- Su poder amplificador. El poder amplificador del telescopio depende de la relación entre los ángulos subtendidos de observación directa y con el telescopio, que corresponde a:

$$\frac{\theta}{\theta_0} = \frac{\frac{y}{f_{\text{ocular}}}}{\frac{y}{f_{\text{objetivo}}}} = \frac{f_{\text{objetivo}}}{f_{\text{ocular}}}$$



Por ello, con el uso de un objetivo de gran distancia focal y con un ocular de pequeña distancia focal se consiguen grandes aumentos. Los objetivos de gran distancia focal son más fáciles de conseguir con espejos de gran radio, que pueden componerse por pequeños segmentos acoplados.

- La capacidad de concentrar la luz procedente del astro celeste. Al encontrarse el objeto de observación muy lejos interesa que el telescopio posea una gran capacidad de concentrar luz. Para ello los telescopios de refracción deben usar como objetivo grandes lentes que llevan asociadas problemas de aberración, originados por la distinta refracción de la luz que la atraviesa. Estos problemas se pueden resolver combinando distintos tipos de lentes, pero todo ello encarece el telescopio e incrementa su dificultad técnica de construcción. Sin embargo, en el telescopio de reflexión al sustituir la lente del objetivo por un espejo cóncavo o parabólico de gran radio se consigue concentrar mucha cantidad de luz, sin originar problemas de aberración, puesto que se fundamenta en la reflexión de la luz. Por otra parte, los problemas técnicos de usar grandes espejos, como objetivo, son más fáciles de resolver que los asociados a grandes lentes. La capacidad de concentrar luz está relacionada con el alcance del telescopio. Un buen telescopio debe poseer un gran alcance. Es decir, poder observar astros con muy poco brillo.

### A.18

Para que la luz reflejada esté totalmente polarizada debe verificarse que el rayo reflejado y el refractado sean perpendiculares. Esta condición implica que los ángulos de incidencia ( $\hat{i}$ ) y de refracción ( $\hat{r}$ ) sean complementarios. Es decir, matemáticamente:  $\hat{i} + \hat{r} = 90^\circ$ . Y, por ello,  $\text{sen } \hat{r} = \cos \hat{i}$ .

Por otra parte, en el punto de incidencia debe verificarse la ley de refracción de Snell:

$$n_1 \cdot \text{sen } \hat{i} = n_2 \text{ sen } \hat{r}$$

y como  $\text{sen } \hat{r} = \cos \hat{i}$ , establecemos:

$$n_1 \cdot \text{sen } \hat{i} = n_2 \cos \hat{i}$$

despejando, se obtiene:

$$\hat{i} = \arctg \frac{n_2}{n_1}$$

Es decir, el ángulo de incidencia para que se origine la polarización total de la luz reflejada depende de la relación entre los índices de refracción entre los dos medios. Para el caso, de que la luz pase del aire ( $n_1 = 1$ ) al agua ( $n_2 = 1,33$ ) el ángulo es:

$$\hat{i} = \arctg \frac{1,33}{1} = 53,1^\circ$$

Este ángulo será distinto al variar la naturaleza del líquido, puesto que cada líquido posee un índice de refracción propio.

### A.19

La fibra óptica se fundamenta en el fenómeno de reflexión total. Para que este fenómeno se origine el índice de refracción de la fibra debe ser mayor que el de su entorno. Por otra parte con índices de refracción de fibras elevados, respecto a su entorno, se consiguen ángulo límites muy pequeños que favorecen la reflexión total de la luz que entra en la fibra.

## 4.2 SOLUCIONES DE LOS PROBLEMAS FINALES

### FENÓMENOS DE REFRACCIÓN Y REFLEXIÓN

#### PROBLEMA 1

Magnitud	Fenómeno de reflexión	Fenómeno de refracción
Frecuencia	Invariable	Invariable
Longitud de onda	No cambia	Cambia
Velocidad de propagación	No cambia	Cambia
Dirección de propagación	Cambia si no incide perpendicularmente a la superficie de separación	Cambia si no incide perpendicularmente a la superficie de separación

#### PROBLEMA 2

Nosotros vemos la varilla sumergida por la luz que emite cualquiera de sus puntos, foco secundario (varilla). El haz de luz debe ir de un punto de la varilla (interior del agua) hasta nuestros ojos (exterior del agua); para ello el haz debe de cambiar de medio dando lugar al fenómeno de refracción. Para representar la imagen de un punto del objeto es necesario dibujar al menos dos rayos (de los teóricamente infinitos emitidos) procedentes del punto y que inciden en el ojo. Los rayos al variar de medio se refractan, y en este caso cambian de dirección al no ser la incidencia perpendicular. Puesto que  $n_{\text{agua}} > n_{\text{aire}}$  el  $\hat{i} < \hat{r}$ , y por ello al prolongar las direcciones de los rayos que inciden en el ojo localizaremos el punto más próximo a la superficie. En definitiva, la imagen de todos los puntos que componen la varilla produce la sensación visual de que se dobla hacia la superficie.

### PROBLEMA 3

- a) Al penetrar la luz de láser en el plástico cambia su dirección (si no incide perpendicularmente), su velocidad de propagación y la longitud de onda asociada a la luz. Sin embargo, se conserva su frecuencia.

Para calcular la rapidez de la luz en el CD aplicaremos el concepto de índice de refracción:

$$n_{\text{plástico}} = \frac{c}{v_{\text{plástico}}} \rightarrow$$
$$\rightarrow v_{\text{plástico}} = \frac{c}{n_{\text{plástico}}} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{1,5} = 2 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

La longitud de onda de la luz en el plástico la deducimos teniendo en cuenta que se conserva la frecuencia:

$$N = \frac{\lambda_{\text{aire}}}{c} = \frac{\lambda_{\text{plástico}}}{v_{\text{plástico}}} \rightarrow$$
$$\rightarrow \lambda_{\text{plástico}} = \frac{v_{\text{plástico}}}{c} 780 \text{ nm} = 520 \text{ nm}$$

- b) Para calcular el ángulo de refracción aplicamos la ley de Snell:

$$n_1 \cdot \sin \hat{i} = n_2 \cdot \sin \hat{r}$$

Para usar esta ley el ángulo de incidencia se mide respecto a la normal a la superficie, por ello:

$$\hat{i} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$$

Y como  $n_1 = 1$ ;  $n_2 = 1,5$ . Establecemos:

$$\hat{r} = \arcsen\left(\frac{\sin 60^\circ}{1,5}\right) = 35,3^\circ$$

### PROBLEMA 4

El fenómeno de reflexión total se produce cuando la luz no puede refractarse, cambiar de medio, al incidir sobre una superficie transparente. Para que se produzca este fenómeno se deben verificar dos condiciones:

Primera condición:  $n_1 > n_2$ ;

Segunda condición:  $\hat{i} > \hat{i}_{\text{límite}}$ ,

siendo  $\hat{i}_{\text{límite}} = \arcsen(n_2 / n_1)$

Por ello para que se produzca el fenómeno de reflexión total en el sistema diamante - vidrio, la luz debe propagarse del diamante al vidrio y el ángulo de incidencia debe ser superior a

$$\hat{i}_{\text{límite}} = \arcsen(1,4/2,5) = 34,05^\circ$$

### PROBLEMA 5

En primer lugar determinaremos la rapidez de la luz en el agua. Considerando los medios agua-aire establecemos que cuando se alcanza el ángulo límite:

$$n_{\text{agua}} \cdot \sin 48,61^\circ = 1 \rightarrow n_{\text{agua}} = 1,33$$

Aplicando el concepto de índice de refracción establecemos:  $v_{\text{agua}} = \frac{c}{1,33}$

En segundo lugar determinaremos el índice de refracción del medio, puesto que:

$$v_{\text{medio}} = 0,878 \cdot v_{\text{agua}} = 0,878 \cdot \frac{c}{1,33} = 0,66 c$$

El índice de refracción del medio es:

$$n_{\text{medio}} = \frac{c}{0,66 c} = 1,515$$

Y finalmente determinaremos el ángulo límite cuando la luz pasa del medio al aire:

$$1,515 \cdot \sin \hat{i}_{\text{límite}} = 1 \rightarrow$$

$$\rightarrow \sin \hat{i}_{\text{límite}} = \frac{1}{1,515} = 0,66 \rightarrow \hat{i}_{\text{límite}} = 41,3^\circ$$

### PROBLEMA 6

En primer lugar aplicaremos la ley de Snell en el punto de interacción:

aire – medio 1 ( $n_1 = 1,5$ )

$$1 \cdot \sin 30^\circ = 1,5 \cdot \sin \epsilon'$$

Despejando el ángulo de refracción, obtenemos:

$$\sin \epsilon' = 0,33 \rightarrow \epsilon' = 19,47^\circ$$

El ángulo de interacción de la luz con la superficie, de separación entre los dos vidrios, lo calculamos teniendo en cuenta que son ángulos complementarios:

$$\epsilon'' = 90^\circ - 19,47^\circ = 70,53^\circ$$

Para calcular el índice de refracción del segundo vidrio que da lugar a reflexión total, establecemos:

$$1,5 \cdot \sin 70,53^\circ = n_2 \rightarrow n_2 = 1,4$$

## INTERACCIÓN DE LA LUZ CON LÁMINAS Y PRISMAS

### PROBLEMA 7

El siguiente problema lo podemos estructurar en diferentes apartados:

- Determinación del ángulo de refracción aire - lámina.

Aplicando la ley de Snell establecemos:

$$1 \cdot \sin 60 = 1,5 \cdot \sin \hat{r} \rightarrow \sin \hat{r} = \frac{\sin 60}{1,5} = 0,577 \rightarrow \hat{r} = \arcsen 0,577 = 35,26^\circ$$

- Cálculo de la distancia recorrida por el interior de la lámina.

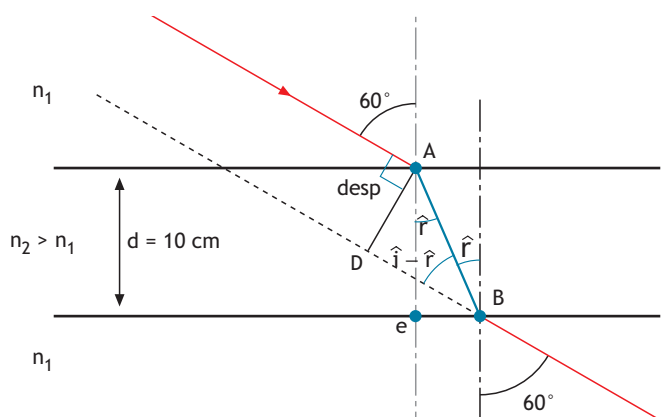
Tomado de referencia el triángulo ABC, establecemos:

$$\cos \hat{r} = \frac{d}{AB} = \frac{10 \text{ cm}}{AB} \rightarrow AB = \frac{10 \text{ cm}}{\cos 35,26^\circ} = 12,246 \text{ cm}$$

- Cálculo del desplazamiento.

Tomando de referencia el triángulo ADB, establecemos:

$$\sin (60^\circ - 35,26^\circ) = \frac{\text{desp}}{AB} \rightarrow \text{desp} = AB \cdot \sin 24,74^\circ = 5,125 \text{ cm}$$



### PROBLEMA 8

En este problema debemos calcular, en primer lugar, el ángulo de incidencia y el de refracción. Para ello establecemos el siguiente sistema:

Condición	Ecuación
Refracción aire-vidrio, aplicación de la ley de Snell:	$1 \cdot \sin \hat{i} = 1,46 \cdot \sin \hat{r}$
Perpendicularidad entre el rayo reflejado y refractado	$\hat{i} + \hat{r} = 90^\circ$

La segunda condición implica que  $\sin \hat{r} = \cos \hat{i}$ , en consecuencia, establecemos:

$$1 \cdot \sin \hat{i} = 1,46 \cdot \cos \hat{i} \rightarrow \tan \hat{i} = 1,46 \rightarrow \hat{i} = 55,6^\circ \text{ y } \hat{r} = 90^\circ - 55,6^\circ = 34,4^\circ$$

A continuación, calculamos la distancia recorrida por el rayo en el interior de la lámina:

$$\cos \hat{r} = \frac{e}{AB} = \frac{5 \text{ cm}}{AB} \rightarrow AB = \frac{5 \text{ cm}}{\cos 34,4^\circ} = 6,06 \text{ cm}$$

El desplazamiento lateral del rayo es:

$$\sin (55,6^\circ - 34,4^\circ) = \frac{\text{desp}}{AB} \rightarrow \text{desp} = AB \cdot \sin 21,2^\circ = 2,2 \text{ cm}$$

### PROBLEMA 9

- a) Para calcular el ángulo de incidencia aplicamos la ley de Snell entre el primer y el segundo medio:

$$2,0 \cdot \sin \hat{i} = 1,6 \cdot \sin 60^\circ = 1,3856 \rightarrow$$

$$\rightarrow \sin \hat{i} = \frac{1,3856}{2} = 0,6928 \rightarrow \hat{i} = 43,85^\circ$$

- b) Puesto que tanto  $n_2$  como el ángulo de incidencia entre el segundo ( $60^\circ$ ) y el tercer medio son constantes se cumple:  $1,3856 = n_3 \cdot \sin \hat{r}_3$ , por ello al aumentar  $n_3$  debe disminuir  $\hat{r}_3$ . De modo que a partir de un valor de  $n_3$  la luz se propagará en el tercer medio. La situación límite se producirá para  $\hat{r}_3 = 90^\circ$ , en cuyo caso  $n_3 = 1,3856$  (en el applet se apreciará a partir de 1,39). Para  $n_3 > 1,3856$  la luz se refractará en el tercer medio disminuyendo el ángulo de refracción al aumentar el índice de refracción del tercer medio.

- c) En este caso podemos establecer el razonamiento en base a la ecuación:

$$n_1 \cdot \sin 43,85^\circ = 1,6 \cdot \sin \hat{r}_1 = 1,3 \cdot \sin \hat{r}_2$$

La disminución del primer índice de refracción ( $n_1$ ) implica una disminución de los ángulos de refracción, en principio en el segundo medio (recuerda que en la transición entre el segundo y tercer medio se produce el fenómeno de reflexión total). A partir del valor de  $n_1 = 1,876$  (en la applet se aprecia en 1,87) la luz se propagará por el tercer medio, disminuyendo los ángulos de refracción al disminuir el valor de  $n_1$ .

### PROBLEMA 10

- a) El alumno o alumna debe indicar que el fenómeno de dispersión implica separación de la luz en sus componentes. Para ello la luz debe ser compuesta y puede conseguirse este fenómeno por refracción, entre otros métodos. Para ello el medio en que se refracte la luz debe ser dispersivo; el índice de refracción debe variar apreciablemente con la longitud de onda asociada a la luz, y la refracción debe producir un cambio distinto de la dirección para cada componente del haz (como ocurre en un prisma). Por ello, todas las dispersiones no implican refracción y, por otra parte, todas las refracciones no producen la dispersión, como ocurre cuando la luz no es compuesta o en el caso de una lámina de caras paralelas.

- b) Cuando la luz atraviesa una lámina, de caras paralelas, se produce un desplazamiento lateral de la dirección del haz de luz. Por ello, aunque la luz incidente sea compuesta y se refracte dos veces, la luz no se dispersa, ya que las luces integrantes no modifican su dirección de propagación.

### PROBLEMA 11

El fenómeno de reflexión total sólo puede producirse cuando la luz pase del interior del prisma al aire. Para ello el ángulo de incidencia debe ser superior al ángulo límite. El valor del mismo se determina a partir de la ecuación:

$$1,6 \cdot \sin \hat{i}_{\text{límite}} = 1 \rightarrow \hat{i}_{\text{límite}} = \arcsin \left( \frac{1}{1,6} \right) = 38,68^\circ$$

Para verificar si se producirá el fenómeno de reflexión total deberemos determinar el ángulo de incidencia de la luz en la segunda cara del prisma. Para ello, calculamos el ángulo de refracción en la primera cara del prisma:

$$1 \cdot \sin 15^\circ = 1,6 \cdot \sin \hat{\beta}_1 \rightarrow \rightarrow \sin \hat{\beta}_1 = \frac{\sin 15^\circ}{1,6} = 0,1617 \rightarrow \hat{\beta}_1 = 9,31^\circ$$

Y puesto que  $\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2$  (ángulo de incidencia en la segunda cara) =  $60^\circ$ , establecemos:  $\hat{\beta}_2 = 60^\circ - 9,31^\circ = 50,69^\circ$ . Por tanto, como  $\hat{\beta}_2$  ( $50,69^\circ$ ) >  $\hat{i}_{\text{límite}}$  ( $38,68^\circ$ ) se producirá el fenómeno de reflexión total.

### PROBLEMA 12

- a) En este caso la luz atraviesa el prisma simétricamente y  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ , en consecuencia,  $\beta_1 = \beta_2 = 60^\circ/2 = 30^\circ$ . Para calcular el índice de refracción del prisma aplicamos la ley de Snell en la primera refracción:
- $$1,0 \cdot \sin 41,3^\circ = n \cdot \sin 30^\circ \rightarrow \rightarrow n = (\sin 41,3^\circ)/(\sin 30^\circ) = 1,32$$
- b) Este caso corresponde al de mínima desviación angular:
- $$\delta_{\text{mínimo}} = 2 \cdot \alpha - \theta = 28,6^\circ - 60^\circ = 22,6^\circ$$
- c) La frecuencia no se modifica al pasar la luz del aire al prisma. Sin embargo, su rapidez de propagación disminuye en el interior del prisma ( $v_{\text{luz}} = c / n_{\text{prisma}}$ ) y, en consecuencia, la longitud de la luz, en el interior del prisma, disminuye ( $v_{\text{luz,prisma}} \downarrow = N \cdot \lambda \downarrow$ )

## DIOPTRIO

### PROBLEMA 13

Teniendo en cuenta la fórmula del dioptrio esférico:

$$\frac{n_2}{s'} - \frac{n_1}{s} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$

Y aplicando las condiciones:  $n_1 = 1$ ,  $n_2 = 1,33$ ,  $R = 8 \cdot 10^{-3}$  m,  $s = -0,25$  cm, establecemos:

$$\frac{1,33}{s'} - \frac{1}{-0,25 \text{ m}} = \frac{1,33 - 1}{8 \cdot 10^{-3} \text{ m}}$$

Despejando  $s'$ , obtenemos:

$$s' = 0,0357 \text{ m} = 3,57 \text{ cm}.$$

### PROBLEMA 14

A la invariante de Abbe:

$$\frac{n_2}{s'} - \frac{n_1}{s} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$

le aplicamos las condiciones asociadas a los conceptos de focos para deducir las posiciones de las focales:

FOCO	Condiciones	Deducción de la distancia focal
Objeto (F)	$s = f; s' = \infty$	$\frac{n_2}{\infty} - \frac{n_1}{f} = \frac{n_2 - n_1}{R} \rightarrow f = -\frac{n_1}{n_2 - n_1} R$
Imagen (F')	$s = \infty; s' = f'$	$\frac{n_2}{f'} - \frac{n_1}{\infty} = \frac{n_2 - n_1}{R} \rightarrow f' = \frac{n_2}{n_2 - n_1} R$
Si sumamos las posiciones focales establecemos: $f + f' = R$		

Creemos oportuno que el alumnado no memorice las fórmulas de las focales sino que las deduzca a partir de la invariante de Abbe.

- a) Teniendo en cuenta que  $f + f' = R$ , establecemos:
- $$-20 \text{ cm} + 40 \text{ cm} = R. \text{ Por tanto, } R = 20 \text{ cm}.$$
- b) Para calcular el índice de refracción del medio 2 aplicamos la fórmula para determinar la posición del foco imagen ( $f'$ ):
- $$f' = \frac{n_2}{n_2 - n_1} R \rightarrow 40 \text{ cm} = \frac{n_2}{n_2 - 1} 20 \text{ cm} \rightarrow n_2 = 2$$
- c) Para calcular la posición de la imagen de un objeto  $s = -10$  cm aplicamos la invariante de Abbe:

$$\frac{2}{s'} - \frac{1}{-10 \text{ cm}} = \frac{2 - 1}{20 \text{ cm}} \quad s' = -40 \text{ cm}$$

Se puede confirmar este resultado mediante un diagrama de rayos y comprobar que la imagen es virtual, derecha y aumentada.

### PROBLEMA 15

En la resolución del problema debemos tener claro que el sentido positivo lo establece la propagación de la luz.

- a) El pez verá la imagen del gato, de modo que la luz pasa del agua al agua, siendo los datos:

$$s = -20 \text{ cm}, R = 40 \text{ cm}, n_1 = 1, n_2 = 4/3.$$

Aplicando la invariante de Abbe:

$$\frac{4/3}{s'} - \frac{1}{-20 \text{ cm}} = \frac{4/3 - 1}{40 \text{ cm}} \rightarrow s' = -32 \text{ cm}$$

Para calcular el aumento lateral aplicamos la fórmula:

$$A_L = \frac{n_1}{n_2} \cdot \frac{s'}{s} = \frac{1}{4/3} \cdot \frac{-32 \text{ cm}}{-20 \text{ cm}} = 1,2$$

- b) El gato verá la imagen del pez, de modo que la luz pasa del agua al aire, siendo los datos:

$$n_1 = 4/3, n_2 = 1, R = -40 \text{ cm}, s = -10 \text{ cm}.$$

Aplicando la invariante de Abbe:

$$\frac{1}{s'} - \frac{4/3}{-10 \text{ cm}} = \frac{1 - 4/3}{-40 \text{ cm}}$$

Despejando  $s'$ , obtenemos:  $s' = -8 \text{ cm}$ , es decir el gato verá al pez más cerca del cristal.

El aumento es:

$$A_L = \frac{n_1}{n_2} \cdot \frac{s'}{s} = \frac{4/3}{1} \cdot \frac{-8 \text{ cm}}{-10 \text{ cm}} = 1,066$$

- c) En este caso  $R = \infty$  y, en consecuencia:

Dioptrio plano: $\frac{n_2}{s'} = \frac{n_1}{s} \rightarrow s' = s \cdot \frac{n_2}{n_1}$	
En el caso de que el gato ve al pez, se cumple: $n_1 = 4/3, n_2 = 1, s = -10 \text{ cm}$	En el caso de que el pez ve al gato, se cumple: $s = -20 \text{ cm}, n_1 = 1, n_2 = 4/3$
$s' = -10 \text{ cm} \cdot \frac{1}{4/3} = -7,5 \text{ cm}$	$s' = -20 \text{ cm} \cdot \frac{4/3}{1} = -26,67 \text{ cm}$
En ambos caso el aumento lateral es uno; por ello $y = y'$ .	

### PROBLEMA 16

A la invariante de Abbe:

$$\frac{n_2}{s'} - \frac{n_1}{s} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$

le aplicamos las condiciones asociadas a los conceptos de focos para deducir las posiciones de las focales:

FOCO	Condiciones	Deducción de la distancia focal
Objeto (F)	$s = f; s' = \infty$	$\frac{n_2}{\infty} - \frac{n_1}{f} = \frac{n_2 - n_1}{R} \rightarrow f = -\frac{n_1}{n_2 - n_1} R$
Imagen (F')	$s = \infty; s' = f'$	$\frac{n_2}{f'} - \frac{n_1}{\infty} = \frac{n_2 - n_1}{R} \rightarrow f' = \frac{n_2}{n_2 - n_1} R$

Expresamos los índices de refracción de cada medio en función de las focales:

$$n_1 = -\frac{(n_2 - n_1)}{R} f; \quad n_2 = \frac{(n_2 - n_1)}{R} f'$$

Sustituyendo los índices de refracción en función de las focales en la invariante de Abbe:

$$\frac{(n_2 - n_1)}{R} f' \cdot \frac{1}{s'} - \frac{(n_2 - n_1)}{R} f \cdot \frac{1}{s} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$

Simplificando, establecemos:

$$\frac{f'}{s'} + \frac{f}{s} = 1$$

tal como queríamos demostrar.

### PROBLEMA 17

La ecuación del dioptrio plano es

$$\frac{n_2}{s'} = \frac{n_1}{s} \rightarrow s' = s \cdot \frac{n_2}{n_1}$$

Como el cociente  $n_2$  (agua) /  $n_1$  (aire)  $> 1$ , verá al pájaro más alto ( $s' > s$ ). Debemos insistir que este razonamiento sólo es correcto para ángulos de observación muy pequeños respecto a la vertical.

## LENTEs

### PROBLEMA 18

- a) La lente convergente hace confluir (converger) el haz de luz que la atraviesa en un punto (foco imagen,  $f' > 0$ ), mientras que la divergente separa ("divergen") el haz de luz al atravesarla ( $f' < 0$ ).

- b) La potencia de una lente en el aire se define como:  $P = \frac{1}{f'}$

y su unidad en el sistema internacional es la dioptría (D). Una potencia positiva implica que  $f' > 0$  (lente convergente) y una negativa que  $f' < 0$  (lente divergente).

### PROBLEMA 19

- a) Los datos del problema, según el convenio de signos, son:  
 $s = -10 \text{ cm} = -0,1 \text{ m}$ ;  $y = 2 \text{ mm}$ ;  $P = 5 \text{ D}$  (lente convergente).

En primer lugar, localizamos la posición de la imagen aplicando la ecuación de la lente:

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = P \rightarrow \frac{1}{s'} - \frac{1}{-0,1 \text{ m}} = 5 \text{ D}$$

Despejando  $s'$ , obtenemos:

$$s' = -\frac{1}{5} \text{ m} = -20 \text{ cm}$$

Para hallar el tamaño de la imagen calculamos el aumento:

$$A_L = \frac{s'}{s} = \frac{-20 \text{ cm}}{-10 \text{ cm}} = 2$$

El tamaño de la imagen es:

$$y' = A_L \cdot y = 2 \cdot 2 \text{ mm} = 4 \text{ mm}.$$

El alumnado debe usar el applet "*Las lentes y la formación de las imágenes*" del CD para comprobar, una vez introducidos los datos del problema, con el diagrama de rayos que la imagen es virtual, derecha y aumentada el doble, tal como indican los cálculos.

- b) Para calcular el radio de curvatura de la otra cara de la lente aplicamos la ecuación:

$$\frac{1}{f'} = \left( \frac{n_{\text{lente}} - n_{\text{medio}}}{n_{\text{medio}}} \right) \cdot \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

Aplicando las condiciones:  $1/f' = 5 \text{ D}$ ,

$n_{\text{lente}} = 1,5$ ,  $n_{\text{medio}} = 1$ ,  $R_1 = 0,1 \text{ m}$ , establecemos la ecuación:

$$5 \text{ D} = \left( \frac{1,5 - 1}{1} \right) \cdot \left( \frac{1}{0,1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

Despejando  $R_2$ , obtenemos:  $R_2 = \infty$ . Es decir, su cara es plana.

### PROBLEMA 20

- a) Aplicando la definición de la focal imagen establecemos  $f' = 20 \text{ cm}$ .  
b) Aplicando las condiciones:

$s = -100 \text{ cm}$  y  $f' = 20 \text{ cm}$  a la invariante de Abbe, establecemos la ecuación:

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{-100 \text{ cm}} = \frac{1}{20 \text{ cm}}$$

Despejando  $s'$ , establecemos:

$$s' = +25 \text{ cm}$$

El aumento lateral es:

$$A_L = \frac{s'}{s} = \frac{25 \text{ cm}}{-100 \text{ cm}} = -\frac{1}{4}$$

que significa que la imagen es invertida, real y reducida.

El alumnado debe usar el applet "*Las lentes y la formación de las imágenes*", del CD para comprobar, una vez introducidos los datos del problema, con el diagrama de rayos que la imagen es real, invertida y la cuarta parte del objeto, tal como indican los cálculos.

### PROBLEMA 21

- a) El que la lente sea convergente o divergente depende de índice de refracción del medio. Si  $n_{\text{lente}} > n_{\text{medio}}$  la lente será convergente, en el caso contrario será divergente.  
b) Para calcular la posición de la focal imagen aplicaremos la ecuación:

$$\frac{1}{f'} = \left( \frac{n_{\text{lente}} - n_{\text{medio}}}{n_{\text{medio}}} \right) \cdot \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

Teniendo en cuenta las características geométricas ( $R_1 = -6,4 \cdot 10^{-2} \text{ m}$ ,  $R_2 = 4,2 \cdot 10^{-2} \text{ m}$ ), el índice de refracción de la lente ( $n_{\text{lente}} = 1,2$ ) y del medio.

En el aire ( $n_{\text{medio}} = 1$ ):

$$\frac{1}{f'} = \left( \frac{1,2 - 1}{1} \right) \cdot \left( \frac{1}{-6,4 \cdot 10^{-2}} - \frac{1}{4,2 \cdot 10^{-2}} \right)$$

Despejando  $f'$ , obtenemos:

$$f' = -0,127 \text{ m} = -12,7 \text{ cm}$$

En el agua ( $n_{\text{medio}} = 1,3$ ):

$$\frac{1}{f'} = \left( \frac{1,2 - 1,3}{1,3} \right) \cdot \left( \frac{1}{-6,4 \cdot 10^{-2}} - \frac{1}{4,2 \cdot 10^{-2}} \right)$$

Despejando  $f'$ , obtenemos:

$$f' = 0,33 \text{ m} = 33 \text{ cm}$$

- c) En este caso:  $y = 10 \text{ cm}$ ,  $s = -12 \text{ cm}$ ;  $f' = -12,7 \text{ cm}$   
Para calcular la posición de la imagen aplicamos la ecuación:

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{-12 \text{ cm}} = \frac{1}{-12,7 \text{ cm}}$$

Despejando, obtenemos:

$$s' = -6,17 \text{ cm}$$



El aumento lateral será:

$$A_L = \frac{s'}{s} = \frac{-6,17 \text{ cm}}{-12 \text{ cm}} = +0,514$$

Por tanto, el tamaño de la imagen es:

$$y' = 0,514 \cdot 10 \text{ cm} = 5,14 \text{ cm}.$$

Una vez más el applet "Las lentes y la formación de las imágenes" del CD, sirve para comprobar con los datos anteriores y el diagrama de rayos, que la imagen es: virtual, derecha y reducida. En este curso para visualizar mejor el diagrama se recomienda usar la escala 1 cm (10 unidades ( $s = -120$ ;  $f' = -127$ )).

- d) En este caso:  $y = 10 \text{ cm}$ ,  $s = -12 \text{ cm}$ ;  $f' = 33 \text{ cm}$

Para calcular la posición de la imagen aplicamos la ecuación:

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{-12 \text{ cm}} = \frac{1}{33 \text{ cm}}$$

Despejando, obtenemos:

$$s' = -18,85 \text{ cm}$$

El aumento lateral será:

$$A_L = \frac{s'}{s} = \frac{-18,85 \text{ cm}}{-12 \text{ cm}} = +1,57$$

Por tanto, el tamaño de la imagen es:

$$y' = 1,57 \cdot 10 \text{ cm} = 15,7 \text{ cm}$$

La imagen es virtual, derecha y aumentada.

## PROBLEMA 22

Según las condiciones del enunciado debe verificarse:

$$A_L = \frac{s'}{s} = -2 \rightarrow s' = -2s$$

Aplicando la ecuación de las lentes, establecemos:

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{0,33 \text{ m}} = 3 \text{ D} \rightarrow \frac{1}{-2s} - \frac{1}{s} = 3$$

Despejando  $s$ , obtenemos:  $s = -0,5 \text{ m}$ .

Y por tanto,  $s' = -2 (-0,5 \text{ m}) = 1 \text{ m}$

El applet "Las lentes y la formación de las imágenes" del CD corrobora los resultados del problema.

## PROBLEMA 23

- a) Para calcular la rapidez de la luz, en el interior de la lente, aplicamos la ecuación:

$$1,8 = \frac{c}{v_{\text{plástico}}} \rightarrow v_{\text{plástico}} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m}}{1,8} \frac{\text{m}}{\text{s}} = 1,67 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

- b) Puesto que la lente es simétrica debe tener el mismo valor de los radios en ambas caras. Al ser bicóncava los radios, según el criterio de signos, son:  $R_1 = -R$ ,  $R_2 = R$ . Si aplicamos la ecuación del constructor de lentes, establecemos:

$$\frac{1}{f'} = \left( \frac{1,8 - 1}{1} \right) \cdot \left( \frac{1}{-R} - \frac{1}{R} \right) = -2 \text{ D}$$

Despejando  $R$ , obtenemos:  $R = 0,8 \text{ m}$ .

- c) La lente, en el aire, es divergente por lo que siempre originará imágenes virtuales, derechas y más pequeñas. En este caso debe verificarse:

$$A_L = \frac{s'}{s} = \frac{1}{2} \rightarrow s' = \frac{s}{2}$$

Aplicando la ecuación de las lentes:

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = -2 \text{ D} \rightarrow \frac{2}{s} - \frac{1}{s} = -2 \text{ D} \rightarrow s = -\frac{1}{2} \text{ m}$$

Con el mismo el applet "Las lentes y la formación de las imágenes" del CD, se comprueba que en una lente divergente ( $f' = -50 \text{ cm}$ ) cuando el objeto se sitúa en  $s = -50 \text{ cm}$  se origina una imagen virtual, derecha y de tamaño la mitad del objeto, en  $s' = -25 \text{ cm}$ .

## PROBLEMA 24

En una lente convergente, potencia positiva, las imágenes virtuales se originan cuando el objeto se localiza entre el vértice de la lente y el foco ( $f < s < 0$ ). En ese caso las imágenes son derechas y aumentadas, por tanto:

$$A_L = \frac{s'}{s} = 2$$

En consecuencia:  $s' = 2s$

Aplicando la invariante de Abbe:

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = 5 \text{ D} \rightarrow \frac{1}{2s} - \frac{1}{s} = 5 \text{ D}$$

Despejando,  $s$  obtenemos:

$$s = -0,1 \text{ m} = -10 \text{ cm}$$

## PROBLEMA 25

- a) Para calcular la potencia de la lente en el aire partimos de su distancia focal  $f = 35 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ . Por tanto,

$$P = \frac{1}{35 \cdot 10^{-3}} \text{ D} = 28,57 \text{ D}$$

- b) Al ser la lente biconvexa los radio de sus caras, según el convenio de signos, son:  $R_1 = 3 \text{ cm}$  y  $R_2 = -5 \text{ cm}$ . Por ello, la ecuación que relaciona la posición focal con los radios es:



$$\frac{1}{3,5 \text{ cm}} = \left( \frac{n_{\text{lente}} - 1}{1} \right) \cdot \left( \frac{1}{3 \text{ cm}} - \frac{1}{-5 \text{ cm}} \right)$$

Despejando,  $n_{\text{lente}}$  se obtiene:

$$n_{\text{lente}} = \frac{43}{28}$$

- c) En este caso  $s = -1 \text{ m}$ , y por determinar  $s'$  aplicamos la ecuación:

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{-1 \text{ m}} = 28,57 \text{ D} \rightarrow \frac{1}{s'} + 1 = 28,57 \text{ D} \rightarrow$$

$$\rightarrow s' = 0,0363 \text{ m} = 36,3 \text{ mm}$$

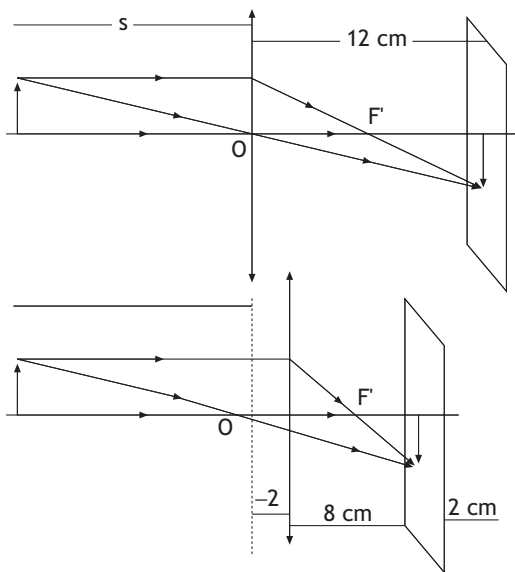
Y el aumento lateral es:

$$A_L = \frac{s'}{s} = \frac{0,0363 \text{ m}}{-1 \text{ m}} = -0,0363$$

### PROBLEMA 26

En primer lugar para poder proyectar la imagen debe ser real y, en consecuencia, la lente sólo puede ser convergente ( $P > 0$ ).

Analizando las condiciones del enunciado establecemos dos situaciones:



- a) Primera situación,  $s = x$  (según nuestro convenio de signos  $x < 0$ )  $\rightarrow s' = 12 \text{ cm}$ .
- b) Segunda condición,  $s = x - 2 \text{ cm}$  (debemos tener en cuenta el convenio de signos)  $\rightarrow s' = 8 \text{ cm}$  (al alejar la lente 2 cm reducimos la distancia lente- pantalla a 10 cm y posteriormente debemos acercar la pantalla otros 2 cm a la lente, es decir  $d_{\text{pantalla} - \text{lente}} = 8 \text{ cm}$ ).

Para plantear un sistema de ecuaciones aplicaremos la ecuación de la lente a las dos situaciones.

Ecuación 1.  $\frac{1}{12 \text{ cm}} - \frac{1}{x} = P$

Ecuación 2.  $\frac{1}{8 \text{ cm}} - \frac{1}{x - 2} = P$

Resolviendo el sistema por igualación, establecemos:

$$\frac{1}{12 \text{ cm}} - \frac{1}{x} = \frac{1}{8 \text{ cm}} - \frac{1}{x - 2}$$

Resolviendo,  $\frac{1}{12} - \frac{1}{8} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x - 2}$

$$\frac{-4}{96} = \frac{-2}{x^2 - 2x}$$

Planteamos la ecuación:

$2x^2 - 4x - 96 = 0 \rightarrow x^2 - 2x - 48 = 0$ , que al resolverla se obtiene la solución negativa (recordemos que según el convenio de signos  $x < 0$ )  $x = -6 \text{ cm}$  y otra positiva,  $x = 8 \text{ cm}$ , que no tiene significado físico.

Por tanto, la posición focal de la lente es:

$$P = \frac{1}{f'} = \frac{1}{12 \text{ cm}} - \frac{1}{-6 \text{ cm}} = \frac{3}{12 \text{ cm}}$$

Despejando  $f'$ :  $f' = 4 \text{ cm}$

### PROBLEMA 27

- a) La única lente que puede originar imágenes reales, que se proyecten en una pantalla, son las convergentes. Puesto que la imagen debe ser aumentada y real deberá ser invertida (recuerda que la derechas y aumentadas son siempre virtuales). Por tanto, el aumento lateral es  $A_L = -3$ . Esto nos permite establecer la primera ecuación:

$$A_L = \frac{s'}{s} = -3 \rightarrow s' = -3s \text{ (ecuación -1)}$$

Por otra parte, como la distancia objeto - imagen es de 4 m establecemos, según el criterio de signos ( $s < 0$ ), la segunda ecuación:

$$-s + s' = 4 \text{ m (ecuación -2)}$$

Al resolver el sistema de ecuaciones planteado, hallamos:

$$s = -1 \text{ m}; s' = 3 \text{ m}$$

Para calcular la potencia de la lente a la ecuación,

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = P \text{ aplicamos las condiciones:}$$

$$s = -1 \text{ m}; s' = 3 \text{ m}$$

obteniendo:  $\frac{1}{3 \text{ m}} - \frac{1}{-1 \text{ m}} = P = \frac{4}{3} \text{ D}$

La posición focal es:  $f' = \frac{3}{4} \text{ m}$

Se puede reproducir la construcción geométrica usando el applet "*Las lentes y la formación de las imágenes*" del CD. Para ello debe indicar los valores:

$$f' = 75 \text{ cm y } s = -100 \text{ cm.}$$

- b) En este caso, como la potencia de la lente es  $4/3 \text{ D}$ , deben verificarse las ecuaciones:

Ecuación 1,  $\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{4}{3}$

Ecuación 2,  $-s + s' = 4 \text{ m}$

Al resolver el sistema por sustitución se establece,

$$\frac{1}{4+s} - \frac{1}{s} = \frac{4}{3}$$

Que al desarrollarla da la ecuación cuadrática:

$$4s^2 + 16s + 12 = 0 \rightarrow s^2 + 4s + 3 = 0$$

Al resolver la ecuación se obtienen dos posibles soluciones:

$s = -1 \text{ m}$ , que corresponde al apartado anterior ( $s' = 3 \text{ m}$ )

$s = -3 \text{ m}$ , que corresponde a  $s' = 1 \text{ m}$ . En este caso el aumento correspondiente a la imagen es:

$$A_L = \frac{s'}{s} = \frac{1 \text{ m}}{-3 \text{ m}} = -\frac{1}{3}$$

Por tanto, el objeto estará situado 3 m por delante de la lente y la pantalla a 1 m por detrás de la lente, originando una imagen tres veces menor que el objeto e invertida.

## ESPEJOS

### PROBLEMA 28

- a) La potencia de una lente depende de las propiedades ópticas del medio ( $n_{\text{medio}}$ ) y la lente ( $n_{\text{lente}}$ ) y de las características geométricas de la lente ( $R_1$  y  $R_2$ ). Sin embargo, la potencia de un espejo sólo depende de su radio de curvatura ( $P = 2 / R$ ) ya que forma la imagen por reflexión (sin cambiar la luz de medio).
- b) Con la parte cóncava de la cuchara observamos una imagen menor e invertida mientras que en la cara convexa se observa una imagen derecha, menor y virtual.

### PROBLEMA 29

Del enunciado establecemos los siguientes datos:  
 $y = 4 \text{ cm}$ ,  $R = -40 \text{ cm}$  (espejo cóncavo)

- a) En este caso  $s = -60 \text{ cm}$

Aplicando la ecuación de los espejos:

$$\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{2}{R}$$

Establecemos:

$$\frac{1}{s'} + \frac{1}{-60 \text{ cm}} = \frac{2}{-40 \text{ cm}}$$

Despejando, se obtiene:  $s' = -30 \text{ cm}$ .

El aumento lateral de la imagen es:

$$A_L = -\frac{s'}{s} = -\frac{-30 \text{ cm}}{-60 \text{ cm}} = -\frac{1}{2}$$

Por tanto, el tamaño de la imagen es

$$y' = A_L \cdot 4 \text{ cm} = -2 \text{ cm}$$

El applet "*Los espejos y la formación de las imágenes*" del CD, sirve para comprobar que en un espejo cóncavo ( $R = -40 \text{ cm}$ ) cuando el objeto se sitúa en  $s = -60 \text{ cm}$  se origina una imagen real, invertida y de tamaño la mitad de la del objeto, en  $s' = -30 \text{ cm}$ . En el applet debemos considerar la escala 1 cm/5 unidades. En consecuencia  $R = -200 \text{ u}$  y  $s = -300 \text{ unidades}$ .

- b) Ahora  $s = -10 \text{ cm}$ . Por ello, establecemos la ecuación:

$$\frac{1}{s'} + \frac{1}{-10 \text{ cm}} = \frac{2}{-40 \text{ cm}}$$

Al despejar  $s'$ , se obtiene:

$$s' = +20 \text{ cm.}$$

El aumento lateral de la imagen es:

$$A_L = -\frac{s'}{s} = -\frac{20 \text{ cm}}{-10 \text{ cm}} = 2$$

Por tanto, el tamaño de la imagen es:

$$y' = A_L \cdot 4 \text{ cm} = 8 \text{ cm}$$

El mismo applet "*los espejos y la formación de las imágenes*" del CD, verifica que en un espejo cóncavo ( $R = -40 \text{ cm}$ ) cuando el objeto se sitúa en  $s = -10 \text{ cm}$  se origina una imagen virtual, derecha y de doble tamaño que el objeto, en  $s' = 20 \text{ cm}$  (por detrás del espejo). Usar la escala 1 cm/5 unidades.

### PROBLEMA 30

Según el enunciado:  $R = 40 \text{ cm}$  (espejo convexo),  
 $s = -25 \text{ cm}$ ,  $y = 5 \text{ cm}$ .

Aplicando la ecuación de los espejos, establecemos:

$$\frac{1}{s'} + \frac{1}{-25 \text{ cm}} = \frac{2}{-40 \text{ cm}}$$

Despejando  $s'$ , obtenemos:  $s' = \frac{100}{9} \text{ cm}$

El aumento lateral de la imagen es:

$$A_L = -\frac{s'}{s} = -\frac{100/9}{-25 \text{ cm}} = \frac{4}{9}$$

Por tanto, el tamaño de la imagen es:

$$y' = A_L \cdot 5 \text{ cm} = 20/9 \text{ cm}$$

Con el applet “Los espejos y la formación de las imágenes” del CD, comprobamos que en un espejo convexo ( $R = 40 \text{ cm}$ ) cuando el objeto se sitúa en  $s = -25 \text{ cm}$  se origina una imagen virtual, derecha y de inferior tamaño que del objeto, en  $s' = 11,11 \text{ cm}$  (por detrás del espejo).

Para ello asignaremos la escala 1 cm/5 unidades. En consecuencia el radio será de 200 unidades.

### PROBLEMA 31

El espejo es cóncavo ( $R < 0$ ) puesto que sólo este tipo de espejos pueden originar imágenes reales.

En base al enunciado cuando  $s = -50 \text{ cm}$  el aumento lateral es  $A_L = -2$ . Por tanto, establecemos:

$$A_L = -\frac{s'}{s} = -2 \rightarrow s' = 2s = -100 \text{ cm}$$

Aplicando la ecuación de los espejos:

$$\frac{1}{-100 \text{ cm}} + \frac{1}{-50 \text{ cm}} = \frac{2}{R}$$

Despejando  $R$ , obtenemos:  $R = -\frac{200}{3} \text{ cm}$

### PROBLEMA 32

a) En primer lugar calcularemos el radio de curvatura del espejo a partir de la situación:  $S = -8 \text{ cm} \rightarrow s' = 10 \text{ cm}$

Aplicando la ecuación de los espejos:

$$\frac{1}{10 \text{ cm}} + \frac{1}{-8 \text{ cm}} = \frac{2}{R}$$

Despejando  $R$ , se obtiene:  $R = -80 \text{ cm}$ .

b) En el caso de que  $s = -25 \text{ cm}$ , la posición de la imagen se calcula a partir de la ecuación:

$$\frac{1}{s'} + \frac{1}{-25 \text{ cm}} = \frac{2}{-80 \text{ cm}}$$

Despejando  $s'$ , se obtiene:  $s' = 66,67 \text{ cm}$ .

El aumento lateral de la imagen es:

$$A_L = -\frac{s'}{s} = -\frac{66,67 \text{ cm}}{-50 \text{ cm}} = 1,3$$

Por tanto, el tamaño de la imagen es

$$y' = A_L y = 1,3 y$$

El applet “Los espejos y la formación de las imágenes” del CD, usando la escala 1 cm/2 unidades, confirma que en un espejo cóncavo ( $R = -80 \text{ cm}$ ;  $-160$  unidades) cuando el objeto se sitúa en  $s = -25 \text{ cm}$  ( $-50$  unidades) se origina **una imagen virtual, derecha y de tamaño 1,3 veces mayor a la del objeto**, en  $s' = 66,67 \text{ cm}$  ( $133$  unidades por detrás del espejo). Sin embargo si  $s = -50 \text{ cm}$ , se origina **una imagen real, invertida y de tamaño cuatro veces mayor a la del objeto**, en  $s' = -200 \text{ cm}$  (por delante del espejo), resultado expuesto en el solucionario y que falta proponer en el enunciado (características cuando  $s = -50 \text{ cm}$ ).

### PROBLEMA 33

Puesto que el espejo es convexo las imágenes observadas serán siempre virtuales, derechas y más pequeñas que los objetos reflejados. En este caso  $s = -10 \text{ m}$  y  $R = 1,2 \text{ m}$ .

Para calcular la posición de la imagen, respecto al vértice del espejo, aplicamos la ecuación:

$$\frac{1}{s'} + \frac{1}{-10 \text{ m}} = \frac{2}{1,2 \text{ m}}$$

Despejando, obtenemos  $s' = 0,57 \text{ m}$ ; como es positiva significa que está localizada detrás del espejo (virtual).

El aumento de la imagen es:

$$A_L = -\frac{s'}{s} = -\frac{0,566}{-10 \text{ cm}} = 0,0566$$

Es decir, es derecha y reducida.

El tamaño de la imagen es:

$$y' = 0,0566 \cdot 1,8 \text{ m} = 0,102 \text{ m}$$

### PROBLEMA 34

En este caso  $f' = -20 \text{ cm}$ , por ser el espejo cóncavo.

a) En un espejo cóncavo para que la imagen sea real y aumentada debe ser invertida. Por ello:

$$A_L = -\frac{s'}{s} = -2$$

En consecuencia,  $s' = 2 \cdot s$ .

Para hallar las posiciones, respecto al vértice del espejo, sustituimos la relación en la ecuación de los espejos:

$$\frac{1}{2s} + \frac{1}{s} = \frac{1}{-20 \text{ cm}}$$

Despejando  $s$ , obtenemos:

$$s = -30 \text{ cm} \text{ y } s' = -60 \text{ cm}$$

Es decir debemos situar el objeto 30 cm por delante del espejo y observaremos una imagen a 60 cm por delante.

- b) Si la imagen es virtual y aumentada debe ser derecha. Por tanto.

$$A_L = -\frac{s'}{s} = 2$$

En consecuencia,  $s' = -2 \cdot s$ .

Para hallar las posiciones, respecto al vértice del espejo, sustituimos la relación en la ecuación de los espejos:

$$\frac{1}{-2s} + \frac{1}{s} = \frac{1}{-20 \text{ cm}}$$

Despejando, obtenemos:

$$s = -10 \text{ cm} \text{ y } s' = 20 \text{ cm}$$

es decir debemos situar el objeto 10 cm por delante del espejo y observaremos una imagen virtual a 20 cm por detrás del espejo.

## EL OJO, INSTRUMENTOS ÓPTICOS Y FENÓMENOS ASOCIADOS AL CARÁCTER ONDULATORIO

### PROBLEMA 35

El *punto próximo* es la distancia mínima a la que puede enfocar objetos el ojo. Esta distancia varía con la edad pero normalmente se toma de referencia la distancia de 25 cm. La máxima distancia a la que puede enfocar el ojo se denomina *punto remoto*; para adultos normales es prácticamente infinita. Estos puntos de referencia para el enfoque del ojo están relacionados con los problemas de visión más habituales.

### PROBLEMA 36

- a) Para calcular la distancia del cristalino (lente convergente) a la retina (pantalla) asimilamos el sistema como una lente en que se verifica:

$$f' = 15 \text{ mm}, s = -\infty, s' = d$$

Aplicando la ecuación de las lentes:

$$\frac{1}{d} - \frac{1}{-\infty} = \frac{1}{15 \text{ mm}}$$

hallamos,  $d = 15 \text{ mm}$

- b) Para establecer las características de la imagen calculamos la posición de su imagen respecto a la lente (cristalino) y, a continuación, calculamos su aumento.

Situación:  $s = -50 \text{ m}$ ,  $y = 10 \text{ m}$ ,  $f' = 15 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ .

Calculamos  $s'$ , aplicando la ecuación de la lente:

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{-50 \text{ m}} = \frac{1}{15 \cdot 10^{-3} \text{ m}}$$

Despejando  $s'$ , obtenemos:

$$s' = 15,0045 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

El aumento es:

$$A_L = \frac{15,0045 \cdot 10^{-3} \text{ m}}{-50 \text{ m}} = -3 \cdot 10^{-4}$$

es decir, la imagen debe formarse en la retina ( $d = 15 \text{ mm}$ ) de forma invertida y muy reducida para poder ser percibida ( $y' = -3 \text{ mm}$ )

Situación:  $s = -100 \text{ m}$ ,  $y = 10 \text{ m}$ ,  $f' = 15 \cdot 10^{-3} \text{ m}$

Calculamos  $s'$ , aplicando la ecuación de la lente:

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{-100 \text{ m}} = \frac{1}{15 \cdot 10^{-3} \text{ m}}$$

Despejando  $s'$ , obtenemos:

$$s' = 15,0023 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

El aumento es:

$$A_L = \frac{15,0023 \cdot 10^{-3} \text{ m}}{-100 \text{ m}} = -15,0023 \cdot 10^{-5}$$

Ahora, la imagen debe seguir formándose en la retina ( $d = 15 \text{ mm}$ ) de forma invertida y mucho más reducida, por encontrarse el árbol más lejos, para poder ser percibida ( $y' = -1,5 \text{ mm}$ ).

El hecho de que la imagen se origine siempre en la retina es una consecuencia del valor tan pequeño de la focal del cristalino. La imagen debe ser siempre muy reducida, con ello el ojo tiene un campo de visión amplio. Al alejar la posición del objeto, respecto al ojo, se conserva la posición de la imagen y disminuye proporcionalmente el tamaño de la imagen.

### PROBLEMA 37

Para corregir la posición del punto remoto, que en un ojo normal es el infinito, y que en esta persona no va más allá de 2 m, hay que colocar una lente que "acerque" un objeto situado muy lejos ( $s = -\infty$ ) hasta el punto de visión remota del ojo ( $s' = -2 \text{ m}$ ) y forme imágenes virtuales de objetos lejanos, a una distancia igual o menor a 2 m, derechas y situadas delante y muy próximas a la lente, para que hagan de objeto del cristalino. Como sabemos, esto se consigue con lentes divergentes, que siempre producen imágenes virtuales, derechas, más pequeñas y situadas próximas a la lente.

En nuestro caso  $s = -\infty$  y  $s' = -2 \text{ m}$ ; aplicando la ecuación de las lentes  $\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'}$ , tenemos:

$$\frac{1}{-2 \text{ m}} - \frac{1}{-\infty} = \frac{1}{f'}; \quad \frac{1}{f'} = -\frac{1}{2 \text{ m}} = -0,5 \text{ m}^{-1}; \quad f' = -2 \text{ m}$$

La potencia  $P = \frac{1}{f'} = -0,5 \text{ D}$ ; negativa por ser divergente

### PROBLEMA 38

En primer lugar, analizaremos la corrección del punto próximo:

En este caso el ojo de esta persona enfoca sobre la retina aquellos objetos que se hallan como mínimo a 75 cm; por tanto tenemos que colocar una lente que "lleve" el punto próximo ( $s = -25 \text{ cm}$ ) a la posición  $s' = -75 \text{ cm}$ , o dicho de otro modo, que forme imágenes virtuales de los objetos que se encuentren a 25 cm a la distancia de 75 cm, que es donde está el punto próximo.

Para ello debemos utilizar una lente tipo lupa, una lente convergente de distancia focal tal que la imagen se forme como mínimo a 75 cm del cristalino:

En este caso,  $s = -25 \text{ cm}$ ,  $s' = -75 \text{ cm}$ , y por ello:

$$\frac{1}{-75 \text{ cm}} - \frac{1}{-25 \text{ cm}} = \frac{1}{f'}$$

Despejando  $f'$ , obtenemos:  $f' = \frac{75}{2} \text{ cm} = 0,375 \text{ m}$ . Por tanto,

$$P = \frac{1}{0,375 \text{ m}} = 2,67 \text{ D}$$

Para corregir el punto lejano debemos usar una lente que origine la imagen de un objeto situado en  $s = -\infty$  en  $s' = -5 \text{ m}$ . Por tanto:

$$\frac{1}{-5 \text{ m}} - \frac{1}{\infty} = \frac{1}{f'} = P$$

En consecuencia,  $P = -0,2 \text{ D}$

### PROBLEMA 39

El esquema del microscopio se muestra en el libro de texto.

El microscopio más sencillo consiste en un sistema de dos lentes, separadas entre sí una cierta distancia, con las que se pretende conseguir el mayor aumento posible.

El aumento del microscopio es el producto de los que consiguen cada una de las lentes y tendrá signo negativo, puesto que la imagen final es invertida respecto al objeto observado.

### PROBLEMA 40

En este caso las condiciones son:  $s = -3,8 \cdot 10^8 \text{ m}$ ,  $f' = R/2 = -8 \text{ m} / 2 = -4 \text{ m}$ .

Aplicando la ecuación de los espejos (la imagen se obtiene por reflexión de la luz procedente de la Luna):

$$\frac{1}{s'} + \frac{1}{-3,8 \cdot 10^8 \text{ m}} = \frac{1}{-4 \text{ m}}$$

Despejando  $s'$ , obtenemos:  $s' \approx -4$ . Es decir, como la Luna puede considerarse un objeto muy alejado, prácticamente en el infinito, su imagen se originará en el foco del telescopio.

El aumento de la imagen será:

$$A_L = -\frac{s'}{s} = -\frac{-4}{-3,8 \cdot 10^8} \approx -1 \cdot 10^{-8}$$

El tamaño de la imagen será:

$$y' = -1 \cdot 10^{-8} 3,6 \cdot 10^6 \text{ m} = -3,6 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

### PROBLEMA 41

La aberración cromática se puede producir en los telescopios de refracción por la dispersión de la luz policromática. Este fenómeno actualmente se corrige usando sistemas de lentes con distintos índices de refracción. Por el contrario, en los telescopios de reflexión no se produce la dispersión puesto que la imagen se origina por la reflexión de la luz.

### PROBLEMA 42

La dimensión del máximo central es inversamente proporcional al tamaño del cabello. Para calcular el grosor del cabello (a) se determina la posición del primer mínimo

$\left( y = \frac{\text{dimensiones del máximo central}}{2} \right)$ , respecto al

centro del máximo central, y se aplica la relación:  $a = \frac{\lambda}{y} L$ , siendo  $L$  la distancia del cabello a la pantalla.

## 4.3 SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS DE LA AUTOEVALUACIÓN

### EJERCICIO 1

- El fenómeno de reflexión total sólo puede producirse cuando la luz pase de un medio de mayor índice de refracción a otro de menor. Por eso cuando la luz pasa del aire ( $n_{\text{aire}} = 1$ ) al agua ( $n_{\text{agua}} = 4/3$ ) no puede producirse este fenómeno.
- En primer lugar determinamos el ángulo de incidencia ( $\theta$ ) del rayo en la cara donde se produce la reflexión total:

$$\frac{3}{2} \cdot \sin \theta = \frac{4}{3} \cdot \sin 90^\circ$$

Despejando  $\theta$ , obtenemos:

$$\theta = \arcsin \frac{8}{9} = 62,73^\circ$$

El ángulo de refracción del rayo incidente sobre la cara vertical se puede obtener al ser complementario a  $\theta$ :

$$\hat{r} = 90^\circ - 62,73^\circ = 27,27^\circ$$

El ángulo de incidencia se calcula aplicando la ley de Snell:

$$\frac{4}{3} \sin \hat{i} = \frac{3}{2} \sin 27,27^\circ$$

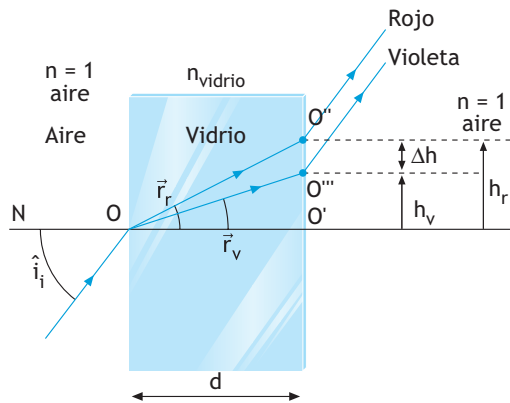
Despejando:  $\hat{i} = 31^\circ$

### EJERCICIO 2

- a) Para dibujar las trayectorias de los rayos debemos calcular los rayos de refracción del rayo violeta y el rojo que componen el haz incidente.

Rayo	Ley de Snell	Ángulo de refracción
Rojo	$1 \cdot \sin 60^\circ = 1,4 \cdot \sin \hat{r}_r$	$\hat{r}_r = 38,21^\circ$
Violeta	$1 \cdot \sin 60^\circ = 1,6 \cdot \sin \hat{r}_v$	$\hat{r}_v = 32,78^\circ$

El dibujo esquemático corresponde a la figura anexa.



- b) Para determinar la altura de salida de cada rayo respecto a  $O'$  aplicaremos el concepto de tangente:

$$\tan \hat{r} = \frac{h}{d} \rightarrow h = d \cdot \tan \hat{r}$$

Rayo	Altura de salida respecto a $O'$	Altura
Rojo	$h = 1 \text{ cm} \cdot \tan 38,21^\circ$	0,787 cm
Violeta	$h = 1 \text{ cm} \cdot \tan 32,78^\circ$	0,644 cm

- c) En este caso la diferencia de altura de salida es:

$$\Delta h = h_{\text{rojo}} - h_{\text{violeta}} = 1 \text{ cm}$$

Teniendo en cuenta que  $h = d \cdot \tan \hat{r}$

Establecemos:

$$1 \text{ cm} = d (\tan 38,21^\circ - \tan 32,74^\circ)$$

Por tanto;  $d = \frac{1 \text{ cm}}{0,144} = 7 \text{ cm}$

### EJERCICIO 3

- a) Al analizar los diagramas expuestos en el libro o las simulaciones propuestas en los applets del CD se establece que tanto las lentes divergentes como los espejos convexos dan lugar a imágenes *virtuales, derechas y reducidas* respecto al objeto de referencia.

- b) Determinación de las características de la imagen originada por la **lente**. Condiciones iniciales:

$$P = -10 \text{ D}, s = -0,15 \text{ m}, y = 5 \text{ cm}.$$

Aplicar de la invariante de Abbe:

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = -10 \text{ D} \rightarrow \frac{1}{s'} - \frac{1}{-0,15} = -10 \text{ D}$$

obtenemos la posición de la imagen:

$$s' = -0,06 \text{ m} = -6 \text{ cm}$$

El aumento de la imagen es:

$$A_L = \frac{s'}{s} = \frac{-6 \text{ cm}}{-15 \text{ cm}} = 0,4$$

El tamaño de la imagen es:

$$y' = 0,4 \cdot 5 \text{ cm} = 2 \text{ cm}$$

Determinación de las características de la imagen originada por el **espejo**. Condiciones iniciales:

$$P = +10 \text{ D}, s = -0,15 \text{ m}, y = 5 \text{ cm}$$

Aplicar de la invariante de Abbe:

$$\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = +10 \text{ D} \rightarrow \frac{1}{s'} + \frac{1}{-0,15} = +10 \text{ D}$$

Obtenemos la posición de la imagen:

$$s' = 0,06 \text{ m} = 6 \text{ cm}$$

El aumento de la imagen es:  $A_L = -\frac{s'}{s} = -\frac{6 \text{ cm}}{-15 \text{ cm}} = 0,4$

El tamaño de la imagen es:

$$y' = 0,4 \cdot 5 \text{ cm} = 2 \text{ cm}$$

Si comparamos las características de la imagen del mismo objeto, a la misma posición, respecto a la lente diver-

gente y respecto el espejo comprobamos que son idénticas pero en el espejo se origina detrás del mismo mientras que en la lente se visualiza por delante.

#### EJERCICIO 4

- a) Para calcular las posiciones de las imágenes aplicamos la invariante de Abbe de las lentes:

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'}$$

En el caso de que  $s = -30$  cm, planteamos la ecuación:

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{-30 \text{ cm}} = \frac{1}{20 \text{ cm}}$$

Resolviendo obtenemos:  $s' = 60$  cm.

El aumento de la imagen es:  $A_L = \frac{s'}{s} = \frac{60 \text{ cm}}{-30 \text{ cm}} = -2$

Por tanto, el tamaño de la imagen es:

$$y' = -2 \cdot 1 \text{ cm} = -2 \text{ cm}$$

La imagen es real, invertida y aumentada respecto al objeto.

En el caso de que  $s = -15$  cm, planteamos la ecuación:

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{-15 \text{ cm}} = \frac{1}{20 \text{ cm}}$$

Resolviendo obtenemos:  $s' = -60$  cm

El aumento de la imagen es:  $A_L = \frac{s'}{s} = \frac{-60 \text{ cm}}{-15 \text{ cm}} = 4$

Por tanto, el tamaño de la imagen es:

$$y' = 4 \cdot 1 \text{ cm} = 4 \text{ cm}$$

La imagen es virtual, derecha y aumentada cuatro veces respecto al objeto.

Los resultados se pueden comprobar con los diagramas de rayos que podemos reproducir en el applet "Las lentes y la formación de las imágenes" del CD del libro.

#### EJERCICIO 5

El papel se puede quemar con un espejo que haga converger los rayos solares incidentes en un punto del papel. Para ello podemos usar un espejo esférico cóncavo o parabólico y situar el papel en su foco, localizado delante del espejo.



## 5. CRITERIOS DE EVALUACIÓN

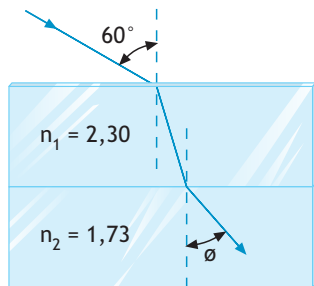
Al terminar el estudio de este tema los alumnos y alumnas serán capaces de:

- Explicar las propiedades de la luz utilizando los diversos modelos e interpreta correctamente los fenómenos relacionados con la interacción de la luz y la materia.
- Aplicar la ley de la reflexión para construir imágenes en espejos planos o curvos y calcula distancias y aumentos en dichos espejos.
- Conocer el lenguaje, la simbología y las ecuaciones del dioptrio plano y del dioptrio esférico, como paso para comprender el funcionamiento de los espejos y las lentes.
- Deducir las características de las imágenes en lentes convergentes o divergentes y calcular distancias y aumentos en dichos sistemas ópticos.
- Describir el fenómeno de la visión, así como los defectos visuales y su corrección.
- Valorar la importancia que la luz tiene en nuestra vida cotidiana, tanto tecnológicamente (instrumentos ópticos, comunicaciones por láser, control de motores) como en química (fotoquímica) y medicina (corrección de defectos oculares).
- Describir la estructura y el funcionamiento de aparatos ópticos importantes como la lupa, los telescopios o el microscopio.
- Planificar y realizar experimentos con espejos y lentes.
- Asumir que el color de un objeto depende del propio objeto y de la luz con la que se ilumina.

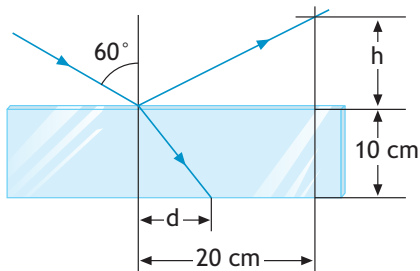
## 6. EJERCICIOS PROPUESTOS PARA LA EVALUACIÓN FINAL DEL TEMA

### PROPAGACIÓN DE LA LUZ Y DIOPTRIOS

- 1 Un rayo de luz monocromática se propaga por el aire e incide sobre la superficie del agua; si el índice de refracción del agua respecto del aire es 1,33, calcula el ángulo de incidencia para que el rayo refractado sea perpendicular al rayo reflejado. Haz un dibujo de la situación física.
- 2 Un haz de un tipo de luz incide desde el aire sobre dos placas transparentes, de índices de refracción  $n_1 = 2,30$  y  $n_2 = 1,73$ , tal como representamos en la figura. Calcula el valor del ángulo  $\theta$ . Al variar el ángulo de incidencia, ¿puede originarse el fenómeno de reflexión total en el proceso de propagación del haz?



- 3 Una lámina de vidrio, de índice de refracción 1,5, de caras paralelas y espesor 10 cm, está colocada en el aire. Sobre una de sus caras incide un rayo de luz, como se muestra en la figura. Calcula:
  - a) La altura  $h$  y la distancia  $d$  marcadas en la figura.
  - b) El tiempo que tarda la luz en atravesar la lámina. $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$



- 4 Explica el fenómeno de la dispersión de la luz, y pon un ejemplo en el que se ponga de manifiesto.

### LENSES

- 5 Disponemos de una lente convergente de distancia focal 15 cm. Dibuja la imagen que se forma de un objeto situado 35 cm antes de la lente y sus características.
- 6 Una lente convergente forma una imagen derecha y de doble tamaño que el objeto. Si la imagen se localiza a 60 cm de la lente. Calcula: a) la posición del objeto, respecto a la lente, b) la potencia de la lente, c) ¿esta lente puede originar imágenes derechas y reducidas?
- 7 Explica mediante razonamientos cualitativos (diagramas de rayos) la posición a la que debemos situar un objeto, respecto a una lente convergente, para originar una imagen:
  - a) Real y del mismo tamaño que el objeto.
  - b) Virtual.
  - c) Derecha y reducida.
- 8 Explica las características de la imagen originada por una lente de  $-4,2 \text{ D}$  de un objeto de tamaño 100 cm al situarlo a 50 cm de la lente. ¿Es posible proyectar la imagen en una pantalla?
- 9 Un objeto de 3 cm de altura se sitúa a 75 cm de una lente delgada convergente y produce una imagen a 37,5 cm a la derecha de la lente:
  - a) Calcula la distancia focal.
  - b) Haz un diagrama que represente la formación de la imagen.
  - c) ¿En qué posición del eje hay que colocar el objeto para que no se origine imagen?

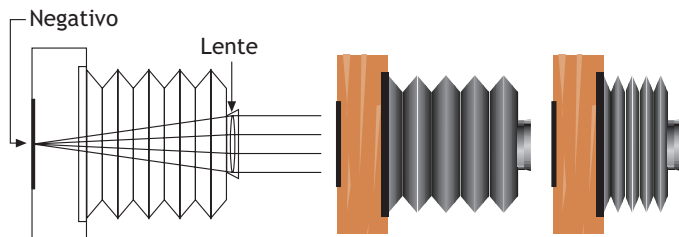
### ESPEJOS

- 10 Un espejo esférico de 50 cm de radio origina una imagen real y de tamaño mitad al del objeto. ¿Qué tipo de espejo es? ¿Dónde se localiza el objeto, respecto al espejo?
- 11 Un objeto se encuentra a 10 cm a la izquierda del vértice de un espejo esférico cóncavo de radio de curvatura 28 cm. Dibuja y determina la posición de la imagen y su aumento.

- 12 Al colocar un objeto a 80 cm de un espejo se origina una imagen derecha y de doble tamaño del objeto.
- ¿Qué tipo de espejo es? ¿Cuál es el radio de curvatura del espejo?
  - ¿Dónde se localiza la imagen?
  - Realiza un diagrama de rayos del sistema objeto-espejo-imagen.
- 13 Indica las características de la imagen que proporciona un espejo cóncavo de un objeto situado delante de él en el punto medio entre el foco y el centro del espejo. ¿En qué posición del eje hay que colocar el objeto para que no se origine imagen?
- 14 Un objeto de 3 cm está situado a 8 cm de un espejo esférico convexo y origina una imagen a 10 cm del espejo:
- Calcula la distancia focal.
  - Haz un diagrama de rayos que explique las características de la imagen originada y calcula el tamaño de la imagen.
  - ¿En qué posición del eje hay que colocar el objeto para que no se origine imagen?
- 15 a) Si un objeto se sitúa a una distancia de 2 cm delante de una lente convergente o delante de un espejo cóncavo, ambos de distancia focal 5 cm en valor absoluto, ¿cómo están relacionados los aumentos laterales y las posiciones de las imágenes que la lente y el espejo producen de dicho objeto?
- b) Realiza el trazado de rayos en ambos casos.

## EL OJO, INSTRUMENTOS ÓPTICOS Y FENÓMENOS ASOCIADOS AL CARÁCTER ONDULATORIO

- 16 Para enfocar la imagen sobre el negativo fotográfico, en el siglo XIX se usaban cámaras de fuelle: la tela flexible no dejaban entrar la luz, y la lente del objetivo se podía acercar o alejar del negativo.



- ¿Qué distancia focal tenía la lente delgada de una de estas cámaras si el negativo estaba a 12,5 cm de la lente cuando se había enfocado un cuadro en una pared a 3 m de la lente?
  - ¿Cuál es el área de la imagen sobre el negativo del cuadro anterior, de 30 cm de ancho y 22,5 cm de alto?
  - Comparando el ojo con la cámara de fuelle, la retina del ojo es como el negativo de la cámara fotográfica, y el cristalino es como su objetivo; pero la distancia entre la retina y el cristalino del ojo está fijada por el tamaño del globo ocular: ¿cómo conseguimos enfocar los objetos con nuestros ojos a diferentes distancias?
- 17 Explica los fenómenos que evidencian la naturaleza ondulatoria de la luz.
- 18 Una persona hipermetrope tiene el punto próximo a 60 cm. ¿Qué tipo de lente correctora utilizará para poder leer un libro situado a 30 cm? Justifica la respuesta.
- 19 a) Explica el funcionamiento óptico de un *telescopio* refractor ¿Cuál es el aumento angular de un telescopio?
- b) El objetivo y el ocular de un telescopio son lentes simples de 2 y 20 dioptrías de potencia, respectivamente. ¿Cuál debe ser la distancia entre ambas lentes para que el telescopio funcione correctamente? Sabiendo que la Luna subtende un ángulo de  $0,5^\circ$  cuando se observa a simple vista desde la Tierra, calcula el ángulo que subtende cuando se observa a través de este telescopio.
- 20 Un ojo miope necesita una lente correctora de  $-2$  dioptrías de potencia para poder ver nítidamente objetos muy alejados.
- Sin lente correctora, ¿cuál es la distancia máxima a la que se puede ver nítidamente con este ojo?
  - Se sitúa un objeto de altura  $y = 0,3$  m en la posición  $a = -1$  m respecto a esta lente. Calcula la posición y tamaño de la imagen. Comprueba tus resultados mediante un trazado de rayos.

El profesor o profesora puede buscar más ejercicios de referencia para elaborar sus pruebas de evaluación en las siguientes páginas WEB:

COMUNIDAD	DIRECCIÓN DE INTERNET DE BÚSQUEDA
Aragón	<a href="http://wzar.unizar.es/servicios/acceso/logse/indice.htm">http://wzar.unizar.es/servicios/acceso/logse/indice.htm</a>
Andalucía	<a href="http://www.ujaen.es/">http://www.ujaen.es/</a> En la ventana <b>PERFILES</b> , escoge <b>Nuevo Alumno</b> , y seguidamente en la etiqueta <b>SELECTIVIDAD</b> , pulsa <i>Exámenes anteriores</i> .
Castilla-La Mancha y León	<a href="http://www.uclm.es">http://www.uclm.es</a> Elige en la ventana <u>Estudiantes</u> la opción <u>Estudiante nuevo</u> ; seguidamente pulsa <u>PAU</u> . Y finalmente escoger <u>Modelos Propuestos en las PAU</u> . <a href="http://www.usal.es">http://www.usal.es</a> Escoge en la ventana <b>Futuros estudiantes</b> , la opción <u>Acceso</u> , <u>preinscripción y matrícula</u> . En el apartado " <b>Acceso</b> " pulsa <i>Pruebas de acceso: <u>Selectividad</u></i>
Catalunya	<a href="http://www.gencat.cat/">http://www.gencat.cat/</a> <i>En la ventana <b>TEMES</b> escoge <b>Universitats</b> para en la opción <b>Accés a la universitat</b>, pulsar <b>Proves d'Accés a la Universitat (PAU)</b> y finalmente <u>Exàmens i informació de les matèries</u></i>
C. Valenciana	<a href="http://www.ua.es">http://www.ua.es</a> En la ventana <b>Estudios y acceso</b> , escoge la opción <b>Acceso</b> y activa: <i>Selectividad alumnos de bachillerato LOGSE</i> y finalmente pulsa exámenes del apartado <u>Currículo de las asignaturas y Exámenes de años anteriores</u> .
Islas Baleares	<a href="http://www.uib.es/depart/dfs/apl/aac/paufisica/">http://www.uib.es/depart/dfs/apl/aac/paufisica/</a>
Madrid	<a href="http://www.uc3m.es/">http://www.uc3m.es/</a> En la ventana <b>Futuros estudiantes</b> elige la opción <b>trámites de admisión</b> , y a continuación el rótulo <b>Pruebas de Acceso</b> y posteriormente en <b>Selectividad</b> pulsa la opción <u>Modelos de examen y criterios de corrección</u> .

## 7. RECURSOS DIDÁCTICOS Y BIBLIOGRAFÍA DE CONSULTA

### LIBROS

- ALONSO-FINN. 1995. *Física*. Addison-Wesley.
- CARRERAS BÉJAR, C Y YUSTE LLANDRES, M. 1998. *La luz a través de la Historia, guía didáctica*. Edita: UNED.
- CASAS, J. 1994. *Óptica*. Zaragoza: Librería General.
- CORTEL ORTUÑO, A. 1997. *Las ondas. La luz y el sonido*. Editorial: Horsori.
- HECHT-ZAJAC. 1994. *Óptica*. Addison-Wesley.
- HEWITT, H.G. 1999. *Física Conceptual*. Addison-Wesley.
- JOU, D. LLEBOT, J.E. PÉREZ, C. 1994. *Física para ciencias de la vida*. Madrid. Mc Graw-Hill
- MILLAN, M. S; ESCOFET, J.; PÉREZ, E. 2004. *Óptica geométrica*. Madrid: Ariel ciencia.
- OSUNA GARCÍA, L. 2006. *Planificación, puesta en práctica y evaluación de la enseñanza problematizada sobre la luz y la visión en la educación secundaria obligatoria*. Valencia: Tesis Doctoral, Universitat de València.
- SERWAY, R. A.; JEWET, J. W. 2003. *Física, 3ª edición, 2 vol* Madrid: paraninfo.
- TARÁSOV, L. y TARÁSOVA, A. 1982. *Charlas sobre la refracción de la luz*. Moscú: Mir.
- TIPLER, MOSCA. 2005. *Física, 5ª edición. vol. 2*. Editorial Reverté: Barcelona.
- VIENNOT, L. 2002. *Razonar en física. La contribución del sentido común*. Madrid: Visor (Antonio Machado, aprendizaje).
- VVAA 1997. *La ciencia de la luz. Monográfico de Investigación y Ciencia*. Nº 6 Barcelona: Labor.

### AUDIOVISUAL

El profesor o profesora puede usar como recurso audiovisual de la serie "Más allá del Universo Mecánico" en episodio nº 40, ÓPTICA. Con este recurso se puede complementar la discusión de la naturaleza de la luz y visualizar e interpretar propiedades de la luz con el modelo ondulatorio.

### ARTÍCULOS

- CARCAVILLA, A.; PUEY, M.L. 2003: Propuestas para lograr una mejor comprensión de los conceptos básicos de óptica geométrica. *Alambique*, 35, 17-28.
- GIL LLINÁS, J.; SUERO LÓPEZ, M.I.; PÉREZ RODRÍGUEZ, A.L.; SOLANO GUIZAL, B y DUDLEY, J. 2003. Ibn Sahl, descubridor de la ley de la refracción, *Investigación y Ciencia*, febrero 2003, 58-61.
- IPARRAGUIRRE, L. 2007. Una propuesta de utilización de la historia en la enseñanza de un tema de física. *Enseñanza de las ciencias*. Volumen 25, nº 3, 423-434.
- MACIAS, L. 2003: Preconcepciones en óptica: su persistencia en niveles universitarios. *Revista de Educación en Ciencias* Vol. 4 Nº 1, 17-21.
- PERALES, J.F. y NIEVAS, J. 1991. Ideas previas en óptica geométrica: un estudio descriptivo. *Investigación en la Escuela* 13, 77-84.
- SALINAS, J. y SANDOVAL, J. 1997. Óptica y visión. *Revista Española de Física*, 11 (1), 38-43.
- SALINAS, J. y SANDOVAL, J. 1999. Objetos e imágenes virtuales en la Enseñanza de la Óptica Geométrica. *Revista de Enseñanza de la Física* 12, (2), 23-36.
- SALINAS, J. y SANDOVAL, J. 1999: Formación y percepción visual de imágenes producidas por prismas: concepciones de los estudiantes. *Revista Española de Física* 13, (4), 38-43.
- SAMEEN, A. K. 2007. Arab Origins of the discovery of the refraction of light. OPN (<http://www.osa-opn.org/>) vol.18, nº 10, 22-23.
- SOTRES DÍAZ, F Y MORENO GONZALEZ, A. 2007. Experimentum Crucis de óptica física en la Enseñanza Secundaria. *Revista Española de Física*. Volumen 21, nº 3, 53-59.
- VIENNOT, L. Y KAMINSKI, W. 1989. Optique élémentaire. *Enseñanza de las Ciencias*, nº extra III Congreso, tomo 2, 230-232.
- YUSTE, M y CARRERAS, C. 1988. El arco iris: el fenómeno natural en la enseñanza de la física. *Revista Española de Física*, vol. 2, nº 1, 28-39.

# FÍSICA CUÁNTICA

# 3

## 1. PRESENTACIÓN GENERAL DEL TEMA

A finales del siglo XIX se creía disponer de teorías físicas lo suficientemente completas y generales como para explicar el comportamiento del universo y no se esperaban grandes revoluciones futuras en esta ciencia; el modelo mecanicista, apoyado en la concepción de materia y energía como fenómenos de naturaleza independiente, que concebía la materia como discontinua mientras que la energía se consideraba como continua, era el que servía de “estructura” del paradigma clásico. En este contexto, se concluyó que la luz era un fenómeno ondulatorio de naturaleza electromagnética. No obstante, se planteó el problema de estudiar y explicar los fenómenos relacionados con la interacción de la luz y la materia.

La explicación de los fenómenos relacionadas con la interacción radiación - materia originó una verdadera revolución en el paradigma vigente. El objetivo del tema es explicar el origen del problema, la hipótesis revolucionaria y las consecuencias que dieron lugar a una nueva idea de la materia y la energía, que las vinculaba como dos manifestaciones de una realidad compleja y discontinua. Para ello se ha estructurado el tema en los siguientes bloques conceptuales:

1º *Antecedentes y planteamiento del problema.* Es necesario preparar el terreno, mostrando una serie de hechos que no podían explicarse por la física clásica: las frecuencias de las rayas espectrales (ya tratado en primer curso), la distribución de la energía radiada por un emisor ideal (sin entrar a desarrollar las leyes concretas de la radiación) y la propuesta de cuantificación de Planck.

2º *Formulación de la hipótesis cuántica.* Se formula la hipótesis cuántica de Einstein y se analizan sus implicaciones, diferenciando la concepción cuántica de Planck de la de Einstein.

3º *Contrastación de la hipótesis.* Para analizar la validez de la hipótesis de Einstein se analiza el efecto fotoeléctrico. Para ello se estudia el efecto y se analizan sus propiedades desde dos referentes: el modelo ondulatorio (vigente como paradigma) y el modelo corpuscular propuesto por Einstein. Con este estudio comparativo pretendemos que el alumnado asuma las limitaciones del modelo ondulatorio y comprenda la sencillez de la explicación cuántica.

4º *Consolidación del modelo corpuscular de la energía.* La asignación de la cantidad de movimiento a los fotones y su comprobación experimental, al justificar el efecto Compton, permite asumir el aspecto corpuscular de la radiación como una realidad física.

5º *Extensión de la naturaleza dual de la luz a la materia.* La formulación de la hipótesis de De Broglie, y su contrastación experimental, permite extender la nueva concepción dual de la radiación a toda la materia.

6º *Establecimiento de un nuevo paradigma: la Física Cuántica.* La aceptación de la dualidad de la materia implica la búsqueda de nuevos modelos que expliquen su comportamiento a nivel atómico; para ello se analiza el modelo de Bohr como modelo introductorio. También analizamos el principio de indeterminación de Heisenberg que establece los límites entre la Física clásica y la cuántica.

## 2. CONTENIDOS

### 1 *El planteamiento del problema*

- Los procesos de interacción luz - materia
- Los espectros atómicos
- Fórmula de Balmer
- Las leyes de la radiación térmica
- La imposibilidad de explicarlo con el modelo ondulatorio
- La propuesta de Planck: la discontinuidad en la transferencia de energía

### 2 *La hipótesis cuántica de Einstein*

- La formulación de la hipótesis cuántica
- Las implicaciones de la hipótesis cuántica
- Diferenciando la cuantización de Planck y de Einstein

### 3 *La comprobación de la hipótesis: el efecto fotoeléctrico*

- La definición del efecto fotoeléctrico
- El estudio experimental del efecto fotoeléctrico
- Estudio comparativo entre las explicaciones ondulatorias y cuánticas del efecto
- Las predicciones de la teoría cuántica

### 4 *La caracterización corpuscular de los fotones. El efecto Compton*

- La cantidad de movimiento de los fotones
- Estudio del efecto Compton
- Justificación teórica del efecto Compton
- Las consecuencias: la naturaleza dual de la luz

### 5 *La aplicación de la teoría cuántica al modelo atómico*

- El modelo de Bohr
- La explicación del espectro de hidrógeno

### 6 *Hipótesis de De Broglie: dualidad onda-corpúsculo*

- La formulación de la hipótesis de De Broglie
- La confirmación experimental

### 7 *Fundamentos de la física cuántica*

- Las bases de la física cuántica
- El principio de indeterminación de Heisenberg
- Aplicaciones y consecuencias de las relaciones de indeterminación
- Una aplicación técnica de la mecánica cuántica: el láser



### 3. OBJETIVOS ESPECÍFICOS (Capacidades que hay que desarrollar)

CONCEPTOS	PROCEDIMIENTOS	ACTITUDES
<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Conocer algunos antecedentes de la hipótesis cuántica: espectros ópticos, leyes de la radiación, efecto fotoeléctrico, que permitan comprender la necesidad de un nuevo marco teórico.</li> <li>2. Enunciar la hipótesis cuántica y asumir su implicación en los intercambios de energía.</li> <li>3. Describir las leyes experimentales del efecto fotoeléctrico.</li> <li>4. Definir el trabajo de extracción, la frecuencia umbral y el potencial de corte.</li> <li>5. Aplicar el concepto de fotón para explicar el efecto fotoeléctrico.</li> <li>6. Describir el efecto Compton y sus implicaciones para el conocimiento de la naturaleza del fotón.</li> <li>7. Comprender la naturaleza dual, ondacorpúsculo, de la materia y sus implicaciones.</li> <li>8. Describir el modelo de Bohr.</li> <li>9. Enunciar el principio de indeterminación de Heisenberg y describir algunas de sus consecuencias.</li> <li>10. Establecer el campo de validez de la física clásica.</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Calcular la energía y la cantidad de fotones emitidos por un foco en función de sus características.</li> <li>2. Aplicar el modelo corpuscular de la luz a la explicación del efecto fotoeléctrico y al efecto Compton.</li> <li>3 Deducir algunas consecuencias sobre el modelo cuántico.</li> <li>4 Predecir y calcular el efecto de la variación de las diferentes magnitudes implicadas en el efecto fotoeléctrico.</li> <li>5. Calcular la longitud de onda asociada a una partícula.</li> <li>6. Explicar el espectro de hidrógeno a partir del modelo de Bohr.</li> <li>7. Calcular la indeterminación asociada a la medida simultánea de la posición y la cantidad de movimiento.</li> <li>8. Discernir qué tipo de modelo para la luz es el adecuado para explicar un determinado fenómeno.</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Asumir la necesidad de aceptar la hipótesis cuántica para explicar nuevos fenómenos.</li> <li>2. Ser capaz de realizar el cambio conceptual del modelo clásico del comportamiento de la materia al modelo cuántico.</li> <li>3. Admitir el carácter provisional y a veces complementario que tienen los modelos científicos.</li> <li>4. Valorar la historia de la ciencia como una empresa social y colectiva del quehacer científico.</li> <li>5. Valorar positivamente el esfuerzo de la ciencia por explicar todos los fenómenos de la naturaleza.</li> </ol>

## 4. SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS PROPUESTOS

### 4.1 ACTIVIDADES PROPUESTAS

#### A.1

La actividad tiene como objetivo analizar la ecuación de Balmer y comprobar que permite reproducir la serie espectral visible del hidrógeno. A partir de la ecuación se establece:

n	$\lambda$ / nm
3	656,2
4	486,0
5	434,0

El alumnado puede comprobar que el porcentaje de dispersión de estos datos con los experimentales (ver figura 1.3) es muy bajo. También se debe insistir en el carácter formal de la ecuación que se planteó sin ningún referente teórico que la justificase.

#### A.2.

a) La longitud de onda asociada a la radiación es:

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{5 \cdot 10^{14} \text{ Hz}} = 600 \cdot 10^{-9} \text{ m}$$

Como la luz visible está comprendida entre  $400 \text{ nm} \leq \lambda \leq 700 \text{ nm}$ , y el metal emite luz de  $600 \text{ nm}$  su radiación es visible.

b) La energía transferida por la superficie en un minuto es:

$$\Delta E = P \cdot \Delta t = 0,05 \frac{\text{J}}{\text{s}} \cdot 60 \text{ s} = 3 \text{ J}$$

Como la energía del fotón es:

$$E_{\text{fotón}} = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Js} \cdot 5 \cdot 10^{14} \text{ Hz} = 3,313 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

y la energía está cuantizada, se debe verificar:

$$\Delta E = n \cdot E_{\text{fotón}}$$

Por tanto:

$$n = \frac{\Delta E}{E_{\text{fotón}}} = \frac{3 \text{ J}}{3,313 \cdot 10^{-19} \text{ J}} = 9,06 \cdot 10^{18} \text{ fotones}$$

#### A.3

- a) Cierta, ya que para originar el efecto fotoeléctrico la energía de los fotones incidentes debe ser suficiente para conseguir extraer electrones del metal, superando estos la energía de retención (pozo energético), lo que se cumple ya que  $\nu > \nu_0$
- b) Esta afirmación debe matizarse. La emisión de electrones se produce al incidir sobre el metal fotones con sufi-

ciente energía para arrancarlos ( $\nu \geq \nu_0$ ). La cantidad de electrones liberados se incrementa con la intensidad de la luz incidente, puesto que las interacciones fotón - electrón son proporcionales a la intensidad de luz.

- c) Correcta, ya que el tipo de metal determina la frecuencia umbral para que se origine el efecto fotoeléctrico.

#### A.4

Según el modelo ondulatorio al aumentar la intensidad de la luz incidente, sobre el metal, aumenta la energía transferida a los electrones, por unidad de tiempo. Por ello, sería de esperar un aumento en la energía cinética de los electrones liberados, efecto que no se comprueba.

En el modelo cuántico al aumentar la intensidad de luz se incrementan las interacciones fotón-electrón, sin variar la energía del fotón. En consecuencia, debe producirse un aumento del número de electrones liberados sin variar su energía cinética máxima.

#### A.5

Si el trabajo de extracción es mayor que la energía transferida por el fotón al electrón, éste no puede escapar del metal.

Al no estar todos los electrones retenidos con igual intensidad en el metal, al liberarse, como consecuencia de la energía transferida por el fotón, su energía cinética dependerá de la energía que precisa para escapar del metal. De modo que cuanto mayor sea la energía de ligadura al metal menor será la energía cinética de liberación, al interaccionar con un tipo de fotón.

#### A.6

El análisis del mapa conceptual permite diferenciar tres niveles o ejes conceptuales:

- *Nivel descriptivo*. Se define el efecto y se expone cómo estudiarlo (la célula fotoeléctrica).
- *Nivel fenomenológico* (eje central). Se exponen los factores de que depende el efecto fotoeléctrico: la radiación incidente (caracterizada por su frecuencia e intensidad) y la naturaleza del metal, que determina la frecuencia umbral.
- *Nivel explicativo*, desde el referente cuántico, en el que la liberación de los electrones del metal se origina como una consecuencia de la transferencia de energía del fotón al electrón, que consigue superar el trabajo de extracción.

La respuesta a las preguntas planteadas se analiza en la siguiente tabla:

¿De qué depende la intensidad de corriente que circula por la célula fotoeléctrica?		¿Cómo podemos aumentar el valor de la intensidad de corriente de la célula?	
Factor	Influencia	Factor	Procedimiento
Naturaleza del metal	Determina la frecuencia umbral a partir de la cual se produce el efecto $v \geq v_0$	Naturaleza del metal	Usar metales con trabajos de extracción bajos
Diferencia de potencial aplicada a la célula	Influye en el proceso de transferencia de los electrones que salen de una placa y se dirigen a la otra, cerrando el circuito, lo que permite la circulación de la corriente en la célula fotoeléctrica	Diferencia de potencial aplicada a la célula	Aplicar la polaridad adecuada para favorecer el paso de electrones entre los electrodos, y aumentar el valor de $\Delta v$ hasta alcanzar la intensidad de saturación (todos los electrones liberados por una placa son transferidos a la otra)
Intensidad de la luz incidente	La cantidad de electrones liberados en el metal es proporcional a la intensidad de la luz incidente, siempre y cuando su frecuencia sea igual o mayor a la umbral	Intensidad de la luz incidente	Usar luces apropiadas, $v \geq v_0$ de elevada intensidad, para incrementar la cantidad de electrones liberados del metal
Frecuencia de la luz incidente	Para que se origine el efecto debe verificarse $v \geq v_0$ , y cuanto mayor es la frecuencia mayor es la energía transferida a los electrones, y en consecuencia escapan con mayor energía cinética	Frecuencia de la luz incidente	Aumentar la frecuencia de la luz incidente con el objetivo de incrementar la energía transferida a los electrones liberados

## CD1

- Con la placa de emisión de potasio y usando luz de  $v = 4,14 \cdot 10^{14}$  Hz no observamos la emisión de electrones.
  - Porque los gases emiten un espectro discontinuo característico en función de su naturaleza. Se observa que se emiten electrones de la placa de potasio a partir de una luz de frecuencia  $5,599 \cdot 10^{14}$  Hz.
  - Al aumentar la intensidad de iluminación, siempre y cuando  $v \geq v_0$ , se observa un aumento en el número de electrones liberados de la placa hasta alcanzar un valor máximo, corriente de saturación.
  - Al aumentar la frecuencia, sin variar la intensidad de iluminación, se observa que se mantiene el número de electrones liberados, por unidad de tiempo, y que éstos se desplazan más rápidamente entre las placas aumentando la intensidad de la corriente, ya que el mismo número de electrones recorre el espacio entre las placas de las células en menos tiempo (recordemos que la intensidad de corriente mide la carga transferida por unidad de tiempo).
  - Al conectar la placa de emisión al polo negativo se observa que al incrementar la ddp aumenta la intensidad de corriente en la célula hasta alcanzar un valor de saturación.
  - Si conectamos el metal de emisión al polo positivo se frenan los electrones en el proceso de desplazamiento

entre placas. En este caso, al aumentar el valor de la ddp se consigue impedir que los electrones puedan alcanzar la otra placa de la célula, y cerrar el circuito.

- Al conectar el metal de emisión al polo negativo se favorece el proceso de transferencia de electrones entre las placas, puesto que la fuerza eléctrica impulsa el electrón hacia la placa positiva. Sin embargo, al conectar el metal a la placa positiva, la fuerza eléctrica se opone al proceso de transferencia.
  - Conectando el metal de emisión al polo positivo, sin variar la frecuencia de la luz ( $v \geq v_0$ ) ni la naturaleza del metal, y aumentando el valor de la diferencia, de potencial desde cero hasta el valor mínimo que de lugar al cese de corriente eléctrica entre las placas (el amperímetro no detecta pasa dé corriente eléctrica).
  - Al variar la naturaleza del metal de emisión el efecto se produce a partir de distintas frecuencias en función de la naturaleza del metal. El potencial de corte que impide este efecto, relacionado con la energía cinética máxima, depende de la fuente luminosa usada y de la naturaleza del metal de la placa.
- Un posible procedimiento para calcular la frecuencia umbral es determinar el potencial de corte del metal para distintas frecuencias. Al representar el potencial

de corte en función de la frecuencia de la radiación obtendremos una recta, cuya ecuación debe corresponder a:

$$V_0 = \frac{h}{e} \nu - \frac{h}{e} \nu_0$$

ecuación de una recta de pendiente  $\frac{h}{e}$  y de ordenada

en el origen  $-\frac{h}{e} \nu_0$ .

Por ello, en el caso teórico de que  $V_0 = 0$  la frecuencia de la radiación es la umbral, situación que corresponde al punto de corte de la recta con el eje de abscisas cuando representamos el potencial en función de la frecuencia.

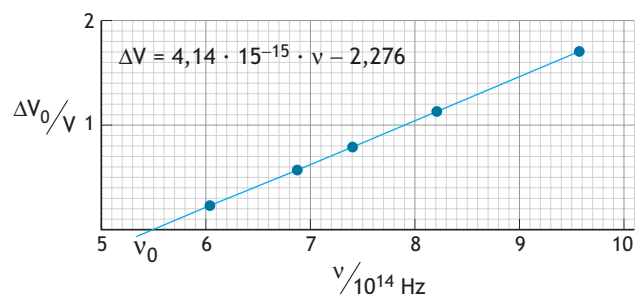
Para el caso del potasio, la tabla de valores se expone en el problema 13 del libro de texto y en la explicación de su solución, de la presente guía, se determina la frecuencia umbral de potasio:

$$\nu_0 = 5,55 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$$

Para determinar la frecuencia umbral del sodio podemos usar como fuente de iluminación el arco de mercurio, y establecer la siguiente tabla:

$\nu/10^{14}$	6,048	6,884	7,413	8,219	9,582
$\Delta V_0$	0,23	0,57	0,79	1,13	1,69

Al representar el potencial de corte en función de la frecuencia de la radiación incidente obtenemos:



Corresponde a una línea recta que corta el eje de abscisas en la frecuencia  $5,5 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$ , valor de la frecuencia umbral del sodio.

En el caso del platino es muy difícil obtener una tabla de valores por su elevada frecuencia umbral.

## A.7

La resolución la estructuramos en los siguientes pasos:

- Cálculo de la energía cinética máxima

El trabajo asociado al potencial de corte equivale a la energía cinética máxima:

$$E_{c,\text{máxima}} = e \cdot V_0 = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 1,32 \text{ V} = 2,112 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

- Cálculo de la frecuencia umbral

$$\text{Como } E_{c,\text{máxima}} = h(\nu - \nu_0)$$

despejando la frecuencia umbral:

$$\begin{aligned} \nu_0 &= \nu - \frac{E_{c,\text{máxima}}}{h} = 1,2 \cdot 10^{15} \text{ Hz} - \frac{2,112 \cdot 10^{-19} \text{ J}}{6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Js}} \\ &= 8,81 \cdot 10^{14} \text{ Hz} \text{ (340,5 nm, uv)} \end{aligned}$$

Para determinar el potencial de corte del cesio, calculamos:

- La energía cinética máxima de los electrones emitidos:

$$\begin{aligned} E_{c,\text{máxima}} &= 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Js} (1,2 \cdot 10^{15} - 5,18 \cdot 10^{14}) \text{ Hz} = \\ &= 4,518 \cdot 10^{-19} \text{ J} \end{aligned}$$

- El potencial de corte:

$$\Delta V_0 = \frac{E_{c,\text{máxima}}}{e} = \frac{4,518 \cdot 10^{-19} \text{ J}}{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}} = 2,8 \text{ V}$$

## A.8

Al aumentar la frecuencia de la luz se incrementa la energía de los fotones incidentes. En consecuencia, los electrones adquieren más energía cinética al escapar del metal, lo que da lugar a un aumento de la intensidad de corriente eléctrica en la célula (los electrones tardan menos tiempo en superar el espacio entre las placas).

El potencial de corte aumenta con el valor de la frecuencia de la radiación según la ecuación:

$$\Delta V_0 = \frac{h}{e} (\nu - \nu_0)$$

## A.9

Si comparamos la expresión experimental de efecto Compton

$$\lambda' - \lambda = 2,423 \cdot 10^{-12} \text{ m} (1 - \cos \theta)$$

con la deducida al interpretar el fenómeno como un choque elástico entre dos partículas, una un fotón incidente y la otra un electrón fácil de arrancar:

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta)$$

establecemos que para que la interpretación sea estimada como correcta debe cumplirse

$$\lambda_0 = \frac{h}{m_e c} = \frac{6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Js}}{9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}} = 2,43 \cdot 10^{-12} \text{ m}$$

y puesto que se verifica, este fenómeno contribuye a confirmar el carácter corpuscular de la luz.

### A.10

A partir de las ecuaciones de Bohr se deduce la ecuación de Balmer, y comprobamos que la constante empírica  $R_H$  coincide prácticamente con la constante teórica  $\left(R_H = \frac{|E_1|}{h \cdot c}\right)$  deducida; con ello se confirma la validez del modelo propuesto por Bohr para el átomo de hidrógeno.

### A.11

Al ser  $v \ll c$ , podemos partir de las siguientes ecuaciones de referencia:

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2; \quad p = m \cdot v$$

que permiten establecer:

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \frac{m^2}{m} v^2 = \frac{1}{2} \frac{p^2}{m}$$

Y por ello, la cantidad de movimiento en función de su energía cinética es:

$$p = \sqrt{2 m E_c}$$

Y la longitud de onda de De Broglie es:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2 m E_c}}$$

En el caso de comparar las longitudes de ondas asociadas a un electrón y a un neutrón con la misma energía cinética, calculamos:

$$\frac{\lambda_n}{\lambda_e} = \sqrt{\frac{m_e}{m_n}} = 2,3 \cdot 10^{-2}$$

### A.12

Al establecer que  $\lambda = 10^{-10}$  m asociamos al electrón una cantidad de movimiento de:

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Js}}{10^{-10} \text{ m}} = 6,626 \cdot 10^{-24} \text{ J}$$

y le corresponde una energía cinética de:

$$\Delta E_c = \frac{1}{2} \frac{p^2}{m_e} = 2,41 \cdot 10^{-17} \text{ J}$$

Al acelerarse la partícula por la acción de un campo eléctrico se verifica:

$$W_{\text{eléctrico}} = e \Delta V = \Delta E_c$$

Y, despejando:

$$\Delta V = \frac{\Delta E_c}{e} = \frac{2,41 \cdot 10^{-17} \text{ J}}{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}} = 150,62 \text{ V}$$

### A.13

Es necesario resaltar que:

- El principio se aplica a cualquier pareja de magnitudes cuyas unidades sean Js, las unidades de  $h$ .
- Dado el pequeñísimo valor de  $h$ , las consecuencias del principio sólo serán de importancia en el universo cuántico, lo mismo que ocurre con la dualidad señalada por De Broglie y concretada en la ecuación:  $\lambda \cdot p = h$ .

### A.14

Bohr afirma que las propiedades ondulatoria y corpuscular de un objeto cuántico constituyen *aspectos complementarios* de su comportamiento.

En principio, cabe esperar que ningún experimento ponga en conflicto estos dos comportamientos. En efecto, según la mecánica cuántica, las ideas de corpúsculo y de onda son *complementarias*, lo que significa que la descripción completa de los fenómenos observables requiere que se empleen alternadamente estas dos concepciones, pero estos modelos, sin embargo, no pueden aplicarse simultáneamente. Por ello, en función del fenómeno estudiado debemos aplicar un modelo u otro, aunque para justificar todos los fenómenos conocidos precisamos de ambos modelos.

## 4.2 SOLUCIONES DE LOS PROBLEMAS FINALES

### HIPÓTESIS CUÁNTICA

#### PROBLEMA 1

Para obtener la energía asociada a una radiación, caracterizada por su longitud de onda, usamos la fórmula:

$$E_{\text{fotón}} = h \cdot \nu = h \cdot \frac{c}{\lambda}$$

Aplicándola en las dos situaciones límites, obtenemos:

$$E_{\text{fotón}} = h \cdot \frac{3 \cdot 10^8}{400 \cdot 10^{-9}} \text{ J} = 4,969 \cdot 10^{-19} \text{ J} \cdot \frac{1 \text{ eV}}{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}} = 3,106 \text{ eV}$$

$$E_{\text{fotón}} = h \cdot \frac{3 \cdot 10^8}{700 \cdot 10^{-9}} \text{ J} = 2,839 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 1,775 \text{ eV}$$

#### PROBLEMA 2

La temperatura superficial se calcula aplicando la ley de Wien:

$$T = \frac{2,9 \cdot 10^{-3} \text{ m K}}{455 \cdot 10^{-9} \text{ m}} = 6373,626 \text{ K}$$

La energía de los fotones es:

$$E_{\text{fotón}} = h \cdot \frac{3 \cdot 10^8}{455 \cdot 10^{-9}} = 4,368 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 2,73 \text{ eV}$$

### PROBLEMA 3

En primer lugar, calculamos la energía transferida por la antena:

$$\Delta E = P \cdot \Delta t = 0,02 \text{ W} \cdot 60 \text{ s} = 1,2 \text{ J}$$

Partiendo de la hipótesis cuántica de que la energía se transfiere por un chorro de fotones idénticos, calculamos la energía asociada a un fotón:

$$E_{\text{fotón}} = h \cdot \frac{3 \cdot 10^8}{5 \cdot 10^{-3}} \text{ J} = 3,9756 \cdot 10^{-23} \text{ J}$$

El número de fotones es:

$$n = \frac{1,2 \text{ J}}{3,9756 \cdot 10^{-23} \text{ J}} = 3,018 \cdot 10^{22} \text{ fotones}$$

### PROBLEMA 4

La situación más favorable para disociar la molécula corresponde a la interacción con un fotón que le transfiere toda su energía. La mínima energía del fotón la establece la energía de disociación:

$$\Delta E_{\text{disociación}} = 11 \text{ eV} \cdot \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}}{1 \text{ eV}} = 17,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

que corresponde a un fotón con una frecuencia

$$\nu = \frac{\Delta E_{\text{disociación}}}{h} = \frac{17,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}}{6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Js}} = 2,656 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$$

cuya longitud de onda es:

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{2,656 \cdot 10^{14} \text{ Hz}} = 112,9 \text{ nm}$$

Como el límite inferior visible es  $\lambda = 400 \text{ nm}$  y la longitud máxima de la radiación para disociar la molécula es inferior, la luz visible no producirá la disociación de las moléculas.

### PROBLEMA 5

a) La longitud de onda se calcula con la ecuación:

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{1,8 \cdot 10^9 \text{ Hz}} = 0,167 \text{ m}$$

b) La intensidad se determina a partir de la ecuación:

$$I = \frac{P}{\Delta S}$$

Suponiendo que la energía se distribuye en superficies esféricas, por propagarse en un medio homogéneo, establecemos:

$$\Delta s = 4 \cdot \pi \cdot R^2 = 4 \cdot \pi \cdot (50 \text{ m})^2 = 3,1415 \cdot 10^4 \text{ m}^2$$

En consecuencia, la intensidad es:

$$I = \frac{1500 \text{ W}}{3,1415 \cdot 10^4 \text{ m}^2} = 4,77 \cdot 10^{-2} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

c) Para hallar el número de fotones emitidos, calculamos en primer lugar la energía transferida:

$$\Delta E = P \cdot \Delta t = 1500 \text{ W} \cdot 1 \text{ s} = 1500 \text{ J}$$

La energía asociada a cada fotón:

$$E_{\text{fotón}} = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Js} \cdot 1,8 \cdot 10^9 \text{ Hz} = 1,2 \cdot 10^{-24} \text{ J}$$

El número de fotones es:

$$n = \frac{1500 \text{ J}}{1,2 \cdot 10^{-24} \text{ J}} = 1,25 \cdot 10^{27} \text{ fotones}$$

### PROBLEMA 6

Puesto que la frecuencia de la radiación del microondas es menor que la ultravioleta, la energía de un fotón de ultravioleta corresponde a la de  $n$  fotones de microondas, según se establece en la ecuación:

$$E_{\text{fotón, ultravioleta}} = n \cdot E_{\text{fotón, microondas}}$$

$$h \cdot 7,5 \cdot 10^8 \text{ MHz} = n \cdot h \cdot 2,5 \cdot 10^3 \text{ MHz}$$

Despejando  $n$ , obtenemos:

$$n = 3 \cdot 10^5 \text{ fotones}$$

### PROBLEMA 7

a) Para ionizar los átomos integrantes de las moléculas del gas el fotón debe transferirle al átomo la energía suficiente para arrancarle un electrón. Por ello, la mínima energía del fotón corresponde a la energía de ionización más baja, la del átomo de cesio:

$$E_{\text{I,Cs}} = 3,9 \text{ eV} \cdot \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}}{1 \text{ eV}} = 6,24 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

Esta energía debe ser transferida por fotones:

$$E_{\text{fotón}} = E_{\text{I,Cs}} = h \cdot \nu = h \cdot \frac{c}{\lambda}$$

Despejando,  $\lambda$

$$\lambda = \frac{6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Js} \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{6,24 \cdot 10^{-19} \text{ J}} = 318,5 \text{ nm}$$

radiación que corresponde a la región ultravioleta del espectro.



b) La energía mínima para ionizar los átomos de mercurio es:

$$E_{\text{I,Hg}} = 10,4 \text{ eV} \cdot \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}}{1 \text{ eV}} = 1,664 \cdot 10^{-18} \text{ J}$$

que la proporciona un fotón que tenga una longitud de onda máxima de:

$$\lambda = \frac{6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Js} \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{1,664 \cdot 10^{-18} \text{ J}} = 119,5 \text{ nm}$$

Y puesto que este láser posee una longitud de onda inferior (100 nm), ionizará los átomos de mercurio.

La cantidad de electrones emitidos es proporcional al número de fotones incidentes.

### PROBLEMA 8

Para velar las placas, de bromuro de plata, la energía mínima de los fotones debe ser:

$$0,9 \text{ eV} \cdot \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}}{1 \text{ eV}} = 1,44 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

que puede proporcionarse por fotones cuya longitud de onda máxima sea:

$$\lambda_{\text{máxima}} = \frac{6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Js} \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{1,44 \cdot 10^{-19} \text{ J}} = 1380,4 \text{ nm}$$

Y puesto que la longitud de onda asociada a la luz visible es inferior, velará las placas. Este fenómeno es independiente de la intensidad de la luz visible, que se relaciona con la cantidad de fotones y no con la energía del fotón. Por ello cuando la luciérnaga emite luz visible, aunque tenue, lanza fotones con suficiente energía para velar las placas de bromuro de plata. Sin embargo, la antena de televisión emite radiación de 3 m de longitud, que corresponde a fotones con una energía muy inferior a la necesaria para velar la placa, aunque emita más fotones que la luciérnaga.

## EFECTO FOTOELÉCTRICO

### PROBLEMA 9

El trabajo de extracción es la mínima energía necesaria para arrancar electrones de la superficie de un metal. Se puede medir con una célula fotoeléctrica, en cuya placa de emisión se coloca el metal para el cual deseamos determinar su trabajo de extracción. Sobre la placa de emisión se hacen incidir radiaciones de frecuencias conocidas que produzcan el efecto fotoeléctrico, usando para ello diferentes lámparas de emisión, y se calcula el potencial de corte. Con este procedimiento podemos obtener una tabla de valores

que relacionan la frecuencia de la luz incidente con su potencial de corte ( $\Delta V_0$ ). Según la hipótesis de Einstein al representar el valor del potencial de corte por la carga del electrón en función de la frecuencia obtendríamos una línea recta que corresponde a la ecuación:

$$e \cdot |\Delta V_0| = h \cdot \nu - W_e$$

De modo que el valor para el cual la recta cota al eje de ordenadas corresponde a:

$$e \cdot |\Delta V_0| = |W_e|$$

Einstein explica la existencia de una longitud de onda crítica por el hecho de que la transferencia de energía se realiza por la interacción de un fotón con un electrón. Y como la energía del fotón viene dada por la ecuación:

$$E_{\text{fotón}} = h \cdot \nu = h \cdot \frac{c}{\lambda}, \text{ debe existir un valor de la longitud}$$

de onda crítica. Para valores superiores a esa longitud de onda crítica los fotones no tienen suficiente energía para arrancar electrones del metal, que precisan para "salir" superar el trabajo de extracción.

### PROBLEMA 10

a) La energía cinética máxima de los electrones emitidos por una célula fotoeléctrica se calcula experimentalmente al determinar el potencial de corte:

$$E_{\text{c,máxima}} = e \cdot \Delta V_0$$

b) Los electrones están ligados al metal con diferentes energías; por ello los electrones menos ligados (más fáciles de arrancar) adquieren más energía cinética que los más retenidos.

### PROBLEMA 11

a) El trabajo de extracción del metal determina la longitud de onda umbral. Puesto que el trabajo de extracción del cesio es:

$$2,14 \text{ eV} \cdot \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}}{1 \text{ eV}} = 3,424 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

y la energía que proporcionan los fotones corresponde a la fórmula

$$E_{\text{fotón}} = h \cdot \nu = h \cdot \frac{c}{\lambda}$$

establecemos la ecuación:  $3,424 \cdot 10^{-19} \text{ J} = h \cdot \frac{c}{\lambda_0}$ ; des-

pejando la longitud de onda umbral, obtenemos:

$$\lambda_0 = 580,5 \text{ nm}$$

Para que se produzca el efecto fotoeléctrico la longitud de onda de la luz incidente ( $\lambda$ ) debe verificar la condi-

ción:  $\lambda \leq \lambda_0$ ; en este caso, sólo puede producir el efecto la radiación de 500 nm.

- b) Partiendo de la hipótesis, más favorable, de que toda la energía del fotón se transfiere a un único electrón, establecemos mediante un balance de energía la relación:

Energía del fotón =  $W_e$  + Energía cinética máxima

En este caso la energía del fotón incidente es:

$$E_{\text{fotón}} = h \cdot \frac{c}{\lambda} = 6,626 \cdot 10^{-34} \cdot \frac{3 \cdot 10^8}{500 \cdot 10^{-9}} \text{ J} = 3,9756 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

En consecuencia, la energía cinética máxima es:

$$E_{c, m} = 3,9756 \cdot 10^{-19} \text{ J} - 3,424 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 5,52 \cdot 10^{-20} \text{ J}$$

Para calcular la rapidez del electrón partiremos de las hipótesis de que inicialmente está en reposo y su rapidez es muy inferior a la de la luz. Por ello, la energía cinética del electrón viene establecida por la ecuación:

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot m_e \cdot v^2$$

Planteando la ecuación

$$5,52 \cdot 10^{-20} \text{ J} = \frac{1}{2} \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot v^2$$

y eliminando  $v$  obtenemos

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot 5,52 \cdot 10^{-20} \text{ J}}{9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}}} = 3,48 \cdot 10^5 \text{ m/s}$$

### PROBLEMA 12.

- a) En primer, lugar expresamos el  $W_e$  en julios:

$$4,28 \text{ eV} = \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}}{1 \text{ eV}} = 6,848 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

Calculamos la longitud de onda umbral con la ecuación:

$$W_e = h \cdot \frac{c}{\lambda_0}$$

Despejando,

$$\lambda_0 = \frac{h \cdot c}{W_e} = \frac{6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Js} \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{6,848 \cdot 10^{-19} \text{ J}}$$

obtenemos:  $\lambda_0 = 290,27 \text{ nm}$

- b) La energía de los fotones correspondientes a la radiación de  $\lambda = 200 \text{ nm}$  es:

$$E_{\text{fotón}} = h \cdot \frac{c}{\lambda} = \frac{1,9878 \cdot 10^{-29}}{200 \cdot 10^{-9}} \text{ J} = 9,939 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

La energía cinética máxima de los electrones es:

$$E_{c, m} = 9,939 \cdot 10^{-19} \text{ J} - 6,848 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 3,091 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

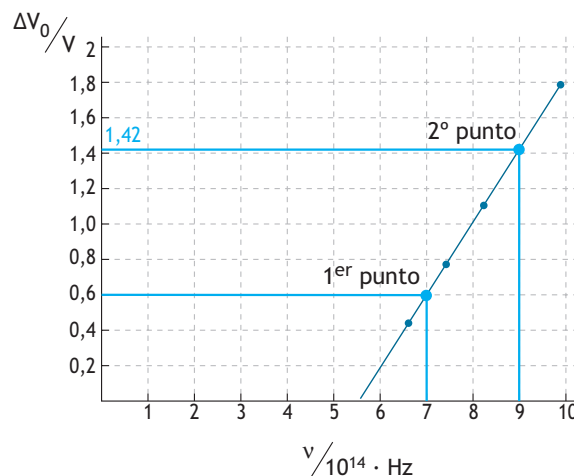
y para detenerlos, en una célula fotoeléctrica, el campo eléctrico debe realizar un trabajo:

$$e \cdot \Delta V_0 = 3,091 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

Despejando,  $\Delta V_0 = 1,93 \text{ V}$ .

### PROBLEMA 13

- a) Al representar el potencial de frenado en función de la frecuencia de la radiación incidente, obtenemos la siguiente gráfica:



Cálculo pendiente:  $\nu_1 = 7 \cdot 10^{14} \text{ Hz} \rightarrow \Delta V_1 = 0,6 \text{ V}$

$\nu_2 = 9 \cdot 10^{14} \text{ Hz} \rightarrow \Delta V_2 = 1,42 \text{ V}$

$$\text{Pendiente} = \frac{1,42 - 0,6}{(9 - 7) \cdot 10^{14}} = 4,13 \cdot 10^{-15} \frac{\text{V}}{\text{Hz}}$$

La gráfica corresponde a una línea recta de pendiente  $4,13 \cdot 10^{-15} \text{ V/Hz}$ .

- b) La existencia de una diferencia de potencial ( $\Delta V_0$ , potencial de corte) a partir de la cual cesa la corriente se interpreta, desde el punto de vista cuántico, como que el trabajo del campo eléctrico ( $e \Delta V_0$ ) consigue detener todos los electrones, incluidos los de mayor energía cinética. En consecuencia:

$$e \Delta V_0 = h (\nu - \nu_0)$$

Por ello al representar  $V_0$  frente a  $\nu$  se obtiene una relación lineal que debe verificar la ecuación:

$$V_0 = (h/e) (\nu - \nu_0)$$

- c) El valor de la constante de Planck se obtiene a partir de la pendiente de la recta:

$$\text{pendiente} = \frac{h}{e}$$

El valor de  $h$  debe ser:

$h = e \cdot 4,13 \cdot 10^{-15} \text{ Js} = 6,608 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$ , valor que supone un error relativo del 0,27%.

Para conocer la naturaleza del metal calculamos la frecuencia umbral, que corresponde al valor de la frecuencia cuando  $\Delta V_0$  es cero (punto en que la recta corta el eje de abscisas). En este caso, a partir de la gráfica se establece:  $\nu_0 = 5,55 \cdot 10^{14}$  Hz.

El trabajo de extracción es:

$$W_e = h \cdot \nu_0$$

$$W_e = 6,608 \cdot 10^{-34} \text{ Js} \cdot 5,55 \cdot 10^{14} \text{ Hz} = 3,67 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 2,29 \text{ eV}$$

Comparando el valor con los de la tabla establecemos que el metal es potasio.

#### PROBLEMA 14

Según los datos del problema:

Situación	Longitud de onda incidente y frecuencia	Potencial de corte
1	491 nm, $6,11 \cdot 10^{14}$ Hz	0,71 V
2	$\lambda, \nu$	1,43 V

Podemos plantear un sistema de ecuaciones partiendo de la relación:

$$e V_0 = h (\nu - \nu_0) = h \cdot \nu - W_e$$

Ecuación 1:

$$e \cdot 0,71 \text{ V} = h \cdot 6,11 \cdot 10^{14} \text{ Hz} - W_e$$

Ecuación 2:

$$e \cdot 1,43 \text{ V} = h \cdot \nu - W_e$$

De la primera ecuación calcula el  $W_e = 2,91 \cdot 10^{-19} \text{ J}$

Y con este dato, calculamos la frecuencia con la segunda ecuación:

$$\nu = 7,85 \cdot 10^{14} \text{ Hz},$$

que corresponde a una longitud de onda de 382,23 nm.

#### PROBLEMA 15

a) Según el problema cuando sobre el metal incide una radiación de longitud de onda de  $\lambda = 280 \text{ nm}$

$$\left( \nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \cdot 10^8}{280 \cdot 10^{-9}} \text{ Hz} = 1,071 \cdot 10^{15} \text{ Hz} \right)$$

el potencial de corte es  $\Delta V_0 = 1,3 \text{ V}$ .

Aplicando la relación:

$$e \Delta V_0 = h (\nu - \nu_0) = h \cdot \nu - W_e, \text{ calcularemos } W_e:$$

$$W_e = h \cdot \nu - e V_0$$

$$W_e = 7,1 \cdot 10^{-19} \text{ J} - 2,08 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 5,019 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

La frecuencia umbral se calcula a partir del trabajo de extracción:

$$\nu_0 = \frac{W_e}{h} = \frac{5,019 \cdot 10^{-19} \text{ J}}{6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Js}} = 7,57 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$$

El trabajo de extracción en eV, es:

$$5,019 \cdot 10^{-19} \text{ J} \cdot \frac{1 \text{ eV}}{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}} = 3,137 \text{ eV}$$

- b) i) Como  $E_{c, \text{máxima}} = e \cdot \Delta V_0$ , si disminuye  $\Delta V_0$  disminuirá la energía cinética máxima.
- ii) Puesto que la frecuencia de la luz incidente no cambia y disminuye el potencial de corte (verificándose la relación  $W_e = h \cdot \nu - e \Delta V_0$ ), el trabajo de extracción aumenta.
- iii) Si el trabajo de extracción, aumenta la frecuencia umbral,  $\nu_0 = \frac{W_e}{h}$ , aumenta.

#### PROBLEMA 16

a) A partir de los datos del problema:

Situación	Longitud de onda incidente y frecuencia	Potencial de corte
1	579 nm $\rightarrow 5,18 \cdot 10^{14}$ Hz	0,24 V
2	558 nm $\rightarrow 5,376 \cdot 10^{14}$ Hz	0,32 V

Podemos plantear un sistema de ecuaciones partiendo de la relación:

$$e \Delta V_0 = h (\nu - \nu_0)$$

Ecuación 1:

$$e \cdot 0,24 \text{ V} = h \cdot (5,18 \cdot 10^{14} \text{ Hz} - \nu_0)$$

Ecuación 2:

$$e \cdot 0,32 \text{ V} = h \cdot (5,376 \cdot 10^{14} \text{ Hz} - \nu_0)$$

Dividiendo la ecuación 2 por la 1, obtenemos:

$$\frac{0,32}{0,24} = \frac{5,376 \cdot 10^{14} \text{ Hz} - \nu_0}{5,18 \cdot 10^{14} \text{ Hz} - \nu_0}$$

Desarrollando;

$$1,33 \cdot (5,18 \cdot 10^{14} \text{ Hz} - \nu_0) = 5,376 \cdot 10^{14} \text{ Hz} - \nu_0$$

que al despajar da lugar a una frecuencia umbral:

$$\nu_0 = 4,6 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$$

b) Para calcular la relación  $h/e$  podemos usar la ecuación 1 o 2 de referencia, y establecer:

$$\frac{h}{e} = \frac{0,24}{5,18 \cdot 10^{14} \text{ Hz} - 4,6 \cdot 10^{14} \text{ Hz}}$$

$$\frac{h}{e} = 4,1 \cdot 10^{-15} \frac{\text{Js}}{\text{C}}$$

Como sabemos el valor de e, calculamos:

$$h = 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 4,1 \cdot 10^{-15} \text{ Js} = 6,56 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$$

### PROBLEMA 17

A partir del enunciado podemos establecer las siguientes situaciones:

Material	Frecuencia de la radiación incidente	Potencial de corte	Trabajo de extracción
A	$\nu$	8 V	$W_{eA}$
B	$\nu$	12 V	5 eV ( $8 \cdot 10^{-19} \text{ J}$ )

Para relacionar los datos usamos la ecuación:

$$e V_o = h (\nu - \nu_0) = h\nu - W_e$$

- a) Con el objetivo de calcular la frecuencia de la radiación incidente aplicamos la anterior ecuación al material B:

$$e \cdot 12 = h \cdot \nu - 8 \cdot 10^{-19}$$

Despejando  $\nu$ , obtenemos:

$$\nu = \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 12 \text{ V} + 8 \cdot 10^{-19} \text{ J}}{6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Js}} = 4,105 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$$

- b) El trabajo de extracción del material A se puede determinar planteado la siguiente igualdad a partir de la energía del fotón:

$$e V_{oA} + W_{eA} = e V_{oB} + W_{eB} = h \cdot \nu$$

Despejando  $W_{eA}$ :

$$W_{eA} = (V_{oB} - V_{oA}) \cdot e + W_{eB} \rightarrow$$

$$\begin{aligned} W_{eA} &= (12 \text{ V} - 8 \text{ V}) \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} + 8 \cdot 10^{-19} \text{ J} \\ &= 1,44 \cdot 10^{-18} \text{ J} = 9 \text{ eV} \end{aligned}$$

## LAS APLICACIONES DE LAS HIPÓTESIS CUÁNTICAS: EFECTO COMPTON Y ESPECTROS

### PROBLEMA 18

En esta pregunta teórica el alumnado debe centrar su respuesta en los siguientes tres aspectos:

- A) *Definir el fenómeno.* Fenómeno por el cual la radiación muy energética (R X o rayos  $\gamma$ , con longitud de onda  $\lambda$  muy pequeña), interacciona con materiales que contienen electrones débilmente ligados, como la parafina o el grafito, originando además de la difracción de la radiación incidente ( $\lambda$ ), la dispersión de una nueva radiación

cuya longitud de onda ( $\lambda'$ ) es mayor que la incidente. Experimentalmente se comprueba que la relación entre la radiación originada por la interacción y la dispersada verifican la ley:

$$\lambda' - \lambda = 2,423 \cdot 10^{-12} \text{ m} (1 - \cos \theta)$$

siendo  $\theta$  el ángulo entre las direcciones de la radiación dispersada e incidente.

- B) *Resaltar la imposibilidad de explicar el fenómeno con la teoría ondulatoria*, lo que da lugar a que este fenómeno sea problemático y por ello se le denomina efecto. Clásicamente, cabe esperar que la radiación se difracte al interaccionar con la materia, y por ello la longitud de onda de la radiación incidente no debe variar.
- C) *Justificar el fenómeno con la teoría corpuscular de Einstein.* El efecto Compton se puede interpretar como un choque entre el fotón incidente y el electrón; este electrón se puede considerar inicialmente en reposo porque su energía cinética de agitación es mucho menor que la de los fotones incidentes. El fotón, al chocar con el electrón, intercambia con éste cantidad de movimiento y energía; y en consecuencia disminuye la energía del fotón (porque aumenta la energía cinética del electrón) y por tanto también disminuye la frecuencia y *aumenta la longitud de onda del fotón dispersado*.

El fenómeno Compton no es observable con radiación visible como una consecuencia del valor tan pequeño del factor  $2,423 \cdot 10^{-12} \text{ m}$ , que corresponde al cambio de longitud de onda de la radiación para un ángulo de dispersión del haz de  $90^\circ$ . A la vista de tan pequeño valor, se deduce que el efecto Compton sólo será observable utilizando radiación de muy baja longitud de onda, o sea de muy alta energía, como corresponde a los rayos X o los rayos  $\gamma$ .

### PROBLEMA 19

La transferencia de energía es máxima cuando la variación entre la longitud de onda dispersada e incidente sea mayor, efecto que debe producirse cuando la dirección de la radiación dispersada posee un ángulo de  $180^\circ$  respecto a la incidente ( $\theta = 180^\circ$ ). En este caso:

$$\lambda' - \lambda = 2,423 \cdot 10^{-12} \text{ m} (1 - \cos 180^\circ)$$

Por tanto  $\Delta\lambda = 2 \cdot \lambda_0$ . La variación relativa de la radiación es:

$$\text{Variación relativa} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_{\text{incidente}}} = \frac{2 \cdot \lambda_0}{\lambda_{\text{incidente}}}$$

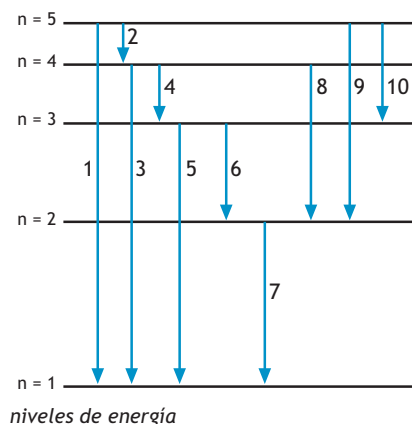
A los RX con  $\lambda = 175,66 \text{ pm}$  le corresponde una variación relativa de 2,76% y para luz ultravioleta de  $\lambda = 100 \text{ nm}$  una variación del  $4,8 \cdot 10^{-3} \%$ . Resultado que evidencia que para que la variación sea apreciable la radiación debe ser de longitud de onda muy pequeña.

### PROBLEMA 20

Según el modelo de Bohr cuando proporcionamos energía (proceso de excitación) a una muestra de hidrógeno, constituida por muchos átomos con un solo electrón en su estado fundamental ( $n = 1$ ), se originan transiciones electrónicas a niveles energéticos superiores ( $n > 1$ ), aumentando, en consecuencia, el radio y el estado energético para cada uno de los átomos de la muestra. Posteriormente, cada átomo independientemente evoluciona espontáneamente hasta el estado de máxima estabilidad, primer nivel ( $n = 1$ ). Para ello, el electrón excitado realiza transiciones, en una etapa o en varias, entre los distintos estados estacionarios intermedios posibles. A cada transición le corresponde un tipo de radiación simple, que se asocia a una raya espectral. Como los posibles estados energéticos del átomo están cuantificados sólo podrán emitirse cierto tipo de radiaciones, con determinadas frecuencias. Las distintas rayas observadas corresponden a saltos electrónicos entre los posibles estados estacionarios; al ser varios estos estados, aunque limitados, ello da lugar a una multiplicidad de rayas.

### PROBLEMA 21

En el caso de promocionar el electrón al nivel 5, hay cinco niveles de energía posible. Serán posibles 10 transiciones a niveles inferiores, tal como representamos en la figura.



Para calcular la longitud de onda, correspondiente a una transición entre dos niveles, aplicamos la hipótesis de Bohr:

$$E_{\text{Fotón}} = \Delta E_{\text{transición}} = h \cdot \frac{c}{\lambda}$$

Despejando la longitud de onda:

$$\lambda = \frac{h \cdot c}{\Delta E_{\text{transición}}}$$

### PROBLEMA 22

La situación más favorable del proceso de excitación corresponde a que toda la energía del fotón se transfiera a un

solo átomo. Puesto que la energía absorbida se utiliza en promover al electrón del átomo desde el nivel 1 (estado fundamental) a un nivel superior  $n$ , podemos establecer la relación:

$$\Delta E_{\text{absorbida}} = \Delta E_{\text{transición}}$$

La energía de los distintos estados estacionarios del átomo de hidrógeno, según Bohr, es proporcionada por la ecuación:

$$E_n = \frac{-2,176 \cdot 10^{-18}}{n^2} \text{ J}$$

Ya que la transición se produce desde el estado fundamental,  $n = 1$ , a un estado  $n > 1$ , planteamos la igualdad:

$$2,087 \cdot 10^{-18} \text{ J} = \left[ \frac{-2,176 \cdot 10^{-18}}{n^2} - \left( \frac{-2,176 \cdot 10^{-18}}{1^2} \right) \right] \text{ J}$$

$$\text{que da lugar a: } 0,9591 = 1 - \frac{1}{n^2}$$

Despejando  $n$  y redondeando, obtenemos:  $n = 5$ .

En el proceso de emisión, la radiación con mayor longitud de onda corresponde al salto energético más pequeño. En este caso entre  $n = 5$  y  $n = 4$ . Por ello, la energía del fotón corresponde a:

$$E_{\text{fotón, menos energético}} = \left[ \frac{-2,176 \cdot 10^{-18}}{4^2} - \left( \frac{-2,176 \cdot 10^{-18}}{5^2} \right) \right] \text{ J} = 4,896 \cdot 10^{-20} \text{ J}$$

La longitud de onda asociada a esta radiación es:

$$\lambda = \frac{h \cdot c}{E_{\text{fotón}}} = \frac{1,9878 \cdot 10^{-25}}{4,896 \cdot 10^{-20}} \text{ m} = 4,06 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

En caso de menor longitud de onda corresponde al salto más energético, es decir del nivel 5 al 1. Este caso corresponde a  $\lambda = 95,246 \text{ nm}$ .

$$\lambda = \frac{h \cdot c}{\Delta E_{\text{transición}}} = \frac{6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Js} \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{2,087 \cdot 10^{-18} \text{ J}}$$

## LA NATURALEZA DUAL DE LA MATERIA Y SUS CONSECUENCIAS

### PROBLEMA 23

a) La longitud de onda de De Broglie se calcula por la ecuación:

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

Por tanto, su valor depende de la cantidad de movimiento de la partícula definida respecto a un sistema de refe-

rencia. Admitiendo que  $v \ll c$ , la cantidad de movimiento se calcula por la fórmula:  $p = m \cdot v$ . Es decir, la cantidad de movimiento depende de la masa y de la velocidad, por ello partículas distintas con velocidades diferentes pueden poseer asociadas la misma longitud de onda. Para ello, debe verificarse:

$$m_1 \cdot v_1 = m_2 \cdot v_2$$

- b) Para relacionar la longitud de onda de De Broglie con la energía cinética debemos expresar  $p$  en función de  $E_c$ . Suponiendo que  $v \ll c$ , la energía cinética se determina por la fórmula:

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot m_e \cdot v^2 = \frac{p^2}{2 \cdot m_e}$$

Despejando  $p$ ,  $p = \sqrt{2 \cdot m_e \cdot E_c}$ .

Y la longitud de onda asociada según la ecuación de De Broglie es:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2 \cdot m_e \cdot E_c}}$$

Para relacionar dos longitudes de onda del electrón con distintas energías cinéticas usaremos de nexo la constante  $h$ , estableciendo:

$$\lambda_1 \cdot \sqrt{2 \cdot m_e \cdot E_{c1}} = \lambda_2 \cdot \sqrt{2 \cdot m_e \cdot E_{c2}} = h$$

Relacionando las longitudes de onda:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \sqrt{\frac{E_{c2}}{E_{c1}}}$$

En este caso,

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \sqrt{\frac{8 \text{ eV}}{2 \text{ eV}}} = 2 ; \quad \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = 2$$

#### PROBLEMA 24

- a) Según el enunciado la frecuencia umbral del metal es  $8,5 \cdot 10^{14}$  Hz y la frecuencia de la luz incidente es  $1,3 \cdot 10^{15}$  Hz. En consecuencia, la energía cinética máxima es:

$$\begin{aligned} E_{c, \text{ máxima}} &= h (v - v_0) = \\ &= 6,626 \cdot 10^{-34} \cdot (1,3 \cdot 10^{15} - 8,5 \cdot 10^{14}) \text{ J} = \\ &= 2,9817 \cdot 10^{-19} \text{ J} \end{aligned}$$

que expresándola en eV es:

$$2,9817 \cdot 10^{-19} \text{ J} \cdot \frac{1 \text{ eV}}{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}} = 1,863 \text{ eV}$$

- b) Para calcular la longitud de onda asociada debemos calcular su cantidad de movimiento. Suponiendo que  $v \ll c$ , la energía cinética se determina por la fórmula:

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{p^2}{2 \cdot m}$$

Despejando  $p$ ,  $p = \sqrt{2 \cdot m \cdot E_c}$ . En este caso,

$$p = \sqrt{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 2,9817 \cdot 10^{-19}} = 7,37 \cdot 10^{-25} \text{ kg m/s}$$

La longitud de onda de De Broglie; se obtiene por la ecuación:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Js}}{7,37 \cdot 10^{-25} \text{ kg m/s}} = 9 \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

#### PROBLEMA 25

- a) Podemos relacionar la longitud de onda del electrón ( $\lambda_e$ ) y el protón ( $\lambda_p$ ) con el mismo valor de la rapidez ( $v$ ):

$$\lambda_e \cdot (m_e \cdot v) = \lambda_p \cdot (m_p \cdot v) = h$$

La proporción es:

$$\frac{\lambda_e}{\lambda_p} = \frac{m_p}{m_e} = \frac{1,67 \cdot 10^{-27}}{9,1 \cdot 10^{-31}} = 1835,16$$

- b) Para relacionar dos longitudes de onda con las energías cinéticas usaremos de nexo la constante  $h$ , estableciendo:

$$\lambda_e \cdot \sqrt{2 \cdot m_e \cdot E_c} = \lambda_p \cdot \sqrt{2 \cdot m_p \cdot E_c} = h$$

La relación entre las longitudes de onda es:

$$\frac{\lambda_e}{\lambda_p} = \sqrt{\frac{m_p}{m_e}} = \sqrt{1835,16} = 42,84$$

- c) En este caso:

$$\lambda_e \cdot p = \lambda_p \cdot p = h$$

Por tanto,

$$\frac{\lambda_e}{\lambda_p} = 1$$

#### PROBLEMA 26

Puesto que  $\lambda = 13,2 \cdot 10^{-12}$  m, le corresponde una cantidad de movimiento de:

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Js}}{13,2 \cdot 10^{-12} \text{ m}} = 5,0197 \cdot 10^{-23} \text{ kg m/s}$$



Y su energía cinética es:

$$E_c = \frac{p^2}{2 \cdot m_p} = \frac{(5,0197 \cdot 10^{-23})^2}{2 \cdot 1,67 \cdot 10^{-27}} \text{ J} = 7,54 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

Suponiendo que esta energía es proporcionada por la acción del campo eléctrico:

$$e \cdot \Delta V = E_c$$

obtenemos

$$\Delta V = \frac{E_c}{e} = \frac{7,54 \cdot 10^{-19} \text{ J}}{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}} = 4,715 \text{ V}$$

### PROBLEMA 27

- a) Suponiendo que la energía transferida por el campo eléctrico se use para proporcionar energía cinética a los electrones, inicialmente en reposo, establecemos:

$$E_c = e \cdot \Delta V = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 20 \cdot 10^3 \text{ V} = 3,2 \cdot 10^{-15} \text{ J}$$

La cantidad de movimiento correspondiente es:

$$p = \sqrt{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 3,2 \cdot 10^{-15}} = 7,63 \cdot 10^{-23} \text{ kg m/s}$$

La longitud de onda de De Broglie para los electrones, se obtiene por la ecuación:

$$\lambda_e = \frac{h}{p} = \frac{6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Js}}{7,63 \cdot 10^{-23} \text{ kg m/s}} = 8,7 \cdot 10^{-12} \text{ m}$$

La longitud de onda de los fotones de RX con idéntica energía que los electrones acelerados ( $E_{\text{fotón}} = 3,2 \cdot 10^{-15} \text{ J}$ ), se obtiene a partir de la ecuación:

$$\lambda_{\text{RX}} = \frac{h \cdot c}{E_{\text{fotón}}} = \frac{1,9878 \cdot 10^{-25}}{3,2 \cdot 10^{-15}} \text{ m} = 6,21 \cdot 10^{-11} \text{ m}$$

- b) En primer lugar deducimos la relación entre las cantidades de movimiento:

$$\lambda \cdot p_e = \lambda \cdot p_p = h$$

Es decir, poseen la misma cantidad de movimiento. Y, puesto que la energía cinética y la cantidad de movimiento están relacionados por la ecuación:

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{p^2}{2 \cdot m}$$

Establecemos:

$$p^2 = 2 \cdot E_{c,e} \cdot m_e = 2 \cdot E_{c,n} \cdot m_n$$

y la relación entre las energías cinéticas es:

$$\frac{E_{c,e}}{E_{c,n}} = \frac{m_n}{m_e} = 1868,13$$

### PROBLEMA 28

El principio de incertidumbre puede enunciarse como:

*"No se pueden determinar simultáneamente con precisión absoluta la posición y el momento lineal de una partícula"*

Este principio afirma la imposibilidad de determinar simultáneamente y con una precisión absoluta la posición y la cantidad de movimiento de una partícula. El principio es una consecuencia de la dualidad onda-corpúsculo de la materia e implica la deslocalización de las partículas a escala atómica. La expresión matemática del principio corresponde a la ecuación:

$$\Delta p_x \cdot \Delta r_x \geq \frac{h}{4\pi} \quad (\text{en la dirección } x)$$

que se interpreta como que la precisión de una de las magnitudes, por ejemplo la posición  $\Delta r_x$ , conlleva una gran imprecisión en la otra magnitud, en este caso  $\Delta p_x$ .

### PROBLEMA 29

En este caso la relación de incertidumbre corresponde a la ecuación:

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{h}{4\pi}$$

siendo  $\Delta E = h \cdot \Delta v$  e  $\Delta t = 10^{-9} \text{ s}$ , por ello:

$$h \Delta v \geq \frac{h}{4\pi \cdot \Delta t} \rightarrow \Delta v \geq \frac{1}{4\pi \Delta t} = 8 \cdot 10^7 \text{ Hz}$$

### PROBLEMA 30

En este caso al aplicar el principio de Heisenberg al eje X:

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{h}{4 \cdot \pi}$$

Para determinar la imprecisión de la cantidad de movimiento usamos la imprecisión de la velocidad, puesto que la masa se considera determinada con una imprecisión muy baja:

$$\Delta p = m \cdot \Delta v = 1 \cdot 10^{-6} \text{ kg} \cdot 10^{-3} \text{ m/s} = 10^{-9} \text{ kg m/s}$$

Y sustituyendo en la ecuación matemática de Heisenberg:

$$\Delta x \geq \frac{h}{4\pi \Delta p} = \frac{h}{4\pi \cdot 10^{-9} \text{ kg m/s}} = 5,273 \cdot 10^{-26} \text{ m}$$

imprecisión que es irrelevante para las dimensiones de la partícula.

En el caso de tratarse de un electrón la imprecisión en la cantidad de movimiento es:

$\Delta p = m \cdot \Delta v = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot 10^{-3} \text{ m/s} = 9,1 \cdot 10^{-34} \text{ kg m/s}$   
que da lugar a una imprecisión en su posición de:

$$\Delta x \geq \frac{h}{\Delta p} = \frac{h}{9,1 \cdot 10^{-34} \text{ kg m/s}} = 0,06 \text{ m}$$

En este caso la imprecisión es muy importante, e implica la deslocalización del electrón.

## 4.3 AUTOEVALUACIÓN PROPUESTA

### EJERCICIO 1

- Puesto que los fotones tienen suficiente energía para arrancar electrones, al aumentar la intensidad aumenta la cantidad de fotones incidentes sobre el metal, y en consecuencia aumenta el número de electrones arrancados.
- Al aumentar la frecuencia sin variar la intensidad de la luz aumentará la energía de los electrones arrancados sin variar su cantidad, puesto que incide sobre el metal el mismo número de fotones.
- En este caso los fotones incidentes no tienen suficiente energía para arrancar electrones.

### EJERCICIO 2

- La frecuencia de los fotones es:

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{840 \cdot 10^{-9} \text{ m}} = 3,57 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$$

La cantidad de movimiento asociada la deducimos a partir de la ecuación de De Broglie:

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Js}}{840 \cdot 10^{-9} \text{ m}} = 7,9 \cdot 10^{-28} \text{ kg m/s}$$

La energía del fotón:

$$E_{\text{fotón}} = h \cdot \nu = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Js} \cdot 3,57 \cdot 10^{14} \text{ Hz} = 2,36 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

- La energía cinética máxima se obtiene a partir de la relación:

$$E_{c,\text{máxima}} = E_{\text{fotón}} - W_e$$

siendo;

$$W_e = 1,25 \text{ eV} \cdot \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}}{1 \text{ eV}} = 2 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

Por tanto:

$$E_{c,\text{máxima}} = 2,36 \cdot 10^{-19} \text{ J} - 2 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 0,36 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

### EJERCICIO 3

- La ecuación teórica del potencial de frenado en función de la frecuencia incidente es:

$$e V_0 = h (\nu - \nu_0) = h \cdot \nu - W_e$$

y en consecuencia:

$$V_0 = \frac{h}{e} \nu - \frac{h}{e} \nu_0$$

ecuación que corresponde a una recta del tipo  $y = m x - n$

- La ordenada en el origen corresponde al valor del potencial de corte cuando  $(\nu = 0)$ . Por ello:

$$V_0 = -\frac{h}{e} \nu_0$$

lo que permite calcular el valor de la frecuencia umbral del metal:

$$\nu_0 = -\frac{e}{h} V_0 = -\frac{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}}{6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Js}} (-2 \text{ V}) = 4,83 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$$

- La pendiente de la recta es:

$$\frac{h}{e} = \frac{6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Js}}{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}} = 4,14 \cdot 10^{-15} \frac{\text{Js}}{\text{C}}$$

### EJERCICIO 4

- Suponiendo que la partícula parte del reposo su energía cinética corresponde a la energía transferida por el campo eléctrico:

$$W_e = e \cdot \Delta V = E_c$$

Por ello:

$$E_c = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 30 \text{ V} = 48 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

Para calcular la cantidad de movimiento aplicaremos la relación:

$$p = \sqrt{2 \cdot m \cdot E_c} = \sqrt{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot 48 \cdot 10^{-19} \text{ J}}$$

La longitud de onda de De Broglie es:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Js}}{\sqrt{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot 48 \cdot 10^{-19} \text{ J}}} = 2,24 \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

- Puesto que los protones y electrones tienen el mismo valor de carga adquieren la misma energía cinética al ser acelerados con igual diferencia de potencial. Las expresiones de las longitudes de ondas asociadas son:

Protón	Electrón
$\lambda_p = \frac{h}{\sqrt{2 \cdot m_p \cdot E_c}}$	$\lambda_e = \frac{h}{\sqrt{2 \cdot m_e \cdot E_c}}$

La relación entre las longitudes de onda es:

$$\frac{\lambda_e}{\lambda_p} = \sqrt{\frac{m_p}{m_e}} = 42,8$$

### EJERCICIO 5

El comportamiento de las partículas subatómicas precisa del modelo ondulatorio para ciertos fenómenos, como la difracción, y del corpuscular en otros, como el efecto fotoeléctrico, pero ningún fenómeno precisa de la aplicación simultánea de ambos modelos. Este hecho da lugar a la "dualidad onda-partícula", puesto que para describir completamente el comportamiento de partículas como el electrón necesitamos ambos modelos, que se complementan entre sí.

## 5. CRITERIOS DE EVALUACIÓN

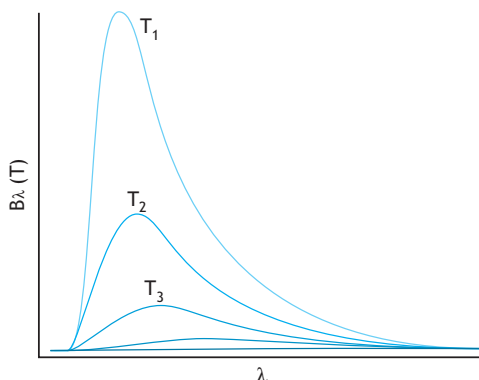
Al estudiar el presente tema pretendemos que el alumno o alumna sea capaz de:

- Establecer las causas que dieron lugar a la formulación de la teoría cuántica.
- Formular la hipótesis cuántica.
- Comprender el significado e implicaciones de la hipótesis cuántica.
- Calcular la energía de un fotón y el número de fotones emitidos por una fuente, en función de sus características.
- Definir el efecto fotoeléctrico y explicar sus características.
- Comprender las limitaciones del modelo ondulatorio para justificar las leyes empíricas del efecto fotoeléctrico.
- Explicar las leyes empíricas del efecto fotoeléctrico con la hipótesis cuántica de Einstein.
- Aplicar la hipótesis cuántica para calcular características del efecto fotoeléctrico: frecuencia umbral, energía cinética máxima de los electrones o potencial de corte de la célula.
- Caracterizar el fotón como una partícula definida por su energía y por su cantidad de movimiento.
- Comprender la importancia del efecto Compton como prueba experimental de la cantidad de movimiento del fotón.
- Comprender y justificar la ecuación del efecto Compton.
- Comprender los postulados del modelo atómico de Bohr.
- Explicar en base al modelo de Bohr la formación del espectro atómico del hidrógeno.
- Comprender la naturaleza dual de la materia expresada en la ecuación de De Broglie.
- Valorar la naturaleza dual de las partículas como un modelo que nos permite una mejor comprensión del comportamiento complejo de la materia.
- Determinar la longitud de onda asociada a una partícula en movimiento aplicando la ecuación de De Broglie.
- Enunciar y establecer las consecuencias del principio de indeterminación de Heisenberg.
- Valorar el impulso de la revolución cuántica en el desarrollo científico y tecnológico.

## 6. EJERCICIOS PROPUESTOS PARA LA EVALUACIÓN FINAL DEL TEMA

### EL PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA Y LA HIPÓTESIS CUÁNTICA

- 1 Enuncia las leyes de Stefan-Boltzmann y de desplazamiento de Wien del cuerpo negro. En la figura se muestra la intensidad de emisión de un cuerpo negro en función de la longitud de onda de la radiación emitida a distintas temperaturas; en base a dichas leyes justifica cuál de las curvas corresponde a la del cuerpo negro emitiendo a mayor temperatura.



- 2 Discute la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:
- Un fotón de luz roja tiene mayor longitud de onda que un fotón de luz azul.
  - Un fotón de luz amarilla tiene mayor frecuencia que un fotón de luz azul.
  - Un fotón de luz verde tiene menor velocidad de propagación en el vacío que un fotón de luz amarilla.
  - Un fotón de luz naranja es más energético que un fotón de luz roja.
- 3 Un equipo láser de 630 nm de longitud de onda, concentra 10 mW de potencia en un haz de 1mm de diámetro.
- Deduce razonadamente y determina el valor de la intensidad del haz en este caso.
  - Razona y determina el número de fotones que el equipo emite en cada segundo.

Datos:  $h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$  ;  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1}$  ;  $1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m}$

### EFFECTO FOTOELECTRICO

- 4 a) Explica en qué consiste el efecto fotoeléctrico. ¿Qué es y por qué existe la frecuencia umbral?
- b) Si iluminamos la superficie de un metal con luz de  $\lambda = 512 \text{ nm}$  la energía cinética máxima de los elec-

trones emitidos es de  $8,60 \cdot 10^{-20} \text{ J}$ . Determina la frecuencia umbral del metal. ¿Con luz de qué frecuencia deberemos incidir sobre el metal para que emita electrones de energía máxima  $6,40 \cdot 10^{-20} \text{ J}$ .

Datos:  $h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$  ;  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1}$  ;  $1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m}$

- 5 Sobre una lámina metálica se hace incidir luz ultravioleta de longitud de onda 100 nm. Calcula la velocidad máxima de los electrones que se desprenden del metal, sabiendo que el trabajo de extracción del metal es de  $10^{-18} \text{ J}$ .

Datos:  $h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$  ,  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1}$  ,  
 $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$  ,  $1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m}$

- 6 En un experimento de efecto fotoeléctrico un haz de luz de 500 nm de longitud de onda incide sobre un metal cuya función de trabajo (o trabajo de extracción) es de 2,1 eV. Analiza la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

a) Los electrones arrancados pueden tener longitudes de onda de De Broglie menores que  $10^{-8} \text{ m}$ .

b) La frecuencia umbral del metal es mayor que  $10^{14} \text{ Hz}$ .

Datos: Constante de Planck,  $h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$  ; velocidad de la luz en el vacío,  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ , masa del electrón  $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ ; valor absoluto de la carga del electrón,  $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

- 7 Un láser de helio-neón de 3 mW de potencia emite luz monocromática de longitud de onda  $\lambda = 632,8 \text{ nm}$ . Si se hace incidir un haz de este láser sobre la superficie de una placa metálica cuya energía de extracción es 1,8 eV:

a) Calcule el número de fotones que inciden sobre el metal transcurridos 3 segundos.

b) La velocidad máxima de los fotoelectrones extraídos y el potencial que debe adquirir la placa (potencial de frenado) para que cese la emisión de electrones.

Datos:  $h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$  ,  $c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$  ,  
 $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$  ,  $1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m}$

- 8 Para un determinado metal, el potencial de frenado es  $V_1$  cuando se le ilumina con una luz de longitud de onda  $\lambda_1$  y  $V_2$  cuando la longitud de onda de la luz incidente es  $\lambda_2$ . A partir de estos datos, expresa el valor de la constante de Planck. Si  $V_1 = 0$ , ¿qué valor tiene  $\lambda_1$ ?

- 9 El año 2005 fue declarado por la UNESCO **Año Mundial de la Física**, conmemorando el centenario de la publicación por A. Einstein de una serie de trabajos revolucio-

narios. Uno de ellos estuvo dedicado a la explicación del *efecto fotoeléctrico*, por la que Einstein recibió el Premio Nobel de Física en 1921.

- Explica brevemente en qué consiste el *efecto fotoeléctrico*. ¿Qué es el potencial de frenado (o de corte)? ¿Cómo depende este potencial de la frecuencia de la luz incidente?
- La energía de extracción (o función de trabajo) del aluminio es  $W_e = 4,08 \text{ eV}$ . Calcula el potencial de frenado de los fotoelectrones si se ilumina con luz de longitud de onda  $\lambda = 250 \text{ nm}$ .

Datos:  $e = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ ;  $h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ J s}$ ;  
 $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ .

## LA NATURALEZA DUAL DE LA MATERIA Y SUS CONSECUENCIAS

- Escribe la *ecuación de De Broglie*. Comenta su significado e importancia física.
  - Un electrón que parte del reposo es acelerado mediante un campo eléctrico entre dos puntos con una diferencia de potencial  $\Delta V = 200 \text{ V}$ . Calcula la velocidad final del electrón y su longitud de onda asociada.  
 $e = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ ;  $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ ;  
 $h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ J s}$ .
- Enuncia y explica el significado del principio de indeterminación. ¿Qué implicaciones tiene este principio?

El profesor o profesora puede buscar más ejercicios de referencia para elaborar sus pruebas de evaluación en las siguientes páginas WEB:

COMUNIDAD	DIRECCIÓN DE INTERNET DE BÚSQUEDA
Aragón	<a href="http://wzar.unizar.es/servicios/acceso/logse/indice.htm">http://wzar.unizar.es/servicios/acceso/logse/indice.htm</a>
Andalucía	<a href="http://www.ujaen.es/">http://www.ujaen.es/</a> En la ventana <b>PERFILES</b> , escoge <b>Nuevo Alumno</b> , y seguidamente en la etiqueta <b>SELECTIVIDAD</b> , pulsa <b>Exámenes anteriores</b> .
Castilla-La Mancha y León	<a href="http://www.uclm.es">http://www.uclm.es</a> Elige en la ventana <b>Estudiantes</b> la opción <b>Estudiante nuevo</b> ; seguidamente pulsa <b>PAU</b> . Y finalmente escoger <b>Modelos Propuestos en las PAU</b> . <a href="http://www.usal.es">http://www.usal.es</a> Escoge en la ventana <b>Futuros estudiantes</b> , la opción <b>Acceso</b> , <b>preinscripción y matrícula</b> . En el apartado " <b>Acceso</b> " pulsa <b>Pruebas de acceso: Selectividad</b>
Catalunya	<a href="http://www.gencat.cat/">http://www.gencat.cat/</a> En la ventana <b>TEMES</b> escoge <b>Universitats</b> para en la opción <b>Accés a la universitat</b> , pulsar <b>Proves d'Accés a la Universitat (PAU)</b> y finalmente <b>Exàmens i informació de les matèries</b>
C. Valenciana	<a href="http://www.ua.es">http://www.ua.es</a> En la ventana <b>Estudios y acceso</b> , escoge la opción <b>Acceso</b> y activa: <b>Selectividad alumnos de bachillerato LOGSE</b> y finalmente pulsa exámenes del apartado <b>Currículo de las asignaturas y Exámenes de años anteriores</b> .
Islas Baleares	<a href="http://www.uib.es/depart/dfs/apl/aac/paufisica/">http://www.uib.es/depart/dfs/apl/aac/paufisica/</a>
Madrid	<a href="http://www.uc3m.es/">http://www.uc3m.es/</a> En la ventana <b>Futuros estudiantes</b> elegir la opción <b>trámites de admisión</b> , y a continuación el rótulo <b>Pruebas de Acceso</b> y posteriormente en <b>Selectividad</b> pulsar la opción <b>Modelos de examen y criterios de corrección</b> .



## 7. RECURSOS DIDÁCTICOS Y BIBLIOGRAFÍA DE CONSULTA

### LIBROS

- BERGIA, S. y otros. 1992. *El siglo de la física*. Tusquets: Barcelona.
- BOHR, N. 1988. *La teoría atómica y la descripción de la naturaleza*. Alianza Universidad: Madrid.
- DE BROGLIE, L. 1937. *La física nueva y los cuantos*. Losada: Buenos aires.
- EINSTEIN, A. e INFELD, L. 1983. *La evolución de la física*. Salvat: Barcelona.
- ELLERI, F. 1986. *El debate de la teoría cuántica*. Alianza: Madrid.
- FARMELO, G. 2004. *Fórmulas elegantes*. Edita: Tusquets. Metatemas.
- FERNÁNDEZ-RAÑADA, A. 2004. *Ciencia, incertidumbre y conciencia. Heisenberg*. Edita Naviola.
- GIL, D. 1981. *Evolución de la idea de materia*. I.C.E. Universidad de Valencia: Valencia.
- GRIBBIN, J. 1984. *En busca del gato de Schrödinger*. Salvat: Barcelona.
- HEISENBERG, W. 1985. *Encuentros y conversaciones con Einstein y otros ensayos*. Alianza: Madrid.
- HEY, T. y WALTERS, P. 1987. *El universo cuántico*. Alianza: Madrid.
- HOLTON, G. y BRUSH, S. 1993. *Introducción a los conceptos y teorías de las ciencias físicas*. Reverté : Barcelona.
- KUHN, T. 1987. *La teoría del cuerpo negro y la discontinuidad cuántica*. Alianza Universidad: Madrid.
- SCHWINGER, J. 1995. *El legado de Einstein*. Biblioteca Scientific American: Barcelona.
- SERWAY, R. A. JEWET, J. W. 2003. *Física, 3ª edición, 2 vol.* Madrid: Paraninfo.
- SPIELBER, N. 1990. *Siete ideas que modificaron el mundo*. Pirámide: Madrid.
- TIPLER, MOSCA. 2005. *Física, 5ª edición. vol. 2*. Editorial Reverté: Barcelona.

### ARTÍCULOS

- AGASSI, J. 1967. The Kirchhoff-Planck radiation Law. *Science*, 156, 30-37.
- BELANDA, A. et al. 1989. Enseñanza de modelos sobre la naturaleza de la luz. *Enseñanza de las Ciencias*, 7(3), 271-275.
- BORK, A.M. 1966. Physics just before Einstein. *Science*, 152, 787-603.
- DELIGEORGES, S. 1994. La catastrophe ultravioleta. *Science et Avenir*, 46,18-25.
- DÍAZ, A. 1992. Blas Cabrera, defensor y difusor de la relatividad en España, en *Hisporia*, nº 16, 144-150.
- DÍEZ MUIÑO, R. ECHENIQUE, P. M. 2005. La doble cara del efecto fotoeléctrico. *Revista Española de Física*, vol. 19, nº 4, 11-16.
- ESCRIBANO, J.R. 1995. ¿Es deducible la ecuación  $E = h\nu$  o es un postulado? *Revista Española de Física*, vol. 9, nº 2.
- GALINDOTIXAIRE, A. 2005. Einstein y el tiempo. *Revista Española de Física*, vol. 19, nº 1, 64-72.
- GIL, D., SENENT, J. y SOLBES, J. 1988.  $E = mc^2$ , la ecuación más famosa de la física: una incomprendida, en *Revista Española de Física*, vol. 2, nº 2, 53-55.
- SÁNCHEZ RON, J. M. 2005. El otro Einstein. *Revista Española de Física*, vol. 19, nº 1, 58-63.
- YNDURAIN MUÑOZ, F.J. 2005. Relatividad y mecánica cuántica, fotones y partículas. *Revista Española de Física*, vol. 19, nº 1, 10-18.

### AUDIOVISUAL

El profesor o profesora puede usar como recurso audiovisual de la serie "*Más allá del Universo Mecánico*" el episodio nº 50, ONDAS Y CORPÚSCULOS. El objetivo del programa es complementar la discusión del carácter dual de la materia y analizar el "principio de incertidumbre de Heisenberg".



# GRAVITACIÓN

# 4

## 1. PRESENTACIÓN GENERAL DEL TEMA

De las cuatro interacciones fundamentales de la naturaleza, la más evidente es la que se produce entre las masas: la *interacción gravitatoria*. El objetivo básico de este tema es analizar en profundidad la gravitación, y en especial la ley de Newton, pero por motivos históricos empezaremos presentando los diferentes modelos que a lo largo de los siglos se propusieron para comprender la estructura del sistema solar.

En general cabe esperar que los alumnos y las alumnas tengan una idea de los modelos geocéntrico o heliocéntrico del sistema solar, así como de la ley de la gravitación universal, que conozcan la fórmula del peso  $P = mg$  y que sepan que la aceleración de la gravedad es  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ ; pero no es probable que entiendan bien el significado de  $g = 9,8 \text{ N/kg}$ , que es la expresión lógica de la intensidad del campo gravitatorio terrestre o que sepan utilizar con precisión las consecuencias del carácter conservativo del campo gravitatorio.

Prácticamente todos los programas propuestos para este tema coinciden en los contenidos a desarrollar y en el orden:

- 1º Antecedentes de la ley de la gravitación: desde el modelo geocéntrico hasta Kepler.
- 2º La ley de la gravitación de Newton.
- 3º Explicación de la interacción gravitatoria basándose en el concepto de campo de fuerzas.

4º Carácter conservativo del campo gravitatorio y consecuencias.

5º Aplicaciones: Satélites, cohetes, mareas...

Dada su importancia en física, debe aprovecharse el estudio del campo gravitatorio para generalizar algunos conceptos que son aplicables a otros *campos de fuerzas*, sobre todo al eléctrico. Incluso es conveniente establecer comparaciones entre uno y otro campo, marcando algunas analogías y diferencias existentes entre ellos, bien en este tema o mejor cuando se estudie de nuevo el campo eléctrico dentro del tema sobre la interacción electromagnética.

En el diseño y el desarrollo del tema se han tenido en cuenta las siguientes ideas previas, que suelen encontrarse presentes en nuestro alumnado:

1. La diferenciación del comportamiento mecánico de los cuerpos celestes y los cuerpos terrestres.
2. Suponen que, para que se transmita la fuerza, debe existir contacto o un medio material por el que se propague.
3. La ausencia de significado del concepto de campo gravitatorio, que consideran un mero artificio matemático que hay que aprender pero que no tiene utilidad.
4. Asocian la energía potencial a la posición de una masa respecto a la superficie terrestre, y se la asignan a la partícula, independientemente del campo.

## 2. CONTENIDOS

### 1 *El modelo geocéntrico del Universo*

- Primeras observaciones astronómicas
- La cosmología de Aristóteles
- Ptolomeo y su modelo geocéntrico

### 2 *El modelo heliocéntrico del universo y las leyes de Kepler*

- El modelo de Copérnico
- La aportación de Galileo
- Las leyes de Kepler

### 3 *La ley de la gravitación de Newton*

- La dependencia de la fuerza con la distancia
- La ley de la gravitación

### 4 *El momento angular y las fuerzas centrales. Principio de conservación del momento angular*

### 5 *Consecuencias de la ley de la gravitación*

- Justificación de las leyes de Kepler
- La forma de la Tierra y descubrimiento de nuevos planetas
- Los cometas y las mareas

### 6 *El campo gravitatorio*

- Intensidad de campo y líneas de fuerza (o campo)

### 7 *El campo gravitatorio terrestre*

- Variación de  $g$  con la latitud y con la altura
- Determinación del valor de  $g$  en la superficie terrestre

### 8 *Estudio energético de la interacción gravitatoria*

- Energía potencial gravitatoria y potencial

### 9 *Satélites artificiales*

- Leyes que cumplen, energía mecánica
- Tipos de satélites y tipos de órbitas
- Cohetes espaciales y su lanzamiento
- Fundamento y tipos de cohetes
- Rapidez de escape
- La síntesis newtoniana
- Complemento: el origen del sistema solar

### 3. OBJETIVOS ESPECÍFICOS (Capacidades que hay que desarrollar)

CONCEPTOS	PROCEDIMIENTOS	ACTITUDES
<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Comprender la diferencia entre modelo geocéntrico y modelo heliocéntrico.</li> <li>2. Establecer el sistema de Copérnico.</li> <li>3. Enunciar las leyes de Kepler.</li> <li>4. Formular y comprender el significado de la ley de la gravitación universal.</li> <li>5. Justificar las leyes de Kepler.</li> <li>6. Aplicar la ley de Newton de la gravitación.</li> <li>7. Comprender el concepto de campo gravitatorio, intensidad de campo y su cálculo.</li> <li>8. Ampliar el significado de la energía potencial gravitatoria.</li> <li>9. Establecer el carácter conservativo de la fuerza gravitatoria y comprender sus implicaciones.</li> <li>10. Estudiar las características de los satélites artificiales.</li> <li>11. Establecer el concepto de velocidad de escape.</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Uso de modelos para explicar la constitución del sistema solar.</li> <li>2. Analizar un texto escrito y extraer los puntos esenciales y la postura defendida por el autor.</li> <li>3. Saber aplicar una ley física o un principio a situaciones físicas diversas.</li> <li>4. Definir conceptos físicos relacionados con el tema (interacción gravitatoria, campo, ...) y enunciar principios o leyes.</li> <li>5. Aplicar los conceptos y leyes a la determinación de masas de cuerpos celestes, distancias a que se encuentran, altura de un satélite, etc.</li> <li>6. Calcular las variaciones que sufre la intensidad del campo gravitatorio debido a la altura, la latitud y la profundidad.</li> <li>7. Resolver problemas de lápiz y papel sobre diversos aspectos de la interacción gravitatoria, diseñando una estrategia y operando con rigor, especialmente con las magnitudes vectoriales.</li> <li>8. Analizar críticamente el resultado numérico de los ejercicios, comprobando su posible validez, su unidad, etc.</li> <li>9. Diseñar y llevar a cabo procedimientos experimentales para descubrir o comprobar algún aspecto de la gravitación (cálculo de g, ...).</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Valorar la importancia de los modelos y las teorías como representaciones de una realidad compleja, asumiendo su carácter no dogmático y provisional.</li> <li>2. Ser partícipe del interés de la ciencia en conocer el mundo que nos rodea, nuestro origen y nuestro futuro.</li> <li>3. Respetar las opiniones de los demás y aportar sin arrogancia las opiniones propias en los debates.</li> <li>4. Valorar críticamente las consecuencias sociales de los descubrimientos científicos.</li> </ol>

## 4. SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS PROPUESTOS

### 4.1 ACTIVIDADES PROPUESTAS

#### EL MODELO GEOCÉNTRICO DEL UNIVERSO

##### A.1

- a) Eratóstenes midió el ángulo  $\theta$  que muestra la figura 1.1 y también la distancia entre Siena y Alejandría; teniendo en cuenta que  $\text{arco} = \text{ángulo} \cdot \text{radio}$ , obtenemos la relación de proporcionalidad

$$\frac{\theta}{d_{A-S}} = \frac{360}{2\pi R} \rightarrow R = d_{A-S} \frac{360}{2\pi\theta} = 790 \text{ km} \frac{360}{2\pi \cdot 7,2^\circ}$$

$$R = 6287 \text{ km.}$$

- b) En el triángulo rectángulo que muestra la figura, si llamamos  $\alpha$  al ángulo medido y  $\beta$  al ángulo opuesto se cumple que  $\alpha + \beta = 90$  y  $d_{TL} = d_{TS} \sin \beta$ .

$$\text{Si } \alpha = 87^\circ, \text{ entonces } \beta = 90 - \alpha = 3^\circ$$

$$d_{TL} = d_{TS} \sin \beta = d_{TS} \sin 3^\circ = 0,052 d_{TS}.$$

El profesorado puede ampliar información en la página web: <http://museovirtual.csic.es>. Escoger en las "Salas del museo" la opción: "SALA DE ASTRONOMÍA", y "La Tierra en el universo"

##### A.2

Vemos que para Copérnico el orden creciente de periodos coincide con el orden real de colocación de los planetas; en cambio, Ptolomeo no encuentra diferencia entre los "planetas" Mercurio, Venus y Sol.

##### A.3

Elaboramos una tabla con los valores de  $T^2$  y  $R^3$ :

$T^2$ (año <sup>2</sup> )	0,1936	2,5921	15,0544	62,2521
$R^3 \times 10^{15} \text{ km}^3$	0,6815	8,999	52,314	216

Si representamos gráficamente  $T^2$  en función del cubo del radio medio de las órbitas, o semieje mayor de la elipse,  $r^3$ , resulta una "recta" de pendiente  $0,29 \cdot 10^{-15} \text{ año}^2/\text{km}^3$ . Como la representación no es cómoda, se puede realizar con ayuda de la calculadora un ajuste por el método de mínimos cuadrados y determinar las características de la recta de regresión del  $T^2$  frente a  $R^3$ . Con este método, obtenemos como pendiente de la recta

$$k = 0,284 \cdot 10^{-15} \text{ año}^2/\text{km}^3$$

Si para un cierto satélite el periodo es  $T_5 = 6,20$  años, el radio orbital será

$$r_5 = (T^2/k)^{1/3} = (6,20^2/0,284 \cdot 10^{-15})^{1/3} = (1,3535 \cdot 10^{17})^{1/3} = 5,13 \cdot 10^5 \text{ km.}$$

#### AC1 Estudio de la 2ª y la 3ª ley de Kepler

##### a) SEGUNDA LEY

1. Observamos una caída libre, aumentando la velocidad de caída desde el valor 0; en realidad el objeto debería chocar con la esfera mayor y rebotar.
2. Se observan ópticas elípticas; hasta  $V_{ox} = 6 \text{ u}$ , el punto de lanzamiento es el apogeo de la órbita; si  $V_{ox} = 8$ , el punto es el perigeo. Eso significa que entre  $V_{ox} = 6$  y  $V_{ox} = 8$  se puede conseguir una órbita circular.

La órbita circular se consigue con un valor de la velocidad de lanzamiento alrededor de  $7 \text{ m/s}$ ; si conocemos la ley de Newton, podemos deducir el valor exacto:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}} = \sqrt{\frac{20 \text{ m}^3/\text{kg s}^2 \cdot 500 \text{ kg}}{200 \text{ m}}} = 7,071 \text{ m/s}$$

3. Si vamos aumentando el valor de  $V_{ox}$  de unidad en unidad a partir de 8, la órbita es parabólica ya para  $V_{ox} = 10 \text{ m/s}$  y es hiperbólica ya para  $V_{ox} = 11 \text{ m/s}$ .

##### b) TERCERA LEY

1. Observamos dos órbitas elípticas, siendo

$T_1 < T_2$ . Los datos sobre las órbitas son:

$$a_1 = 76,53061 \text{ m}, T_1 = 42,06614 \text{ s}$$

$$a_2 = 133,1361 \text{ m}, T_2 = 96,52139 \text{ s.}$$

Con estos datos podemos calcular la constante de la tercera ley de Kepler:

$$k_1 = \frac{T_1^2}{a_1^3} = \frac{(42,06614 \text{ s})^2}{(76,53061 \text{ m})^3} = 3,948 \cdot 10^{-3} \text{ s}^2/\text{m}^3$$

$$k_2 = \frac{T_2^2}{a_2^3} = \frac{(96,52139 \text{ s})^2}{(133,1361 \text{ m})^3} = 3,948 \cdot 10^{-3} \text{ s}^2/\text{m}^3$$

$$\text{Por tanto, } k = 3,948 \cdot 10^{-3} \text{ s}^2/\text{m}^3$$

2. El tercer objeto lanzado desde  $y = 220 \text{ m}$  sigue una órbita elíptica de semieje mayor  $a_3 = 182,1192 \text{ m}$  y cuyo periodo es, según el applet,  $T_3 = 154,42354 \text{ s}$ . A partir de la constante de la 3ª ley obtenida antes, podemos calcular este periodo:

$$T_3 = \sqrt{k a^3} = \sqrt{(3,948 \cdot 10^{-3} \text{ s}^2/\text{m}^3) \cdot (182,1192 \text{ m})^3} = 154,4266 \text{ s}$$

Lógicamente, ambos valores coinciden, porque están calculados teóricamente. Pero creemos que el cálculo tiene interés didáctico.

3. Los valores proporcionados por el applet son:  
 $a_4 = 33,632 \text{ m}$ ,  $T_4 = 12,555 \text{ s}$ , que por el motivo antes citado cumplen exactamente la 3ª ley de Kepler.



#### A.4

Expresando la fuerza gravitatoria  $F$  en función de la rapidez angular ( $\omega = 2\pi/T$ ), tenemos

$$F = m\omega^2 r = \frac{m 4\pi^2 r}{T^2} = \frac{G m M_{\text{sol}}}{r^2}$$

La relación es  $k = \frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM_{\text{Sol}}}$

#### A.5

La masa de cada bola es

$$M_1 = M_2 = \rho V = 11\,400 \text{ kg/m}^3 \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (1 \text{ m})^3 = 47,75 \cdot 10^3 \text{ kg}$$

La fuerza de atracción entre las esferas es:

$$F = \frac{G M^2}{d^2} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot (47,75 \cdot 10^3 \text{ kg})^2}{2^2 \text{ m}^2} = 38,02 \cdot 10^{-3} \text{ N}$$

#### ACD2 Caída de graves y cuerpos en órbita

1. a) El objeto se sitúa en órbita para una velocidad de lanzamiento superior a 120 m/s; para  $V_0 = 130 \text{ m/s}$ , aproximadamente, la trayectoria es circular. Para  $V_0 = 180 \text{ m/s}$  la trayectoria es abierta.
- b) Haciendo separación de variables, tenemos que mantener constante la altura de lanzamiento (p.e.  $H = 1000 \text{ m}$ ) y realizar dos series de lanzamientos:
  - b1) Ángulo de lanzamiento = cte. y aumentar  $V_0$ . El resultado ya lo hemos visto en el apartado anterior: la trayectoria es cerrada a partir de un valor mínimo de  $V_0$  y pasa a trayectoria abierta a partir de otro valor determinado.
  - b2) Velocidad de lanzamiento,  $V_0$ , constante y variar el ángulo de lanzamiento.

Con el zoom en un valor alto, p.e. 5, si elegimos  $V_0 = 100 \text{ m/s}$ , el máximo alcance se logra con un valor aprox. de  $\varphi = 25^\circ$ . Si elegimos  $V_0 = 70 \text{ m/s}$ , el máximo alcance se logra con un valor aproximado de  $\varphi = 30^\circ$ . Concluimos que, al no ser el suelo horizontal, el máximo alcance no se logra con el ángulo de  $45^\circ$ .

Por otra parte, el ángulo de lanzamiento más favorable para conseguir poner en órbita al cuerpo es  $\varphi = 0^\circ$ , lo que significa que el vector velocidad es perpendicular al semieje mayor, y que el punto de lanzamiento coincide con el apogeo, que el punto de la órbita donde la distancia al centro de atracción es máxima y donde la velocidad es mínima. Por ejemplo, si  $H = 2000 \text{ m}$ , la mínima velocidad para conseguir órbita cerrada es aproximadamente  $V_0 = 110 \text{ m/s}$ , con ángulo de lanzamiento  $0^\circ$ ; si aumentamos el valor del ángulo, no se consigue una órbita cerrada.

2. Como  $r = H + R$ , en realidad hay dos variables,  $r$  y  $V_0$  (como el movimiento es circular, conociendo  $r$  y  $V_0$  podemos calcular  $T$ ). En este caso la velocidad de lanzamiento coincide con la velocidad en la órbita ( $V_0 = v$ ). Se trata por tanto de investigar de qué tipo es la relación  $v = f(r)$ . La siguiente tabla muestra algunos valores, que se pueden proponer a los alumnos y las alumnas para que obtengan conclusiones.

(Recordar los datos:  $R = 5000 \text{ m}$ ,  $G = 20 \text{ m}^3/\text{kg s}^2$ ,  $M = 5 \cdot 10^6 \text{ kg}$ ).

$$v = f(r)$$

H/m	r/m	$V_0 \text{ aprox/ms}^{-1}$
500	5 500	135
750	5 750	131
1000	6 000	128
1500	6 500	123
2000	7 000	120

Nota: La teoría muestra que  $v = V_0 = \sqrt{GM/r}$ , ecuación que cumplen los datos obtenidos dentro del lógico margen de imprecisión.

#### A.6

Un planeta del sistema solar se mueve en órbita circular con una aceleración normal que podemos expresar así:

$$a_n = \frac{F}{m} = \frac{G M_s}{r^2} = \omega^2 r = \frac{4\pi^2 r}{T^2}$$

de donde deducimos que

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM_s} = k_{\text{solar}}$$

Con los datos disponibles, obtenemos a partir de esta ecuación

$$k_{\text{solar}} = \frac{4\pi^2}{GM_s} = \frac{4\pi^2}{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 1,99 \cdot 10^{30}} = 2,974 \cdot 10^{-19} \text{ s}^2/\text{m}^3$$

Hay que recalcar que este valor es aplicable solo al sistema solar.

#### A.7

- a) En el polo:

$$g_p = \frac{G M}{R_p^2} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24}}{(6356,752 \cdot 10^3)^2} = 9,87 \text{ N/kg}$$

En el ecuador, el valor de  $g$  efectivo es

$$g_E = g_0 - a_n = \frac{GM}{R_E^2} - \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R_E$$

Como  $T = 1 \text{ día} = 86400 \text{ s}$ , operando obtenemos

$$g_E = 9,77 \text{ N/kg}$$

- b) Para que los cuerpos no pesasen en el ecuador debería cumplirse que la fuerza peso coincidiese con la fuerza centrípeta, ya que así el peso aparente sería cero:

$$F = GMm/R_E^2 = m \omega^2 R_E$$

y de esta igualdad deducimos que el periodo de rotación de la Tierra debería ser

$$T = \sqrt{(4 \pi^2 R_E^3 / G M)} = 5067,6 \text{ s} \simeq 1,4 \text{ h}$$

#### A.8

$$m = P/g = 45 \text{ N} / 9,806 \text{ Nkg}^{-1} = 4,589 \text{ kg}.$$

Si nos elevamos a una altura igual al radio de la Tierra, la distancia a su centro se duplica y  $g$  (que es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia) se divide por 4; luego

$$P = P_0 / 4 = 45/4 = 11,25 \text{ N}.$$

El **Exp.1 Medida de la aceleración de la gravedad** es ya clásico en un curso de este nivel, pero lo consideramos interesante y por ello se propone. Partimos de que conocemos la ley del péndulo simple, válida para ángulos de oscilación pequeños, de modo que el seno del ángulo sea prácticamente equivalente al valor del ángulo en radianes.

Es aconsejable utilizar un hilo muy ligero y que la longitud sea grande, superior a 50 cm y, desde luego, medir con atención la longitud del péndulo (desde el centro de la esferilla al punto de sujeción).

Debe elaborarse una tabla a doble columna y al menos medir 6 parejas de longitudes y periodos; para una mayor precisión en la medida del periodo, deben medirse por ejemplo 10 oscilaciones cada vez. ( $T = \Delta t / n^\circ \text{ oscilaciones}$ )

Los datos obtenidos pueden tratarse al menos de dos maneras:

- 1º Se hará una representación gráfica de  $T^2$  en función de  $L$ , de modo que la mejor recta que una los distintos puntos tendrá una pendiente tal que:  $\text{pte} = 4\pi^2/g$ .
- 2º Con ayuda de una calculadora de bolsillo, se calcula la pendiente de la recta de regresión lineal de  $T^2$  sobre  $L$  y se procede como antes para calcular finalmente el valor de  $g$ ; este segundo método es más cómodo y preciso que el anterior.

#### A.9

- a) Imposible, porque siempre  $V < 0$ .
- b) Es posible; el punto debe estar en la línea que une los centros de las masas, entre ellas y más cerca de la masa menor.
- c) Imposible, porque siempre  $V < 0$ .

#### A.10

Como las órbitas son circulares, podemos establecer:

- La rapidez orbital es inversamente proporcional a  $\sqrt{r}$ ; luego el satélite de mayor radio tendrá la menor rapidez.
- El periodo orbital es directamente proporcional a  $r^{3/2}$ ; luego cuanto mayor sea el radio de la órbita mayor será el periodo.
- La energía del satélite ( $E < 0$ ) será tanto mayor cuanto menos ligado esté a la Tierra, es decir cuanto más alejado esté de su centro.

#### ACD3 Órbitas y energía en un campo gravitatorio

1. Se trata de una trayectoria rectilínea, hacia el centro del planeta. Vemos cómo aumenta la velocidad.
2. *Influencia de la velocidad de lanzamiento en el tipo de órbita.* Mantenemos el valor  $y = 200 \text{ m}$ .

2a) La órbita es elíptica, cambia a parabólica aproximadamente para  $V_0 = 10 \text{ m/s}$  y pasa a ser hiperbólica para valores superiores a  $10 \text{ m/s}$ .

2b) Las gráficas son todas líneas rectas, porque  $E_c$ ,  $E_p$  y  $E$  se mantienen constantes en toda la trayectoria, al ser  $r = \text{cte}$ . Observamos que  $E_c > 0$ ,  $E_p < 0$  y  $E < 0$ .

Con ayuda del cursor podemos medir, sólo aproximadamente, los valores de cada energía; en concreto,  $E_c = 556 \text{ u}$ ,  $E_p = -890 \text{ u}$ ,  $E = -444 \text{ u}$ . Se cumple que  $E_p = 2E$  (correcto), pero no se cumple exactamente la relación teórica  $E_c = -E_p/2$ , lo que hay que achacar a las características de la pantalla del ordenador.

2c) Con  $y = 200 \text{ m}$ , jugando con valores de  $V_0$  comprendidos entre  $9,9 \text{ m/s}$  y  $10 \text{ m/s}$ , comprobamos que la órbita parabólica corresponde a un valor aproximado de  $V_{0,\text{applet}} = 9,999755 \text{ m/s}$ . El cálculo teórico ( $E = 0$  en el punto de lanzamiento) da el valor siguiente:

$$GM/r = V_0^2/2$$

$$V_0 = \sqrt{\frac{2GM}{r}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 20 \text{ m}^3/\text{kg} \cdot \text{s}^2 \cdot 500 \text{ kg}}{200 \text{ m}}} = 10 \text{ m/s}$$

3. *Influencia de la altura de lanzamiento en el tipo de órbita.*

3a) Con  $V_0 = 7,071 \text{ m/s}$ , obtenemos una órbita elíptica; para lograr órbita circular hay que aumentar el valor de  $V_0$  hasta  $10 \text{ m/s}$ .

3b) No cambian los resultados. La órbita circular cumple la ecuación  $v = \sqrt{GM/r}$ , independiente de  $m$ .

3c) Con  $M' = 1000 \text{ kg}$ ,  $y = 200 \text{ m}$ , de nuevo la órbita es elíptica; hay que aumentar el valor de  $V_0$ , como muestra la fórmula anterior; en concreto, el valor según el applet es  $V_{0,\text{circ, applet}} = 10 \text{ m/s}$ , que coincide con el obtenido aplicando la ecuación anterior.

#### A11

Se trata de calcular la rapidez de lanzamiento para que el satélite alcance la altura  $h$  (distancia  $r$  respecto al centro de la Tierra) una vez consumido todo el combustible. Suponemos que a partir de ese instante se conserva la energía mecánica.

$$E_{\text{mec/inicial}} = \frac{1}{2} m V_{\text{lanz}}^2 - G M m / R$$

$$E_{\text{mec, órbita}} = -\frac{1}{2} \frac{G M m}{r} = -\frac{G M m}{2(R+h)}$$

Igualando ambas ecuaciones y despejando  $V_{\text{lanz}}$  obtenemos:

$$V_{\text{lanz}} = \sqrt{G M \left( \frac{2}{R} - \frac{1}{R+h} \right)}$$

Dando valores a  $h$ , obtenemos la siguiente tabla:

$h/\text{km}$	$V_{\text{lanz}}/\text{ms}^{-1}$
150	8002,25
300	8087,72
600	8245,2
1000	8431,4
Infinito	11190

#### A.12

La velocidad de escape en la superficie lunar es tan pequeña ( $v_{\text{esc,L}} = \sqrt{2 g_L R_L} = 2373 \text{ m/s}$ ) que un elevado porcentaje de las moléculas de cualquier gas, incluso a las bajas temperaturas existentes en ella, escapan del campo gravitatorio lunar.

## 4.2 SOLUCIONES DE LOS PROBLEMAS FINALES

### LAS LEYES DE KEPLER

#### PROBLEMA 1

Para comprobar la validez de la tercera ley de Kepler obtendremos el valor de la constante, tomando de referencia los satélites Io y Europa:

Io	Europa
$T_{\text{Io}} = 42,467 \text{ h}$	$T_{\text{Europa}} = 85,217 \text{ h}$
$R_{\text{Io}} = 419 \cdot 10^3 \text{ km}$	$R_{\text{Europa}} = 667 \cdot 10^3 \text{ km}$
$K_{\text{Io}} = \frac{T_{\text{Io}}^2}{R_{\text{Io}}^3} = 2,452 \cdot 10^{-14} \frac{\text{h}^2}{\text{km}^3}$	$K_{\text{Europa}} = 2,447 \cdot 10^{-14} \frac{\text{h}^2}{\text{km}^3}$

Con ello verificamos la tercera ley y tomamos como valor de la constante:

$$K = 2,45 \cdot 10^{-14} \frac{\text{h}^2}{\text{km}^3}$$

- Obtención del periodo de Ganímedes:

$$T_G = \sqrt{K \cdot r_G^3} = 171,8 \text{ h}$$

- Obtención del radio de la órbita de Calisto:

$$r_C = \sqrt[3]{\frac{T_C^2}{K}} = 1,87 \cdot 10^6 \text{ km}$$

#### PROBLEMA 2

El semieje mayor de la elipse se calcula a partir de  $r_p$  y  $r_a$ :

$$a = \frac{r_p + r_a}{2} = \frac{8,75 \cdot 10^{10} \text{ m} + 5,26 \cdot 10^{12}}{2} = 26,74 \cdot 10^{11} \text{ m}$$

Para hallar el periodo del cometa, aplicamos la 3ª ley de Kepler a la Tierra y al Halley:

$$\frac{T_T^2}{a_T^3} = \frac{T_H^2}{a_H^3}$$

$$T_H = T_T \left( \frac{a_H}{a_T} \right)^{3/2} = 1 \text{ año} \left( \frac{26,74 \cdot 10^{11}}{1,5 \cdot 10^{11}} \right)^{3/2} = 75,5 \text{ año}$$

#### PROBLEMA 3

Para obtener el periodo solicitado debemos aplicar la tercera ley de Kepler al asteroide, tomando de referencia la Tierra ( $T_{\text{Tierra}} = 1 \text{ año}$ ;  $r_{\text{Tierra}} = 1 \text{ UA}$ ). Puesto, que el radio medio de la órbita del asteroide coincide con el valor del semieje mayor, previamente obtendremos su valor:

$$r_{\text{AST}} = a = \frac{r_p + r_a}{2} = 3,06 \text{ UA}$$

Aplicando la tercera ley de Kepler al sistema Sol, Tierra y asteroide (AST):

$$\frac{T_{\text{AST}}^2}{r_{\text{AST}}^3} = \frac{T_T^2}{r_T^3}$$

Despejando el periodo del asteroide, obtenemos:

$$T_{AST} = \sqrt{\left(\frac{r_{AST}}{r_T}\right)^3} T_T^2 = 5,35 \text{ años}$$

Podemos comprobar que el asteroide se encontrará entre Marte y Júpiter puesto que:

$$T_{Marte} (1,8 \text{ años}) < T_{Antoniomercurio} < T_{Júpiter} (11,86 \text{ años})$$

#### PROBLEMA 4

Planeta	Tipo de órbita	Semieje mayor (a)	Periodo
$M_1$	Circular	$r_1 = 10^{11} \text{ m}$	$T_1 = 2 \text{ años}$
$M_2$	Elíptica	$r_2 = \frac{10^{11} + 2 \cdot 10^{11}}{2} = \frac{3}{2} 10^{11} \text{ m}$	$T_2 = ?$

Aplicación de la tercera ley de Kepler:

$$\frac{T_1^2}{r_1^3} = \frac{T_2^2}{r_2^3}$$

Obtención del periodo:

$$T_2 = \sqrt{\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^3} T_1^2 = \sqrt{\frac{27}{2}} \text{ años}$$

### LEY DE LA GRAVITACIÓN UNIVERSAL

#### PROBLEMA 5

El radio de la órbita del satélite es:

$$R = R_T + h = (6371 + 670) \cdot 10^3 = 7,041 \cdot 10^6 \text{ m}$$

Aplicando la ley de Newton:

$$F_{S-T} = F_{T-S} = \frac{G M M_S}{r^2} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24} \cdot 2000}{(7,041 \cdot 10^6 \text{ m})^2} = 16000 \text{ N.}$$

#### PROBLEMA 6

La Luna posee dos movimientos superpuesto, el de rotación alrededor de la Tierra, consecuencia de su interacción con la Tierra, y el de translación alrededor del Sol debido a la interacción Luna - Sol.

#### PROBLEMA 7

a) Aplicamos la 3ª ley de Kepler a la Tierra y a Júpiter:

$$\frac{T_T^2}{R_T^3} = \frac{T_J^2}{R_J^3}; \quad \frac{R_J}{R_T} = \left(\frac{T_J}{T_T}\right)^{2/3} = 12^{2/3} = 5,24$$

b) La aceleración normal se puede expresar en función del periodo y del radio así:

$$a_n = \omega^2 R = \frac{4\pi^2}{T^2} R$$

La razón entre las aceleraciones es:

$$\frac{a_{n,J}}{a_{n,T}} = \frac{R_J/T_J^2}{R_T/T_T^2} = \frac{R_J}{R_T} \cdot \left(\frac{T_T}{T_J}\right)^2$$

Operando:

$$\frac{a_{n,J}}{a_{n,T}} = 5,24 \cdot \frac{1}{12^2} = 0,0364$$

#### PROBLEMA 8

a) Supuesta órbita circular,

$$v = \frac{2\pi R}{T} = \frac{2\pi \cdot 6,7 \cdot 10^8 \text{ m}}{306780 \text{ s}} = 1,37 \cdot 10^4 \text{ m/s}$$

b) A partir de la constante de la 3ª ley de Kepler,

$$\frac{T_E^2}{R_E^3} = \frac{4\pi^2}{GM_J}$$

aislamos  $M_J$ :

$$M_J = \frac{4\pi^2 R_E^3}{T_E^2 G} = \frac{4\pi^2 \cdot (6,7 \cdot 10^8 \text{ m})^3}{(306780 \text{ s})^2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2} = 1,89 \cdot 10^{27} \text{ kg}$$

#### PROBLEMA 9

Si consideramos como sistema aislado el Sol y la Tierra, no considerando la acción de otros astros, y realizando un estudio dinámico plantearemos la ecuación:

$$G \frac{M_s \cdot m_T}{r^2} = m_T \cdot \frac{4\pi^2 r}{T^2}$$

Despejando la masa del Sol:

$$M_s = \frac{4\pi^2}{G} \cdot \frac{r^3}{T^2}$$

Sustituyendo los datos proporcionados por el enunciado ( $T = 3,1536 \cdot 10^7 \text{ s}$ ;  $r = 1,5 \cdot 10^{11} \text{ m}$ ):

$$M_s = \frac{4\pi^2 r^3}{G T^2} = \frac{4\pi^2 \cdot (1,5 \cdot 10^{11})^3}{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot (3,1536 \cdot 10^7)^2} = 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$$

#### PROBLEMA 10

Realizando el desarrollo explicado en el libro del alumnado para este tipo de problema, establecemos la ecuación:

$$M_M = \frac{4\pi^2}{G} \cdot \frac{r^3}{T^2}$$

Sustituyendo los datos ( $T = 2,76 \cdot 10^4$  s;  $r = 9,4 \cdot 10^6$  m) en la ecuación, obtenemos:

$$M_M = 6,45 \cdot 10^{23} \text{ kg.}$$

### PROBLEMA 11

A partir de la constante de la 3ª ley de Kepler,

$$\frac{T_E^2}{R_E^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T}$$

aislamos el periodo de rotación:

$$T_E = \sqrt{\frac{4\pi^2 R_E^3}{GM_T}} = \sqrt{\frac{4\pi^2 \cdot (6,771 \cdot 10^6 \text{ m})^3}{6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2 \cdot 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}}} = 5543 \text{ s} = 1,54 \text{ h}$$

En 24 h, el número de amaneceres que se ven son:  
24 h / 1,54 h = 15,58, o sea 15 amaneceres.

## INTENSIDAD DEL CAMPO GRAVITATORIO

### PROBLEMA 12

Como sabemos,  $g$  varía con la distancia del punto al centro de la Tierra y con la latitud del lugar. Considerando solamente el primer factor,  $g$  es mayor en la superficie terrestre que en una cima o que en lo alto de una montaña (ver pág.166). Por tanto, la respuesta es b), en el ecuador.

### PROBLEMA 13

La condición impuesta es que  $g = g_0/2$ , siendo

$$g = g_0 (R_T/r)^2 \text{ y } r = R_T + h.$$

Ello da lugar a la ecuación:  $R_T/(R_T + h) = 1/\sqrt{2}$ .

Despejando  $h$  obtenemos:  $h = (\sqrt{2} - 1) \cdot R_T$ .

### PROBLEMA 14

El peso del cuerpo en la superficie de la nueva Tierra viene determinado por la ecuación:

$$P = 70 \text{ kg} \cdot g_{\text{nueva}}$$

Para calcular la  $g_{\text{nueva}}$  aplicaremos la expresión:

$$g_{\text{nueva}} = G \frac{M_{\text{nueva}}}{R_{\text{nueva}}^2}$$

siendo  $R_{\text{nueva}} = 2 \cdot R_T$  y

$$M_{\text{nueva}} = \rho_T V_{\text{nueva}} = \frac{M_T}{4/3 \cdot \pi R_T^3} \cdot \frac{4}{3} \pi (2R_T)^3$$

por ello,  $M_{\text{nueva}} = 8 \cdot M_T$ .

Sustituyendo en la ecuación anterior:

$$g_{\text{nueva}} = 2 \left( \frac{GM_T}{R_T^2} \right) = 2 g_0 = 19,62 \text{ N / kg.}$$

El peso será:

$$P = 70 \text{ kg} \cdot 19,62 \frac{\text{N}}{\text{kg}} = 1373,4 \text{ N.}$$

### PROBLEMA 15

Para establecer la relación entre las masas de la Tierra y la Luna planteamos el cociente:

$$\frac{g_T}{g_L} = \frac{G \cdot \frac{M_T}{R_T^2}}{G \cdot \frac{M_L}{R_L^2}} = \frac{M_T}{M_L} \cdot \left( \frac{R_L}{R_T} \right)^2$$

Puesto que  $R_T = 3,66 \cdot R_L$ , obtenemos:

$$M_T = 81,12 \cdot M_L$$

### PROBLEMA 16

Para obtener el peso del astronauta en Júpiter tendremos en cuenta la constancia de la masa del astronauta en ambos planetas, y por ello se verifica:

$$\frac{P_T}{g_T} = \frac{P_J}{g_J}$$

Despejando el peso del astronauta en Júpiter, obtenemos:

$$P_J = P_T \cdot \left( \frac{g_J}{g_T} \right)$$

La gravedad de Júpiter se puede expresar en función de la gravedad terrestre, teniendo en cuenta que

$$M_J = 318 \cdot M_T \text{ y } R_J = 11 \cdot R_T:$$

$$g_J = G \cdot \frac{(318 M_T)}{(11 R_T)^2} = 2,628 \cdot g_T$$

Por tanto, la solución es:  $P_J = 2575,54 \text{ N.}$

### PROBLEMA 17

En primer lugar calcularemos el valor de la gravedad de Venus, en función de la gravedad de la Tierra:

$$g_V = \frac{P_V}{P_T} \cdot g_T = \frac{6}{7} \cdot g_T$$

La masa de Venus se obtiene a partir del valor de la gravedad de Venus:

$$M_V = g_V \cdot \frac{R_T^2}{G} = g_V \cdot \left( \frac{G M_T}{g_T} \right) \cdot \frac{1}{G}$$

$$M_V = \frac{6}{7} \cdot M_T$$

### PROBLEMA 18

En las proximidades de la superficie lunar podemos considerar que la aceleración de caída es constante, siendo su valor el de la gravedad. Por ello, podemos plantear la ecuación:

$$G \frac{M_L}{R_L^2} = a_{\text{caída}}$$

Aislando la masa de la Luna

$$M_L = \frac{a_{\text{caída}} \cdot R_L^2}{G}$$

y sustituyendo los valores del enunciado, obtenemos:  
 $M_L = 7,35 \cdot 10^{22} \text{ kg}$ .

### PROBLEMA 19

En primer lugar establecemos el valor de la gravedad del planeta en función de la gravedad en la superficie terrestre:

$$g_P = G \cdot \frac{M_P}{R_P^2} = G \cdot \frac{(2 M_T)}{(3 R_T)^2} = \frac{2}{9} g_T$$

En segundo lugar, calculamos el peso del cuerpo teniendo en cuenta la constancia de su masa en ambos planetas.

$$P_P = P_T \cdot \frac{g_P}{g_T} = 100 \text{ N} \cdot \frac{2/9 g_T}{g_T}$$

Por tanto,  $P_P = 200/9 \text{ N} = 22,22 \text{ N}$ .

### PROBLEMA 20

La ecuación del periodo se puede expresar así:

$T = 2\pi\sqrt{L/g} = \text{cte}/\sqrt{g}$ ; por tanto, nombrando con el subíndice 0 el nivel del mar:

$$T_0 = \text{cte}/\sqrt{g_0}; T = \text{cte}/\sqrt{g}$$

Si elevamos al cuadrado y dividimos una ecuación por otra:

$$\frac{T_0}{T} = \sqrt{\frac{g}{g_0}} = \sqrt{\frac{GM/r^2}{GM/R_T^2}} = \frac{R_T}{r}$$

Eliminando r:

$$r = R_T \frac{T}{T_0} = 6371 \text{ km} \frac{2,002 \text{ s}}{2,000 \text{ s}} = 6377,4 \text{ km}$$

Y por tanto,

$$h = r - R_T = 6377,4 \text{ km} - 6371 \text{ km} = 6,4 \text{ km}$$

### PROBLEMA 21

Podemos establecer la relación entre el periodo del péndulo en la Luna y en la Tierra, realizando el cociente:

$$\frac{T_L}{T_T} = \frac{2\pi \cdot \sqrt{\frac{L}{g_L}}}{2\pi \cdot \sqrt{\frac{L}{g_T}}} = \sqrt{\frac{g_T}{g_L}}$$

Por ello,  $T_L = T_T \cdot \sqrt{g_T / g_L}$ .

Calculando el valor de la gravedad en la Luna, a partir de los datos proporcionados, obtenemos  $g_L = 1,61 \text{ N/kg}$ .

Y por ello,  $T_L = 2,47 \text{ s}$ .

### PROBLEMA 22

a) Para poder hallar la masa de Marte calcularemos su gravedad teniendo en cuenta la constancia de la masa. Plantando la ecuación

$$m = \frac{P_T}{g_T} = \frac{P_M}{g_M}$$

despejando la gravedad, obtenemos:

$$g_M = g_T \cdot \frac{P_M}{P_T} = 3,68 \text{ N/kg}$$

La masa de Marte se obtiene despejándola de la expresión de la gravedad en su superficie:

$$M_M = \frac{g_M \cdot R_M^2}{G}$$

Sustituyendo valores obtenemos

$$M_M = 6,37 \cdot 10^{23} \text{ kg}$$

b) El periodo del péndulo en Marte, se obtiene a partir de la relación:

$$T_M^2 \cdot g_M = T_T^2 \cdot g_T \rightarrow T_M = \sqrt{T_T^2 \left( \frac{g_T}{g_M} \right)}$$

(establecida en el problema anterior).

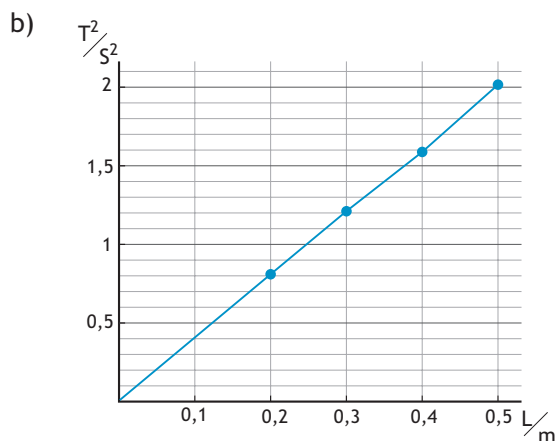
Sustituyendo los valores de las magnitudes representadas, establecemos que  $T_M = 3,27 \text{ s}$ .



### PROBLEMA 23

a)

L (cm)	50 T (s)	T (s)	T <sup>2</sup> (s <sup>2</sup> )
20	45	0,90	0,81
30	55	1,10	1,21
40	63	1,26	1,588
50	71	1,42	2,016



c) Pendiente de la recta de ajuste = 4,03 s<sup>2</sup>/m.  
Como T<sup>2</sup> = (4π<sup>2</sup>/g)L, eliminando g, obtenemos:

$$g = \frac{4\pi^2}{\text{pte}} = \frac{4\pi^2}{4,03 \text{ s}^2/\text{m}} = 9,8 \text{ m/s}^2$$

## INTENSIDAD DEL CAMPO GRAVITATORIO

### PROBLEMA 24

La intensidad del campo gravitatorio en el punto P viene determinada por la ecuación:

$$\vec{g}_P = \vec{g}_{S,P} + \vec{g}_{T,P}$$

Colocando un sistema de referencia cartesiano sobre el punto P, donde el origen coincida con el punto P y el eje X con la dirección de la línea que une el centro del Sol y la Tierra, sentido positivo hacia la Tierra, obtenemos:

$$\vec{g}_{S,P} = -G \frac{M_S}{d_{S,P}^2} \vec{i} = -5,93 \cdot 10^{-3} \vec{i} \frac{\text{N}}{\text{kg}}$$

$$\vec{g}_{T,P} = +G \frac{M_T}{d_{T,P}^2} \vec{i} = 2,49 \cdot 10^{-3} \vec{i} \frac{\text{N}}{\text{kg}}$$

Y por tanto:

$$\vec{g}_P = -3,44 \cdot 10^{-3} \vec{i} \text{ N/kg}$$

El vector tiene las siguientes características:

- Dirección: la línea que une los centros del Sol y la Tierra.
- Sentido: hacia el Sol.
- Módulo:  $3,44 \cdot 10^{-3} \text{ N/kg}$ .

### PROBLEMA 25

a) Para calcular la intensidad del campo gravitatorio en el centro planteamos la ecuación:

$$\vec{g}_P = \vec{g}_{1,P} + \vec{g}_{2,P} + \vec{g}_{3,P} + \vec{g}_{4,P}$$

Puesto que las masas son iguales y la distancia al centro de cada una de ellas es la misma se cumple:

$$\vec{g}_P = 0$$

Como consecuencia de la simetría del sistema las masas opuestas dan lugar a vectores  $\vec{g}$  que se anulan en el cen-

tro, y  $\vec{g}_{\text{centro}} = 0$ .

b) El valor de la fuerza experimentada por cada partícula es el mismo en cada una de ellas, por la simetría del sistema, por lo que obtendremos el valor de una de ellas, por ejemplo la masa 3. Para ello realizamos los siguientes pasos:

- Cálculo de los módulos de los vectores intensidad en el punto de ubicación de la masa 3:

$$|\vec{g}_{2,3}| = |\vec{g}_{4,3}| = G \cdot \frac{2 \text{ kg}}{(1 \text{ m})^2} = 2 \cdot G$$

$$|\vec{g}_{1,4}| = G \cdot \frac{2 \text{ kg}}{(\sqrt{2} \text{ m})^2} = G$$

- Cálculo del vector intensidad del campo gravitatorio en el punto 3, tomado de referencia para un sistema cartesiano de origen en dicho punto:

$$\vec{g}_{4,3} = -2G \vec{i} \frac{\text{N}}{\text{kg}}; \quad \vec{g}_{2,3} = +2G \vec{j} \frac{\text{N}}{\text{kg}}$$

$$\vec{g}_{1,3} = \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} G \vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2} G \vec{j} \right) \frac{\text{N}}{\text{kg}}$$

$$\vec{g}_3 = \vec{g}_{1,3} + \vec{g}_{2,3} + \vec{g}_{4,3} = \left[ \frac{-(4 + \sqrt{2})}{2} G \vec{i} + \frac{(4 + \sqrt{2})}{2} G \vec{j} \right] \frac{\text{N}}{\text{kg}}$$

- Cálculo de la fuerza gravitatoria:

$$\vec{F}_3 = m \cdot \vec{g}_3 = \left[ -(4 + \sqrt{2}) G \vec{i} + (4 + \sqrt{2}) G \vec{j} \right] \text{N}$$

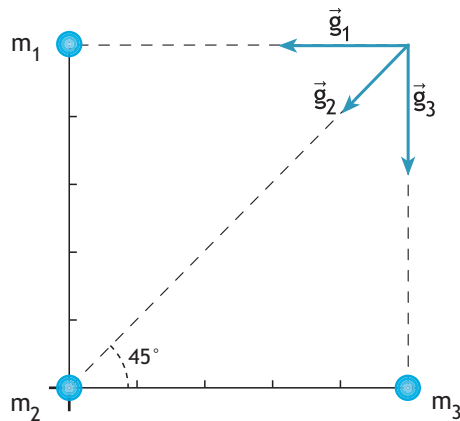
- Cálculo del módulo:

$$|\vec{F}_3| = \sqrt{2} \cdot (4 + \sqrt{2}) \cdot G \text{ N}$$

## CARÁCTER CONSERVATIVO DEL CAMPO GRAVITATORIO Y CÁLCULO DE $E_p$

### PROBLEMA 26

- a) La figura muestra los vectores  $\vec{g}$  coincidentes en el vértice vacío.



Los módulos de los vectores son:

$$g_1 = g_3 = \frac{Gm}{r_1^2} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 10}{2^2} = 1,67 \cdot 10^{-10} \text{ N/kg}$$

$$g_2 = \frac{Gm}{r_2^2} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 10}{8} = 0,834 \cdot 10^{-10} \text{ N/kg}$$

$$\vec{g}_1 = 1,67 \cdot 10^{-10} (-\vec{i}) \text{ N/kg}$$

$$\vec{g}_2 = 0,834 \cdot 10^{-10} (-0,707 \vec{i} - 0,707 \vec{j}) \text{ N/kg}$$

$$\vec{g}_3 = 1,67 \cdot 10^{-10} (-\vec{j}) \text{ N/kg}$$

Sumando vectorialmente:

$$\vec{g} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 + \vec{g}_3 = -2,26 \cdot 10^{-10} (\vec{i} + \vec{j}) \text{ N/kg}$$

$$g = 3,2 \cdot 10^{-10} \text{ N/kg.}$$

Al ser el potencial una magnitud escalar, su cálculo es más sencillo ( $V = -Gm/r$ ):

$$\begin{aligned} V &= V_1 + V_2 + V_3 = 2V_1 + V_2 = \left(-2G \frac{10}{2}\right) + \left(-G \frac{10}{2\sqrt{2}}\right) = \\ &= -G(10 + 5/\sqrt{2}) = -6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 13,54 = \\ &= -9,03 \cdot 10^{-10} \text{ J/kg} \end{aligned}$$

- b) Si el traslado se realiza sin variar la energía cinética, dicho trabajo equivale a la variación de  $E_p$  cambiada de signo:

$$W = -\Delta E_p = -(E_{p,\text{final}} - E_{p,\infty}) = -E_{p,\text{final}} = -V_{\text{centro}} m$$

Calculemos  $V_{\text{centro}}$ , producido por tres masas de 10 kg situadas a  $\sqrt{2}$  m del centro:

$$\begin{aligned} V_{\text{centro}} &= V_1 + V_2 + V_3 = 3V_1 = -30G/\sqrt{2} = \\ &= -30 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11}/\sqrt{2} = -1,41 \cdot 10^{-9} \text{ J/kg} \end{aligned}$$

Finalmente, como la masa transportada es 1 kg,  $W = -1,41 \cdot 10^{-9} \text{ J}$ .

### PROBLEMA 27

Al realizarse el desplazamiento en el vacío, se conserva la energía mecánica del sistema, por tanto:

$$\frac{1}{2} m v_1^2 - GM_L m/r_1 = \frac{1}{2} m v_2^2 - GM_L m/r_2$$

$$\frac{1}{2} v_2^2 = \frac{1}{2} v_1^2 - GM_L/4R_L + GM_L/R_L$$

$$v_2 = \sqrt{(v_1^2 + 2GM_L(1/R_L - 1/4R_L))}$$

$$= \sqrt{(v_1^2 + 3GM_L/2R_L)} =$$

$$= \sqrt{500^2 + \frac{3 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 7,34 \cdot 10^{22}}{2 \cdot 1,74 \cdot 10^6}} = 2114 \text{ m/s}$$

### PROBLEMA 28

El trabajo mínimo se obtiene al realizar un balance de la energía potencial entre:

Punto inicial, superficie Tierra ( $r = R_T$ ):

$$E_{p1} = -G \frac{M \cdot m}{R_T}$$

Punto final,  $h = 3 \cdot R_T$  ( $r = 4 \cdot R_T$ ):

$$E_{p2} = -G \frac{M \cdot m}{4R_T}$$

Por tanto,  $W_{\text{mín}} = E_{p2} - E_{p1}$ , es decir:

$$W_{\text{mín}} = GMm \left( \frac{1}{R_T} - \frac{1}{4R_T} \right) = \frac{3}{4} \cdot G \frac{M \cdot m}{R_T}$$

Sustituyendo valores, obtenemos:

$$W_{\text{mín}} = 4,69 \cdot 10^{10} \text{ J.}$$

### PROBLEMA 29

Como se conserva el momento cinético, igualamos su valor en el perihelio con el valor en el afelio:

$$M v_p r_p = m v_a r_a; \quad \frac{r_a}{r_p} = \frac{v_p}{v_a} = 100; \quad v_p = 100 v_a$$

### PROBLEMA 30

Al despreciar los rozamientos, se conserva la energía mecánica del sistema; por tanto:

$$\frac{1}{2} m v_1^2 - GM_T m / r_1 = \frac{1}{2} m v_2^2 - GM_T m / r_2$$

$$- GM_T / r_1 + GM_T / r_2 = \frac{1}{2} v_2^2$$

$$v_2 = \sqrt{2 GM_T (1/r_2 - 1/r_1)} \quad (\text{ec. 1})$$

Para operar, calculamos el valor de  $GM_T$  a partir de

$$g_0 = GM_T / R_T^2 :$$

$$GM_T = g_0 R_T^2 = 9,806 \cdot (6,371 \cdot 10^6)^2 = 3,98 \cdot 10^{14} (\text{SI})$$

Finalmente, sustituimos este valor en la ec.1:

$$v_2 = \sqrt{2 \cdot 3,98 \cdot 10^{14} \left( \frac{1}{6,371 \cdot 10^6} - \frac{1}{6,871 \cdot 10^6} \right)} = 3015 \text{ m/s}$$

### PROBLEMA 31

La energía potencial va disminuyendo al ir acercándose al centro de atracción (la Tierra); esta disminución de  $E_p$  implica un aumento equivalente de la energía cinética del cuerpo.

Para determinar la velocidad de llegada a la superficie terrestre, aplicamos el principio de conservación de la energía:

$$\frac{1}{2} m v^2 = E_{p,1} - E_{p,2} = GMm (1/R_T - 1/r)$$

$$v = \sqrt{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24} (1 / 6,371 \cdot 10^6 - 1 / 6,521 \cdot 10^6)}$$

$$v = 1703 \text{ m/s}$$

### PROBLEMA 32

a) Teniendo en cuenta el principio de conservación del momento angular (fuerza central), se establece:

$$|\vec{L}_{\text{Planeta, perihelio}}| = |\vec{L}_{\text{Planeta, afelio}}|$$

$$r_p \cdot m \cdot v_p = r_A \cdot m \cdot v_A$$

y puesto que  $r_A > r_p \Rightarrow v_A < v_p$ .

En el afelio y el perihelio el planeta sólo posee aceleración normal ( $a_N = v^2/r$ ), y por ello

$$a_{N, A} < a_{N, p}$$

b) La energía potencial se calcula a partir de la fórmula  $E_p = -GMm/r$ ; de modo que:

$$E_{p,A} > E_{p,p}$$

Por otra parte como el campo es conservativo la energía mecánica del cometa es constante.

## SATÉLITES

### PROBLEMA 33

Porque las Canarias no se encuentran en el plano ecuatorial.

### PROBLEMA 34

El radio de órbita se puede determinar realizando un planteamiento dinámico, de modo que:

$$G \frac{M_s \cdot m_p}{r^2} = m_p \cdot \frac{v^2}{r}$$

$$\text{Es decir, } r = G \frac{M_s}{v^2}$$

Sustituyendo los datos, obtenemos:

$$r = 5,256 \cdot 10^{10} \text{ m}$$

Puesto que la órbita es circular el periodo es:

$$T = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{v} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 5,256 \cdot 10^{10} \text{ m}}{50 \cdot 10^3 \text{ m/s}} = 6,6 \cdot 10^6 \text{ s.}$$

### PROBLEMA 35

a) El estudio dinámico del movimiento del Apolo, respecto al centro de la Luna, permite obtener la ecuación:

$$G \frac{M_L \cdot m}{r^2} = m \cdot \left( \frac{4\pi^2 \cdot r}{T^2} \right)$$

Despejando el periodo:

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{GM_L}} = 7158 \text{ s}$$

b) Para calcular la velocidad orbital aplicaremos la fórmula:

$$v_{\text{orb}} = \frac{2\pi r}{T} = 1626,5 \text{ m/s}$$

### PROBLEMA 36

a) La velocidad orbital es:  $v = \sqrt{GM/r}$ .

Aplicando la ecuación a cada satélite y dividiendo las ecuaciones obtenidas, tenemos:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\sqrt{GM/R_1}}{\sqrt{GM/R_2}} = \sqrt{\frac{R_2}{R_1}} = \sqrt{\frac{9034}{8000}} = 1,063$$

b) La ecuación del periodo se puede expresar en función del radio de la órbita:  $T = \text{cte} \cdot R^{3/2}$

Aplicando la ecuación a cada satélite y dividiendo las ecuaciones obtenidas, tenemos:

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\text{cte} \cdot R_1^{3/2}}{\text{cte} \cdot R_2^{3/2}} = \frac{R_1^{3/2}}{R_2^{3/2}} = \frac{8000^{3/2}}{9034^{3/2}} = 0,833$$

c) El intervalo de tiempo es:

$\Delta t = 6 T_1 = n T_2$ , siendo  $n$  el nº de vueltas del satélite 2; teniendo en cuenta que  $T_1/T_2 = 0,833$ , eliminamos  $n$ :

$$n = 6 \frac{T_1}{T_2} = 6 \cdot 0,833 = 5 \text{ vueltas completas.}$$

### PROBLEMA 37

La ecuación del periodo es:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{GM}} \cdot R^{3/2}$$

Aplicando la ecuación a ambos satélites e igualando, al ser  $T_{\text{Marte}} = T_{\text{Tierra}}$ , obtenemos:

$$\frac{R_M^{3/2}}{\sqrt{M_M}} = \frac{R_T^{3/2}}{\sqrt{M_T}};$$

$$\frac{R_M}{R_T} = \left( \frac{M_M}{M_T} \right)^{1/3} = 0,11^{1/3} = 0,48$$

### PROBLEMA 38

La rapidez orbital se calcula a partir de la fórmula

$$v_{\text{orb}} = \sqrt{\frac{GM_T}{r}}$$

Como  $G M_T = g_0 \cdot R_T^2$  resulta

$$v_{\text{orb}} = \sqrt{\frac{g_0 \cdot R_T^2}{2R_T}} = \sqrt{\frac{g_0 R_T}{2}} = 5590 \text{ m/s}$$

### PROBLEMA 39

a) Evidentemente, en el polo no hay velocidad de giro; ésta es máxima en el ecuador:

$$v = \omega R_T = \frac{2\pi R_T}{T} = \frac{2\pi \cdot 6,378 \cdot 10^6}{86400 \text{ s}} = 463,8 \text{ m/s}$$

b) El punto de lanzamiento más favorable es el de menor latitud, Kourou, donde la velocidad adicional es 461,6 m/s, ligeramente menor que la del ecuador.

## CÁLCULOS ENERGÉTICOS SOBRE LOS SATÉLITES

### PROBLEMA 40

La energía cinética se calcula a partir de la ecuación

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_{\text{orb}}^2$$

donde la velocidad orbital es

$$v_{\text{orb}} = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{r}} = 7791,08 \text{ m/s}$$

de modo que

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot 1000 \text{ kg} \cdot (7791,08 \text{ m/s})^2 = 3,035 \cdot 10^{10} \text{ J}$$

Para calcular la energía potencial usamos la ecuación

$$E_p = -\frac{GMm}{r} = -6,07 \cdot 10^{10} \text{ J}$$

Y por tanto la energía mecánica del satélite es:

$$E_m = E_c + E_p = -3,035 \cdot 10^{10} \text{ J}$$

El signo negativo de la energía mecánica debe interpretarse como que el satélite se encuentra atrapado por el campo gravitatorio terrestre, y por ello su órbita es cerrada alrededor de la Tierra.

### PROBLEMA 41

a) Para determinar la altura del satélite debemos calcular el radio de órbita a partir del periodo del satélite. El estudio dinámico del movimiento del satélite, suponiendo una órbita circular donde  $v = 2\pi r/T$ , nos permite establecer la relación

$$G \frac{M_T \cdot m}{r^2} = m \cdot \left( \frac{2\pi \cdot r}{T} \right)^2$$

y despejando el radio orbital ( $r$ ),

$$r = \sqrt[3]{\frac{GM_T}{4\pi^2} \cdot T^2}$$

Sustituyendo valores obtenemos

$$r = 6,654 \cdot 10^6 \text{ m, y por ello}$$

$$h = r - R_T = 2,84 \cdot 10^5 \text{ m.}$$

A dicha altura, la rapidez del satélite en órbita circular es:

$$v_{\text{orb}} = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{T} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 6,654 \cdot 10^6 \text{ m}}{5400 \text{ s}} = 7742,28 \text{ m/s}$$

b) Para calcular la energía transferida al satélite para ponerlo en órbita realizamos un balance de energía.

La energía del satélite antes del lanzamiento es:

$$E_{m_1} = -G \frac{M_T m}{R_T}$$

La energía de satélite en órbita es:

$$E_{m_2} = \frac{1}{2} m v_{orb}^2 - G \frac{M_T \cdot m}{r} = -\frac{1}{2} G \frac{M_T m}{r}$$

Por tanto la energía transferida es:

$$W_{ext} = G M_T m \left( \frac{1}{R_T} - \frac{1}{2r} \right) = 6,527 \cdot 10^{10} \text{ J.}$$

#### PROBLEMA 42

- a) La rapidez con que orbita el satélite en la primera órbita es, utilizando el valor

$$GM_{Tierra} = 3,99 \cdot 10^{14} \text{ m}^3/\text{s}^2$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{GM_T}{r}} = \sqrt{\frac{3,99 \cdot 10^{14} \text{ m}^3/\text{s}^2}{9000 \cdot 10^3}} = 6658,3 \text{ m/s}$$

y en la 2ª órbita, de radio  $r = 13\,000 \text{ km}$ :

$$v_2 = \sqrt{\frac{GM_T}{r}} = \sqrt{\frac{3,99 \cdot 10^{14} \text{ m}^3/\text{s}^2}{13000 \cdot 10^3}} = 5540 \text{ m/s}$$

y lógicamente  $v_2 < v_1$ , al estar más alejada de la Tierra.

- b) Tenemos que calcular la energía total del satélite en las posiciones inicial y final:

$$E_1 = -\frac{GM_T m}{2 r_1} = \frac{3,99 \cdot 10^{14} \text{ m}^3/\text{s}^2 \cdot 500 \text{ kg}}{18000 \cdot 10^3 \text{ m}} = -1,108 \cdot 10^{10} \text{ J}$$

$$E_2 = -\frac{GM_T m}{2 r_2} = -\frac{3,99 \cdot 10^{14} \text{ m}^3/\text{s}^2 \cdot 500 \text{ kg}}{26000 \cdot 10^3 \text{ m}} = -7,673 \cdot 10^9 \text{ J}$$

Y la variación de la energía total es:

$$\Delta E = E_2 - E_1 = -7,673 \cdot 10^9 \text{ J} - (-1,108 \cdot 10^{10} \text{ J}) = 3,41 \cdot 10^9 \text{ J}$$

#### PROBLEMA 43

- a) La rapidez con que orbita el módulo es:

$$v_1 = \sqrt{\frac{GM_L}{r_1}} = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2 \cdot 7,36 \cdot 10^{22} \text{ kg}}{(1740 + 500) \cdot 10^3}} = 1480,4 \text{ m/s}$$

La energía total es:

$$\begin{aligned} E_1 &= -\frac{GM_L m}{2 r_1} = \\ &= -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2 \cdot 7,36 \cdot 10^{22} \text{ kg} \cdot 2500 \text{ kg}}{2 \cdot 2,24 \cdot 10^6} = \\ &= -2,74 \cdot 10^9 \text{ J} \end{aligned}$$

- b) La energía total si la altura sobre la superficie es  $1000 \text{ km}$  ( $r_2 = 2740 \text{ km}$ ) es:

$$\begin{aligned} E_2 &= -\frac{GM_L m}{2 r_2} = \\ &= -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2 \cdot 7,36 \cdot 10^{22} \text{ kg} \cdot 2500 \text{ kg}}{2 \cdot 2,74 \cdot 10^6 \text{ m}} = \\ &= -2,24 \cdot 10^9 \text{ J} \end{aligned}$$

Y la variación de la energía total es:

$$\Delta E = E_2 - E_1 = -2,24 \cdot 10^9 \text{ J} + 2,74 \cdot 10^9 \text{ J} = 5 \cdot 10^8 \text{ J}$$

#### PROBLEMA 44

- a) La ecuación del periodo de rotación es:

$$\begin{aligned} T &= \frac{2\pi R^{3/2}}{\sqrt{GM_T}} = \frac{2\pi \cdot (6,761 \cdot 10^6)^{3/2}}{\sqrt{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24}}} = \\ &= 5530,8 \text{ s} = 92,2 \text{ min.} \end{aligned}$$

La rapidez con la que gira en su órbita es:

$$v_1 = \sqrt{\frac{GM_T}{r_1}} = \sqrt{\frac{3,989 \cdot 10^{14} \text{ m}^3/\text{s}^2}{6761 \cdot 10^3}} = 7681,2 \text{ m/s}$$

- b) La energía necesaria se debe emplear en aumentar su energía total:

$$\begin{aligned} E_1 &= -\frac{GM_T m}{2 r_1} = -\frac{3,989 \cdot 10^{14} \text{ m}^3/\text{s}^2 \cdot 415000 \text{ kg}}{2 \cdot 6761 \cdot 10^3 \text{ m}} = \\ &= -1,224 \cdot 10^{13} \text{ J} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_2 &= -\frac{GM_T m}{2 r_2} = -\frac{3,989 \cdot 10^{14} \text{ m}^3/\text{s}^2 \cdot 415000 \text{ kg}}{2 \cdot 7151 \cdot 10^3 \text{ m}} = \\ &= -1,157 \cdot 10^{13} \text{ J} \end{aligned}$$

Y la variación de la energía total, obtenida a expensas de un trabajo externo, es:

$$\Delta E = E_2 - E_1 = -1,157 \cdot 10^{13} \text{ J} + 1,224 \cdot 10^{13} \text{ J} = 6,7 \cdot 10^{11} \text{ J.}$$

#### PROBLEMA 45

- a) Como sabemos, el momento angular se mantiene constante.

- b) Para relacionar las energías cinéticas en el afelio y el perihelio, obtendremos en primer lugar el cociente  $v_a/v_p$ , que se puede deducir de la conservación del momento cinético:

$$m R_a v_a = m R_p v_p, \text{ con } R_a/R_p = 5/3.$$

$$v_a/v_p = R_p/R_a = 3/5.$$

Por tanto:

$$\frac{E_{c,a}}{E_{c,p}} = \frac{\frac{1}{2} m v_a^2}{\frac{1}{2} m v_p^2} = \frac{v_a^2}{v_p^2} = \frac{9}{25}$$

En efecto, en el punto más alejado, el afelio, la rapidez es menor y por tanto también es menor  $E_c$ .

- c) La relación entre las energías potenciales es:

$$\frac{E_{p,a}}{E_{p,p}} = \frac{-GM/R_a}{-GM/R_p} = \frac{3}{5}$$

## RAPIDEZ DE ESCAPE

### PROBLEMA 46

Para calcular la rapidez de escape en la superficie de la Luna establecemos un balance entre el cohete lanzado en la superficie y un punto remoto (infinito), donde llega sin velocidad; por ello:

$$-G \frac{M_L \cdot m}{R_L} + \frac{1}{2} m \cdot v_{esc}^2 = 0$$

Despejando la rapidez de escape, obtenemos:

$$v_{esc} = \sqrt{2 \cdot G \frac{M_L}{R_L}} = 2373,81 \text{ m/s}$$

Comparando dicha rapidez con la del cohete, comprobamos que es menor la rapidez del cohete, por lo cual no podrá escapar de la acción de la Luna.

### PROBLEMA 47

La rapidez de escape viene determinada por la ecuación

$$v_{esc} = \sqrt{2 \cdot \frac{GM_T}{r}} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{GM_T}{r}}$$

y la velocidad de órbita, supuesta circular, por la ecuación

$$v_{orb} = \sqrt{\frac{GM_T}{r}}$$

Por ello ambas rapidezces están relacionadas por la expresión:

$$v_{esc} = \sqrt{2} \cdot v_{orb}$$

### PROBLEMA 48

La rapidez de escape se calcula por la expresión:

$$v_{esc} = \sqrt{2 \frac{GM_M}{r}}$$

siendo  $r$  la distancia del punto de lanzamiento al centro del planeta.

Si se lanza desde la superficie  $r = R_M$ , y por ello:

$$v_{esc} = 5079 \text{ m/s}$$

Mientras que si se lanza desde una altura  $h = 200 \text{ km}$ ,  $r = R_M + h$ , y por ello:

$$v_{esc} = 4932,6 \text{ m/s}.$$

### PROBLEMA 49

Planeta	Primera velocidad cósmica	Segunda velocidad cósmica
fórmula	$V_{cos,1} = \sqrt{G \frac{M_p}{R_p}}$	$V_{cos,2} = \sqrt{2G \frac{M_p}{R_p}}$
Tierra	7912,43 m/s	11190 m/s
Marte	3544,5 m/s	5012,7 m/s

## 4.2 SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS FINALES

### EJERCICIO 1

- a) Se cumple la tercera ley de Kepler, calculando un valor medio de la constante de  $k = 9,9 \cdot 10^{-14} \text{ s}^2/\text{m}^3$ .
- b) Al realizar un estudio dinámico del movimiento de cualquiera de los satélites, planteamos la ecuación:

$$G \frac{M_T \cdot m}{r^2} = m \cdot \frac{\left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2}{r} \rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_T} \cdot r^3$$

$$\text{Siendo } k = \frac{4\pi^2}{GM_T} = 9,9 \cdot 10^{-14} \frac{\text{s}^2}{\text{m}^3}.$$

Despejando la masa de la Tierra, obtenemos:

$$M_T = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}.$$

- c) Aplicando la tercera ley de Kepler establecemos:

$$r = \sqrt[3]{\frac{T^2}{k}}$$

siendo  $T = 12 \text{ h} = 43200 \text{ s}$ ; por tanto el radio de órbita es:

$$r = \sqrt[3]{\frac{(43200)^2}{9,9 \cdot 10^{-14}}} = 2,66 \cdot 10^7 \text{ m}.$$



Para calcular la altura tenemos en cuenta que

$r = R_T + h$ , y por ello:

$$h = 20,24 \cdot 10^6 \text{ m.}$$

**EJERCICIO 2.** La aproximación que seguramente harán los alumnos es considerar que toda la masa se encuentra concentrada en el centro de la galaxia. Así, utilizando la tercera ley de Kepler,

$$\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM_{\text{total}}}$$

y como 200 millones de años equivalen a un periodo  $T = 6,3 \cdot 10^{15} \text{ s}$

$$M_{\text{Total}} = \frac{4\pi^2 R^3}{GT^2} = \frac{4\pi^2 \cdot (2,7 \cdot 10^{20} \text{ m})^3}{6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2 \text{ kg}^{-2} \cdot (6,3 \cdot 10^{15} \text{ s})^2} = 2,94 \cdot 10^{41} \text{ kg}$$

**EJERCICIO 3.** Se cumple la ecuación

$$g_1 = g_2 \rightarrow \frac{GM_1}{x^2} = \frac{G \cdot 4M_1}{(3-x)^2} \rightarrow (3-x)^2 = 4x^2 \rightarrow 3-x = 2x \rightarrow x = 1 \text{ m}$$

En efecto, el punto de equilibrio está más cerca de la masa menor.

#### EJERCICIO 4

- a) La rapidez lineal se obtiene a partir de un planteamiento dinámico del movimiento del satélite, y suponiendo una órbita circular:

$$G \frac{M_L \cdot m}{r^2} = m \frac{v_{\text{orb}}^2}{r} \rightarrow v_{\text{orb}} = \sqrt{\frac{GM_L}{r}}$$

donde  $r = R_L + h = 1,838 \cdot 10^6 \text{ m}$ , y por ello  $v_{\text{orb}} = 1\,633 \text{ m/s}$ .

- b) La rapidez de escape del satélite se obtiene realizando un balance de energía entre el satélite en órbita, donde

$E = -G \frac{M_L m}{r}$ , y un supuesto punto en el infinito, donde llega sin velocidad. Es decir;

$$\left( -G \frac{M_L \cdot m}{r} \right) + E_{\text{c,esc}} = 0$$

siendo  $E_{\text{c,esc}}$  la energía complementaria para enviarlo al infinito. El cálculo de dicha energía nos permite determinar la rapidez de escape:

$$E_{\text{c,esc}} = \frac{1}{2} m v_{\text{esc}}^2 \rightarrow v_{\text{esc}} = \sqrt{\frac{2 \cdot GM_L}{r}}$$

Teniendo en cuenta la ecuación anterior y operando obtenemos  $v_{\text{esc}} = \sqrt{2} \cdot 1\,633 \text{ m/s}$ .

## 5. CRITERIOS DE EVALUACIÓN

Al terminar el desarrollo de este tema los alumnos y las alumnas serán capaces de:

1. Conocer la evolución histórica que condujo del modelo geocéntrico inicial al modelo heliocéntrico de Copérnico, comprendiendo las ventajas de éste frente a los anteriores a él.
2. Enunciar y aplicar las tres leyes de Kepler.
3. Saber aplicar la ley de gravitación universal para calcular el vector fuerza gravitatoria.
4. Asimilar el carácter de la interacción gravitatoria y comprender la consecuencia de ello: la conservación del momento angular.
5. Calcular la masa de un planeta conocido su radio medio de órbita y su periodo.
6. Deducir las tres leyes de Kepler a partir de la ley de gravitación universal y las leyes de la dinámica.
7. Comprender el significado del concepto de campo gravitatorio.
8. Calcular el vector intensidad de campo en un punto determinado de un campo formado por cuerpos puntuales o de simetría esférica.
9. Comprender el significado de la visualización del campo gravitatorio mediante líneas de campo.
10. Asimilar el carácter conservativo del campo gravitatorio y usar el concepto de energía potencial.
11. Calcular el trabajo realizado por el campo gravitatorio cuantificando las variaciones de la energía potencial.
12. Aplicar los conceptos y/o leyes gravitatorias al cálculo de distancias, masas, periodos de revolución y energía de astros y/o satélites artificiales.
13. Deducir las características de un satélite en órbita circular a partir de su distancia a la superficie terrestre.
14. Calcular la energía y la velocidad de lanzamiento necesarias para situar un satélite en órbita estable.
15. Comprender el concepto y calcular el valor de la velocidad de escape del campo gravitatorio de un planeta.
16. Describir con el lenguaje adecuado fenómenos como las mareas o la colocación en órbita de un satélite.
17. Valorar la importancia que tuvo la síntesis newtoniana y el interés de la humanidad por conocer la estructura del universo en que vivimos.

## 6. EJERCICIOS PROPUESTOS PARA LA EVALUACIÓN FINAL DEL TEMA

En función de las capacidades a desarrollar y de los criterios de evaluación indicados, proponemos a título ilustrativo algunos ejercicios para elaborar una prueba escrita de evaluación final.

### LEYES DE KLEPER Y DE LA GRAVITACIÓN. CAMPO GRAVITATORIO

- 1 a) Enuncia las leyes de Kepler.  
b) Europa es un satélite de Júpiter que tarda 3,55 días en recorrer su órbita, de  $6,71 \cdot 10^8$  m de radio medio, en torno a dicho planeta. Otro satélite de Júpiter, Ganímedes, tiene un periodo orbital de 7,15 días. Calcula el radio medio de la órbita de Ganímedes.
- 2 Un satélite artificial gira en órbita estable alrededor de la Tierra. Si la altura del satélite es de  $5 \cdot 10^5$  m, sobre la superficie terrestre, y su periodo es de 1,57 h, calcula la masa de la Tierra.  
Datos:  $R_T = 6371$  km;  $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$  UI.
- 3 Si la fuerza con que la Tierra atrae a la Luna es del mismo tipo que la fuerza que hace caer una manzana del árbol, ¿por qué la Luna no “cae” hacia la Tierra?
- 4 ¿A qué altura sobre la superficie de la Tierra se ha de encontrar un cuerpo para que su peso disminuya en un 10 %?  
Dato:  $R_T = 6371$  km.
- 5 Un satélite de Marte tiene un periodo de 458 minutos. La masa de Marte es de  $6,42 \cdot 10^{23}$  kg.  
a) Determina el radio de órbita del satélite.  
b) Si el radio de Marte es de 3 397 km, ¿cuánto pesará un astronauta en la superficie de Marte si pesa 750 N en la superficie terrestre?  
c) Otro satélite de Marte gira a su alrededor a una distancia media de su centro de  $r = 23,46 \cdot 10^3$  km; ¿cuál es su periodo de giro alrededor de Marte?  
Datos:  $g_{0,T} = 9,81$  N/kg;  $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$  Nm<sup>2</sup> kg<sup>-2</sup>.
- 6 Halla el valor de la intensidad del campo gravitatorio lunar sabiendo que la masa de la Luna es 0,012 veces la de la Tierra y su radio es 0,27 el terrestre. ¿Cuál será el periodo en la superficie lunar de un péndulo cuyo periodo en la Tierra es de 2 segundos?  
Datos:  $R_T = 6371$  km;  $g_{0,T} = 9,81$  N/kg;  
 $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$  Nm<sup>2</sup> kg<sup>-2</sup>.

- 7 En su afelio, el planeta Mercurio está a  $6,99 \cdot 10^{10}$  m del Sol y en su perihelio a  $4,60 \cdot 10^{10}$  m del Sol.  
Si su rapidez orbital es de 38,8 km/s en el afelio, ¿cuál es su rapidez orbital en el perihelio?
- 8 La Luna está a una distancia de  $60 \cdot R_T$  y completa su órbita en 27,3 días. a) Determina la velocidad orbital de la Luna, respecto a la Tierra. b) ¿Cuánto “caerá” la Luna sobre la Tierra en 1 segundo?  
Datos:  $R_T = 6371$  km;  $g_{0,T} = 9,81$  N/kg;  
 $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$  Nm<sup>2</sup> kg<sup>-2</sup>.
- 9 Si la Luna siguiera una órbita circular en torno a la Tierra, pero con un radio igual a la cuarta parte de su valor actual, ¿cuál sería su periodo de rotación?  
Dato: Periodo actual de rotación, 27,3 días.
- 10 El satélite de investigación europeo (ERS-2) sobrevuela la Tierra a 800 km de altura sobre su superficie. Supón que su órbita es circular y que su masa es de 1 t.  
a) Calcula, de forma razonada, la rapidez y el periodo orbital.  
b) Si suponemos que el satélite se encuentra sometido únicamente a la interacción gravitatoria terrestre, ¿por qué no cae sobre la superficie terrestre?  
Datos:  $R_T = 6371$  km;  $g_{0,T} = 9,81$  N/kg;  
 $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$  Nm<sup>2</sup> kg<sup>-2</sup>.
- 11 En 1978, astrónomos del Observatorio Naval de Estados Unidos descubrieron que el planeta Plutón tiene una Luna, llamada Charón, la cual eclipsa al planeta cada 6,4 días. Si astronómicamente se ha determinado que la distancia del centro de Plutón al centro de Charón es 19 700 km, determina la masa de Plutón.  
Dato:  $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$  Nm<sup>2</sup> kg<sup>-2</sup>.

### SATÉLITES Y VELOCIDAD DE ESCAPE

- 12 Dos satélites artificiales de la Tierra,  $S_1$  y  $S_2$ , describen en un sistema de referencia geocéntrico dos órbitas circulares, contenidas en un mismo plano, de radios  $r_1 = 8\,000$  km y  $r_2 = 9\,000$  km, respectivamente.  
a) Establece la relación existente entre sus velocidades de órbita.  
b) ¿Cuál es la relación existente entre sus periodos?
- 13 En la superficie de un planeta de 3 000 km de radio la gravedad tiene un valor de 4 N/kg. A una distancia de

- 2 500 km sobre la superficie del planeta, se mueve en órbita circular un satélite de masa de 800 kg.
- Dibuja la fuerza que actúa sobre el satélite y escríbela en forma vectorial.
  - Calcula la masa del planeta.
  - Calcula la velocidad y la energía total que debe tener el satélite para que su órbita sea estable.
- Dato:  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ UI}$ .
- 14** ¿Cuál debería ser la velocidad inicial de la Tierra para que escapase del Sol y se dirigiera hacia el infinito? Supóngase que la Tierra se encuentra describiendo una órbita circular alrededor del Sol.
- Datos:  $d_{T-S} = 1,5 \cdot 10^{11} \text{ m}$ ;  $M_{\text{sol}} = 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$ ;  
 $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ UI}$ .
- 15** En la superficie de un planeta de 1 000 km de radio la aceleración de caída libre de los cuerpos es  $2 \text{ m/s}^2$ . Calcula:
- La energía potencial gravitatoria de un cuerpo de 50 kg de masa situado en la superficie del planeta.
  - La velocidad de escape desde la superficie del planeta.
  - La masa del planeta.
- Dato:  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2 \text{ kg}^{-2}$ .
- 16** Supongamos que la Tierra, manteniendo su masa, aumentara su radio medio. ¿Cómo variaría la rapidez de escape?
- 17** Un meteorito, de 2 500 kg de masa, se encuentra inicialmente en reposo, respecto a la Tierra, a una distancia sobre la superficie terrestre igual a 6 veces el radio de la Tierra.
- ¿Cuánto pesa en ese punto?
  - ¿Cuánta energía mecánica posee?
  - Si cae a la Tierra, ¿con qué rapidez llegará a la superficie?
- Considerar sólo el sistema meteorito-Tierra.
- Datos:  $M_T = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ ;  $R_T = 6371 \text{ km}$ ;  
 $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ UI}$
- 18** Calcula el trabajo necesario para trasladar un satélite desde una órbita estable de radio  $r = 2 \cdot R_T$  a otra estable de radio  $r = 4 \cdot R_T$ .
- Datos:  $R_T = 6371 \text{ km}$ ;  $g_{0,T} = 9,81 \text{ N/kg}$ ;  
 $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2 \text{ kg}^{-2}$ .
- 19** Se lanza un proyectil verticalmente desde la superficie terrestre, con una velocidad de 3 km/s. Calcula:
- La altura máxima que alcanzará.
  - La velocidad que habrá que comunicarle, a esa altura, para que describa una órbita circular.
- Datos:  $R_T = 6371 \text{ km}$ ;  $g_{0,T} = 9,81 \text{ N/kg}$ ;  
 $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2 \text{ kg}^{-2}$ .
- 20** En el movimiento circular de un satélite en torno a la Tierra, determina:
- La expresión de la energía cinética en función de las masas del satélite y de la Tierra, y del radio de órbita.
  - La relación que existe entre su energía mecánica y su energía potencial.

## 7. RECURSOS DIDÁCTICOS Y BIBLIOGRAFÍA DE CONSULTA

### ARTÍCULOS Y REVISTAS

ACEVEDO, J. A. 1989. Comprensión newtoniana de la caída de los cuerpos. *Enseñanza de las Ciencias*, 7(3), pp. 241-246.

ASHTOKAR, A. 1985. La gravitación cuántica. *Mundo Científico*, 5 (43), pp. 14-23.

CASADELLÀ, J. y BIBILONI, M. 1985. La construcción histórica del concepto de fuerza centrípeta en relación con las dificultades de su aprendizaje. *Enseñanza de las Ciencias*, 3(3), pp. 217-224.

CASADELLÀ, J. I MIRÓ, C.: 1997. L'ense-nyament del conceptes de força centrípeta i força centrífuga. Una proposta inspirada en la història de la mecànica. *Enseñanza de las Ciencias*, vol 15 (3), pp. 393-399.

DOMÉNECH, J. L. et al. 1989. La reconstrucción de la síntesis newtoniana como requisito para un cambio conceptual efectivo en mecánica. *Enseñanza de las Ciencias*, nº extra, tomo 1.

LANCIANO, N. 1989: Ver y hablar como Tolomeo y pensar como Copérnico. *Enseñanza de las Ciencias*, vol 7(2), pp. 173-182.

MORENO, A. 2000. "Pesar" la Tierra: test newtoniano y origen de un anacronismo. *Enseñanza de las Ciencias*, vol 18 (2), pp.319-332.

MUY INTERESANTE 1992. Isaac Newton: El mortal que más se acercó a los dioses. Documento especial del número 137, octubre 92.

NAVARRO, L. 1985. Fuerzas y campos en la historia de la Física: De Maxwell a Einstein. *Mundo Científico*, 5 (50), pp. 872-877.

SOLBES, J. y MARTÍN, J. 1991. Análisis de la introducción del concepto de campo. *Revista Española de Física*, 5, pp. 34-40.

TEN, A. E. et al. 1985. Historia y enseñanza de la astronomía II. La posición de los cuerpos celestes. *Enseñanza de las Ciencias*, 3 (1), pp. 47-57.

TORRES, M. L. et al. 1995. La ciencia en los tiempos de Galileo. La revolución científica del siglo XVII. *Alambique* 5, pp. 106-113.

### LIBROS

ASIMOV, I. 1971. *El Universo. De la tierra a los quásars*. Madrid: Alianza Editorial.

AZCÁRATE, C. y otros. 1998. *Galileo Galilei: La nueva ciencia del movimiento*. Barcelona: Universitat Autònoma.

BACAS, P. y otros. 1993. *Física y ciencia-ficción*. Madrid: Akal.

BAIG, A. y AGUSTENCH, M. 1987. *La revolución científica en los siglos XVI y XVII*. Col. BREDA. Barcelona: Alhambra.

BELTRÁN, A. 1983. *Galileo: el autor y su obra*. Barcelona: Barcanova.

Biblioteca Salvat de Grandes Biografías: *Galileo*. nº 40. Madrid/Barcelona.

Biblioteca Salvat de Grandes Biografías: *Kepler*. nº 46. Madrid/Barcelona.

Biblioteca Salvat de Grandes Biografías: *Newton*. nº 99 y 100. Madrid/Barcelona.

BOURGE, P. y LACROIX, J. 1988. *El cielo a simple vista y con prismáticos*. Barcelona: Omega.

COHEN, I. B. 1983. *La revolución newtoniana y la transformación de las ideas científicas*. Madrid: Alianza Universidad.

COPÉRNICO, N. 1982. *Sobre las revoluciones de los orbes celestes*. Editora Nacional.

COPÉRNICO, GALILEO, DIGGES. 1983. *Opúsculos sobre el movimiento de la Tierra*. Madrid: Alianza Editorial.

CROMBIE, A. 1985. *Historia de la Ciencia: De San Agustín a Galileo*. Madrid: Alianza Universidad.

FÉRNANDEZ CASTRO, T. 1997. *Historias del universo*. Madrid: Espasa Calpe.

GALADÍ-ENRÍQUEZ, D. 1998. *A ras de cielo*. Barcelona: Sinequanon.

GALILEI, G. 1981. *Consideraciones y demostraciones matemáticas sobre dos nuevas ciencias*. Madrid: Editora Nacional.

GALILEO-KEPLER. 1984. *El mensaje y el mensajero sideral*. Madrid: Alianza editorial.

GETTYS, W. KELLER, F. SKOVE, M. 1992. *Física: clásica y moderna*. Mc Graw-Hill.

GRIBBIN, J. 1988. *En busca del big bang*. Madrid: Ediciones Pirámide.

HAWKING, S. 1988. *Historia del tiempo. Del Big bang a los agujeros negros*. Madrid: Alianza.

HEWITT. 1997. *Conceptos de Física*. México: Limusa.

HOLTON, G. 1989. *Introducción a los conceptos y teorías de las ciencias físicas*. Barcelona: Reverté.

HOYLE, F. 1985. *El universo inteligente*. Barcelona: Grijalbo.

LAYZER, D. 1989. *Construcción del universo*. Barcelona: Labor.

LÓPEZ PIÑERO, J.M., NAVARRO, V. y PORTELA, E. 1989. *La revolución científica*. Historia 16: Madrid.

RAÑADA, A. F. 1993. *Física Básica*. Madrid: Alianza.

NEWTON, I. 1983. *El sistema del mundo*. Madrid: Alianza.

NEWTON, I. 1987. *Principios matemáticos de filosofía natural*. Madrid: Tecnos.

PETERSON, I. 1995. *El reloj de Newton. Caos en el Sistema Solar*. Madrid: Alianza.

KEPLER, J. 1994. *El secreto del universo*. Barcelona: Altaya.

KHUN, T. S. 1985. *La revolución copernicana*. Barcelona: Ariel.

SÁNCHEZ RON, J. M. 2001. *El jardín de Newton*. Barcelona: Crítica.

SERWAY. (1992). *Física*. Mc Graw-Hill.

SUSAN, M; BURKE, J. 1999. *La naturaleza de las cosas*. Edita Internacional Thomson.

TIPLER, P.A. 1999. *Física, para la ciencia y la tecnología*. Cuarta edición. Barcelona: Reverté.

WESFALL. R. 1996. *Isaac Newton: una vida*. Cambridge University Press.

## VÍDEOS

1. *El planeta Tierra: un modelo científico*. Open University. (25').

*Medición de la Tierra y la Luna*. Open University. (25')

Estos dos programas se completan entre sí. El primero ana-

liza el papel de los modelos científicos y presenta una reproducción del experimento de Foucault; el segundo trata bien el método de Eratóstenes para medir el radio de la Tierra.

2. *Leyes de Kepler*. Arait Multimedia. (28') (Serie "El Universo Mecánico y más allá").

Contenido: De Brahe a Kepler. Cálculos sobre Marte. La elipse. Leyes de Kepler. Las esferas de Kepler.

3. *Energía y excentricidad*. Arait Multimedia. (24') (Serie "El Universo Mecánico y más allá").

Contenido: Un recorrido desde Ptolomeo a Galileo. Plutón y el Halley. Energía cinética, potencial y mecánica. Relación entre la forma de la órbita y la energía.

4. *Un telescopio en el espacio*. Open University. (25').

Trata sobre el estudio del espacio utilizando un telescopio de rayos ultravioleta.

5. *El origen del sistema solar*. Open University. (25')

Un profesor de Harvard da una explicación pormenorizada del origen del sistema solar.

6. *La evolución y creación del Universo*. Metrovideo. (28').

Contenido: La evolución del universo. ¿Qué ocasionó la creación? Disquisiciones. Intervienen: Murray Gell-Man, S. Hawking y S. Weinberg, entre otros. Puede ser un buen programa para terminar el tema.



# CAMPO ELÉCTRICO Y CAMPO MAGNÉTICO



# 5

## 1. PRESENTACIÓN GENERAL DEL TEMA

En la programación del segundo de bachillerato se incluye la electricidad y el magnetismo en una misma unidad conceptual: *interacción electromagnética*. Este tema constituye uno de los ejes básicos para la correcta comprensión de un gran conjunto de fenómenos físicos, aparentemente inconexos, dando lugar a lo que la comunidad científica ha denominado la segunda unificación de la física, resumida en las ecuaciones de Maxwell, las cuales ofrecen un mismo modelo para explicar los fenómenos eléctricos, magnéticos y ópticos. Además, permite completar y afianzar el concepto de campo introducido para explicar la interacción gravitatoria.

El tema se ha diseñado en dos partes: el campo eléctrico y el campo magnético, a través del hilo conductor entre los dos campos: la carga eléctrica. En el diagrama de la figura 1.2 se encuentra la estructura del tema, aunque recomendamos que desde un principio se indique el carácter relativo del campo magnético, asociado al movimiento de la carga.

El *campo eléctrico* se introduce a partir de la interacción entre dos cuerpos cargados eléctricamente, considerados puntuales, y distantes entre sí (problema estructurante), remarcando dos aspectos característicos en todo proceso de electrización: la cuantización y la conservación de la carga eléctrica. La ley de Coulomb mide la interacción entre cargas puntuales y distantes, pero a la vez plantea el problema de su explicación, lo que da lugar a la introducción del concepto del campo eléctrico.

El estudio y caracterización del campo eléctrico resalta el concepto de campo estudiado en la interacción gravitatoria. La identificación de la fuente del campo eléctrico, la *carga eléctrica*, da lugar a su descripción vectorial con el vector *intensidad de campo* y su representación mediante las líneas de campo. Con el objetivo de superar las dificultades de comprensión del significado de las líneas de campo, ya que para muchos alumnos son reales, ofrecemos varias representaciones comentadas: cargas puntuales, dipo-

los y placas cargadas. El aspecto conservativo del campo eléctrico da lugar a una de sus propiedades más importantes, el *potencial eléctrico*, magnitud escalar que permite realizar una descripción escalar del campo y una representación mediante superficies equipotenciales. Por último establecemos una relación entre la descripción vectorial y la escalar tanto a nivel formal como a nivel representativo.

El segundo apartado se centra en el estudio de la *interacción magnética*, para lo que se ha establecido como problema estructurante la búsqueda de un modelo para explicar el origen del comportamiento magnético de la materia. Así, iniciamos el bloque con una lectura de rasgo histórico que establece las características de la interacción magnética y por otra parte introduce la evolución del estudio del magnetismo; con ello pretendemos resaltar la dimensión socio-histórica de las teorías científicas, como modelo en continua evaluación y modificación.

En el estudio de la primera fuente de campos magnéticos, los *imanes*, se visualiza y caracteriza a las líneas del campo magnético, para así disponer de un medio de detección de campos magnéticos, puesto que todo campo sólo actúa sobre sus fuentes, y plantea la búsqueda de nuevas fuentes. Se debe llegar a la conclusión de que la imposibilidad de obtener monopolos magnéticos está relacionada con el hecho de que las líneas de campo son cerradas y que el flujo a través de cualquier superficie cerrada es nulo.

En este contexto, el *experimento de Oersted* tiene un papel fundamental puesto que identifica las corrientes estacionarias como fuentes del magnetismo y da lugar a nuevos problemas que se convierten en hilo conductor del bloque:

- La determinación del campo magnético originado por corrientes estacionarias (la velocidad de las cargas puede considerarse constante). El análisis y discusión cualitativa entre la interacción de un hilo conductor indefinido por el que circula una corriente y una brújula, da lugar a la formulación de la *ley de Biot y Savart*. Esta ley se analiza con su campo de validez y por medio de un ejemplo de aplicación, que remarca el carácter vectorial. Por otra parte, la búsqueda de mecanismos de comprensión del campo magnético da lugar a la explicación de las características del campo magnético originado por una espira y un solenoide. Es importante que se constate que la existencia del campo magnético está ligado a la corriente eléctrica, siendo en todos los casos directamente proporcional a ésta.

- La búsqueda de un modelo que explica *el origen del magnetismo de los imanes*. La descripción del modelo de Ampère no sólo justifica el magnetismo de los imanes, sino que además unifica las fuentes del magnetismo, las corrientes estacionarias, separadas durante mucho tiempo en la Historia de la Ciencia. Por otra parte, se extiende el comportamiento magnético a todas las sustancias y su comportamiento se refleja por el valor de una constante (la permeabilidad magnética).
- El estudio de *la interacción entre una carga móvil y un campo magnético* estacionario describe las características del movimiento de partículas en el interior de campos magnéticos uniformes. El estudio de la interacción de las cargas móviles en campos eléctricos y magnéticos sirve para diferenciarlos e introducir dispositivos prácticos de gran interés, como el selector de partículas, los aceleradores de partículas o el espectrómetro de masas.

Un aspecto novedoso son las leyes de Gauss y de Ampère, y por tanto consideramos interesante indicarlo. Ambas leyes se plantean desde el modelo de campo y se aplican sin demostración matemática alguna, por el nivel de abstracción que supone para los alumnos y alumnas.

La *ley de Gauss* es una consecuencia de las características de la interacción eléctrica, y es más general que la ley de Coulomb, que puede deducirse tal como se propone en la A.6 a partir de la ley de Gauss. Así mismo, la *ley de Ampère* es una consecuencia de que las líneas del campo magnético son cerradas y ofrece una alternativa a la ley de Biot y Savart.

Tanto la ley de Gauss como la de Ampère relacionan el campo con sus fuentes. En la ley de Gauss, el campo eléctrico es función de todas las cargas presentes, pero el flujo sólo depende de la carga encerrada por la superficie gaussiana. En la ley de Ampère, el campo magnético es función de todas las corrientes presentes, pero su circulación sólo depende del valor de las corrientes encerradas por la curva amperiana. Un aspecto que debemos diferenciar al utilizar las leyes de Gauss y Ampère es su campo de validez y su utilidad. La ley de Gauss es válida siempre, mientras que la ley de Ampère sólo lo es para corrientes eléctricas estacionarias. Sin embargo, las dos leyes se usan para calcular el valor del campo en aquellos casos en que la simetría del sistema haga que el campo sea constante a lo largo de la superficie gaussiana o de la curva amperiana, según sea el caso.

## 2. CONTENIDOS

1. *¿Qué tienen en común los fenómenos eléctricos y magnéticos?*
  - En busca de un hilo conductor
2. *Fuerzas entre cargas puntuales. Ley de Coulomb*
  - La carga eléctrica se conserva
  - La ley de Coulomb
  - Análisis de la ley de Coulomb
  - Fuerza sobre una carga ejercida por un sistema de cargas puntuales
3. *La explicación de la interacción entre cargas: el campo eléctrico*
  - Descripción vectorial del campo: la intensidad de campo ( $E$ )
  - Representación vectorial del campo: líneas de campo
  - Descripción escalar del campo eléctrico: potencial eléctrico ( $V$ )
  - Definición de potencial y diferencia de potencial
  - Representación escalar del campo: superficies equipotenciales
  - Relación entre las descripciones escalar y vectorial del campo eléctrico
  - Establecimiento de la relación existente entre la intensidad de campo ( $E$ ) y el potencial ( $V$ ) del campo eléctrico
  - Relación entre las líneas de campo y las superficies equipotenciales
4. *Relación entre el campo eléctrico y sus fuentes (las cargas): ley de Gauss*
  - Concepto de flujo eléctrico ( $\Phi_E$ )
  - Ley de Gauss
  - Aplicación de la ley de Gauss
5. *Movimiento de partículas cargadas en un campo eléctrico*
6. *El campo magnético y sus características*
  - Representación del campo magnético
  - ¿Es posible separar los polos de un imán?
7. *Campo magnético originado por corrientes eléctricas estacionarias*
  - La corriente eléctrica como fuente del campo magnético: ley de Biot-Savart
  - Estudio de las características del campo magnético originado por: corriente rectilínea, espira circular y solenoide
8. *La explicación del comportamiento magnético de la materia. Modelo de Ampère*
  - El modelo de Ampère: justificación de la magnetización de la materia
  - Comportamiento magnético de las sustancias
9. *Relación entre el campo magnético y sus fuentes: Ley de Ampère*
10. *Fuerza de un campo magnético sobre una corriente y sobre una carga móvil*
  - Fuerza sobre una corriente: ley de Laplace
  - Fuerzas entre corrientes
  - Acción de un campo magnético sobre una carga móvil: ley de Lorentz
  - Movimiento de una partícula cargada en un campo magnético uniforme
11. *Movimiento de partículas cargadas en campos eléctricos y magnéticos, y sus aplicaciones prácticas*
  - Selector de velocidades
  - Espectrómetro de masas
  - Acelerador lineal de partículas
  - Acelerador circular de partículas: el ciclotrón
12. *Acción de un campo magnético sobre una espira y un solenoide*
  - Relación entre campo magnético, solenoide y momento de un par de fuerzas
  - Una aplicación práctica de la acción de un campo magnético sobre un solenoide: el galvanómetro

### 3. OBJETIVOS ESPECÍFICOS (Capacidades que hay que desarrollar)

CONCEPTOS	PROCEDIMIENTOS	ACTITUDES
<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Enunciar la ley de Coulomb, estableciendo su campo de validez.</li> <li>2. Comprender la necesidad de explicar la interacción eléctrica y magnética mediante el concepto de campo.</li> <li>3. Describir el campo eléctrico usando el vector intensidad de campo y el escalar potencial.</li> <li>4. Comprender el carácter conservativo del campo eléctrico, y las consecuencias que ello implica.</li> <li>5. Comprender el significado y las características de las líneas de campo tanto para el campo eléctrico como magnético.</li> <li>6. Comprender el significado de la relación entre la intensidad de campo eléctrico y la variación del potencial.</li> <li>7. Establecer relaciones entre el campo gravitatorio y el eléctrico.</li> <li>8. Enunciar las características del campo magnético.</li> <li>9. Identificar las fuentes del campo magnético.</li> <li>10. Enunciar y establecer el campo de validez de la ley de Biot y Savart.</li> <li>11. Reconocer las consecuencias del experimento de Oersted.</li> <li>12. Explicar el comportamiento magnético de las sustancias a partir del modelo de dominios.</li> <li>13. Enunciar y establecer el campo de validez de la ley de Ampère.</li> <li>14. Comprender el carácter relativo de la naturaleza del campo magnético.</li> <li>15. Establecer las fórmulas operacionales para calcular la fuerza de interacción de una carga móvil o una corriente eléctrica con un campo magnético uniforme.</li> <li>16. Explicar los fundamentos del selector de partícula, el espectrómetro de masas y los aceleradores de partículas.</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Calcular la fuerza de interacción entre las cargas puntuales que forman un sistema simple de cargas.</li> <li>2. Calcular la intensidad del campo eléctrico de un punto originado por un sistema simple de cargas puntuales fijas.</li> <li>3. Hallar el potencial en un punto originado por un sistema de cargas puntuales y fijas.</li> <li>4. Obtener el trabajo realizado por el campo para trasladar una partícula cargada entre dos puntos.</li> <li>5. Representar las líneas de campo y las superficies equipotenciales de un sistema formado por una o dos cargas fijas.</li> <li>6. Establecer criterios de análisis para deducir el punto o puntos en los que es nulo el potencial o la intensidad de un sistema formado por dos cargas puntuales.</li> <li>7. Calcular el valor del campo eléctrico a partir de las variaciones de potencial.</li> <li>8. Aplicar la ley de Gauss.</li> <li>9. Deducir las características del campo magnético originado por una o varias corrientes rectilíneas estacionarias, una espira en su centro y un solenoide.</li> <li>10. Señalar las características de la interacción de una carga móvil con un campo magnético uniforme.</li> <li>11. Deducir las características del movimiento de una partícula cargada que se mueve en el interior de un campo eléctrico o magnético.</li> <li>12. Obtener la fuerza de interacción entre dos alambres por los que circulan corrientes eléctricas estacionarias.</li> <li>13. Aplicar la ley de Ampère.</li> <li>14. Calcular la energía alcanzada por una partícula en un acelerador lineal o en un ciclotón.</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Valorar la importancia de interpretar el comportamiento eléctrico y magnético de la materia.</li> <li>2. Asumir la validez de los modelos y las teorías para facilitar la comprensión de los fenómenos electromagnéticos.</li> <li>3. Apreciar la incidencia que las aplicaciones electromagnéticas han tenido y tienen para el desarrollo de nuestra sociedad.</li> <li>4. Fomentar el estudio comparativo entre los distintos campos explicados.</li> <li>5. Tener en cuenta la seguridad en el uso y manipulación de los aparatos cuyo funcionamiento se base en los campos eléctricos y magnéticos.</li> </ol>

## 4. SOLUCIONARIO

### 4.1. SOLUCIÓN DE LAS ACTIVIDADES PROPUESTAS

#### 1. ¿Qué tienen en común los fenómenos eléctricos y magnéticos?

Considerando el elevado número de contenidos de este tema, creemos conveniente presentar en la introducción una panorámica de los mismos, lo que se puede hacer por ejemplo mediante un bosquejo histórico o mediante un diagrama conceptual como el contenido en el libro del alumnado.

Para hacer el diagrama más sencillo, solamente hemos reflejado en él la interacción entre cargas (estudiada mediante la ley de Coulomb o mediante el concepto de campo eléctrico) y otro hecho fundamental: una corriente eléctrica produce un campo magnético.

#### 2. Fuerzas entre cargas puntuales. Ley de Coulomb

Aunque ya se estudió en primer curso, es conveniente revisar la ley de Coulomb, para posteriormente trabajar el concepto de campo eléctrico; se insistirá en el carácter vectorial de la ley y en el valor de la constante de proporcionalidad, que expresaremos como  $K = K_0 / \epsilon_r$ .

##### A.1.

Es una consecuencia de que todos los cuerpos son neutros, pero porque tienen el mismo número de cargas positivas que negativas. De esta manera, al cargar un cuerpo y acercarlo a otro neutro, por el fenómeno de la inducción electrostática, las cargas de signo opuesto del cuerpo neutro se sitúan frente al cuerpo cargado mientras que las cargas del mismo signo se alejan lo más posible.

La constante dieléctrica relativa tiene un valor elevado para sustancias dipolares, como el agua.

##### A.2.

En el caso de encontrarse en un bloque de baquelita, la constante de interacción eléctrica es:  $K = K_0 / 4,8$ . Por tanto:

$$|F_{2,1}| = \frac{5,625\text{N}}{4,8} = 1,17\text{N}; |F_{3,1}| = \frac{10\text{N}}{4,8} = 2,08\text{N}$$

siendo la fuerza de interacción

$$F_1 = (-1,17\text{i} - 2,08\text{j})\text{N}$$

y su módulo:

$$|F_1| = \sqrt{(-1,17)^2 + (-2,08)^2} = 2,4\text{N}$$

#### 3. La explicación de la interacción entre cargas: el campo eléctrico

Considerando las dificultades que plantea, debemos ser cuidadosos a la hora de introducir el concepto de *campo*, justificándolo desde el punto de vista histórico y por su utilidad (descripción general de la interacción y posibilidad de cálculo de la fuerza en casos no sencillos, es decir cuando intervengan no cargas puntuales de valor conocido y bien localizadas sino cuerpos extensos con distribuciones de cargas más o menos complejas (una o dos placas metálicas cargadas, una esfera conductora cargada, etc.).

La ecuación  $\vec{F} = q\vec{E}$  es una ecuación más general que la ley de Coulomb, permitiendo el cálculo de la interacción de una carga con un sistema de cargas a través del concepto más amplio de campo; el campo eléctrico, caracterizado por la intensidad de campo,  $\vec{E}$ , es el "intermediario" entre el sistema de cargas puntuales y la carga que experimenta la interacción.

##### A.3.

La determinación de los vectores intensidad eléctrica se obtiene a partir de las expresiones:

$$E_1 = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{8 \cdot 10^{-6}}{(\sqrt{8})^2} u_{r_1} \text{ (N/C)}$$

$$E_2 = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{(-5 \cdot 10^{-6})}{(\sqrt{2})^2} u_{r_2} \text{ (N/C)}$$

siendo los vectores unitarios indicados:

$$u_{r_1} = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \quad u_{r_2} = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

Y por tanto, los vectores  $E$  en el punto C (2, 2) m son:

$$E_1 = \left( \frac{9 \cdot 10^3}{\sqrt{2}}, \frac{9 \cdot 10^3}{\sqrt{2}} \right) \text{ N/C}$$

$$E_2 = \left( \frac{-22,5 \cdot 10^3}{\sqrt{2}}, \frac{-22,5 \cdot 10^3}{\sqrt{2}} \right) \text{ N/C}$$

El vector resultante es  $E_T = E_1 + E_2$ :

$$E_T = \left( \frac{-13,5}{\sqrt{2}}, \frac{-13,5}{\sqrt{2}} \right) \cdot 10^3 \text{ N/C}$$

La fuerza que actúa sobre una carga de  $1 \mu\text{C}$  en el punto C, es:

$$F = q \cdot E_T = 10^{-6} \text{ C} \cdot \left( \frac{-13,5}{\sqrt{2}}, \frac{-13,5}{\sqrt{2}} \right) \cdot 10^3 \text{ N}$$

$$F = \left( \frac{-13,5}{\sqrt{2}}, \frac{-13,5}{\sqrt{2}} \right) \cdot 10^{-3} \text{ N}$$

#### A.4.

La condición necesaria y suficiente para que se anule el campo eléctrico en un punto es que se verifique la ecuación:

$$0 = E_{1,p} + E_{2,p}$$

Para ello, el punto debe estar sobre la recta que contiene las cargas y verificarse que:

$$|E_{1,p}| = |E_{2,p}|; \quad K \frac{2 \cdot 10^{-9}}{x^2} = K \frac{5 \cdot 10^{-9}}{y^2} \rightarrow \frac{y}{x} = \sqrt{\frac{5}{2}}$$

siendo  $x$  la distancia del punto a  $q_1$ , e  $y$  la del punto a  $q_2$ .

Esto implica que el punto está a la izquierda de la carga positiva, puesto que  $y > x$ , y los vectores poseen sentidos opuestos dando lugar al sistema de ecuaciones:

$$(1) y = 10 \text{ cm} + x; \quad (2) y = \sqrt{\frac{5}{2}} \cdot x$$

Su solución permite obtener:

$$x = 17,21 \text{ cm}; \quad y = 27,21 \text{ cm}.$$

Para hacer el estudio del *carácter conservativo* del campo eléctrico podemos apoyarnos en lo aprendido sobre el campo gravitatorio; si se trata del campo originado por una carga puntual, la analogía entre ambos es elevada y ello conduce con facilidad a mostrar que la energía posicional electrostática vienen dada por  $E_p = K Q q / r$ .

Por otra parte, el concepto de *potencial* plantea un conjunto de problemas, tales como el uso de la expresión  $V = K \cdot Q/r$ , donde el alumnado duda entre si  $Q$  es la carga "creadora del campo" o la carga testigo, si debe tener en cuenta el signo de la carga, el procedimiento de cálculo del potencial en un punto originado por un sistema de cargas, el carácter escalar del potencial y su significado. Por todo ello, se propone la actividad A.5.

#### A.5.

La condición para que se anulen los potenciales es que  $V_{1,p} + V_{2,p} = 0$ , lo cual implica que se verifique la condición:  $y / x = 2$  (siendo  $y$  la distancia del punto a  $q_2$  y  $x$  la distancia a  $q_1$ ).

Hay dos posibilidades:

- *Primera posibilidad*: punto situado a la izquierda de la carga positiva.

$$\text{Sistema de ecuaciones: } \begin{aligned} y &= x + 10 \text{ cm} \\ y &= 2 \cdot x \end{aligned}$$

$$\text{Solución: } y = 20 \text{ cm}; \quad x = 10 \text{ cm}$$

- *Segunda posibilidad*: punto situado entre las cargas.

$$\text{Sistema de ecuaciones: } \begin{aligned} y + x &= 10 \text{ cm} \\ y &= 2 \cdot x \end{aligned}$$

$$\text{Solución: } x = 10/3 \text{ cm}; \quad y = 20/3 \text{ cm}$$

Si las dos cargas fueran del mismo signo sería imposible que se anulase el potencial en algún punto.

### ACD1 Potencial eléctrico e intensidad de campo producido por dos cargas eléctricas puntuales.

- Esféricas (circulares sobre la pantalla).
- Van adquiriendo la forma de un elipsoide (elipses sobre el plano de la pantalla). No se anula el potencial.
- No se anula nunca el potencial, sí se anula el campo eléctrico entre las dos cargas y el potencial, en cambio, se suma entre las mismas.
- En el punto medio entre las dos cargas cuando son iguales y de distinto signo el potencial eléctrico se anula, punto donde el campo eléctrico se suma y es máximo.

### 4. Relación entre el campo eléctrico y sus fuentes (las cargas): ley de Gauss

El estudio de la ley de Gauss se presenta para establecer la relación entre el campo, representado por las líneas de campo, y sus fuentes, las cargas. El campo de validez de la ley es mucho más general que la ley de Coulomb, que puede derivarse a partir de la ley de Gauss, y su deducción es una consecuencia de las características del campo eléctrico.

#### A.6.

Tomado una superficie esférica gaussina que esté centrada en la carga, se establece por la ley de Gauss:

$$4\pi r^2 \cdot |E| = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$\text{y por tanto: } |E| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2}$$

#### A.7.

$$\Phi_{\text{total}} = (2 \cdot 10^{-9} \text{ C}) / \epsilon_0$$



5. Movimiento de partículas cargadas en un campo eléctrico

Queremos resaltar el interés de analizar atentamente la tabla resumen del final del apartado, donde se indican las principales semejanzas y diferencias entre el campo gravitatorio y el campo eléctrico.

6. El campo magnético y sus características

A.8.

PERIODO (Referente teórico)	CARACTERÍSTICAS
Edad antigua, desde Aristóteles hasta la publicación de "De Magnete".  El magnetismo es una cualidad propia de cierto tipo de materiales.	<ul style="list-style-type: none"><li>Las únicas fuentes reconocidas del magnetismo son los imanes.</li><li>Los imanes sólo atraen a ciertos minerales de hierro, a los cuales puede inducir las cualidades magnéticas, de forma temporal.</li><li>El proceso de imanación depende del tipo y forma del mineral de hierro.</li><li>Los imanes experimentan fuerzas de atracción y repulsión.</li><li>Los imanes poseen capacidad de orientación espacial (brújulas).</li><li>La Tierra se comporta como un gran imán.</li></ul>
Desde el siglo XVII hasta el siglo XVIII.  Los fenómenos magnéticos dependen del desplazamiento del fluido magnético, cuya cantidad determina la polaridad de los imanes.	<ul style="list-style-type: none"><li>La interacción magnética se produce a distancia y de forma instantánea.</li><li>La interacción magnética es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia de separación entre los imanes.</li><li>No pueden obtenerse imanes con un solo polo.</li><li>Los imanes pueden interactuar con las corrientes eléctricas estacionarias.</li></ul>
Siglo XIX. Se introduce el campo magnético para explicar la interacción magnética.	<ul style="list-style-type: none"><li>Visualización del campo magnético mediante limaduras de hierro.</li><li>La materia, en general, presenta propiedades magnética.</li></ul>

7. Campo magnético originado por corrientes eléctricas estacionarias

Los alumnos suelen confundir la interacción magnética con la eléctrica, no diferenciando sus fuentes. Así, por ejemplo, a la presencia de una corriente suelen asociarle tanto un campo magnético como un campo eléctrico. Con el objetivo de clarificar las fuentes de cada campo proponemos la A.9.

A.9.

La interacción eléctrica sólo se manifiesta entre cuerpos con carga neta, y un conductor por el que circula una corriente eléctrica no posee carga neta, y en consecuencia no interacciona con el péndulo eléctrico. No obstante, el movimiento de cargas por el interior del conductor da lugar a un campo magnético, que se manifestará por su interacción con la brújula.

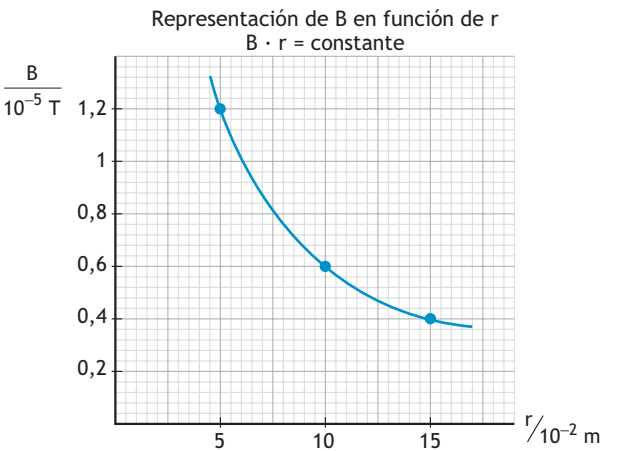
La ley de Biot y Savart

El interés de la ley de Biot y Savart reside en que con su ayuda podemos calcular el valor de la intensidad del campo magnético en diferentes situaciones; como por ejemplo para una corriente estacionaria indefinida o en el centro de una espira, de forma simple. Sin embargo, deberemos hacer énfasis en el campo de validez de las expresiones del cálculo de  $\vec{B}$ .

A.10.

Esta actividad es una aplicación numérica de la ley de Biot y Savart.

Aplicación de la ley: $ B  = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I}{r} = \frac{6 \cdot 10^{-7}}{r} \text{ T}$		
Obtención de valores:		
$r_1 = 5 \cdot 10^{-2} \text{ m}$	$r_2 = 10 \cdot 10^{-2} \text{ m}$	$r_3 = 15 \cdot 10^{-2} \text{ m}$
$ B_1  = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ T}$	$ B_2  = 0,6 \cdot 10^{-5} \text{ T}$	$ B_3  = 0,4 \cdot 10^{-5} \text{ T}$





Al realizar la representación del valor de  $B$  en función de  $r$  se comprueba que estas magnitudes son inversamente proporcionales.

### ACD2 Campo magnético generado por dos conductores

a) Circulares.

b) Disminuye la intensidad y cambia el sentido del campo magnético (de ser entrante pasa a ser saliente o al revés). Según el sentido de cada corriente eléctrica, se verá que el campo magnético resultante es la suma o la resta de los campos generados por ambas corrientes; lo mismo ocurre en las dos zonas situadas a la derecha y a la izquierda de las dos cargas, no entre ellas.

#### A.11.

La expresión del valor del campo magnético en el interior de un solenoide se debe a la contribución de todos los arrollamientos de corriente del mismo ( $N$ ); pero en cada extremo sólo hay contribución de las corrientes de un lado, y por ello el campo magnético en cada extremo es de valor la mitad que en el interior.

### 8. La explicación del magnetismo de la materia. Modelo de Ampère

La explicación del proceso de *imanación* de los materiales tiene que tener en cuenta dos efectos superpuestos; la orientación de los dominios magnéticos por la acción de campos externos y la agitación molecular de las sustancias, en función de su temperatura, lo que da lugar a que el proceso de imanación dependa de la naturaleza del material y de la temperatura.

#### A.12.

Al calentar aumentaremos la desorientación de los dominios internos del material, por incrementarse la agitación molecular.

### 9. Relación entre el campo magnético y sus fuentes: ley de Ampère.

Al ser cerradas las líneas de campo magnético (a diferencia del campo eléctrico o gravitatorio), este campo no es conservativo. Si calculamos la circulación de  $B$  a lo largo de una línea de campo, se llega a una expresión que es el teorema de Ampère.

El interés de este teorema reside en que con su ayuda podemos calcular el valor de la intensidad de campo  $B$  en diferentes situaciones, como por ejemplo para una corriente rectilínea (ley de Biot y Savart) o para el interior de un solenoide.

#### A.13.

La actividad pretende evitar un operativismo acrítico y erróneo sobre la ley de Ampère. Para ello, debemos hacer énfasis en los siguientes aspectos:

- El campo magnético que aparece en la expresión de la circulación del campo es el total, tanto el originado por las corrientes internas a la curva amperiana como las externas.
- El sumatorio de intensidades para calcular la circulación del campo a lo largo de la curva amperiana sólo tiene en cuenta las corrientes eléctricas estacionarias encerradas por la curva.
- No debemos confundir la circulación del campo con la intensidad del campo, extrapolando los resultados obtenidos al calcular la circulación en una curva amperiana con el valor del campo en esa curva.
- Para poder extraer el valor del campo en la integral de circulación, el vector intensidad de campo debe ser constante a lo largo de la curva amperiana considerada.

En consecuencia, el valor del campo en los puntos A y B no puede calcularse mediante la ley de Ampère, ya que el campo a considerar en la circulación de las curvas amperianas es el total, originado por las dos corrientes, y no es constante a lo largo de ellas. En la curva que contiene el punto C, la circulación del campo es nula, pero ello no ha de extrapolarse al valor del campo.

Por otra parte, se puede proponer el cálculo del campo, por ejemplo en el punto B, aplicando la ley de Biot y Savart, para comprobar la discrepancia de resultados si se obtiene a través de la ley de Ampère, lo que puede dar lugar a un debate sobre los resultados obtenidos, que permite establecer las conclusiones citadas.

### 10. Fuerza de un campo magnético sobre una corriente y sobre una carga móvil

Los dos últimos apartados del tema hacen uso continuado del *producto vectorial*; el cálculo matemático debe completarse con el análisis detallado de figuras como la 10.2, 10.6 o 10.8 para adquirir cierto dominio en el uso de las reglas prácticas (de la mano derecha o, mejor, del tornillo) que permiten determinar la dirección y el sentido del vector fuerza según la ecuación  $\vec{F} = I\vec{L} \times \vec{B}$  o  $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ .

#### A.14.

Sólo existe fuerza magnética en las dos primeras representaciones; en la tercera es nula al ser paralela la dirección del conductor con la del campo magnético. La dirección del vector fuerza magnética es siempre perpendicular al plano I-B, y el sentido se establece aplicando la regla de la mano derecha.

#### A.15.

Esta actividad tiene como objetivo introducir la definición operativa de la unidad de intensidad de corriente en el SI. Aplicando la expresión deducida en el libro de texto, obtenemos:

$$\frac{|F_m|}{L} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 \cdot I_2}{d} = \frac{\mu_0}{2\pi} = 2 \cdot 10^{-7} \text{ N/A}.$$

La fuerza es atractiva cuando las corrientes paralelas son de igual sentido y repulsiva cuando son de sentidos opuestos.

### ACD3 Campo magnético originado por dos corrientes eléctricas

Es practicar reiteradamente la ley de Laplace, conductores con el mismo sentido de la corriente eléctrica se atraen magnéticamente; mientras si son de sentido opuesto se repelen. En cada caso la fuerza magnética es directamente proporcional a las intensidades eléctricas de cada corriente e inversamente proporcional a la distancia que separa los conductores.

#### A.16.

Si analizamos la expresión de la ley de Lorentz ( $F = q v B \sin \theta$ ) estableceremos que la interacción será nula cuando la carga no se mueva, en relación al campo magnético, o cuando se desplace en dirección paralela a la del campo. La fuerza es máxima cuando la partícula cargada se mueve en dirección perpendicular a la del campo.

#### A.17.

Aplicando la regla de la mano derecha deducimos que la partícula A tiene carga positiva mientras que la B y la C tienen carga negativa; para ello el alumno o alumna debe tener presente que la fuerza magnética ejerce la función de fuerza centrípeta (hacia el centro de la circunferencia).

Como el radio de la trayectoria es directamente proporcional a la masa de la partícula, la trayectoria de mayor radio corresponde a la de mayor masa (A).

### Ley de Lorentz

Teniendo en cuenta que la acción de un campo magnético sobre una corriente es más "observable" que la acción sobre una carga invisible, hemos preferido deducir la ley de Lorentz,  $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ , a partir de la ley de Laplace, aunque puede hacerse perfectamente al revés.

### 11. Movimiento de partículas cargadas en campos eléctricos y magnéticos, y sus aplicaciones prácticas

#### A.18.

Sólo la acción de un campo eléctrico puede modificar la energía cinética de las partículas cargadas, es decir si cambia la rapidez  $\vec{E}$ , y si no se modifica la rapidez es  $\vec{B}$ .

#### A. 19.

La fuerza eléctrica siempre tiene la dirección del campo eléctrico  $\vec{E}$  (el sentido depende del signo de la carga que

interacciona con el campo) y la fuerza magnética siempre es perpendicular al campo magnético  $\vec{B}$  que la origina. De esta manera si  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  no son perpendiculares las dos fuerzas formarán un ángulo distinto de  $0^\circ$  a  $180^\circ$  y por tanto su resultante no puede ser nunca nula.

### ACD4 Movimiento de partículas cargadas en un campo magnético

- Línea recta, no hay interacción ni de  $\vec{E}$  ni de  $\vec{B}$ .
- Parabólico (tiro horizontal) más o menos curvado dependiendo de  $E$  (a mayor  $E$  más curvo) y de  $v$  (a mayor  $v$  menos curvatura).
- Cambia el sentido de la parábola descrita en el movimiento.
- Ahora inicia un movimiento circular.
- Si los dos campos son perpendiculares sus efectos se pueden anular y la trayectoria es rectilínea. Las demás actividades son una constatación de las anteriores y una manipulación sobre los efectos de campos eléctricos y magnéticos sobre las partículas cargadas en movimiento.

#### A.20.

Esta actividad es útil para aplicar las fórmulas desarrolladas en este apartado del texto. a)  $v = 3,63 \cdot 10^7 \text{ m/s}$ ; b)  $F = 2,32 \cdot 10^{-14} \text{ N}$ ; c)  $R = 0,052 \text{ m}$ ; d)  $1,1 \cdot 10^7$  vueltas.

#### A.21.

La energía mecánica se puede calcular por la expresión:

$$E_{c,m\acute{a}x} = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{q^2 B^2 R^2}{2 m}$$

Operando:

$$E_{c,m\acute{a}x} = \frac{(3,2 \cdot 10^{-19} \cdot 1,2 \cdot 0,25)^2}{2 \cdot 6,64 \cdot 10^{-27}} = 6,94 \cdot 10^{-13} \text{ J}$$

$$E_{c,m\acute{a}x} = 4,34 \text{ MeV}.$$

### ACD5 El ciclotón

- OBSERVACIÓN: La frecuencia es en 280 MHz y la ddp es 777 KV  
El electrón se mueve en espiral cada vez con mayor radio, hasta salir por una D. Cuando la partícula es un positrón la trayectoria es opuesta a la anterior.
- En este caso la trayectoria es prácticamente rectilínea.
- El applet contiene suficiente información para verificar con sencillez las actividades y llegar a las conclusiones oportunas.

## Acción de un campo magnético sobre una espira y un solenoide

### A.22.

Como  $M = ISB \sin \alpha$ , deducimos que si  $\alpha = 0$ , el momento será nulo, de acuerdo con el apartado anterior del texto que es un producto vectorial.

## 4.2. SOLUCIÓN DE LOS PROBLEMAS PROPUESTOS.

### Ley de Coulomb

#### PROBLEMA 1

Para plantear el sistema de ecuaciones tenemos en cuenta que la fuerza de repulsión es cuantificada por la ley de Coulomb, estableciendo las ecuaciones:

$$a) |F| = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{(2)^2} = 2,7 \cdot 10^{-2} \text{ N}$$

$$b) q_1 = 2 \cdot q_2$$

La solución es:  $q_1 = 4,90 \cdot 10^{-6} \text{ C}$

$$q_2 = 2,45 \cdot 10^{-6} \text{ C}$$

#### PROBLEMA 2

Para hallar el valor de  $Q$ , debemos calcular la fuerza eléctrica que actúa sobre el péndulo eléctrico. Para ello, tendremos en cuenta que la bolita del péndulo se encuentra en equilibrio, y por ello:

$$F_E + T + F_p = 0$$

lo que implica:

$$\left. \begin{aligned} T \cdot \sin 30^\circ &= |F_E| \\ T \cdot \cos 30^\circ &= |F_p| \end{aligned} \right\} \frac{T \cdot \sin 30^\circ}{T \cdot \cos 30^\circ} = \frac{|F_E|}{|F_p|}$$

De modo que la fuerza eléctrica de interacción es:

$$|F_E| = |F_p| \cdot \tan 30^\circ = 2,83 \cdot 10^{-3} \text{ N}$$

Admitiendo que la fuerza de interacción entre cargas verifica la ley de Coulomb, establecemos:

$$|F_E| = K_0 \frac{q \cdot Q}{r^2} = 2,83 \cdot 10^{-3} \text{ N}$$

Despejando el valor de  $Q$ , y sustituyendo valores obtenemos:

$$Q = \frac{|F_E| \cdot r^2}{K_0 \cdot q} = 7,075 \cdot 10^{-6} \text{ C}$$

#### PROBLEMA 3

Analizando la situación de equilibrio para una de las esferitas cargadas, establecemos la ecuación:

$$F_E + T + F_p = 0$$

que da lugar a:

$$|F_E| = |F_p| \cdot \tan 30^\circ = 5,65 \cdot 10^{-2} \text{ N}$$

Admitiendo que la interacción obedece la ley de Coulomb, establecemos que:

$$Q = \sqrt{\frac{|F_E| \cdot r^2}{K_0}} = 2,51 \cdot 10^{-6} \text{ C}$$

#### PROBLEMA 4

El valor de la fuerza eléctrica viene determinado por la ley de Coulomb:

$$|F_E| = K_0 \frac{q_p \cdot |q_e|}{r^2}$$

y el de la fuerza gravitatoria por la ley de gravitación universal:

$$|F_p| = G \frac{m_p \cdot m_e}{r^2}$$

La relación es:

$$\frac{|F_E|}{|F_p|} = \frac{K_0 \cdot q_p \cdot |q_e|}{G \cdot m_p \cdot m_e} = 2,27 \cdot 10^{39}$$

Lo que implica que  $|F_E| = 2,27 \cdot 10^{39} \cdot |F_p|$ ; por ello el comportamiento del electrón está determinado por la interacción eléctrica.

#### PROBLEMA 5

Aplicando el principio de superposición:

$$F_4 = F_{1,4} + F_{2,4} + F_{3,4}$$

donde

$$F_{1,4} = (0,9;0) \text{ N}$$

$$F_{2,4} = (-0,97;0,48) \text{ N}$$

$$F_{3,4} = (0;7,2) \text{ N}$$

Y por tanto:

$$\vec{F}_4 = (-0,07; 7,68) \text{ N} \rightarrow |\vec{F}_4| = 7,7 \text{ N}$$

en vectores unitarios

$$F_4 = (-0,07 \text{ i} + 7,68 \text{ j}) \text{ N}$$

## Campo eléctrico

### PROBLEMA 6

a) El campo eléctrico en el punto es:

$$E_{p_1} = \left( +5,0 \cdot 10^5 \text{ i} \right) \frac{\text{N}}{\text{C}} + \left( -4,5 \cdot 10^5 \text{ i} \right) \frac{\text{N}}{\text{C}} = 5 \cdot 10^4 \text{ i} \frac{\text{N}}{\text{C}}$$

b) En este caso, el campo eléctrico es:

$$E_{p_2} = \left( 2 \cdot 10^5 \text{ i} \right) \frac{\text{N}}{\text{C}} + \left( -1,125 \cdot 10^6 \text{ i} \right) \frac{\text{N}}{\text{C}} = -9,25 \cdot 10^5 \text{ i} \frac{\text{N}}{\text{C}}$$

### PROBLEMA 7

El campo eléctrico en el punto P se obtiene aplicando el principio de superposición:

$$E_p = E_{1,p} + E_{2,p}$$

donde

$$E_{1,p} = \left[ \left( \frac{18 \cdot 10^4}{5 \cdot \sqrt{5}} \right) \text{i} + \left( \frac{9 \cdot 10^4}{5 \cdot \sqrt{5}} \right) \text{j} \right] \text{N/C}$$

$$E_{2,p} = -\frac{4,5}{4} 10^4 \text{ i} \text{ N/C}$$

Y por tanto:  $E_p = (4850 \text{ i} + 8050 \text{ j}) \text{ N/C}$

### PROBLEMA 8

Los vectores intensidad de campo en un punto de la mediatriz del segmento que las une, distante 5 cm son:

$$E_{1,p} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{2 \cdot 10^{-6}}{(5 \cdot 10^{-2})^2} \cdot \left( \frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right) = (4,32; 5,76) \cdot 10^6 \text{ N/C}$$

$$E_{2,p} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{(-2 \cdot 10^{-6})}{(5 \cdot 10^{-2})^2} \cdot \left( -\frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right) = (4,32; -5,76) \cdot 10^6 \text{ N/C}$$

Y por ello, la intensidad de campo es:

$$E_p = E_{1,p} + E_{2,p} = (8,64; 0) \cdot 10^6 \text{ N/C}$$

El potencial se obtiene al sumar los potenciales de cada una de las cargas en ese punto:

$$V_p = V_{1,p} + V_{2,p}$$

Y puesto que la distancia de cada carga al punto es la misma y las cargas son iguales, pero de signo opuesto, se obtiene:

$$V_p = 9 \cdot 10^9 \cdot \left[ \frac{2 \cdot 10^{-6}}{5 \cdot 10^{-2}} + \frac{(-2 \cdot 10^{-6})}{5 \cdot 10^{-2}} \right] = 0 \text{ V}$$

Es un ejemplo de una situación donde el potencial es nulo, pero no por ello la intensidad debe de serlo.

### PROBLEMA 9

Realizando un estudio dinámico de la esfera que cuelga del hilo, establecemos que:

$$F_E + F_p + T = 0$$

y por ello se verifica que

$$|F_E| = \frac{|F_p|}{\tan 45^\circ} = \frac{m \cdot g}{\tan 45^\circ} = 1,96 \cdot 10^{-3} \text{ N}$$

lo que permite obtener el valor del campo eléctrico, que supondremos constante:

$$|E| = \frac{|F_E|}{q} = 3,92 \cdot 10^5 \text{ N/C}$$

Puesto que el campo eléctrico verifica la relación

$$|E| = \frac{|-\Delta V|}{|\Delta x|}$$

la diferencia de potencial entre las láminas es:

$$|-\Delta V| = 3,92 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{C}} \cdot 5 \cdot 10^{-2} \text{ m} = 1,96 \cdot 10^4 \text{ V.}$$

### PROBLEMA 10

a) Puesto que el potencial de una esfera viene dado por la ecuación:

$$V = k \frac{q}{r}$$

el valor del potencial de cada esfera es:

$$V_1 = 7,2 \cdot 10^6 \text{ V}; \quad V_2 = 4,5 \cdot 10^6 \text{ V.}$$

Y por ello:  $V_1 - V_2 = 2,7 \cdot 10^6 \text{ V}$

b) Al unir ambas esferas deben verificarse dos condiciones, que permiten establecer las ecuaciones siguientes:

Condición	Ecuación
Conservación de la carga	$q_1' + q_2' = 8 \cdot 10^{-5} \text{ C}$
Igualdad de potenciales	$\frac{q_1'}{R_1} = \frac{q_2'}{R_2} \rightarrow q_2' = \frac{8}{5} \cdot q_1'$

Resolviendo las ecuaciones, obtenemos:

$$q_1' = 3,1 \cdot 10^{-5} \text{ C}; \quad q_2' = 4,96 \cdot 10^{-5} \text{ C}$$

### PROBLEMA 11

Cálculo de la carga inicial de la esfera de 10 cm:

$$5000 \text{ V} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{q}{0,1} \rightarrow q = 5,5 \cdot 10^{-8} \text{ C}$$

Después de establecer el contacto eléctrico entre las esferas se deben verificar las condiciones:

Conservación de la carga eléctrica.	$q = q_1 + q_2$
Igualdad de potenciales.	$\frac{q_1}{R_1} = \frac{q_2}{R_2}$

Resolviendo el sistema de ecuaciones planteado, obtenemos:

$$q_1 = \frac{q}{1,8} = 3,086 \cdot 10^{-8} \text{ C}; \quad q_2 = 2,469 \cdot 10^{-8} \text{ C}$$

$$V = 2778 \text{ V}$$

### PROBLEMA 12

$$V_i = k \frac{q_i}{r} V; \quad V_t = \sum V_i$$

$$\text{para } d = 0,5 \text{ m}, \quad V = 18 \text{ V}$$

$$\text{para } d = \frac{\sqrt{5}}{2} \text{ m}, \quad V' = \frac{18}{\sqrt{5}} \text{ V}$$

$$V_t = 2V + V' = 52,10 \text{ V}$$

### PROBLEMA 13

El potencial en el punto P, se calcula aplicando el principio de superposición, es decir:

$$V_P = V_{1,P} + V_{2,P} + V_{3,P} = K \frac{q_1}{r_{1,P}} + K \frac{q_2}{r_{2,P}} + K \frac{q_3}{r_{3,P}}$$

Y sustituyendo valores, obtenemos:

$$V_P = 9 \cdot 10^9 \left[ \frac{2 \cdot 10^{-9}}{0,1 \cdot \sqrt{3}} + \frac{(-1 \cdot 10^{-9})}{0,1} + \frac{(-1 \cdot 10^{-9})}{0,1} \right] \text{ V}$$

$$V_P = 180 \cdot \frac{(1 - \sqrt{3})}{\sqrt{3}} \text{ V}$$

El campo eléctrico se obtiene al sumar los vectores:

$$E_P = E_{1,P} + E_{2,P} + E_{3,P}$$

$$\text{Y puesto que: } E_{2,P} + E_{3,P} = 0$$

se obtiene:

$$E_P = E_{1,P} = -9 \cdot 10^9 \cdot \frac{2 \cdot 10^{-9}}{(0,1\sqrt{3})^2} \text{ j } \frac{\text{N}}{\text{C}} = -600 \text{ j } \frac{\text{N}}{\text{C}}$$

### PROBLEMA 14

La condición para que el potencial sea nulo en un punto es que se cumpla:

$$V_P = V_{1,P} + V_{2,P} = 0$$

condición que da lugar a la ecuación:

$$\frac{2}{x} - \frac{5}{y} = 0 \rightarrow 2,5 = \frac{y}{x}$$

siendo y la distancia del punto a la carga  $q_2$  y x la distancia del punto a la carga  $q_1$ .

El punto sólo puede estar en zonas en que la distancia a la carga  $q_2$  sea mayor a la carga  $q_1$ , dando lugar a dos posibilidades:

- *Primera posibilidad:* El punto se encuentra a la izquierda de la carga  $q_1$ .

$$\text{Sistema de ecuaciones: } \begin{cases} y = 0,1 + x \\ y = 2,5 \cdot x \end{cases}$$

$$\text{Solución: } x = 1/15 \text{ m}; \quad y = 1/6 \text{ m}.$$

- *Segunda posibilidad:* El punto se encuentra en la zona determinada por las cargas.

$$\text{Sistema de ecuaciones: } \begin{cases} (1) \quad x + y = 0,1 \\ (2) \quad y = 2,5 \cdot x \end{cases}$$

$$\text{Solución: } x = 2/70 \text{ m}; \quad y = 1/14 \text{ m}.$$

### PROBLEMA 15

El trabajo realizando por el campo se obtiene por la expresión:

$$W_{\text{campo}} = q_e (V_A - V_B)$$

Este trabajo da lugar a incremento de la energía cinética de la partícula, de modo que:

$$W_{\text{campo}} = \Delta E_c$$

Y puesto que la partícula parte del reposo, establecemos la ecuación,

$$q_e \cdot (V_A - V_B) = \frac{1}{2} m_e \cdot v^2$$

Despejando la velocidad, se obtiene:

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot q_e \cdot (V_A - V_B)}{m_e}} = 5,93 \cdot 10^5 \text{ m/s}$$

La velocidad obtenida tiene un valor mucho menor que la luz, lo que permite no tener que hacer consideraciones relativistas.

### PROBLEMA 16

- a) Las superficies equipotenciales son perpendiculares a la dirección del campo, y por tanto son planos paralelos al plano YZ.
- b) El trabajo realizando por el campo viene dado por la ecuación:

$$W_{\text{campo}} = q \cdot (-\Delta V)$$

para lo cual debemos calcular el incremento del potencial en dicho desplazamiento. Puesto que el campo eléctrico verifica la relación

$$|E| = \frac{(-\Delta V)}{|\Delta x|}$$

establecemos que,

$$(-\Delta V) = |E| \cdot |\Delta x| = 500 \frac{\text{N}}{\text{C}} \cdot 4\text{m} = 2000 \text{ V}$$

siendo  $\Delta x$  la distancia entre las superficies equipotenciales. Por tanto:

$$W_{\text{campo}} = 2 \cdot 10^{-6} \text{ C} \cdot 2000 \text{ V} = 4 \cdot 10^{-3} \text{ J}.$$

- c) Para calcular la distancia entre las superficies equipotenciales tenemos en cuenta que en un campo eléctrico uniforme, la diferencia de potencial entre las superficies sólo depende de la distancia entre ellas y no de la trayectoria seguida por la partícula. Es decir:

$$\Delta x = \frac{10 \text{ V}}{500 \frac{\text{N}}{\text{C}}} = \frac{1}{50} \text{ m}.$$

### PROBLEMA 17

- a) La condición necesaria y suficiente para que se anule el campo eléctrico es:

$$E_p = E_{1,p} + E_{2,p} = 0$$

Esta condición implica tres requisitos:

- La dirección de los vectores debe ser la misma, para lo cual el punto debe estar sobre la línea que une las cargas.
- El sentido de los vectores debe ser opuesto, y para ello el punto debe estar entre las cargas.
- El módulo de ambos vectores debe ser igual, para ello el punto debe ser equidistante a ambas cargas.

En definitiva, el punto es el origen de coordenadas.

- b) El trabajo necesario para trasladar una carga desde un punto A hasta un punto B en un campo eléctrico viene dado por:

$$W_{\text{campo,A-B}} = q (V_A - V_B)$$

donde los potenciales se obtienen a partir de las ecuaciones:

$$V_A = K \frac{q_1}{r_1} + K \frac{q_2}{r_2} = 2K \frac{q}{r}$$

$$V_B = K \frac{q_1}{r_1} + K \frac{q_2}{r_2} = 2K \frac{q}{r}$$

Teniendo en cuenta que  $q_1 = q_2 = q$  y  $r_1 = r_2 = r$ , en este caso ambos potenciales tienen el mismo valor, ya que se encuentran en el eje x que es un eje equipotencial, y por ello el trabajo será nulo.

### PROBLEMA 18

a)  $E = k \frac{Q_3}{r_3^2} = 18000 \text{ N/C}$ ;  $\vec{E} = -18000 \hat{j} \text{ N/C}$

b)  $W = q(V_i - V_f) = 10^{-6}(54000 - 34456) = 19544 \mu\text{J}$ , luego el trabajo es espontáneo.

### PROBLEMA 19

$$\left. \begin{aligned} V_{A0} &= K \frac{q_1}{r_A} = 360 \text{ V} \\ V_{A'0} &= K \frac{q_2}{r_{A'}} = -45 \text{ V} \end{aligned} \right\} V_0 = V_{A0} + V_{A'0} = 315 \text{ V}$$

$$\left. \begin{aligned} V_{BA} &= 180 \text{ V} \\ V_{BA'} &= -90 \text{ V} \end{aligned} \right\} V_B = 90 \text{ V}; V_{0B} = V_0 - V_B = 225 \text{ V}$$

Por medio de la expresión del potencial eléctrico en un punto, calculamos el potencial que cada carga genera en los distintos puntos y con ello la diferencia de potencial entre los puntos 0 y B.

### Aplicación de la ley de Gauss

### PROBLEMA 20

Superficie	Cálculo de flujo
$S_1$	$\phi_{S_1} = \frac{-3Q}{\epsilon_0}$
$S_2$	$\phi_{S_2} = \frac{(-3Q + Q)}{\epsilon_0} = \frac{-2Q}{\epsilon_0}$
$S_3$	$\phi_{S_3} = \frac{(-3Q + Q + 2Q)}{\epsilon_0} = 0$



### PROBLEMA 21

Considerando la simetría del problema podemos establecer que la dirección del campo es en todo lugar normal al plano y, si suponemos que el único campo es el producido por la placa, el campo deber ser uniforme en cada lado de la placa. Tomando una superficie gaussiana en forma de caja rectangular que corta la placa, siendo el campo perpendicular a las superficies paralelas a la placa y paralelo a las otras cuatro superficies, el flujo total que atraviesa la caja es:  $\phi_{\text{Total}} = E \cdot A + E \cdot A = 2 A \cdot E$

La carga total encerrada en la superficie gaussiana es:

$$Q_{\text{total}} = s \cdot A$$

Aplicando la ley de Gauss, establecemos:  $2 \cdot A \cdot E = \frac{\sigma \cdot A}{\epsilon_0}$

Por tanto el valor del campo es  $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ .

Que con el valor de la densidad de carga del problema, tenemos que  $|\vec{E}| = 5,6 \cdot 10^7 \text{ N/C}$ .

### PROBLEMA 22

Para comprobar que es posible calcular el valor del campo por la ley de Gauss, analizaremos previamente las características del campo. Si tomamos dos segmentos del hilo cargados, simétricos respecto a un eje central, podemos comprobar que al sumar las intensidades originadas por estos segmentos en un punto del eje, el campo siempre es radial al hilo cargado; por ello es lógico pensar que el campo debe tener el mismo valor en todos los puntos equidistante de la línea cargada, supuestamente infinita, en comparación a la distancia del punto al hilo.

Tomaremos como superficie gaussiana una cilíndrica concéntrica con su eje de simetría el propio hilo, y aplicaremos la ley de Gauss.

**Flujo total.** El flujo a través de la superficie cilíndrica sólo tiene en cuenta la superficie lateral, por ser el campo eléctrico tangencial a las caras extremas, y por tanto:

$$\phi_{\text{total}} = |\vec{E}| \cdot 2\pi r \cdot h$$

**Carga total** encerrada por la superficie gaussiana. Dicha carga se obtiene teniendo en cuenta que conocemos la densidad de carga lineal ( $l$ ); por ello:  $Q_{\text{total}} = l \cdot h$ .

Aplicando la ley de Gauss, se obtiene:

$$\left. \begin{aligned} E \cdot 2\pi r h &= \frac{\lambda \cdot h}{\epsilon_0} \rightarrow E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda}{r} \\ \text{siendo } \frac{1}{2\pi\epsilon_0} &= 2 \cdot K_0 \end{aligned} \right\} E = 2 \cdot K_0 \cdot \frac{\lambda}{r}$$

Sustituyendo valores, establecemos que el valor del campo a un metro de la línea de carga es de  $18 \text{ N/C}$  y a tres metros  $6 \text{ N/C}$ .

### PROBLEMA 23

La simetría del problema permite aplicar la ley de Gauss en el cálculo del valor del campo, obteniendo:

Superficie gaussiana	Obtención del valor del campo
Esférica de radio menor al del globo ( $r < R$ )	$4\pi r^2 \cdot E = \frac{Q}{\epsilon_0}; E = 0$
Esférica de igual radio que el globo	$4\pi R^2 \cdot E = \frac{Q}{\epsilon_0}; E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{R^2}$
Esférica de mayor radio que el globo ( $r > R$ )	$4\pi r^2 \cdot E = \frac{Q}{\epsilon_0}; E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2}$

## Campo magnético y sus interacciones

### PROBLEMA 24

**Dirección:** perpendicular al plano definido por el hilo conductor y la línea que une al conductor con el punto.

**Sentido:** tangente a la línea de campo (regla de la mano derecha).

**Módulo:** aplicando la ley de Biot y Savart:

$$|B| = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I}{R} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{2\pi} \cdot \frac{I}{R} = 2 \cdot 10^{-7} \cdot \frac{I}{R}$$

Condiciones	
$R = 1 \text{ m}; I = A$	$R = 2 \text{ m}; I = 2 A$
$ B_1  = 2 \cdot 10^{-7} \text{ T}$	$ B_2  = 2 \cdot 10^{-7} \text{ T}$

### PROBLEMA 25

Para realizar el siguiente problema tomaremos un sistema de referencia cartesiano cuyo eje Z es paralelo a los conductores rectilíneos.

a) Aplicando el principio de superposición establecemos:

$$B_A = B_{1,A} + B_{2,A}$$

siendo

$$B_{1,A} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{2A}{0,25\text{m}} i = 16 \cdot 10^{-7} i \text{ T}$$

$$B_{2,A} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{4A}{0,25\text{m}} i = 32 \cdot 10^{-7} i \text{ T}$$

Por tanto:

$$B_A = (16 \cdot 10^{-7} i + 32 \cdot 10^{-7} i) \text{ T} = 48 \cdot 10^{-7} i \text{ T}$$



b) La condición necesaria y suficiente para que se anule el campo magnético en un punto es:

$$B_p = B_{1,p} + B_{2,p} = 0$$

para lo cual deben verificarse los siguientes requisitos:

- Los dos vectores deben tener la misma dirección, y por ello el punto debe estar sobre el plano perpendicular a los conductores.
- Los vectores deben ser de sentidos opuestos, y por ello el punto no puede encontrarse en la región definida por los dos hilos.
- Deben poseer el mismo módulo: Es decir:

$$\frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I_1}{r_1} = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I_2}{r_2} \rightarrow r_2 = 2 \cdot r_1$$

siendo  $r_1$  la distancia del punto al primer conductor y  $r_2$  al segundo conductor.

El que  $r_2 > r_1$ , implica que el punto se encuentre a la izquierda del primer conductor, dando lugar al sistema de ecuaciones:

$$(1) r_2 = 2 \cdot r_1; \quad (2) r_2 = 0,5 \text{ m} + r_1$$

cuya solución es:

$$r_1 = 0,5 \text{ m}; \quad r_2 = 1 \text{ m}.$$

#### PROBLEMA 26

Como  $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$  T los módulos de los dos campos magnéticos deben ser iguales en  $P_2$ :  $B_1 = B_2$ , por tanto, al resolver el ejercicio  $I_2 = 1,43 \text{ A}$ .

Para que la suma vectorial de  $\vec{B}$  sea nula en  $P_2$  por el hilo 2 debe circular una corriente de  $I_2 = 1,43 \text{ A}$  con sentido opuesto a la del hilo 1 ( $B_{1P_2} + B_{2P_2} = 0$ ).

En  $P_1$   $B_t = 0$  y en  $P_2$   $B_1 = 1,37 \cdot 10^{-6} \text{ T}$ .

#### PROBLEMA 27

Aplicando la fórmula expuesta en el texto, obtenemos:

$$|B| = \mu_0 \cdot \frac{500 \cdot 50}{0,1} = \pi \cdot 10^{-1} \text{ T} = 3,14 \cdot 10^{-1} \text{ T}.$$

#### PROBLEMA 28

a) Vectores:

$$IL = (0; 16; 0) \text{ Am}; \quad B = (-4 \cdot 10^{-5}, 0, 0) \text{ T}$$

Aplicando la fórmula de cálculo de la fuerza de interacción entre la corriente y el campo magnético, establecemos el determinante:

$$F_m = IL \times B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 16 & 0 \\ -4 \cdot 10^{-5} & 0 & 0 \end{vmatrix} = 6,4 \cdot 10^{-4} \text{ k N}$$

b) La condición de equilibrio es:

$$F_m + F_p = 0$$

lo que implica que:

$$|F_m| = |F_p|; \quad I \cdot L \cdot B = m \cdot g$$

Despejando la intensidad de corriente, obtenemos:

$$I = \frac{m \cdot g}{L \cdot B} = \frac{50 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot 9,8 \frac{\text{N}}{\text{kg}}}{1 \text{ m} \cdot 4 \cdot 10^{-5} \text{ T}} = 12\,250 \text{ A}.$$

#### PROBLEMA 29

Aplicando la fórmula de cálculo del módulo de la interacción entre la corriente y el campo magnético, establecemos:

$$|F_m| = I \cdot L \cdot B \cdot \sin 60^\circ = 30 \text{ A} \cdot 0,12 \text{ m} \cdot 0,9 \text{ T} \cdot \sin 60^\circ = 2,80 \text{ N}$$

El valor de la fuerza es máximo cuando el hilo es perpendicular al campo y mínimo cuando es paralelo.

#### PROBLEMA 30

La fuerza de interacción se obtiene al resolver el determinante

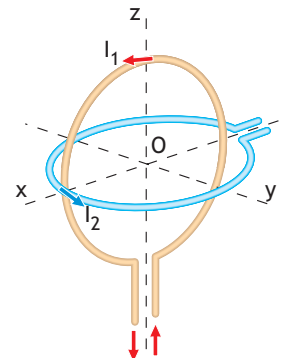
$$F_m = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0,5 & 0 \\ 0,01 & 0 & 0,03 \end{vmatrix} = (15i - 5k) 10^{-3} \text{ N}$$

#### PROBLEMA 31

Aplicando la fórmula de cálculo del campo magnético en el centro de la espiral,  $B_{C,E} = \frac{\mu_0 I}{2 R}$  y tomando de referencia un sistema de coordenadas OXYZ, situado en el centro de la espiral, obtenemos:

$$B_1 = \frac{\mu_0}{2} \cdot \frac{6 \cdot \text{A}}{4\pi \cdot 10^{-2} \text{ m}} j = 3 \cdot 10^{-5} j$$

$$B_1 = \frac{\mu_0}{2} \cdot \frac{8 \cdot \text{A}}{4\pi \cdot 10^{-2} \text{ m}} k = 4 \cdot 10^{-5} k$$



Y por tanto:

$$B_C = B_1 + B_2 = (3j + 4k) \cdot 10^{-5} T.$$

Siendo su valor:  $|B_C| = 5 \cdot 10^{-5} T.$

### PROBLEMA 32

Para que la fuerza sea de repulsión las corrientes deben ser de sentidos opuestos.

El valor de la fuerza por unidad de longitud es:

$$\frac{|F_m|}{L} = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I_1 \cdot I_2}{d} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{2\pi} \cdot \frac{1A \cdot 2A}{0,1m} = 4 \cdot 10^{-6} \frac{N}{m}$$

### PROBLEMA 33

a) El fundamento de la balanza consiste en el equilibrio del efecto de giro de las fuerzas que actúan sobre sus extremos, de modo que si se equilibra previamente a que circule corriente por el circuito, el peso de las masas añadidas en el platillo para establecer nuevamente el equilibrio, es igual a la fuerza magnética que actúa sobre el hilo conductor. El valor de la fuerza nos permite determinar el valor del campo magnético,  $B = F_m / (I \cdot L).$

b) Puesto que en la situación de equilibrio se cumple (supuestos los brazos iguales):

$$|F_m| = |F_p| \rightarrow I \cdot L \cdot B = m \cdot g$$

podemos establecer que:

$$B = \frac{m \cdot g}{I \cdot L} = \frac{5 \cdot 10^{-3} kg \cdot 9,8 \frac{N}{kg}}{5A \cdot 2 \cdot 10^{-2} m} = 0,49 T$$

### Movimiento de cargas en campos

### PROBLEMA 34

$$F = q(v \times B) = 3,0 \cdot 10^{-6} K N$$

Dirección perpendicular al plano que forma  $B$  y  $v$  y sentido positivo hacia arriba.

### PROBLEMA 35

a) La partícula describe una trayectoria rectilínea aumentando su energía cinética y disminuyendo la energía potencial, pero conservando la energía mecánica.

b) Calcularemos el trabajo realizado por el campo aplicando la expresión:

$$W_{\text{campo}} = q \cdot (-\Delta V)$$

$$\text{siendo } (-\Delta V) = |E| \cdot \Delta x = 500 \frac{N}{C} \cdot 2m = 1000 V$$

Por tanto:

$$W_{\text{campo}} = 6 \cdot 10^{-6} C \cdot 1000 V = 6 \cdot 10^{-3} J.$$

### PROBLEMA 36

a) Como la carga es positiva, la dirección y sentido de su velocidad serán como la dirección y sentido del campo eléctrico; es decir, a lo largo del eje Z positivo.

b) Las superficies equipotenciales han de ser perpendiculares al vector campo en cada punto, es decir serán planos XY.

c) Como la partícula se desplaza por el interior de un campo conservativo, se verificará:

$$W_{\text{campo}} = q \cdot (-\Delta V) = \Delta E_C$$

En consecuencia el trabajo del campo es:

$$W_{\text{campo}} = \frac{1}{2} m (v_f^2 - v_i^2) = 5 \cdot 10^{-3} J$$

$$\text{Y por tanto; } (-\Delta V) = \frac{W_{\text{campo}}}{q} = 5000 V$$

Debemos tener presente que toda carga positiva libre se mueve espontáneamente a potenciales decrecientes.

d) A partir de la relación entre el campo eléctrico y las variaciones de potencial, obtenemos el módulo del campo eléctrico:

$$|E| = \frac{-\Delta V}{\Delta x} = \frac{5000}{1m} = 5000 V/m$$

La dirección del campo eléctrico es la del eje Z, y su sentido el positivo. Por tanto, la intensidad del campo eléctrico es:

$$E = 5000 k N/C$$

### PROBLEMA 37

En primer lugar, calcularemos la velocidad del electrón a partir de su energía cinética:

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 \rightarrow v = \sqrt{\frac{2 \cdot E_c}{m}} = 1,33 \cdot 10^6 m/s$$

Puesto que la fuerza magnética, calculable por la ley de Lorentz, actúa de fuerza centrípeta establecemos:

$$q \cdot v \cdot B = m \frac{v^2}{R}$$

Despejando el radio, obtenemos:

$$R = \frac{m \cdot v}{q \cdot B} = \frac{9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot 1,33 \cdot 10^6 \text{ m/s}}{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 1,5 \cdot 10^{-7} \text{ T}} = 50,43 \text{ m}$$

Puesto que la partícula posee un MCU, su frecuencia es:

$$v = 2\pi R \cdot N \rightarrow N = \frac{v}{2\pi R} = 4197 \text{ Hz.}$$

### PROBLEMA 38

La velocidad del protón se determina a partir de la relación:

$$q \cdot v \cdot B = m_p \cdot \frac{v^2}{R} \rightarrow v = \frac{q \cdot B \cdot R}{m_p} = 9580,84 \text{ m/s}$$

Y su energía cinética es:  $E_c = \frac{1}{2} m_p \cdot v_p^2 = 7,66 \cdot 10^{-20} \text{ J}$

Si la energía cinética se duplicase la velocidad del protón sería

$$v_p' = \sqrt{\frac{2(2 \cdot 7,66 \cdot 10^{-20} \text{ J})}{1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}}} = 13\,545,22 \text{ m/s}$$

y daría lugar a trayectorias circulares de radio

$$R' = \frac{m_p \cdot v_p'}{q \cdot B} = 0,14 \text{ m}$$

En el caso de duplicar la velocidad inicial, el radio de la trayectoria sería:

$$R'' = \frac{m_p \cdot (2v_p)}{q \cdot B} = 2 \cdot R = 0,20 \text{ m.}$$

### PROBLEMA 39

El vector intensidad del campo magnético en el punto (0,4,0) se obtiene aplicando la ley de Biot y Savart, obteniendo:

$$B = -\frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{2}{4} \hat{i} = -10^{-7} \hat{i} \text{ T}$$

El vector  $q \cdot \vec{v}$  viene dado por la expresión:

$$q \cdot \vec{v} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ C} \cdot (2 \cdot 10^3 \hat{j} \text{ m/s}) = 10 \hat{j} \text{ C m/s}$$

La fuerza magnética que actuará sobre la partícula cargada se obtiene a partir de la resolución del siguiente determinante:

$$F_m = q \vec{v} \times B = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 10 & 0 \\ -10^{-7} & 0 & 0 \end{vmatrix} = 10^{-6} \hat{k} \text{ N.}$$

### PROBLEMA 40

Puesto que la fuerza magnética ejerce la acción de fuerza centrípeta, planteamos la ecuación:

$$q \cdot v \cdot B = m \cdot \frac{v^2}{R}$$

Despejando la masa, obtenemos:

$$m = \frac{q \cdot R \cdot B}{v} = 5,6 \cdot 10^{-25} \text{ kg.}$$

### PROBLEMA 41

$$|F| = |e(\vec{v} \times \vec{B})| = \frac{mv^2}{R^2}; \quad e v B = \frac{mv^2}{R};$$

por tanto  $B = 1,14 \cdot 10^{-5} \text{ T}$

### PROBLEMA 42

a) Si la partícula acelera o frena sin cambiar la dirección es un campo eléctrico paralelo a  $\vec{v}$  y si  $\vec{v}$  permanece constante es un campo magnético paralelo a  $\vec{v}$ . Si realiza un movimiento circular es un campo magnético perpendicular a  $\vec{v}$ . Si el campo eléctrico y el campo magnético forman un ángulo entre  $0^\circ$  y  $180^\circ$  no se sabe a quién corresponde, salvo que si hay un movimiento circular siempre se debe a  $\vec{B}$  y si no hay movimiento circular sólo a  $\vec{E}$ .

b) Si  $\vec{E}$  es perpendicular a  $\vec{v}$  cambia la energía cinética al variar la componente perpendicular, de la velocidad (tiro horizontal); si  $\vec{E}$  es paralelo a  $\vec{v}$ , sí cambia la energía cinética; si no es ni paralelo ni perpendicular cambia la energía. Si  $\vec{B}$  es paralelo o perpendicular a  $\vec{v}$  la energía cinética permanece constante, en los demás ángulos la energía cinética tampoco varía, aunque la carga describe un movimiento en espiral.

b) El alumno debe llegar a la conclusión que los campos magnéticos no pueden variar la energía de las partículas cargadas, sin embargo los campos eléctricos siempre modifican la energía de las partículas cargadas.

### PROBLEMA 43

Puesto que en la región en la que se mueven los protones las fuerzas están equilibradas, se verificará la ecuación:

$$F_m + F_E = 0 \rightarrow |F_m| = |F_E|$$

y por tanto:  $q \cdot v \cdot B = q E$

Despejando

$$E = v \cdot B = 12,4 \cdot 10^3 \text{ m/s} \cdot 0,85 \text{ T} = 1,054 \cdot 10^4 \text{ N/C}$$

De forma vectorial:  $E = -1,054 \cdot 10^4 \hat{k} \text{ N/C}$

#### PROBLEMA 44

Según el enunciado, el ángulo  $\alpha$  que forma el campo magnético con el vector  $IS$  es en realidad  $\alpha = 90^\circ - 20^\circ = 70^\circ$  y por tanto:

$$M = ISB \sin \alpha = 0,8 \cdot 0,0002 \cdot 1,2 \cdot \sin 70^\circ = 3,6 \cdot 10^{-4} \text{ Nm.}$$

#### 4.3. SOLUCIÓN DE LA AUTOEVALUACIÓN

**EJERCICIO 1.** La condición para que anule el potencial es:

$$V_{1,p} + V_{2,p} = 0$$

lo que permite obtener la relación:  $y = 2 \cdot x$ , siendo  $y$  la distancia del punto a la segunda carga y  $x$  la del punto a la primera carga.

Existen dos posibilidades:

a) Punto situado a la izquierda de la primera carga.

Ecuaciones planteadas: (1)  $y = 2 \cdot x$

$$(2) y = x + 0,30$$

Solución:  $x = 0,30 \text{ m}$ ;  $y = 0,60 \text{ m}$

El campo en este punto es:

$$E_p = E_{1,p} + E_{2,p} = -5 \cdot 10^4 \text{ i N/C}$$

b) Punto situado entre las cargas.

Ecuaciones planteadas: (1)  $y = 2x$

$$(2) y + x = 0,3$$

Solución:  $x = 0,1 \text{ m}$ ;  $y = 0,2 \text{ m}$

El campo en este segundo punto es:

$$E_p = E_{1,p} + E_{2,p} = 1,35 \cdot 10^6 \text{ i N/C}$$

**EJERCICIO 2.** La intensidad del campo en el punto (0,0) es:

$$E_{(0,0)} = E_1 + E_2 + E_3 + E_4$$

siendo

$$E_A = -787,5 \text{ i N/C}$$

$$E_B = +1293,75 \text{ j N/C}$$

$$E_C = -1800 \text{ i N/C}$$

$$E_D = +1350 \text{ i N/C}$$

$$E_{(0,0)} = (-1237,5 \text{ i} + 1293,75 \text{ j}) \text{ N/C}$$

El potencial en el origen de coordenadas es:

$$V_{(0,0)} = V_1 + V_2 + V_3 + V_4$$

$$\text{siendo } V_1 = 3,15 \cdot 10^3 \text{ V}$$

$$V_2 = 5,175 \cdot 10^3 \text{ V}$$

$$V_3 = -3,6 \cdot 10^3 \text{ V}$$

$$V_4 = -2,7 \cdot 10^3 \text{ V}$$

Y por tanto:  $V_{(0,0)} = 2,025 \cdot 10^3 \text{ V}$

c) La energía potencial de una carga de 25 mC situada el origen es:

$$E_p = q \cdot V_{(0,0)} = 25 \cdot 10^{-6} \text{ C} \cdot 2,025 \cdot 10^3 \text{ V} = 50,625 \text{ mJ}$$

#### EJERCICIO 3

a) El campo magnético en el punto A es:

$$B_A = B_{1,A} + B_{2,A}$$

donde los vectores  $B$ , son:

$$B_{1,A} = \frac{10}{9} \cdot 10^{-5} \text{ i T}$$

$$B_{2,A} = -\frac{20}{24} \cdot 10^{-5} \text{ i T}$$

En consecuencia, obtenemos:  $B_A = 2,77 \cdot 10^{-6} \text{ i T}$

b) La condición impuesta es:  $B_{1,p} + B_{2,p} = 0$

ecuación que sólo puede verificarse a la izquierda del alambre 1, y que da lugar al sistema de ecuaciones:

$$(1) |B_{1,p}| = |B_{2,p}| \rightarrow \frac{5}{x} = \frac{10}{y} \rightarrow y = 2 \cdot x$$

$$(2) y = 0,15 \text{ m} + x$$

siendo  $x$  la distancia del alambre 1 al punto e  $y$  la del alambre 2.

Resolviendo el sistema de ecuaciones, se obtiene:  $x = 0,15 \text{ m}$ ;  $y = 0,30 \text{ m}$

**EJERCICIO 4.** Contestación personal.

#### EJERCICIO 5

a) La trayectoria, puesto que la partícula penetra en el campo magnético con velocidad perpendicular a su dirección, es una circunferencia o arco de circunferencia, cuyo radio es función de su rapidez.

b) El radio más pequeño para que la partícula atraviese la zona debe ser de 2 m, y puesto que el radio viene determinado por la expresión

$$R = \frac{m \cdot v}{q \cdot B}$$

la rapidez mínima de la partícula será:

$$v = \frac{R \cdot q \cdot B}{m} = \frac{2 \cdot 3,2 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{-3}}{6,7 \cdot 10^{-27}} = 95522,4 \text{ m/s}$$

c) Si cambiamos el signo de la carga, variará el sentido de la fuerza magnética que actúa sobre la partícula cargada y la circunferencia será descrita en sentido contrario.

## 5. CRITERIOS DE EVALUACIÓN

Al terminar el estudio de este tema los alumnos y alumnas serán capaces de:

- Aplicar la ley de Coulomb para calcular la fuerza de interacción entre cargas puntuales.
- Comprender la necesidad y el significado del concepto de campo para describir la interacción eléctrica y magnética.
- Diferenciar la descripción vectorial y la descripción escalar del campo.
- Calcular la intensidad del campo eléctrico originado por un sistema de cargas puntuales en un punto.
- Comprender el carácter conservativo del campo eléctrico y sus consecuencias.
- Calcular el potencial en un punto originado por un sistema de cargas puntuales.
- Calcular el trabajo realizado por el campo eléctrico para trasladar una carga eléctrica entre dos puntos, e interpretar correctamente el signo del trabajo.
- Relacionar las descripciones vectorial ( $E$ ) y escalar del campo eléctrico ( $V$ ).
- Comprender el significado de las líneas de campo y de las superficies equipotenciales, estableciendo las relaciones de ambas representaciones del campo.
- Enunciar y aplicar la ley de Gauss.
- Aplicar la ley de Gauss, en los sistemas cuya simetría lo permita (esfera, hilo y placa), para calcular el valor del campo eléctrico.
- Explicar las características del movimiento de una partícula cargada en el interior de un campo eléctrico uniforme.
- Enunciar las características del campo magnético.
- Comprender el origen del campo magnético y las consecuencias asociadas a dicho origen.
- Comprender el significado de que las líneas del campo magnético sean siempre cerradas, explicando las características de las líneas originadas por imanes, corrientes rectilíneas o circulares.
- Comprender el carácter no central y no conservativo del campo magnético.
- Calcular el campo magnético originado por corrientes eléctricas rectilíneas estacionarias en circuitos rectilíneos, en el centro de un circuito en forma de espira circular y en el interior de un solenoide.
- Diferenciar las sustancias por su comportamiento magnético.
- Calcular la fuerza de interacción entre dos hilos paralelos por los que circulan corrientes eléctricas estacionarias.
- Explicar y calcular las características de la interacción de una partícula cargada que se mueva por el interior de un campo magnético uniforme (ley de Lorentz).
- Enunciar y aplicar la ley de Ampère, estableciendo su campo de validez y utilidad.
- Explicar las características y las aplicaciones (selector de velocidad, aceleradores, espectrómetros...) del movimiento de partículas cargadas sometidas a interacciones magnéticas y eléctricas (sucesivamente o simultáneamente).
- Explicar algunas aplicaciones prácticas de la interacción electromagnética (electroimanes, galvanómetros...).
- Describir con el lenguaje científico adecuado los fenómenos relacionados con el campo eléctrico y magnético.

## 6. EJERCICIOS PROPUESTOS PARA LA EVALUACIÓN FINAL DEL TEMA

En función de las capacidades a desarrollar y de los criterios de evaluación indicados, proponemos a título ilustrativo los siguientes ejercicios para elaborar una prueba escrita de evaluación final.

1. Dos esferas metálicas de 5 cm y 10 cm de radio se cargan a 1000 V y -1000 V respectivamente. Una vez cargadas, se separan una distancia de 10 m, que puede considerarse muy grande en comparación al tamaño de las esferas.

- a) Estas esferas, ¿se atraen o se repelen? ¿Con cuánta fuerza?

Mediante un hilo conductor se ponen en contacto hasta alcanzar una situación de equilibrio eléctrico.

- b) En esta nueva situación, ¿con qué fuerza se atraen o se repelen?
- c) ¿Cuánto ha sido la variación de energía potencial entre el sistema final y el inicial?

$$\text{Dato: } K_0 = 9 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$$

2. Dos cargas puntuales, una de -3 nC y la otra de 12 nC están separadas por una distancia de 7,3 cm. Calcula:

- a) El punto o puntos sobre la recta que pasa por ellas, donde se anula el potencial eléctrico.
- b) El punto o puntos donde se anula el campo eléctrico.

3. Un cable conductor infinitamente largo, situado a lo largo del eje z transporta una corriente de 20 A en la dirección z positiva. Un segundo cable, también infinitamente largo y paralelo al eje z, está situado en  $y = 10$  cm.

- a) Determina la intensidad de corriente en el segundo cable sabiendo que el campo magnético es nulo en  $y = 2$  cm.
- b) ¿Cuál es el campo magnético en  $y = 5$  cm?

$$\text{Dato: } \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A}$$

4. Una esfera puntual de 5 g cuelga de un hilo (inextensible y sin peso) entre dos láminas conductoras, dotadas de carga de distinto signo y separadas entre sí 5 cm.

Halla la diferencia de potencial entre las láminas, sabiendo que el hilo forma un ángulo de  $15^\circ$  con la vertical y que la esfera tiene una carga de  $+10^{-8}$  C.

5. Un ion con una sola carga positiva tiene una masa de  $3,2 \cdot 10^{-26}$  kg. Después de ser acelerado a través de una diferencia de potencial de 833 V, el ion entra perpendicularmente en un campo magnético uniforme de valor 0,92 T.

Calcula:

La velocidad y la energía cinética del ion, expresada en eV, después de ser acelerada. Supón que el ion está inicialmente en reposo.

El radio de la trayectoria del ion cuando se mueve en el interior del campo magnético.

El número de vueltas realizadas por el ion en 1s dentro del campo magnético.

$$\text{Dato: } q_e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C.}$$

6. Dos pequeñas esferas cargadas, cada una con una masa de 30 g, están suspendidas en equilibrio de dos hilos sujetos por el mismo punto. Si la longitud de cada hilo es de 0,15 m y el ángulo que forman es de  $10^\circ$ , determina el valor de la carga de cada esfera, suponiendo que ambas tienen igual carga.

$$\text{Dato: } K_0 = 9 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2.$$

7. Un reconocido libro de Física general afirma:

“Puede obtenerse la energía cinética máxima del ion al salir del ciclotrón, en términos del radio de las des ( $R_D$ ), a partir de la ecuación;  $E_{c,\text{máx}} = (q \cdot B \cdot R_D)^2 / 2m$ ”. Demuestra esta ecuación.

8. Dos conductores paralelos llevan corrientes eléctricas con sentidos opuestos. El conductor 2 lleva una corriente de 10 A. El punto A está a la mitad de la distancia entre los conductores y el punto B está a una distancia  $d/2$  a la derecha del segundo conductor. Si  $d = 18$  cm y la intensidad de corriente del primer conductor se ajusta para que el campo magnético en B sea cero, calcula el campo magnético en el punto A.

$$\text{Dato: } \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A.}$$

9. Se acelera un protón a través de una diferencia de potencial de  $10^5$  V. Entonces el protón entra perpendicularmente a un campo magnético, recorriendo una trayectoria circular cuyo radio es de 30 cm. Calcula el valor de la intensidad del campo magnético y el número de vueltas que da en 1 segundo.

$$\text{Datos: } m_{\text{protón}} = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg; } q_{\text{protón}} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

10. Dos cargas puntuales de  $8 \mu\text{C}$  y  $-5 \mu\text{C}$  están situadas respectivamente en los puntos (0,0) m y (1,1) m. Calcula:

La fuerza que actúa sobre una tercera carga de  $1 \mu\text{C}$  situada en el punto (2,2) m.



El trabajo necesario para llevar esta última carga desde el punto que ocupa hasta el punto (0,1) m.

$$\text{Dato: } K_0 = 9 \cdot 10^9 \text{ N m}^2 \text{ C}^{-2}.$$

11. Dos alambres rectos, paralelos y largos están separados por una distancia de 40 cm y cada uno de ellos conduce una corriente de 5 A en el mismo sentido. Calcula:

El campo B a la mitad de la distancia entre los dos alambres.

El campo en el mismo punto que en el caso anterior si las corrientes circulan en sentidos opuestos.

$$\text{Dato: } \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Tm/A}$$

12. Un protón con energía cinética de 1 eV se mueve perpendicularmente a un campo magnético de 1,5 T. Explica el tipo de trayectoria que describe. Calcula el valor de la fuerza que actúa sobre el protón y el periodo de su movimiento.

$$\text{Datos: } m_{\text{protón}} = 1,6 \cdot 10^{-27} \text{ kg; } q_p = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C.}$$

13.

- Una carga de 10 nC está a una distancia de 1 cm de otra carga de 5 nC. ¿En qué punto se anula el campo eléctrico?
- ¿Puede anularse el potencial en algún punto?
- Calcula el punto de la recta que une ambas cargas donde se anula el potencial si la segunda carga tiene un valor de - 5 nC.

14. Analogías y diferencias entre el campo eléctrico y el campo gravitatorio.

15. Sean dos cargas puntuales a las que se mantiene en reposo y separadas una distancia dada. Si el potencial en los puntos del espacio equidistantes de las dos cargas es nulo:

- ¿Qué podemos afirmar acerca de las cargas?
- Dibuja las líneas del campo eléctrico y las superficies equipotenciales.

El profesor o profesora puede buscar más ejercicios de referencia para elaborar sus pruebas de evaluación en las siguientes páginas WEB:

Comunidad Dirección de internet de búsqueda

Aragón <http://wzar.unizar.es/servicios/acceso/logse/indice.htm>

Andalucía <http://www.ujaen.es/>

En la ventana: **PERFILES**, escoge; **Nuevo Alumno**, y seguidamente en la etiqueta: **SELECTIVIDAD**, pulsa **Exámenes anteriores**.

Castilla-La Mancha y León <http://www.uclm.es>

Escoge en la ventana de **estudiantes: estudiante nuevo**; seguidamente pulsa: **PAU**. Y finalmente escoger: Modelos Propuestos en las PAU.

<http://www.usal.es>. Escoge en la ventana **Futuros estudiantes**, la opción: **Acceso, preinscripción y matrícula**. En el apartado "**Acceso**" pulsa: **Pruebas de acceso: Selectividad**

Catalunya <http://www.gencat.cat/>

En la ventana **TEMES** escoge **Universitats** para en la opción: **Accés a la universitat**, pulsar **Proves d'Accés a la Universitat (PAU)** y finalmente: Exàmens i informació de les matèries

C. Valenciana <http://www.ua.es>

En la ventana **Estudios y acceso**, escoge la opción **Acceso** y activa: **Selectividad alumnos de bachillerato LOGSE** y finalmente pulsa exámenes del apartado: Currículo de las asignaturas y Exámenes de años anteriores.

Islas baleares <http://www.uib.es/depart/dfs/apl/aac/paufisica/>

Madrid <http://www.uc3m.es/>

En la ventana: **Futuros estudiantes**; elegir la opción **trámites de admisión**, y a continuación el rótulo: **Pruebas de Acceso** y posteriormente en **Selectividad** pulsar la opción: Modelos de examen y criterios de corrección.



## 7. RECURSOS DIDÁCTICOS Y BIBLIOGRAFÍA DE CONSULTA

### VÍDEOS y CDS

Los siguientes programas pertenecen todos a la colección El universo mecánico, editada por Metrovídeo. Todos ellos tienen la misma estructura, duración (30 min) y nivel; su calidad técnica y científica es muy buena y son, por tanto, en general, muy recomendables.

#### 1. *Electricidad estática*. El Universo Mecánico

**Contenidos:** El fluido eléctrico, conductividad metálica, generador van der Graaf y de inducción.

#### 2. *Campo eléctrico*. El Universo Mecánico.

**Contenidos:** Aportación de Faraday en diversos campos. El campo eléctrico: visualización. Teorema de Gauss, jaula de Faraday, Maxwell.

El programa, como vemos por el contenido, se aleja a veces de lo tratado en el texto.

#### 3. *Voltaje, energía y fuerza*. El Universo Mecánico.

**Contenidos:** El potencial, líneas equipotenciales, relación entre V y E. Aplicación al átomo. Fuerza y energía potencial. El rayo y las baterías.

Este programa hace un amplio recorrido por la mayoría de los conceptos relacionados con el campo eléctrico.

#### 4. *El campo magnético (De la brújula a las ecuaciones de Maxwell)*. El Universo Mecánico.

**Contenidos:** Experimentos de Oersted y de Ampère. Interacciones entre campo, carga y corrientes. La imantación. Campos conservativos y no conservativos. Ecuaciones de Maxwell.

#### 5. *Magnetismo*. El Universo Mecánico.

**Contenidos:** Gilbert y el campo magnético terrestre. Imanes y materiales magnéticos. Fuerzas entre imanes. Flujo. Campo magnético terrestre, manchas solares y cinturón de van Hallen.

### LIBROS

ALONSO, M y FINN, E. 1985. *Física*. México: Fondo Educativo Interamericano.

BERKSON, W. 1974. *Las teorías de los campos de fuerzas. De Faraday hasta Einstein*. Madrid: Alianza Editorial.

CANTOR, G. et al. 1994. *Faraday*. Madrid: Alianza Universidad.

FRANKLIN, B. 1988. *Experimentos y observaciones sobre electricidad*. Madrid: Alianza Universidad.

GETTYS, W, KELLER, F y SKOVE, M. 1992. *Física clásica y moderna*. Madrid: McGraw-Hill.

HABER-SCHAIM, CROSS, DODGE, WALTER. 1983. *Física*. PSSC, volumen II. Tercera edición. Barcelona: Reverté.

HEWITT, P.G. 1997. *Conceptos de Física*. México: Limusa.

HOLTON, G. 1989. *Introducción a los conceptos y teorías de las ciencias físicas*. Segunda edición. Barcelona: Reverté.

LEA SUSAN, M. y BURKE, R. 1999. *La naturaleza de las cosas*, volumen II. México: Internacional Thomson.

LÉVY-LEBLOND, J.M. 1980. *La Física en preguntas: Electricidad y Magnetismo*. Madrid: Alianza Editorial.

TIPLER, P. 1999. *Física, para la ciencia y la tecnología*, volumen II. Cuarta edición. Barcelona: Reverté.

VARELA, M.<sup>a</sup> P. y PÉREZ DE LANDAZÁBAL, C. 2000. *Electricidad y magnetismo*. Madrid: Editorial Síntesis.

### TESIS DOCTORALES

ALMUDÍ GARCÍA, J. M. 2001. *Introducción del concepto de campo magnético en primer ciclo de universidad: dificultades de aprendizaje y propuesta de enseñanza alternativa de orientación constructivista*. Universidad del País Vasco. Departamento de Física Aplicada.

GUISASOLA ARANZABAL, J. 1996. *Análisis crítico de la enseñanza de la electrostática en el bachillerato y propuesta alternativa de orientación constructivista*. Universidad del País Vasco. Departamento de Física Aplicada.

### ARTÍCULOS

CARRIGAN, C. y GUBBINS, D. 1979. The source of the earth's magnetic field. *Scientific American*, febrero, p.118.

DEL MAZO, A. 2002. Experiencias en electromagnetismo. *Alambique*, nº 34, 94-103.

FURIÓ, C. y GUISASOLA, J. 1998. Dificultades de aprendizaje de los conceptos de carga y de campo eléctrico en estudiantes de bachillerato y universidad. *Enseñanza de las Ciencias*, 16 (1), 131-146.

FURIÓ, C. y GUISASOLA, J. 1997. La enseñanza del concepto de campo eléctrico: montaña o colina. *Enseñanza de las Ciencias*, nº extra, V Congreso, 1997.

FURIÓ, C. y GUISASOLA, J. 2001. La enseñanza del concepto de campo eléctrico basada en un modelo de aprendizaje como investigación orientada. *Enseñanza de las Ciencias*, 19(2), 319-334.

GOMEZ, S.; LATORRE, A. y SANJOSÉ, V. 1993. El modelo de Ausubel en la didáctica de la física: una aproximación experimental al proceso de enseñanza aprendizaje de contenidos que presentan constructos poco elaborados por los aprendices. *Enseñanza de las Ciencias*, 11(3), 235-246.

GUISASOLA, J.; ALMUDÍ, J.M. y CEBEIRO, M. 2003. Concepciones alternativas sobre el campo magnético estacio-

nario, selección de cuestiones realizadas para su detección. *Enseñanza de las Ciencias*, 21(2), 281-293.

GUISASOLA, J.; ALMUDÍ, J.M.; ZUBIMENDI, J.L. y ZUZA, K. 2005. Campo magnético: diseño y evaluación de estrategias de enseñanza basadas en el aprendizaje como investigación orientada. *Enseñanza de las Ciencias*, 23(3), 303-320.

GUISASOLA, J.; ZUBIMENDI, J.L.; ALMUDÍ, J.M. y CEBELERO, M. 2008. Dificultades persistentes en el aprendizaje de la electricidad: Estrategias de razonamiento de los estudiantes al explicar fenómenos de carga eléctrica. *Enseñanza de las Ciencias*, 26(2), 177 - 192.

MANESES VILLAGRÁ, J. y CABALLERO SAHELICES, M. 1995. Secuencia de enseñanza sobre el electromagnetismo. *Enseñanza de las Ciencias*, 13(1), 36 - 45.

MENDOZA PÉREZ, A. 2001. Una prueba para identificar preconcepciones electromagnéticas y sus implicaciones en la enseñanza de la física. *Revista de Educación en Ciencias*, vol 2, nº 1, 13-19.

SOLBES, J. y MARTÍN, J. 1991. Análisis de la introducción del concepto de campo. *Revista Española de Física*, 5(3), 34-39.



# INDUCCIÓN Y SÍNTESIS DEL ELECTRO-MAGNETISMO

# 6

## 1. PRESENTACIÓN GENERAL DEL TEMA

El contenido del tema *Inducción y síntesis del electromagnetismo*, se desarrolla en tres apartados. En el primero, se analizan las leyes básicas de la inducción, es decir, la *ley de Faraday-Henry*, que determina el valor absoluto de la fem inducida asociándolo a la rapidez con que cambia el flujo magnético total que atraviesa el inducido, y la *ley de Lenz*, que indica el sentido de la corriente inducida, o lo que es lo mismo la polaridad de la fem inducida.

La ley final de la inducción, que se llama ley de Faraday-Lenz, y que se formula mediante la ecuación  $\varepsilon = -\frac{d\Phi_{\text{total}}}{dt}$  se

aplica a diferentes tipos de inducidos (una espira, un solenoide, una varilla metálica...) y tiene una importancia crucial en el desarrollo y aplicación de la electricidad y el magnetismo.

En el segundo apartado, se muestran los dos aparatos más directamente relacionados con la inducción, por una parte los *generadores electromagnéticos* (dinamo y alternador) para la obtención de la energía eléctrica y por otra, los *transformadores*, tan importantes en la distribución eficaz de la energía eléctrica a muy alto voltaje. Esta parte se presta a tratar diversas cuestiones de ciencia-técnica-sociedad y medio ambiente, algunas contempladas en el texto y otras que pueden discutirse con algún trabajo monográfico opcional.

En la parte final del tema se analiza el *campo electromagnético*, concepto que representa la última gran síntesis de la física clásica al conectar la óptica con el electromagnetismo. Dentro de ello, y atendiendo al carácter básico de este curso de física y a la dificultad matemática que implican las ecuaciones de Maxwell, nos limitaremos a analizar cualitativamente algunas características de las *ondas electromagnéticas*

(carácter transversal y velocidad de propagación constante de 300 000 km/s en el vacío) y a resaltar diferentes aplicaciones.

En cuanto a los **prerrequisitos** y, sobre todo, a las *herramientas matemáticas* necesarias, citaremos, entre otros:

1. Conocer las características del producto escalar de vectores, para explicar el concepto de flujo tanto eléctrico como magnético y realizar cálculos numéricos sobre él.
2. Conocer el significado de la derivada (ley de Faraday-Henry y ley de Lenz).
3. Recordar el significado de fem de un generador y la ley de Ohm.
4. Recordar el concepto de potencia eléctrica y su cálculo ( $P = VI = I^2 R = V^2/R$ ), para aplicarlo a cálculos sencillos relacionados con el transformador y con la disipación de energía en el "transporte" de la energía eléctrica mediante una red de alto voltaje hasta los lugares de "consumo".

Las **dificultades** más frecuentes del tema están relacionadas con los siguientes aspectos:

1. Predecir el sentido de la fem inducida, al no asimilar del todo la idea clave que incluye la ley de Lenz: la corriente inducida produce un flujo magnético tal que "minimiza" el cambio de flujo provocado por la causa exterior que origina el fenómeno de la inducción.
2. Diferenciar entre valor máximo, valor instantáneo y valor eficaz de una corriente alterna, ya que se trata de una onda.
3. El concepto de campo electromagnético.

## 2. CONTENIDOS

### 1. Inducción electromagnética: ley de Faraday-Henry y ley de Lenz

- El descubrimiento de la inducción
- Flujo magnético
- Ley de Faraday-Henry
- Ley de Lenz
- Justificación de la ley de Lenz

### 2. Otros casos de inducción

- Inducción en una varilla conductora
- La autoinducción

### 3. Dinamos y alternadores

- Fuerza electromotriz producida por una dinamo
- El alternador
- Expresión de la fem inducida en un alternador

### 4. Generación de energía eléctrica e impacto ambiental

- El coste del kWh depende del tipo de central
- Impacto medioambiental de la generación de energía eléctrica
- Situación de las energías renovables en España

### 5. Transformadores y distribución de energía eléctrica

- El transformador
- Distribución de energía eléctrica

### 6. Unificación de la electricidad, el magnetismo y la óptica: campo electromagnético

- Comparación entre campo eléctrico y campo magnético
- El concepto de campo electromagnético
- Las ecuaciones de Maxwell
- Síntesis electromagnética

**Complemento:** *Vivimos envueltos de ondas electromagnéticas*

### 3. OBJETIVOS ESPECÍFICOS (Capacidades que hay que desarrollar)

CONCEPTOS	PROCEDIMIENTOS	ACTITUDES
<ol style="list-style-type: none"> <li>1 Comprender la inducción electro-magnética.</li> <li>2 Definir y calcular el flujo magnético.</li> <li>3 Enunciar y formular la ley de Faraday-Henry y la ley de Lenz.</li> <li>5 Asociar la fem inducida a los cambios de flujo magnético producidos por una causa externa.</li> <li>6 Razonar el origen y el valor de la fem inducida en una varilla conductora.</li> <li>7 Definir la autoinducción y el coeficiente de autoinducción.</li> <li>8 Conocer la constitución y el funcionamiento de la dinamo y el alternador, así como la expresión temporal de la fem.</li> <li>9 Describir en general las centrales eléctricas y conocer el impacto ambiental producido por cada una de ellas.</li> <li>10 Conocer el transformador y su funcionamiento, justificando su uso.</li> <li>11 Analizar los factores que intervienen en el “transporte de la energía eléctrica” y las “pérdidas” de energía producida.</li> <li>12 Conocer el concepto de campo electromagnético y cómo su propagación genera las ondas electromagnéticas.</li> <li>13 Describir las características generales de las oem.</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1 Diseñar y realizar experimentos para comprobar y analizar la fem inducida en una bobina.</li> <li>2 Establecer el sentido de la corriente inducida en algunos casos representativos.</li> <li>3 Elaborar esquemas conceptuales relacionados con diversos aspectos de la inducción.</li> <li>4 Realizar cálculos sobre el valor de la fem inducida en una espira, un solenoide o un alternador.</li> <li>5 Realizar cálculos comparativos sobre la energía “disipada” en el transporte de la energía eléctrica a diferentes voltajes.</li> <li>6 Buscar información y redactar un breve trabajo monográfico sobre alguna aplicación práctica de las ondas electromagnéticas.</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1 Valorar la evolución de los modelos y las teorías que los científicos idean para explicar los fenómenos descubiertos.</li> <li>2 Interesarse por la explicación de fenómenos y aplicaciones prácticas relacionados con el electromagnetismo (generadores electromagnéticos, radiodifusión, etc.).</li> <li>4 Mostrar interés por la realización correcta de experimentos científicos, respetando siempre el material y las normas de seguridad sobre el uso de la electricidad.</li> </ol>

## 4. SOLUCIONARIO

### 4.1. SOLUCIÓN DE LAS ACTIVIDADES PROPUESTAS

**A.1.** El anillo debe ser de hierro para que el flujo magnético producido en el arrollamiento primario no se disperse y llegue prácticamente completo al arrollamiento secundario.

La intensidad de la corriente inducida se puede aumentar elevando el flujo en el arrollamiento secundario; como  $F = NBS$ , podemos aumentar: 1° El número de espiras,  $N$ ; 2° el valor de  $B$ , que realmente se produce en el arrollamiento primario; 3° la sección  $S$  del anillo.

#### Experimento 1 Produciendo corrientes inducidas

a) Si aumenta la rapidez con que se mueve el imán, respecto al solenoide, aumenta la intensidad en el galvanómetro. Si colocamos dos imanes juntos, el cambio de flujo se duplicará (supuestos los imanes iguales) y también se duplicará la fem inducida y la corriente que detecta el galvanómetro.

#### ACD1. La inducción electromagnética

Manipulación que completa a nivel cualitativo y cuantitativo el experimento anterior. Depende del movimiento relativo bobina-imán, cuanto más rapidez mayor corriente eléctrica se induce y con mayor frecuencia de oscilación.

**A.2.** Tenemos que aplicar la ecuación

$$\Phi = NBS \cos \theta;$$

$$\Phi = 100 \cdot 10^{-3} \text{ T} \cdot 4 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \cdot \cos 30^\circ = 3,46 \cdot 10^{-5} \text{ Wb}.$$

**A.3.** Se trata de un ejercicio de aplicación directa de la ley de la inducción:

$$\varepsilon_{\text{media}} = \frac{|\Delta\Phi|}{\Delta t} = \frac{BS}{\Delta t} = \frac{1 \cdot 5 \text{ T} \cdot 36 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2}{0,75 \text{ s}} = 0,0072 \text{ V}.$$

**A.4.** El weber, 1 Wb, es el cambio de flujo que debe producirse a través de una espira en 1 s para que en ella se genere una fem inducida de valor medio 1 V.

**A.5.**

**Caso A:** Al acercar un polo S a la espira, en ella se genera una fem que produce una corriente tal que su cara superior equivale a un polo S, que repele al que se acerca; por tanto, la corriente tiene sentido horario.

**Caso B:** Al alejar la espira del polo N, en su cara inferior “se genera” un polo contrario al del imán, o sea, un polo S que es atraído por el N del imán; por tanto, la corriente tiene sentido antihorario visto desde arriba.

**A.6.** Al moverse la varilla hacia la derecha, el flujo aumenta y por tanto la corriente inducida tiene que generar un flujo contrario al inicial, o sea, el campo magnético en la zona delimitada por el circuito debe ir hacia fuera del papel; ello exige que la corriente circule en sentido antihorario en la espira.

**A.7.** Al girar la varilla, va barriendo un área proporcional al arco,  $ds$ , según la igualdad:

$$\frac{ds}{2\pi R} = \frac{dA}{\pi R^2}$$

y por tanto  $dA = \frac{1}{2} R ds$ . Así pues,

$$d\Phi/dt = B dA/dt = \frac{1}{2} B R v = \frac{1}{2} B R^2 \omega$$

y en definitiva,

$$\varepsilon_{\text{media}} = \frac{1}{2} \cdot 0,65 \text{ T} \cdot (0,5 \text{ m})^2 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 4 \text{ s}^{-1} = 2,04 \text{ V}.$$

#### Ampliación: El coeficiente de inducción

Para determinar el coeficiente de autoinducción de un solenoide que tiene  $N$  espiras arrolladas sobre un cilindro de sección  $S$  y longitud  $a$ , basta recordar que el campo magnético en su interior viene dado por

$$B = \mu_0 iN / a$$

con lo que el flujo será  $\Phi = NBS = \mu_0 iN^2S / a$ ; recordando la relación  $\Phi = Li$ , obtenemos finalmente la expresión del coeficiente de autoinducción:

$$L = \frac{\mu_0 N^2 S}{a}$$

## 3. DINAMOS Y ALTERNADORES

### Experimento 2. Fuerza electromotriz producida por una dinamo y un alternador

En este apartado vamos a tratar con *dinamos* y *alternadores*, por lo que es necesaria una distinción clara entre tensión continua, tensión pulsante y tensión alterna; para ello hemos previsto el **exp. 2**. Un *osciloscopio* nos ayudará a observar la variación de la tensión con el tiempo. Si no se dispone de osciloscopio, al conectar un amperímetro o un



voltímetro de corriente continua de escala adecuada a los bornes del generador, podremos observar si el índice se desvía (dinamo) o si se limita a vibrar (alternador).

### ACD2 La dinamo

A mayor velocidad angular de giro se obtiene un mayor módulo de la fem generada, la gráfica refleja la forma de una oscilación periódica, que en el mejor de los casos es una onda senoidal.

**A.8.** El método más sencillo para aumentar el valor de la fem de un alternador es elevar la rapidez angular con la que gira la espira en el interior del campo magnético; se cumple que

$$\varepsilon_0 = k\omega.$$

**A.9.** Respuesta personal. El profesor o profesora puede usar de referencia el mapa conceptual de la página 260. La parte de la izquierda, indicada en verde, corresponde a un posible mapa conceptual.

## 4. GENERACIÓN DE ENERGÍA ELÉCTRICA E IMPACTO AMBIENTAL

El texto recoge algunos de los múltiples aspectos técnicos y sociales de este tema.

La figura 4.1 muestra hasta el año 2006 la distribución en % de la producción de energía eléctrica para cada fuente.

La lectura *Centrales eléctricas y alternadores trifásicos* describe la estructura de una central, tomando como ejemplo una central hidroeléctrica, y explica brevemente cómo son los alternadores reales que hay en una central.

La figura 4.4 es una tabla comparativa de los costes de generación de energía eléctrica según el tipo de central. Ello da pie a la **A.10**.

En la figura 4.5 se evalúa el mayor o menor impacto medioambiental que produce cada uno de los tipos de central, a mayor número de ecopuntos mayor impacto (destacan las centrales térmicas que no usan gas natural).

**A.10.** Respuesta personal. Se producen opiniones muy repartidas. Depende del énfasis que se ponga en cada uno de los aspectos y, por ello, deviene una interesante discusión sobre los costes monetarios, sociales y ecológicos de cada una de ellas. También cabe esperar que citen la central *térmica* (muy contaminante por el efecto invernadero y la lluvia ácida y combustibles agotables, pero de potencia muy alta), la central *nuclear* (potencia muy alta, pero productora de residuos radiactivos y con un peligro poten-

cial de accidente grave no despreciable), la central *hidráulica* (combustible gratis y poco o nada contaminante, pero a expensas de la pluviosidad) y la central *eólica* (poco contaminante y se amortiza pronto la inversión, pero está a expensas del viento).

Una actividad opcional que puede dar mucho juego es proponer un trabajo monográfico sobre alguno de los tipos de energía renovable (fundamentos técnicos, importancia actual y futura, impacto ambiental, consumo responsable...).

## 5. TRANSFORMADORES Y DISTRIBUCIÓN DE ENERGÍA ELÉCTRICA

El *transformador* es un buen ejemplo de aplicación práctica de un fenómeno físico, en este caso la inducción magnética.

Es necesario insistir en que la descripción y las ecuaciones del texto se refieren a un transformador ideal.

### A.11.

a) Si la tensión es continua, al ser  $I = \text{cte}$ , el flujo magnético en una sección del circuito magnético del transformador sería constante y por tanto no sería posible la inducción eléctrica.

b) Un transformador elevador se usaría por ejemplo en una instalación de 120 V para utilizar un electrodoméstico de 220 V; un transformador reductor se usa por ejemplo como paso inicial para obtener, a partir de 220 V, 12 V de tensión para hacer funcionar algunas lámparas halógenas.

## 6. UNIFICACIÓN DE LA ELECTRICIDAD, EL MAGNETISMO Y LA ÓPTICA: EL CAMPO ELECTROMAGNÉTICO

Los puntos clave de este apartado son:

1. La tabla comparativa de los campos eléctrico y magnético.
2. Los conceptos complementarios de campo electromagnético y onda electromagnética.
3. Las oem son transversales y su velocidad en el vacío es  $3 \cdot 10^8$  m/s, un valor límite para los fenómenos de la naturaleza.
4. La relación entre teoría (Maxwell) y experimentos (Hertz) hace avanzar a la ciencia.

**A.12.** Respuesta personal. El profesor o profesora puede usar de referencia la figura 6.8 (parte central) de la página 260, la tabla comparativa y la figura 1.6 de la página 61 y el mapa conceptual de la página 50 (fig. 12.14).

## 4.2 PROBLEMAS FINALES

### Flujo e inducción electromagnética

#### PROBLEMA 1

El tesla es la unidad de intensidad de campo magnético; a partir de la ley de Faraday-Lenz,

$$\varepsilon_{\text{media}} = \frac{|\Delta\Phi|}{\Delta t} = \frac{BS}{\Delta t} :$$

“El tesla es la intensidad de un campo magnético tal que si introducimos en ese campo perpendicularmente a su dirección una espira de sección  $1 \text{ m}^2$  en un tiempo de  $1 \text{ s}$ , el valor medio de la fem inducida es  $1 \text{ V}$ ”.

#### PROBLEMA 2

La respuesta más adecuada es la d), teniendo en cuenta el significado de la ley de Faraday-Henry.

#### PROBLEMA 3

Se genera una fem inducida en el cable:

$$\varepsilon = -d\Phi / dt = -B \cdot dS / dt = -BLv \cos \theta , \text{ siendo}$$

$\theta$  el ángulo formado por  $B$  y el vector  $dS$  (horizontal), es decir la inclinación magnética del lugar.

#### PROBLEMA 4

En el anillo aparece una fem inducida y por tanto una corriente, que calienta el metal por efecto Joule.

#### PROBLEMA 5

Al acercarse desde arriba un polo N a la espira circular (anillo), en ella se genera una fem que produce una corriente tal que su cara superior equivale a un polo N, que repele al inductor que se acerca; por tanto, la corriente tiene sentido antihorario.

#### PROBLEMA 6

Al acercarse el imán, el calvo se imanta, apareciendo en el arrollamiento un flujo magnético antes inexistente; por tanto, se generará en el mismo una fem inducida y el galvanómetro detectará la corriente transitoria. Al retirar el imán de la proximidad del clavo, se podrá observar una corriente transitoria de sentido contrario a la anterior.

#### PROBLEMA 7

Para el circuito del galvanómetro, el flujo viene dado por la ecuación  $F = NBS$ , siendo  $B$  el módulo del campo (sentido de derecha a izquierda y supuesto constante en todo el interior del arrollamiento) y  $N$  el número de espiras a la izquierda del contacto móvil C. Si movemos el contacto hacia la derecha,

ello implica un aumento del flujo, produciéndose por tanto una corriente inducida que generará un campo magnético de sentido contrario a  $B$ , es decir de derecha a izquierda.

Al mover el cursor hacia la izquierda, el galvanómetro detectará una corriente transitoria de sentido contrario al anterior.

#### PROBLEMA 8

Ver la página final del apartado 1 (247).

#### PROBLEMA 9

a) Falso. b) Verdadero. c) Falso; sólo generan campo magnético las cargas móviles. d) Falso, ha de ser un campo magnético variable en el tiempo o que se produzca un flujo variable en un circuito.

#### PROBLEMA 10

- a) Sí, porque el flujo disminuye.
- b) No, porque el flujo no cambia.
- c) No, porque el flujo no cambia.

#### PROBLEMA 11

Calculemos el valor de  $\Phi_0 = NBS$ :

$$\Phi_0 = NBS = 20 \cdot 3 \cdot 10^{-4} \cdot 4 \cdot 10^{-4} = 2,4 \cdot 10^{-6} \text{ Wb.}$$

Aplicando la ecuación  $\Phi = \Phi_0 \cdot \cos \theta$ :

$$\Phi_1 = \Phi_0 \cos 90^\circ = 0.$$

$$\Phi_2 = \Phi_0 \cos 60^\circ = 2,4 \cdot 10^{-6} \text{ Wb} \cdot \cos 60^\circ = 1,2 \cdot 10^{-6} \text{ Wb.}$$

$$\Phi_3 = \Phi_0 \cos 0^\circ = 2,4 \cdot 10^{-6} \text{ Wb.}$$

#### PROBLEMA 12

$$\varepsilon_{\text{media}} = NS |B| / \Delta t = 100 \cdot 10^{-4} \cdot 0,02 / 0,01 = 0,02 \text{ V.}$$

#### PROBLEMA 13

En este caso, el ángulo de los vectores  $S$  y  $B$  es de  $30^\circ$ .

$$\begin{aligned} \text{a) } \Phi_0 &= NBS \cos q_1 = 10^{-7} \cdot 100 \cdot \cos 30^\circ = \\ &= 8,67 \cdot 10^{-6} \text{ Wb} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) Al invertir el sentido del campo, el flujo final es} \\ \Phi_f &= NBS \cos q_2 = 10^{-7} \cdot 100 \cdot \cos 150^\circ = -8,67 \cdot 10^{-6} \text{ Wb} \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\text{media}} &= |\Phi_f - \Phi_0| / \Delta t = 2 \cdot 8,67 \cdot 10^{-6} \text{ Wb} / 0,1 \text{ s} = \\ &= 1,73 \cdot 10^{-4} \text{ V.} \end{aligned}$$

#### PROBLEMA 14

$$\varepsilon_{\text{media}} = NS \frac{|\Delta B|}{\Delta t} = 0,424 \text{ V;}$$

$$I_{\text{media}} = \varepsilon_{\text{media}} / R = 0,424 \text{ V} / 5,4 \Omega = 0,079 \text{ A.}$$

**PROBLEMA 15**

Podemos suponer que las alas del avión "equivale" a una varilla conductora de 20 m de longitud que se mueve perpendicularmente a la componente vertical del campo magnético. En la varilla se genera una fem inducida de valor medio

$$\varepsilon = B_v L v = 37 \cdot 10^{-6} \text{ T} \cdot 20 \text{ m} \cdot 2 \cdot 340 \text{ m/s} = 0,503 \text{ V}.$$
**PROBLEMA 16**

El ejercicio es equivalente al anterior:

$$\varepsilon = B_v L v = 37 \cdot 10^{-6} \text{ T} \cdot 1,67 \text{ m} \cdot 30,56 \text{ m/s} = 0,00189 \text{ V} = 1,89 \text{ mV}.$$

**PROBLEMA 17**

Al girar la varilla, va barriendo un área proporcional al arco ds según la igualdad:

$$\frac{ds}{2\pi R} = \frac{dA}{\pi R^2}, \text{ y por tanto } dA = \frac{1}{2} R ds.$$

Así pues,

$$d\Phi = B dA = \frac{1}{2} BR ds$$

$$d\Phi/dt = \frac{1}{2} B R v = \frac{1}{2} BR \omega = \frac{1}{2} BR^2 \omega$$

$$\text{Como } \omega = v/R = 8,33/0,4 = 20,83 \text{ rad/s:}$$

$$\varepsilon_{\text{media}} = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 10^{-6} \text{ T} \cdot (0,4 \text{ m})^2 \cdot 20,83 \text{ rad/s} = 4 \cdot 10^{-5} \text{ V}.$$

**PROBLEMA 18**

- a) Como el campo es perpendicular al plano de la espira, los vectores  $B$  y  $S$  son paralelos y

$$\varepsilon_{\text{media}} = \frac{NS|B - B_0|}{\Delta t} = \frac{100 \cdot 25 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \cdot 0,3 \text{ T}}{0,1 \text{ s}} = 0,75 \text{ V}.$$

- b) La bobina ha girado  $90^\circ$ , con lo que el flujo ha pasado de su valor inicial

$$\Phi_0 = NB S = 100 \cdot 25 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \cdot 0,5 \text{ T} = 0,125 \text{ Wb}$$

a su valor final, cero, al ser perpendiculares los vectores  $B$  y  $S$ .

Por tanto: 
$$\varepsilon_{\text{media}} = \frac{|\Phi_0 - \Phi|}{\Delta t} = \frac{0,125 \text{ Wb}}{1 \text{ s}} = 0,125 \text{ V}.$$

- c) Como la bobina está en el plano XY, el campo es paralelo al eje Z y la bobina se desplaza a lo largo del eje Z, el flujo no cambia y, por tanto, no hay fem inducida.

**PROBLEMA 19**

Si  $L$  es el lado de la espira, la superficie barrida por la espira es  $dS = L v dt$ ; por tanto:

$$\varepsilon_{\text{media}} = \frac{B dS \cos \theta}{dt} = \frac{BL v dt}{dt} = BL v$$

Operando:

$$\varepsilon_{\text{media}} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ T} \cdot 0,08 \text{ m} \cdot 1 \text{ m/s} = 1,6 \cdot 10^{-4} \text{ V}.$$

Si el campo es  $B = -2 \cdot 10^{-3} \text{ k T}$ , el valor medio de la fem inducida no cambia.

Si el campo  $B$  está en la dirección del eje X,

los vectores  $B$  y  $dS$  son perpendiculares y el flujo es cero; por tanto no hay inducción.

**PROBLEMA 20**

La varilla conductora se mueve perpendicularmente al campo magnético; en ella se genera una fem inducida de valor medio

$$\varepsilon_{\text{media}} = B L v = 1 \text{ T} \cdot 0,1 \text{ m} \cdot 2 \text{ m/s} = 0,2 \text{ V}.$$

**PROBLEMA 21**

a)  $\Phi = NSB = 30 \cdot 5,03 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2 (0,01 \text{ t} + 0,04 \text{ t}^2) \text{ T} = 0,151 (0,01 \text{ t} + 0,04 \text{ t}^2) \text{ Wb}.$

b) 
$$\varepsilon = \frac{-d\Phi}{dt} = -0,151 \frac{d(0,01 \text{ t} + 0,04 \text{ t}^2)}{dt} = -0,151 \cdot (0,01 + 0,08 \text{ t}) \text{ V}$$

Si  $t = 5 \text{ s}$ ,  $\varepsilon = -0,062 \text{ V}.$

**PROBLEMA 22**

Aplicando la ley de Faraday-Lenz:

$$\varepsilon = \frac{-d\Phi}{dt} = -S \cos \theta \frac{d(2 \cos(300 \text{ t}))}{dt} = \pi \cdot 10^{-2} \text{ m}^2 \cdot \cos 45^\circ \cdot 2 \cdot 300 \cdot \sin(300 \text{ t}) = 13,33 \sin(300 \text{ t}) \text{ V}.$$

**PROBLEMA 23**

Como se ha demostrado, el valor máximo de la fem inducida en estas condiciones es  $\varepsilon_0 = BS\omega$ ; si aislamos  $B$ , tenemos:

$$B = \frac{\varepsilon_0}{S\omega} = \frac{0,015 \text{ V}}{16 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \cdot 37,7 \text{ rad/s}} = 0,25 \text{ T}.$$

**PROBLEMA 24**

- a) Como el campo magnético que genera el conductor depende de la distancia, según la ecuación  $B = \mu_0 I / 2\pi r$ , habría que hallar el flujo por integración. Pero para calcular el valor máximo del flujo basta suponer que "toda la superficie  $S$ " está a 5 cm del conductor y para calcular el valor mínimo del flujo suponemos que "toda la superficie está a 15 cm" del conductor. Por tanto:

$$\Phi_{\text{máx}} = B_{\text{máx}} S = \frac{\mu_0 I S}{2\pi x} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 3 \cdot 200 \cdot 10^{-4}}{2 \cdot \pi \cdot 0,05} = 2,4 \cdot 10^{-7} \text{ Wb.}$$

$$\Phi_{\text{mín}} = B_{\text{mín}} S = \frac{\mu_0 I S}{2\pi (x + a)} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 3 \cdot 200 \cdot 10^{-4}}{2 \cdot \pi \cdot 0,15} = 0,8 \cdot 10^{-7} \text{ Wb.}$$

Luego el flujo real está comprendido entre estos dos valores.

- b) En la espira se genera una fem que produce una corriente en sentido horario que se opone a la disminución de flujo provocada al alejar la espira.

### PROBLEMA 25

La primera bobina tiene  $N_1 = 7361$  espiras.

El campo magnético que genera la primera bobina es:

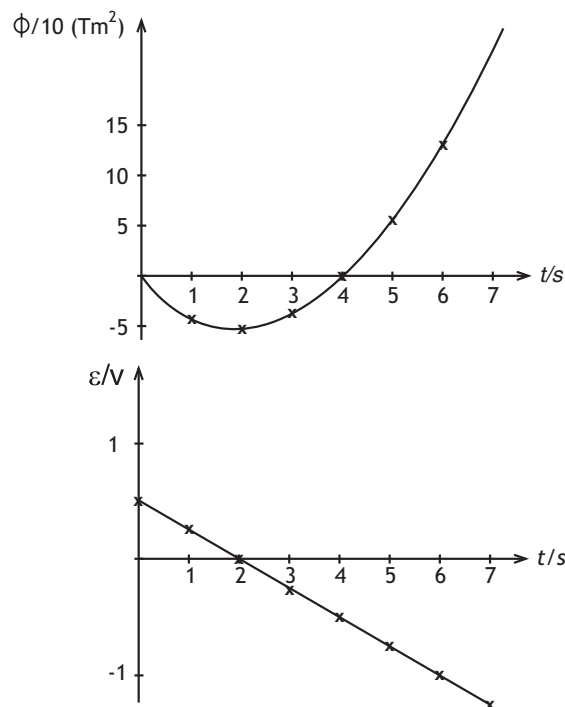
$$B_1 = \mu_0 N_1 I_1 / L_1 = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 7361 \cdot 2 / 2,9 = 6,38 \cdot 10^{-3} \text{ T}$$

Al cesar la corriente  $I_1$  el campo  $B_1$  se anula, lo que produce una disminución del flujo en la 2ª bobina:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\text{media}} &= \frac{|\Phi_0 - \Phi|}{\Delta t} = \frac{N_2 S_2 B_1}{\Delta t} = \\ &= \frac{1200 \cdot 10^{-3} \cdot 6,38 \cdot 10^{-3}}{0,001} = 7,66 \text{ V.} \end{aligned}$$

### PROBLEMA 26

Gráficas de  $\Phi$  y de  $\varepsilon$  en función del tiempo:



- a) Aplicando la ley de Faraday-Lenz:

$$\varepsilon = \frac{-d\Phi}{dt} = -(2t - 4) \cdot 10^{-1} \text{ Wb.}$$

- c)  $\Phi = 0,1 (t^2 - 4) = 0 \rightarrow t_1 = 0 \text{ s}; t_2 = 4 \text{ s.}$

En  $t = 0 \text{ s}$ ,  $\varepsilon_0 = 0,4 \text{ V}$ ; en  $t = 4 \text{ s}$ ,  $\varepsilon = -0,4 \text{ V}$ .

## ALTERNADORES Y TRANSFORMADORES

### PROBLEMA 27

La dinamo transforma parte de la energía de rotación de la rueda para generar energía eléctrica, luego influye en la rapidez de la bicicleta.

### PROBLEMA 28

Para resolver el ejercicio debe conocerse la relación entre valor eficaz y valor máximo de una tensión o una corriente alternas.

Como  $P = V_{\text{eficaz}} I_{\text{eficaz}}$  y el valor de la tensión eficaz es 220 V, obtenemos:

$$I_{\text{eficaz}} = 40 \text{ W} / 220 \text{ V} = 0,182 \text{ A}$$

$$I_{\text{máxima}} = \sqrt{2} I_{\text{eficaz}} = 0,257 \text{ A.}$$

### PROBLEMA 29

- a) Como la tensión es continua, el transformador no puede funcionar.

- b) Si la tensión alterna en la entrada es

$V_1 = 6 \text{ V}$ , en el secundario será:

$$V_2 = V_1 \frac{N_2}{N_1} = 6 \frac{500}{100} \text{ V} = 30 \text{ V.}$$

### PROBLEMA 30

El flujo es

$$\begin{aligned} \Phi &= NBS \cos(\omega t) = \\ &= 1000 \cdot 0,05 \cdot 8 \cdot 10^{-3} \cdot \cos(16\pi t) = \\ &= 0,4 \cdot \cos(16\pi) \text{ Wb.} \end{aligned}$$

Por tanto,  $\varepsilon = -d\Phi/dt = 20,12 \cdot \sin(16\pi t)$ .

Como la resistencia total del circuito es

$$R = R_{\text{bobina}} + R_{\text{cables}} = 50 \Omega + 200 \Omega = 250 \Omega,$$

la intensidad será:  $i = \varepsilon/R = 0,08 \cdot \sin(16\pi t) \text{ A}$ .

### PROBLEMA 31

$$\text{a) } V_2 = V_1 \frac{N_2}{N_1} = 220 \frac{1}{12} \text{ V} = 18,33 \text{ V.}$$

$$\text{b) } I_2 = I_1 \frac{N_1}{N_2} = 50 \text{ mA} \frac{12}{1} = 600 \text{ mA.}$$

Si el rendimiento no es del 100%, no se puede aplicar la condición  $P_1 = P_2$ , que equivale a escribir  $V_1 I_1 = V_2 I_2$ ; evidentemente, sería  $P_2 < P_1$ .

### PROBLEMA 32

Aplicando la ecuación que da la potencia disipada, obtenemos:

$$P_{dis1} = P_{dis2} \rightarrow \frac{R_1 P^2}{V_1^2} = \frac{R_2 P^2}{V_2^2}$$

$R_1 / R_2 = 4,84 \cdot 10^{-4}$  y como la resistencia es inversamente proporcional a la sección, resulta que  $S_2 / S_1 = 4,84 \cdot 10^{-4}$ , es decir, que si el transporte se hace a muy alta tensión los cables conductores pueden ser más delgados y por tanto más ligeros, con lo que se ahorra en material para los cables y en el coste de los postes que soportan la línea de alta tensión.

### PROBLEMA 33

La resistencia de los cables (longitud total, 50 km) es:

$$R = \frac{\rho L}{S} = \frac{2,82 \cdot 10^{-8} \Omega \text{m} \cdot 5 \cdot 10^4 \text{m}}{\pi \cdot 0,25 \cdot 10^{-4} \text{m}^2} = 17,95 \Omega$$

Aplicando la ecuación que da la potencia disipada, obtenemos:

$$P_{dis} = \frac{R P^2}{V^2} = \frac{17,95 \Omega \cdot (5 \cdot 10^5 \text{W})^2}{(20000 \text{V})^2} = 11220 \text{W}.$$

### PROBLEMA 34

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{V_2}{V_1} = \frac{24000 \text{V}}{12 \text{V}} = 2000$$

## ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS

### PROBLEMA 35

La velocidad de las ondas (OEM) no cambia, pero sí lo hace la longitud de onda:

$$\lambda_1 = 3,41 \text{ m}; \lambda_2 = 2,78 \text{ m}.$$

### PROBLEMA 36

Para que la radiación penetre el espesor debe ser inferior a  $e = \lambda/5$ :

$$\lambda = c / N = 3 \cdot 10^8 / 9 \cdot 10^8 = 0,333 \text{ m}.$$

$$\text{Finalmente: } e = \lambda/5 = 0,333 \text{ m}/5 = 0,0667 \text{ m}.$$

### PROBLEMA 37

$$\lambda = \frac{c}{N} = \frac{3 \cdot 10^8}{10^8 \text{Hz}} = 3 \text{ m}$$

$$\text{b) } E = I S \cos \theta \Delta t = 10 \text{ W/m}^2 \cdot 0,02 \text{ m}^2 \cdot \cos 60^\circ \cdot 1 \text{ s} = 0,1 \text{ J}.$$

### PROBLEMA 38

$$\begin{aligned} E &= E_0 \cos (2\pi n t - 2\pi z/\lambda) = \\ &= 1 \cdot \cos (4,84 \cdot 10^6 \pi t - 0,016 \pi z) \text{ V/m}. \end{aligned}$$

## 4.3. SOLUCIÓN DE LA AUTOEVALUACIÓN

### EJERCICIO 1

Si la rapidez con que cambia el flujo se reduce a la mitad, la fem inducida se reduce a la mitad; si la rapidez se triplica, la fem inducida se triplica.

### EJERCICIO 2

Si se acerca el polo norte se produce una fem antihoraria en la espira y si se aleja el imán se genera en la misma espira una corriente horaria.

### EJERCICIO 3

La varilla conductora se mueve perpendicularmente al campo magnético; en ella se genera una fem inducida de valor medio  $\varepsilon = B L v$ ; si aislamos la intensidad de campo B, tenemos:

$$B = \frac{\varepsilon}{L v} = \frac{1,1 \cdot 10^{-3}}{1 \text{ m} \cdot 20 \text{ m/s}} = 5,5 \cdot 10^{-5} \text{ T}.$$

### EJERCICIO 4

En la posición inicial, el ángulo entre el plano de la espira y el campo B es  $0^\circ$ , y por tanto el ángulo entre los vectores B y S es  $90^\circ$ , por lo que  $\Phi_0 = B S \cos \varphi = 0$ , mientras que el flujo al girar  $90^\circ$  es máximo:

$$\Phi_f = B S \cos \varphi = 0,02 \text{ T} \cdot 100 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \cdot 1 = 2 \cdot 10^{-4} \text{ Wb}.$$

Por tanto, el módulo de la fem media es:

$$|\varepsilon_{media}| = \frac{|\Phi_0 - \Phi_f|}{\Delta t} = \frac{2 \cdot 10^{-4} \text{ Wb}}{10^{-2} \text{ s}} = 2 \cdot 10^{-2} \text{ V}$$

### EJERCICIO 5

En la posición inicial, el ángulo entre los vectores B y S es  $0^\circ$ , por lo que

$$\Phi_0 = B S \cos \varphi = 0,35 \text{ T} \pi (0,06 \text{ m})^2 \cdot 1 = 3,96 \cdot 10^{-3} \text{ Wb}.$$

En la posición final, el ángulo es  $180^\circ$  y el flujo final es

$$\Phi_f = -1,69 \cdot 10^{-3} \text{ Wb}.$$

Por tanto, el módulo de la fem media es:

$$|\varepsilon_{media}| = \frac{|\Phi_0 - \Phi_f|}{\Delta t} = \frac{3,96 \cdot 10^{-3} - (-1,69 \cdot 10^{-3}) \text{ Wb}}{0,09 \text{ s}} = 0,063 \text{ V}$$

### EJERCICIO 6

a) Según los datos:  $\frac{V_1}{V_2} = \frac{N_1}{N_2} = \frac{6}{1}$

Aislado  $V_2$ :  $V_2 = V_1 \frac{1}{6} = 220 \frac{1}{6} = 36,7 \text{ V}$

b) Si el comportamiento es ideal, se cumple que

$$P_1 = V_1 I_1 = P_2 = V_2 I_2; \text{ aislando } I_2:$$

$$I_2 = I_1 \frac{V_1}{V_2} = 0,05 \text{ A} \cdot \frac{6}{1} = 0,3 \text{ A}$$

Comprobamos que al disminuir  $V$  aumenta  $I$ .

$$\text{Luego } P_2 = 0,95 \cdot P_1 = 0,95 \cdot 11 = 10,45 \text{ W}$$

c) Suponemos que se produce una pérdida de potencia transferida, por lo que la intensidad en el secundario será diferente a la ideal.

$$R_{to} = \frac{P_2}{P_1} = \frac{I_2 V_2}{I_1 V_1} = 0,95$$

$$I_2 = \frac{R_{to} \cdot I_1 V_1}{V_2} = \frac{0,95 \cdot 0,05 \text{ A} \cdot 220 \text{ V}}{36,7 \text{ V}} = 0,284 \text{ A}$$

### EJERCICIO 8

Suponiendo que no hay retraso en la emisión ni en la recepción de las oem, el tiempo transcurrido para la persona que oye el concierto es:

$$\Delta t_{\text{sonido}} = d/v = 50 \text{ m}/340 \text{ ms}^{-1} = 0,147 \text{ s}$$

y el tiempo para el que oye la radio:

$$\Delta t_{\text{oem}} = d'/c = 500\,000 \text{ m}/3 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1} = 0,0017 \text{ s}.$$

Por tanto, oye antes el concierto el que lo escucha por la radio.

## 5. CRITERIOS DE EVALUACIÓN

Además de los criterios de evaluación generales de esta materia, y considerando que necesariamente lo son, para realizar la evaluación creemos conveniente precisar más y establecer unos **criterios específicos** para este tema.

Al finalizar su estudio, las alumnas y los alumnos deben ser capaces de:

1. Conocer el significado de algunos conceptos y términos básicos como: inductor, inducido, autoinducción...
2. Saber enunciar y formular las leyes de Faraday-Henry y de Lenz.
3. Realizar un esquema simplificado de una central eléctrica y de la distribución de la energía eléctrica.
4. Aplicar los conocimientos de las leyes estudiadas al análisis de fenómenos diversos, como el funcionamiento de una dinamo, un alternador o un transformador, entre otros.
5. Realizar cálculos de nivel apropiado sobre la fem inducida en un conductor, una espira o un solenoide.
6. Calcular la energía disipada por efecto Joule en una conducción de corriente de alto voltaje.
7. Ante una cuestión o ejercicio numérico relacionado con el contenido del tema, mostrar capacidad para analizarlo, diseñar una estrategia de resolución, llevarla a cabo y analizar el resultado numérico obtenido, comprobando su posible validez.
8. En la resolución de ejercicios numéricos, expresar correctamente los datos en sus respectivas unidades y resaltar el aspecto vectorial de determinadas magnitudes.
9. Diseñar y llevar a cabo procedimientos experimentales sencillos que permiten comprobar hipótesis o redescubrir alguna ley física, por ejemplo la de Faraday-Henry.
10. Identificar en los generadores de diferentes tipos de centrales eléctricas el fundamento de la fem y ser capaz de comprender que la única diferencia entre la utilización de la energía nuclear, de carbón, de gas, hidroeléctrica, eólica, etc., se encuentra en la forma en que se hace girar el eje del alternador para conseguir las variaciones de flujo magnético.
11. Conocer la estructura y el funcionamiento de los transformadores, que adaptan el voltaje alterno para su transporte y su posterior uso.
12. Elaborar clara y correctamente los informes escritos sobre pequeñas investigaciones.
13. Valorar la importancia que en la historia de la ciencia tienen los modelos que se establecen para representar el comportamiento de la naturaleza y los esfuerzos por agrupar y relacionar las diferentes parcelas de la física (electricidad, óptica...).
14. Analizar textos escritos y usar adecuadamente los recursos bibliográficos de que se dispone.
15. Valorar críticamente las mejoras que producen algunas aplicaciones relevantes de los conocimientos científicos y los costes medioambientales que conllevan, como por ejemplo el uso de distintas fuentes para obtener energía eléctrica.
16. Mostrar interés por la explicación y las cuestiones planteadas en la clase y realizar con asiduidad el trabajo encomendado.
17. En las tareas en equipo, participar con actitud positiva y respetar las opiniones ajenas.



## 6. EJERCICIOS PROPUESTOS PARA LA EVALUACIÓN FINAL DEL TEMA

- Enuncia la ley de Faraday-Henry de la inducción electromagnética.
  - Aplicando la ley anterior determina la fuerza electromotriz generada en una espira circular de radio 10 cm por un campo magnético variable en el tiempo según  $B(t) = B_0 \cdot \sin(\omega t)$ , con una amplitud de 80 mT y una frecuencia de 50 Hz que forma  $30^\circ$  con la normal a la espira.

Datos:  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  C,  $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$  kg.

- Sobre una barra de acero hacemos dos arrollamientos, uno a la derecha del otro, de  $N_1 = 20$  y  $N_2 = 40$  espiras; si conectamos una pila al primer arrollamiento y un galvanómetro al segundo, explica qué se detectará en el 2º arrollamiento si: a) abrimos el interruptor del primer circuito; b) alejamos el 2º arrollamiento del 1º.

- Explica con claridad el signo menos que incluye la ley de Faraday-Lenz de la inducción.

- Explica qué ocurre al mover una varilla conductora: a) horizontalmente; b) verticalmente; c) haciéndola girar en el plano horizontal alrededor de un eje que pasa por uno de sus extremos.

- Una bobina de 50 vueltas y  $10 \text{ cm}^2$  de sección está situada con su eje paralelo a las líneas de un campo magnético de 1 T.

- Si el campo disminuye linealmente con el tiempo hasta anularse en dos segundos, calcula la fem inducida.
- Representa gráficamente el campo magnético y la fem en función del tiempo.
- Si la bobina gira alrededor de un eje normal al campo magnético inicial a la velocidad constante de 10 rad/s, ¿cuál será la expresión de la fem inducida? ¿Cuál será su valor máximo?

- La energía que transforma una estufa en un intervalo de tiempo muy corto, ¿es constante o variable?

- Explica cómo se genera la tensión en un alternador y de qué variables depende el valor máximo de la tensión alterna generada.

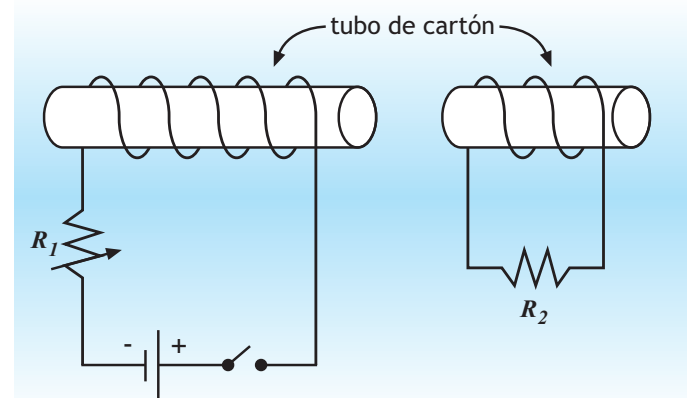
- El flujo magnético a través de un solenoide de 400 espiras disminuye hasta anularse según la ecuación

$$\Phi = (0,05 - 2t) \text{ Wb.}$$

- Halla la fuerza electromotriz inducida en función del tiempo y su valor medio.
- Si la resistencia del solenoide es  $2,5 \Omega$ , determina la intensidad en el instante en que el flujo se ha reducido a la mitad de su valor inicial.

- Sobre un tubo de cartón se hacen los dos arrollamientos que muestra la figura. Determina el sentido de la corriente inducida en la resistencia  $R_2$  de la derecha, si:

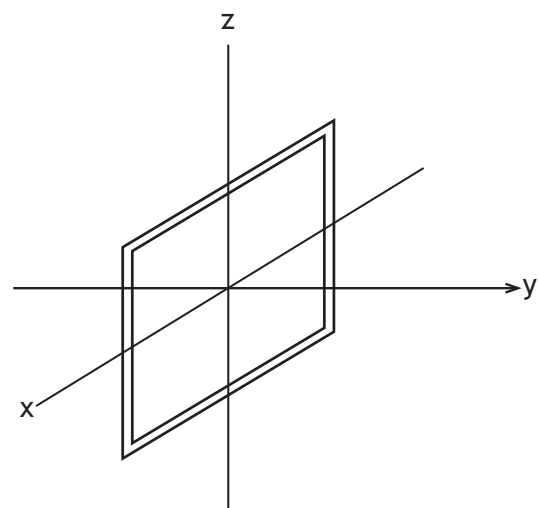
- Abrimos el interruptor.
- Aumentamos el valor de la resistencia de la izquierda.



- Una bobina cuadrada plana tiene 50 espiras y su lado es 2 cm. Cuando la bobina gira en el interior de un campo magnético uniforme de dirección perpendicular al plano de la espira y valor 30 mT, la fem máxima es 10 mV. ¿Con qué rapidez angular gira la bobina?

- La espira que muestra la figura tiene  $200 \text{ cm}^2$  de sección y gira con una frecuencia de 10 ciclos/s; su resistencia es  $R = 3 \Omega$  y el campo magnético es  $\vec{B} = 0,02 \vec{i}$  T. Determina el valor máximo de la fem inducida si gira:

- sobre el eje x; b) sobre el eje z; c) sobre uno de los lados paralelos al eje y.



**12.** Un transformador debe elevar la tensión de la red, 220 V, hasta los 18 kV necesarios para hacer funcionar una lámpara de neón. La corriente del secundario no debe sobrepasar el valor  $I_2 = 10 \text{ mA}$ .

a) Calcula la relación  $N_2 / N_1$ .

b) ¿Cuál es la potencia en el primario si la intensidad en el secundario es la máxima y se supone rendimiento 100 %?

c) Determina el "amperaje" del fusible del primario para que la corriente del secundario no sobrepase los 10 mA.

**13.** Calcula la potencia disipada en una línea de transporte de alta tensión (40 kV y 300 kW) cuya longitud es 30 km, si los hilos utilizados tienen una resistencia de  $10^{-3} \Omega/\text{m}$ .

**14.** ¿A qué se le llama espectro electromagnético? Haz un esquema del mismo, señalando las zonas que suelen distinguirse en él.

**15.** Los radioaficionados utilizan frecuencias comprendidas entre 145 MHz y 435 MHz; ¿a qué longitudes de onda corresponden? ¿Para qué frecuencia es mayor la velocidad de propagación?

**16.** Haz un resumen de las principales aportaciones realizadas en el siglo XIX al desarrollo del electromagnetismo.

**17.** Un transformador tiene 1000 espiras en el primario y el voltaje es de 370 V. El secundario debe suministrar 220 V a un conjunto de receptores con una potencia total de 3 kW. Con un comportamiento ideal, calcula; a) las espiras del secundario, y b) la corriente en cada arrollamiento.

**18.** Una antena emite ondas de radio que se comportan como ondas esféricas con una frecuencia de 96 MHz, calcula; a) la longitud de onda, y b) la intensidad de la onda a 50 km si la potencia emitida es de 50 kW.

## 7. RECURSOS DIDÁCTICOS Y BIBLIOGRAFÍA DE CONSULTA

### VÍDEOS Y CDS

#### 1. *Descubriendo la electricidad*. Iberduero.

El programa (duración: 40 min), hace un interesante recorrido histórico por los personajes y los descubrimientos principales de la electricidad y el magnetismo, desde la electrización hasta la inducción electromagnética.

#### 2. *Onda portadora de TV*. Philips.

Contenidos: tipos de ondas electromagnéticas (oem). Oscilaciones sostenidas en un circuito LC. La antena y la emisión de oem. La antena receptora. La señal de vídeo y su modulación en amplitud. La pantalla y la formación de la imagen.

El programa abarca lo tratado en la última parte del tema, su duración es adecuada (20 min) y el nivel alto.

#### 3. *El campo magnético (De la brújula a las ecuaciones de Maxwell)*. El universo mecánico.

Contenidos: Experimentos de Oersted y de Ampère. Interacciones entre campo, carga y corrientes. La imantación. Campos conservativos y no conservativos. Ecuaciones de Maxwell.

### BIBLIOGRAFÍA

#### TEXTOS

AGUILAR, J. y GARCÍA LEGAZ, C. 1986. *El viento: fuente de energía*. Alhambra: Madrid.

AULI, E. 2002. *Qué es la contaminación electromagnética*. RBA Libros: Barcelona.

BERKSON, W. 1985. *Las teorías de los campos de fuerzas, desde Faraday hasta Einstein*. Alianza Editorial: Madrid.

CANTOR, G. y otros. 1994. *Faraday*. Alianza Universidad: Madrid

ELORTEGUI, N. y otros. 1985. *Energías renovables (23 experiencias prácticas)*. Centro de Cultura Popular Canaria.

LEVY-LEBLOND, J. 1982. *La Física en preguntas: Electricidad y Magnetismo*. Alianza: Madrid.

MAXWELL, J.C. 1997. *Escritos científicos*. Círculo de Lectores.

VV. AA. 1984. "Christian Oersted", "Electromagnetic Induction and Laws of Electrolysis", "Lenz Law- Heinrich Lenz", "Electromagnetic Waves- Heinrich Hertz", "The electromagnetic Field - James Clerk Maxwell", en *Great Experiments in Physics*. H. Holt & Co: New York.

WILLIAMS, P. 1965. *Michael Faraday: A Biography*. Chapman & Hall: Londres.

### ARTÍCULOS

COLOMBO, L. y FONTDEVILLA, P.A. 1990. Concepciones en el aprendizaje significativo del electromagnetismo. *Enseñanza de las Ciencias*, 8(3), 215-222.

COLTMAN, J. 1988. The transformer. *Scientific American*, enero, p.86.

KONDO, H. 1953. Michael Faraday. *Scientific American*, octubre, p.90.

SOLBES, J. y MARTÍN, J. 1991. Análisis de la introducción del concepto de campo. *Revista Española de Física*, 5(3), 34-39.

SOLBES, J.; POMER, F. y TARÍN, F. 1996. Aportaciones de la didáctica de las ciencias y la historia de las ciencias a la enseñanza y el aprendizaje del electromagnetismo. *Didáctica de las ciencias experimentales y sociales*, nº 10, 3-9, 63-75.

WILLIAMS, E.R. 1988. The electrification of thunders-torms. *Scientific American*. Noviembre, p.88

# LA FÍSICA RELATIVISTA

# 7

## 1. PRESENTACIÓN GENERAL DEL TEMA

Los criterios de evaluación generales para la Física de 2º de Bachillerato señalados en el Real Decreto 1467/2007 de 2 de noviembre (BOE 6/11/2007) establece como objetivo: “*Utilizar los principios de la relatividad especial para explicar una serie de fenómenos: la dilatación del tiempo, la contracción de la longitud y la equivalencia masa-energía*”. Para conseguir este objetivo y alcanzar un aprendizaje significativo hemos estructurado el tema con el siguiente plan secuencial:

- a) Precisar y reflexionar sobre las concepciones anteriores a la relatividad especial (paradigma clásico vigente). Al iniciar el tema se resume la idea newtoniana del espacio y el tiempo conjuntamente con el principio de relatividad de Galileo. Se analiza la compatibilidad de las leyes mecánicas de Newton con la relatividad de Galileo, y se introducen las implicaciones de la relatividad clásica con las leyes electromagnéticas para intentar diferenciar los sistemas de referencia inerciales (SRI).

- b) Plantear la situación problemática que introduce la relatividad clásica con respecto al electromagnetismo. En esta etapa pretendemos responder básicamente dos preguntas:

- ¿Por qué se origina el problema? Para justificar el problema nos valemos tanto de argumentos teóricos (asimetría de las leyes electromagnéticas en función del SRI) como experimentales (imposibilidad de detectar sistemas de referencia absolutos y el estudio del movimiento de partículas con elevadas energías).
- ¿Por qué es importante el problema? La Física debe establecer una coherencia entre la descripción de los fenómenos mecánicos y electromagnéticos procedentes de una misma realidad que el paradigma vigente no resuelve.

- c) Establecer los fundamentos de la teoría de la relatividad especial. Una vez planteado el problema se describen los postulados relativistas enunciados por Einstein como principios sobre los que se fundamenta la solución del problema. A continuación, se analizan las consecuencias de los mismos y se establecen los denominados corolarios y sus implicaciones.
- d) Estudiar las consecuencias espaciales de los postulados de la relatividad especial incidiendo en los aspectos conceptuales. Para ello, diferenciamos la deducción matemática de las relaciones (simplificada mediante el uso de un reloj de luz) del análisis conceptual. Un aprendizaje correcto debe fundamentarse en la equivalencia de los distintos SRI, el uso práctico de las relaciones para justificar la dilatación del tiempo y la contracción de la longitud y el establecer la simultaneidad como un concepto relativo.
- e) Indicar las ideas más importantes de la nueva dinámica relativista. Y para mantener la validez de los principios de conservación de cantidad de movimiento y energía se reformulan las definiciones operativas de la cantidad de movimiento y de la energía. Ello da lugar al concepto de energía propia de las partículas en reposo y a la proporcionalidad entre las variaciones de la masa y de la energía de los sistemas. Este esquema conceptual se completa con la interdependencia masa, energía y cantidad de movimiento, establecida con la relación:

$$(mc^2)^2 = E^2 - (pc)^2$$

- f) Introducir de forma cualitativa el principio de equivalencia, fundamento teórico de la relatividad general, mediante algunos hechos que verifican las consecuencias de una teoría de relatividad más amplia.

- g) Plantear una reflexión acerca de la interacción de la teoría relativista con su contexto cultural y científico, particularizado en el caso de España, con el objetivo de analizar la evolución de estas concepciones científicas con su entorno social. Finalizamos con una lectura donde se comentan algunas creencias erróneas asociadas a la figura de Einstein.

Un aspecto que consideramos de interés es el de la masa como propiedad invariable de los cuerpos, en el que las últimas publicaciones didácticas hacen hincapié. Se argumenta (Pérez y Solbes, 2006) que ya Einstein desaconsejaba, de una manera categórica, el uso de la masa dependiente de la velocidad: *"No es bueno introducir el concepto de masa de un cuerpo en movimiento por no ser una definición clara. Es mejor no introducir otro concepto que "la masa en reposo"  $m_0$ . En vez de introducir  $m$  es mejor hacer mención de la expresión del momento y la energía de un cuerpo en movimiento"*. Nosotros, conscientes de que en ciertos enunciados de las pruebas de acceso se sigue haciendo referencia a la denominada masa relativista, hemos optado por considerar en todo el tema a la masa en reposo como propiedad invariable ( $m_0$ ), sin proponer ejercicios que impliquen calcular el aparente aumento de masa y presentar sólo en un cuadro resumen la expresión:  $m = \lambda m_0$ . Con ello evitamos incidir en la masa relativista pero mantenemos una relación que permite el cálculo del cuestionado aumento de masa en el caso de que se pregunte.

## 2. CONTENIDOS

1. *La concepciones anteriores a la relatividad especial*
  - Características del espacio y el tiempo en la física clásica.
  - Principio de relatividad de Galileo.
  - Concepto de sistemas de referencia inerciales.
  - La interacción de la relatividad clásica con las leyes electromagnéticas.
2. *El cuestionamiento de la física clásica*
  - La imposibilidad de establecer un sistema absoluto.
  - La asimetría de las leyes electromagnéticas.
  - La imposibilidad de explicar el comportamiento de partículas a elevadas energías.
3. *La solución del problema: la teoría de relatividad especial*
  - Los postulados de la teoría de la relatividad especial.
  - Las implicaciones de la simultaneidad de los dos postulados.
4. *Consecuencias de los postulados de Einstein*
  - Dilatación del tiempo.
  - Contracción de longitudes.
  - La relatividad de la simultaneidad.
5. *La dinámica relativista*
  - La cantidad de movimiento.
  - La energía.
  - La relación fundamental de la dinámica relativista.
6. *Introducción a la relatividad general y al principio de equivalencia*
  - El principio de equivalencia
  - La confirmación de la nueva teoría relativista
7. *La interacción de la nueva teoría con su contexto social (lecturas)*
  - La influencia de la relatividad en el pensamiento contemporáneo.
  - La relatividad en España.
  - Ideas erróneas acerca de Einstein.

### 3. OBJETIVOS ESPECÍFICOS (Capacidades que hay que desarrollar)

CONCEPTOS	PROCEDIMIENTOS	ACTITUDES
<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Conocer las características del espacio y el tiempo en la física clásica.</li> <li>2. Definir sistemas de referencia inerciales.</li> <li>3. Enunciar el principio de relatividad de Galileo.</li> <li>4. Enunciar los postulados de la teoría de la relatividad especial.</li> <li>5. Incorporar los límites de las concepciones clásicas de la física.</li> <li>6. Comprender las consecuencias de la simultaneidad de los dos postulados.</li> <li>7. Aceptar la rapidez de la luz en el vacío como una constante universal que indica el límite superior de la rapidez de cualquier ente físico.</li> <li>8. Asumir el carácter relativo de los intervalos de tiempo, de las distancias y de la noción de simultaneidad.</li> <li>9. Establecer el carácter absoluto de las leyes físicas y de la equivalencia de todos los sistemas de referencia inerciales.</li> <li>10. Aceptar una forma de energía ligada a la masa de las partículas.</li> <li>11. Comprender la necesidad de una dependencia recíproca del espacio con el tiempo.</li> <li>12. Comprender el principio de equivalencia como fundamento teórico de la Relatividad General.</li> <li>13. Diferenciar la relatividad especial de la general.</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Utilizar la transformación de Galileo para justificar la invariancia de la distancia y los intervalos de tiempo en la mecánica clásica.</li> <li>2. Aplicar los postulados de la relatividad restringida a la deducción de la dilatación del tiempo y la contracción de longitudes.</li> <li>3. Diferenciar entre magnitudes propias e impropias a un sistema de referencia inercial.</li> <li>4. Establecer las limitaciones de las relaciones clásicas.</li> <li>5. Calcular intervalos de tiempo en dos sistemas inerciales.</li> <li>6. Calcular la longitud de un objeto respecto a un sistema de referencia que se mueve a una velocidad cercana a la de la luz.</li> <li>7. Calcular la energía cinética y la cantidad de movimiento de una partícula en movimiento con una velocidad cercana a la de la luz.</li> <li>8. Otorgar relevancia a la relación entre la energía, la cantidad de movimiento y la masa de una partícula.</li> <li>9. Establecer el tipo de magnitudes absolutas y relativas en la relatividad especial.</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Comprender la naturaleza de la física y sus limitaciones.</li> <li>2. Reflexionar sobre las interacciones de la evolución de una nueva teoría con su contexto social y cultural.</li> <li>3. Analizar las complejas interacciones de los conocimientos de la física con la tecnología y la sociedad.</li> <li>4. Valorar positivamente el esfuerzo de la ciencia por explicar todos los fenómenos de la naturaleza.</li> <li>5. Interpretar la importancia de los experimentos científicos para contrastar las ideas científicas.</li> <li>6. Comprender que el desarrollo de la física supone un proceso cambiante y dinámico, mostrando una actitud flexible y abierta a opiniones diversas.</li> <li>7. Valorar la información proveniente de diferentes fuentes para formarse una opinión propia, que permita opinar críticamente sobre los problemas actuales de la física.</li> <li>8. Utilizar con autonomía fuentes de información para adquirir conocimientos sobre los científicos y sus aportaciones.</li> </ol>



## 4. SOLUCIONARIO

### 4.1. SOLUCIÓN DE LAS ACTIVIDADES PROPUESTAS

**A.1.** El Principio de Relatividad de Galileo muestra que el movimiento rectilíneo y uniforme del sistema de referencia no influye en los procesos mecánicos que tienen lugar en ese sistema de referencia. Por ello con fenómenos mecánicos no se puede determinar si un sistema está en reposo o en MRU. En consecuencia, como todos los sistemas con movimiento relativo uniforme o en reposo son equivalentes, respecto a su comportamiento mecánico, no será necesario establecer un sistema de referencia en reposo absoluto. Por tanto, las leyes mecánicas de Newton son válidas en todos los SRI.

**A.2.** En el caso de tomar de referencia el sistema O' sobre la carga q sólo actúa la interacción eléctrica con Q, y no la magnética puesto que la carga Q no se mueve respecto a O'. Sin embargo, si tomamos de referencia el sistema O sobre la carga q actúa la interacción eléctrica con Q y la magnética originada por el movimiento de Q. Por ello, desde el punto de vista electromagnético los sistemas O y O', que son inerciales puesto que se mueven con MRU, no son equivalentes.

**A.3.** Los fenómenos mecánicos son equivalentes en todos los sistemas inerciales, mientras que los electromagnéticos no. Ello da lugar a una asimetría en el estudio de los fenómenos físicos originados por las mismas entidades, sea mecánico o electromagnético el fenómeno estudiado. Este hecho puede interpretarse como que las leyes mecánicas son válidas en todos los SRI y las electromagnéticas no, dependen del SRI. Por ello, para describir las leyes electromagnéticas de forma universal deberíamos localizar un sistema de referencia absoluto, al cual referirlas. Esta diferenciación en el comportamiento de una misma realidad física supone un serio problema en la concepción física del universo.

**A.4.** La actividad tiene como objetivo afianzar la constancia de la velocidad de la luz con independencia del movimiento del foco o del observador. Por ello, la velocidad de la luz se establece como una constante universal.

**A.5.** la resolución de la siguiente actividad puede secuenciarse en los siguientes apartados:

- Cálculo del factor  $\beta$ :

$$\beta = \frac{v}{c} = \frac{0,998 \text{ c}}{c} = 0,998$$

- Cálculo del factor  $\gamma$ :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - 0,998^2}} = 15,82$$

- Cálculo de  $\Delta t$  (tiempo impropio puesto que el observador mide el inicio y el final de la desintegración en dos posiciones distintas para la partícula):

$$\Delta t = \gamma \cdot \Delta t_p = 15,82 \cdot 2 \mu\text{s} = 31,64 \mu\text{s}$$

- Cálculo de la distancia recorrida  $\Delta x$ :

$$\Delta x = v \cdot \Delta t = 0,998 \cdot 310^8 \text{ m/s} \cdot 31,64 \cdot 10^{-6} \text{ s}$$

$$\Delta x = 9473,02 \text{ m}$$

**A.6.** La cruz sólo contrae su longitud en la dirección del movimiento cuando su velocidad es próxima a la de la luz. Si la rapidez de la cruz es muy inferior a la de la luz su contracción es inapreciable.

En el caso de que  $v = 0,9 \text{ c}$  y  $L_p = 50 \text{ cm}$ , para calcular la longitud de la cruz en la dirección del movimiento calcularemos:

- El factor  $\beta$ :

$$\beta = \frac{v}{c} = \frac{0,9 \text{ c}}{c} = 0,9$$

- El factor  $\gamma$ :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - 0,9^2}} = 2,3$$

- Cálculo de L:

$$L = \frac{L_p}{\gamma} = \frac{50 \text{ cm}}{2,3} = 21,74 \text{ cm}$$

**A.7.** a) El carácter relativo del movimiento da lugar a que Einstein considere que su nave está en reposo, y por ello sus dimensiones se mantienen invariables, mientras que la nave de Galileo se acerca a gran velocidad. En consecuencia Einstein evaluará que la longitud de la nave de Galileo, en la dirección del movimiento, es menor a la de su nave. El rozamiento de Galileo será el inverso, puesto que para Galileo su nave está en reposo y es la nave de Einstein la que se acerca a gran velocidad.

b) Para Galileo la luz de la lámpara llega simultáneamente a las paredes de su nave, puesto que son equidistantes a la lámpara, que emite luz en todas las direcciones a velocidad constante. Sin embargo para Einstein, la paredes de la nave de Galileo se mueven, de modo que una se aleja y la otra se acerca al haz de luz emitido por la lámpara y, por ello, evaluará que la luz no llega simultáneamente a las

paredes de la nave de Galileo. Con este ejemplo remarcamos el carácter relativo de la simultaneidad.

**A.8** a) Según la mecánica clásica la relación entre el  $\Delta V$  y la velocidad que alcanza una partícula cargada acelerada por el campo eléctrico es:

$$q \cdot \Delta V = \frac{1}{2} m (v_f^2 - v_0^2)$$

Si suponemos que la partícula parte del reposo,  $v_0 = 0$ , la velocidad es:

$$v_f = \sqrt{\frac{2 \cdot q \cdot \Delta V}{m}}$$

b) Para acelerar un electrón desde el reposo hasta la velocidad  $c$  el  $\Delta V$  aplicado, según la teoría clásica, debe ser:

$$\Delta V = \frac{m \cdot c^2}{2 \cdot q} = \frac{9,1 \cdot 10^{-31}}{2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} (3 \cdot 10^8)^2 = 226 \cdot 10^3 \text{ V}$$

c) Según los postulados de la teoría clásica no existe ningún límite en la rapidez de las partículas. Las limitaciones para aplicar grandes potenciales a partículas cargadas que le proporcionen elevadas velocidades son sólo técnicas. En teoría se podía alcanzar cada vez mayor rapidez si se aplica a una partícula cargada un  $\Delta V$  cada vez más elevado. El hecho de que la teoría de la relatividad especial establezca un límite máximo en la rapidez de cualquier ente físico es contradictorio con los postulados clásicos.

**A.9.** Las definiciones clásicas y relativistas de la cantidad de movimiento difieren en el factor  $\gamma$  y coinciden cuando la rapidez de la partícula es muy inferior a la de la luz, es decir  $\frac{v}{c} \approx 0$  y por ello  $\gamma = 1$ . Este hecho permite intuir

que las definiciones operativas de las magnitudes clásicas son casos particulares de su definición relativista.

**A.10.** Según el planteamiento  $E_c = 2 E_0$ . Como la relatividad especial define:

$$E_c = (\gamma - 1) E_0$$

establecemos:

$$2 E_0 = (\gamma - 1) E_0$$

Por tanto el factor  $\gamma = 3$ .

Para hallar la rapidez del protón calculamos el factor  $\beta$ , de la expresión:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = 3$$

Elevando al cuadrado los dos miembros de la igualdad y

despejando  $\beta$ , obtenemos:

$$\beta = \frac{v}{c} = \sqrt{\frac{8}{9}}$$

Por tanto

$$v = \sqrt{\frac{8}{9}} c$$

**A.11.** Proponemos una actividad de búsqueda de información en internet que permita aproximar al alumnado a la vida de científicos españoles relevantes. Una posible manera de realizar este trabajo es que cada alumno o alumna, o en todo caso un pequeño grupo, elabore un informe breve sobre cada uno de los científicos citados, para posteriormente exponerlos en el grupo clase y analizar la importancia de cada uno de ellos.

Un posible guión de trabajo sería:

- Origen del científico.
- Formación del científico.
- Investigaciones o trabajos desarrollados por el científico.
- Importancia del mismo en la comunidad científica de su época.
- Hechos históricos que influyeron en su trabajo.
- Muerte y valoraciones posteriores de su actividad.

## 4.2. SOLUCIÓN DE LOS PROBLEMAS PROPUESTOS

### RELATIVIDAD DEL ESPACIO Y EL TIEMPO

#### PROBLEMA 1

Como referencia de solución del ejercicio podemos usar la tabla: comparación entre los fundamentos de la mecánica clásica y de la física relativista, expuesta en la página 282 del libro.

#### PROBLEMA 2

El enunciado de los postulados están expuestos en el apartado 3 del tema (La solución del problema: la teoría de la relatividad especial) y las consecuencias se analizan en la página 274 del texto.

#### PROBLEMA 3

La velocidad de la señal luminosa es constante ( $c$ ) y no depende de la velocidad ni del foco ni del observador. Esta afirmación es uno de los postulados de la relatividad especial.

#### PROBLEMA 4

La contracción relativista de la varilla sólo depende del valor de su rapidez, con independencia del sentido de movimiento.

- **Acercándose a  $v = 0,85 c$ .**

El procedimiento de resolución lo podemos secuenciar en los siguientes pasos:

- Cálculo del factor  $\beta$ :

$$\beta = \frac{v}{c} = \frac{0,85 c}{c} = 0,85$$

- Cálculo del factor  $\gamma$ :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - 0,85^2}} = 1,898$$

- Cálculo de la longitud impropia:

$$L = \frac{L_p}{\gamma} = \frac{1 \text{ m}}{1,898} = 0,53 \text{ m}$$

- **Alejándose a  $v = 0,15 c$ .**

- Cálculo del factor  $\beta$ :

$$\beta = \frac{v}{c} = \frac{0,15 c}{c} = 0,15$$

- Cálculo del factor  $\gamma$ :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - 0,15^2}} = 1,011$$

- Cálculo de la longitud impropia:

$$L = \frac{L_p}{\gamma} = \frac{1 \text{ m}}{1,011} = 0,989 \text{ m}$$

#### PROBLEMA 5

Según el enunciado;  $L = 0,5 L_p$

Con la relación relativista calculamos el factor  $\gamma$ :

$$\gamma = \frac{L_p}{L} = \frac{L_p}{0,5 L_p} = 2$$

A partir del valor de factor  $\gamma$  calculamos el factor  $\beta$ :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = 2$$

Despejando  $\beta$ , se obtiene:

$$1 = 4(1 - \beta^2) \rightarrow \beta = \sqrt{\frac{3}{4}}$$

Como

$$\beta = \frac{v}{c} \rightarrow v = \sqrt{\frac{3}{4}} c = 0,866 c$$

#### PROBLEMA 6

Puesto que el rectángulo se mueve en la dirección del eje Y sólo se producirá la contracción de la longitud relativista en ese eje ( $Y'$ ).

Según el enunciado  $XY' = \frac{3}{4} XY$

Es decir:  $Y' = \frac{3}{4} Y$

Con esta relación calculamos el factor  $\gamma$ :

$$\gamma = \frac{Y}{Y'} = \frac{Y}{\frac{3}{4} Y} = \frac{4}{3}$$

A partir del valor de factor  $\gamma$  hallamos el factor  $\beta$ :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{4}{3}$$

Despejando  $\beta$ , se obtiene:

$$1 = \frac{16}{9}(1 - \beta^2) \rightarrow \beta = \sqrt{\frac{7}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

Como  $\beta = \frac{v}{c} \rightarrow v = \frac{\sqrt{7}}{4} c$

#### PROBLEMA 7

El procedimiento de resolución lo podemos secuenciar en los siguientes pasos:

- Cálculo del factor  $\beta$ :

$$\beta = \frac{v}{c} = \frac{0,95 c}{c} = 0,95$$

- Cálculo del factor  $\gamma$ :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - 0,95^2}} = 3,202$$

- El enunciado nos proporciona el tiempo propio de  $3,5 \mu\text{s}$ . Cálculo de  $\Delta t$ :

$$\Delta t = \gamma \cdot \Delta t_p = 3,202 \cdot 3,5 \mu\text{s} = 11,2 \mu\text{s}$$

**PROBLEMA 8**

Este procedimiento se estructura en los siguientes pasos:

- Cálculo del factor  $\beta$ :

$$\beta = \frac{v}{c} = \frac{0,98 \text{ c}}{c} = 0,98$$

- Cálculo del factor  $\gamma$ :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - 0,98^2}} = 5,025$$

- Cálculo de  $\Delta t$ :

$$\Delta t = \gamma \cdot \Delta t_p = 5,025 \cdot 2 \cdot 10^{-6} \text{ s} = 10,05 \cdot 10^{-6} \text{ s}$$

- Cálculo del desplazamiento

$$\Delta x = 0,98 \cdot 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 10,05 \cdot 10^{-6} \text{ s}$$

- Calculando:  $\Delta x = 2954,7 \text{ m}$

**PROBLEMA 9**

En primer lugar calculamos el factor  $\beta$ :

$$\beta = \frac{v}{c} = \frac{10^3 \text{ m/s}}{3 \cdot 10^3 \text{ m/s}} = \frac{1}{3}$$

El factor  $\gamma$  es:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2}} = \frac{3}{\sqrt{8}}$$

Cálculo de  $\Delta t$ :

$$\Delta t = \gamma \cdot \Delta t_p = \frac{3}{\sqrt{8}} \cdot 700 \text{ s} = 742,5 \text{ s}$$

En el caso de que la rapidez de la luz fuese

$c = 1,5 \cdot 10^5 \text{ km/s}$ , el factor  $\beta$  es:

$$\beta = \frac{v}{c} = \frac{10^3 \text{ m/s}}{1,5 \cdot 10^3 \text{ m/s}} = \frac{2}{3}$$

El factor  $\gamma$  es:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2}} = \frac{3}{\sqrt{5}}$$

Cálculo de  $\Delta t$ :

$$\Delta t = \gamma \cdot \Delta t_p = \frac{3}{\sqrt{5}} \cdot 700 \text{ s} = 939,1 \text{ s}$$

**PROBLEMA 10**

Para el observador  $S'$  el triángulo está en reposo y su área es:

$$A' \text{ (respecto } S') = \frac{6 \text{ m} \cdot 8 \text{ m}}{2} = 24 \text{ m}^2$$

Respecto al observador  $S$  el triángulo se mueve, a una velocidad cercana a la de la luz, en la dirección de su base. Por ello el observador evaluará una base menor.

Para cuantificar la contracción de la base calculamos el factor  $\beta$ :

$$\beta = \frac{v}{c} = \frac{0,8 \text{ c}}{c} = 0,8$$

Después calculamos el factor  $\gamma$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - 0,8^2}} = 1,67$$

La base del triángulo medirá, respecto  $S$ :

$$\text{base} = \frac{6 \text{ m}}{1,67} = 3,6 \text{ m}$$

En consecuencia, el área del triángulo respecto a  $S$  es:

$$A \text{ (respecto } S) = \frac{3,6 \text{ m} \cdot 8 \text{ m}}{2} = 14,4 \text{ m}^2$$

**DINÁMICA RELATIVISTA**

**PROBLEMA 11.** Puesto que la fuerza es constante la aceleración es contante, es decir el móvil varía su velocidad a un ritmo uniforme continuamente. En consecuencia, según la mecánica de Newton, el cuerpo aumentará su velocidad de forma indefinida, sin límite alguno. Sin embargo, se comprueba experimentalmente que la velocidad tiende a un valor límite ( $c$ ), hecho que explica la dinámica relativista y no puede justificar la dinámica de Newton o clásica.

**PROBLEMA 12.** Según la mecánica relativista:  $E = \gamma E_0$

Como  $E = 1,1 E_0$ , el factor  $\gamma$  es:  $\gamma = \frac{1,1 \cdot E_0}{E_0} = 1,1$

Aplicando la definición del factor  $\gamma$  calculamos el factor  $\beta$ :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = 1,1$$

Despejando  $\beta$ , se obtiene:  $1 = 1,1^2 (1 - \beta^2) \Rightarrow \beta = 0,416$

Y finalmente  $\beta = \frac{v}{c} \rightarrow v = 0,416 \text{ c}$

**PROBLEMA 13**

Como la rapidez del electrón es  $v = 0,5 c$  el factor  $\beta$  es:

$$\beta = \frac{v}{c} = \frac{0,5 c}{c} = 0,5$$

Y el factor  $\gamma$  vale:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - 0,5^2}} = 1,1547$$

La energía cinética del electrón se determina por la ecuación:  $E_c = (\gamma - 1) \cdot m c^2$

Por tanto:  $E_c = (1,1547 - 1) \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} (3 \cdot 10^8)^2$

Realizando cálculos:  $E_c = 1,3 \cdot 10^{-14} \text{ J}$

**PROBLEMA 14**

La energía total es:  $E = \gamma E_0$

y según el enunciado debe ser el 50% mayor que la energía en reposo:  $E = E_0 + 0,5 E_0 = 1,5 E_0$

Por tanto, el factor  $\gamma$  es:  $\gamma = 1,5$ .

Lo que permite hallar el factor  $\beta$  a partir de la ecuación:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = 1,5$$

Despejando  $\beta$ , se obtiene:  $1 = 1,5^2 (1 - \beta^2) \Rightarrow \beta = 0,745$

Como  $\beta = \frac{v}{c} \rightarrow v = 0,745 c$

Para determinar el valor de la cantidad de movimiento aplicaremos su definición operativa:  $p = \gamma m v$

Sustituyendo valores:

$$p = 1,5 \cdot 1,674 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \cdot 0,745 \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

$$p = 5,612 \cdot 10^{-19} \text{ kg m/s}$$

**PROBLEMA 15**

Para el observador terrestre  $v = 0,4 c$  y, por ello, el factor  $\beta$  vale:

$$\beta = \frac{0,4 c}{c} = 0,4$$

Y el factor  $\gamma$ :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - 0,4^2}} = 1,091$$

Y la energía de la nave es:

$$E = \gamma m c^2 = 1,091 \cdot 1000 \cdot (3 \cdot 10^8)^2 = 9,82 \cdot 10^{19} \text{ J}$$

Para el observador situado en la nave sólo existe energía asociada a la nave en reposo, y por ello:

$$E = m c^2 = 1000 \cdot (3 \cdot 10^8)^2 = 9 \cdot 10^{19} \text{ J}$$

**PROBLEMA 16**

El factor  $\beta$  tiene un valor de:

$$\beta = \frac{0,8 c}{c} = 0,8$$

Y el factor  $\gamma$ :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - 0,8^2}} = 1,67$$

La energía cinética relativista se determina por la ecuación:

$$E_c = (\gamma - 1) \cdot m \cdot c^2 = 0,67 \cdot m \cdot c^2$$

La energía cinética clásica de la partícula debería ser:

$$E_c = \frac{1}{2} m (0,8 c)^2 = 0,31 m \cdot c^2$$

La relación entre ambas energías cinéticas es:

$$\frac{E_{c,\text{relativista}}}{E_{c,\text{clásica}}} = \frac{0,67 \cdot m \cdot c^2}{0,31 m \cdot c^2} = 2,1$$

**PROBLEMA 17**

La energía que tiene una partícula libre, en un determinado sistema de referencia, es la suma de una energía propia o "en reposo", invariante y proporcional a su masa,  $E_0 = m \cdot c^2$ , más una energía cinética o "adicional", asociada al movimiento de la partícula. En el caso de que la partícula se mueva con una rapidez baja respecto a la luz,  $v \ll c$ , la energía cinética se calcula por la expresión clásica,  $E_c = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$ . Al comparar las dos expresiones verificamos que la energía en reposo es directamente proporcional al cuadrado de  $c$  mientras la cinética lo es al cuadrado de  $v$ . Por ello, el elevado valor de  $c$ , respecto a  $v$ , hace que la energía en reposo sea enorme en comparación con su energía cinética.

**PROBLEMA 18**

La ecuación relativista:  $|\Delta E| = |\Delta m| \cdot c^2$  permite calcular la reducción de masa del Sol en cada minuto:

$$|\Delta m| = \frac{|\Delta E|}{c^2} = \frac{2,34 \cdot 10^{28}}{(3 \cdot 10^8)^2} \text{ kg} = 2,6 \cdot 10^{11} \text{ kg}$$

Si el ritmo de emisión se considera constante, el tiempo necesario para emitir la mitad de la materia solar es:

$$1 \cdot 10^{30} \text{ kg} \cdot \frac{1 \text{ min}}{2,6 \cdot 10^{11} \text{ kg}} = 3,846 \cdot 10^{18} \text{ min}$$

Tiempo que corresponde a:  $\Delta t = 7,32 \cdot 10^{12}$  años

### PROBLEMA 19

En el caso de que  $v \ll c$  el factor  $\gamma = 1$ . Por ello:

$$L = \frac{L_p}{\gamma} \rightarrow L = L_p$$

$$\Delta t = \gamma \cdot \Delta t_p \Rightarrow \Delta t = \Delta t_p$$

$$p = \gamma m v \Rightarrow p = m \cdot v$$

Para deducir la energía cinética expresaremos la energía de la partícula libre por su desarrollo en serie (mostrado en la página 280 del libro):

$$E = mc^2 + m \frac{v^2}{2} + \frac{3}{8} m \frac{v^4}{c^2} \dots$$

Como la energía cinética de la partícula es:

$$E_c = E - E_0$$

$$E_c = \left( mc^2 + m \frac{v^2}{2} + \frac{3}{8} m \frac{v^4}{c^2} \dots \right) - (mc^2)$$

$$E_c = m \frac{v^2}{2}$$

si despreciamos los valores de la serie a partir del tercer término por el elevado valor de  $c$  frente  $v$ .

En conclusión, la teoría de la relatividad da lugar a la formulación clásica cuando la rapidez es pequeña en comparación a  $c$  (Principio de correlación).

### PROBLEMA 20

Para calcular la energía total de la partícula previamente hallamos el factor  $\gamma$ :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left( \frac{0,943 c}{c} \right)^2}} = 3$$

La energía total es:  $E = \gamma E_0$

Como  $E_0 = 0,5 \text{ MeV}$ , la energía es:

$$E = 3 \cdot 0,5 \text{ MeV} = 1,5 \text{ MeV}$$

La energía cinética es:

$$E_c = (\gamma - 1) \cdot E_0 = 2 \cdot 0,5 \text{ MeV} = 1 \text{ MeV}$$

El valor de la cantidad de movimiento. Aplicando la fórmula operativa:

$$p = \gamma m v = 3 \cdot m 0,943 c = 2,829 m c$$

Para obtener el valor de  $mc$ , tenemos en cuenta que:

$$m \cdot c = \frac{E_0}{c} = \frac{0,5 \cdot 10^3 \text{ eV} \cdot \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}}{1 \text{ eV}}}{3 \cdot 10^3 \text{ m/s}} = 2,67 \cdot 10^{-22} \text{ kg m/s}$$

Por tanto:

$$p = 2,829 \cdot 2,67 \cdot 10^{-22} \text{ kg m/s} = 7,5 \cdot 10^{-22} \text{ kg m/s}$$

## 4.3. SOLUCIÓN DE LOS PROBLEMAS DE AUTOEVALUACIÓN

### EJERCICIO 1

Puesto que la contracción sólo se produce en la dirección de uno los lados, calcularemos la contracción del lado.

Inicialmente cada lado del cuadrado tiene una longitud de:

$$L_p = \sqrt{25 \text{ m}^2} = 5 \text{ m}$$

La longitud de los lados que coinciden con la dirección del movimiento es:

$$L = \frac{5 \text{ m}^2}{5 \text{ m}} = 1 \text{ m}$$

A partir de la relación relativista:

$$\gamma = \frac{L_p}{L} = \frac{5 \text{ m}}{1 \text{ m}} = 5$$

Aplicando la definición del factor  $\gamma$ :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = 5$$

Despejando  $\beta$ , se tiene:  $1 = 5^2 (1 - \beta^2) \Rightarrow \beta = 0,98$

Como  $\beta = \frac{v}{c} \rightarrow v = 0,98 c$

### EJERCICIO 2

El factor  $\beta$  es:  $\beta = \frac{0,8 c}{c} = 0,8$

Y el factor  $\gamma$ :  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - 0,8^2}} = 1,67$

Aplicando la relación relativista:

$$\Delta t = \gamma \cdot \Delta t_p = 1,67 \cdot 26 \text{ ns} = 43,4 \text{ ns}$$

### EJERCICIO 3

Como la energía total es:  $E = \gamma E_0$  y según el enunciado debe ser el 30% mayor que la energía en reposo:

$$E = E_0 + 0,3 E_0 = 1,3 E_0$$

Por tanto, el factor  $\gamma$  es:  $\gamma = 1,3$ .

Lo que permite conocer el factor  $\gamma$ , a partir de la ecuación:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = 1,3$$

Despejando  $\beta$ , se obtiene:  $1 = 1,3^2 (1 - \beta^2) \Rightarrow \beta = 0,64$

Como  $\beta = \frac{v}{c} \rightarrow v = 0,64 c$

### EJERCICIO 4

El fenómeno observado es la propagación, puesto que su velocidad es constante e independiente del movimiento del foco o del sistema inercial de observación, postulado básico de la relatividad especial: la rapidez de la luz es independiente del movimiento del observador que la mide.

### EJERCICIO 5

Como referencia de solución del ejercicio podemos usar la tabla: comparación entre los fundamentos de la mecánica clásica y de la física relativista, de la página 282 del libro.



## 5. CRITERIOS DE EVALUACIÓN

Además de los criterios de evaluación generales de esta materia, y considerando que necesariamente son muy generales, para realizar la evaluación del alumnado creemos conveniente precisar más y establecer unos **criterios específicos** del tema.

Al terminar el tema las alumnas y los alumnos serán capaces de:

1. Conocer algunos fenómenos que no se pueden explicar mediante las leyes de la física clásica, como la invarianza de la velocidad de la luz, la existencia de una velocidad límite para las partículas intensamente aceleradas ...
2. Enunciar los postulados de la teoría de la relatividad especial.
3. Utilizar los principios de la teoría de la relatividad para explicar la dilatación del tiempo y la contracción de las longitudes.
4. Asumir que según las consecuencias de la relatividad los principios de conservación de la masa y de la energía están vinculados.
5. Comprender y aplicar las ecuaciones:

$$E = \gamma mc^2 \quad \text{y} \quad E = E_c + E_0.$$

6. Ante una cuestión o ejercicio numérico relacionados con la relatividad de las distancias o los intervalos de tiempo, mostrar capacidad suficiente para analizarlo, diseñar una estrategia de resolución y llevarla a cabo.
7. Saber en qué circunstancias hay que aplicar las correcciones que la TRE hace a la física clásica.
8. Realizar cálculos directos sobre intervalos de tiempo, distancias, energía cinética y relaciones masa-energía desde distintos sistemas inerciales.
9. Diferenciar la relatividad especial de la general.
10. Valorar el esfuerzo realizado por la ciencia para, a través de diferentes modelos y teorías, intentar explicar todos los fenómenos de la naturaleza, huyendo de dogmatismos y de ideas preconcebidas.
11. Valorar la importancia que la teoría de la relatividad y la teoría cuántica tienen en el desarrollo de la física del siglo XX.
12. En las tareas en equipo, participar con actitud positiva y mostrar respeto por las opiniones ajenas.

## 6. EJERCICIOS PROPUESTOS PARA LA EVALUACIÓN FINAL DEL TEMA

### RELATIVIDAD DEL ESPACIO Y EL TIEMPO

1. Señala los límites de la física clásica que pone de manifiesto la teoría de la relatividad.
2. Enuncia los postulados de la relatividad de Einstein y aplícalos a la deducción de la dilatación del tiempo.
3. Una varilla de 50 cm de longitud se mueve con velocidad constante en sentido longitudinal respecto de la posición de un observador en reposo. Determina el valor que debe tener la rapidez de la varilla para que tu apreciación de su longitud sea 42 cm.
4. La vida media de un mesón  $m^+$  (muón +) es  $2,3 \cdot 10^{-6}$  s en su propio SR. ¿Cuál es su vida media respecto al SR del laboratorio, si la velocidad del muón es  $v = 0,99 c$ ? ¿Qué distancia podrá recorrer a lo largo de su vida?
5. Se planea un viaje espacial a una estrella situada a 50 años-luz de la Tierra y se desea que el tiempo de duración del viaje sea de 70 años medidos desde la propia nave. ¿Con qué rapidez debe realizarse el viaje? ¿Cuánto dura para el viajero?
6. Una nave interestelar parte hacia la estrella Sirio, situada a 8,7 años luz, viajando a una rapidez constante de  $0,85 c$ . Calcula el tiempo que tarda en realizar el viaje de ida y vuelta según:
  - a) Un observador inercial terrestre.
  - b) Un observador inercial situado en la nave.

### DINÁMICA RELATIVISTA

7. Según la teoría de la relatividad, ¿cuál es el valor de la rapidez y la energía total de un electrón cuya cantidad de movimiento es  $0,4 \text{ MeV}/c$ ?

Dato:  $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ .
8. Haz una representación gráfica de la energía cinética de una partícula en función de su rapidez desde el punto de vista de la física clásica y desde el punto de vista relativista.
9. Un electrón y su antipartícula, un positrón, chocan frontalmente y se aniquilan, produciendo radiación electromagnética. Calcula la energía emitida suponiendo despreciable la energía cinética inicial de las partículas.

Dato:  $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ .
10. Una partícula inestable, el pión  $\pi^+$  tiene una energía en reposo de  $139,6 \text{ MeV}$ . Calcula su masa en reposo y su energía si se mueve a la velocidad  $v = 0,98 c$ .

Dato:  $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ .
11. Un protón tiene una energía en reposo de  $938 \text{ MeV}$ . Calcula la rapidez y el momento lineal cuando su energía total sea  $1450 \text{ MeV}$ .
12. Determina la velocidad para que la cantidad de movimiento de una partícula difiera en el 2 % del valor correspondiente a la fórmula clásica

$$p_{\text{clásica}} = m_0 v.$$

## 7. RECURSOS Y BIBLIOGRAFÍA

### TEXTOS

ALONSO, M.F y SOLER, V.I. 2002. *Construyendo la relatividad*. Equipo Sirius. Ed. Sirius: Madrid.

BERGIA, S. y otros. 1992. *El siglo de la física*. Tusquets: Barcelona.

BODANIS, D. 2002.  *$E = mc^2$ . La biografía de la ecuación más famosa del mundo*. Planeta.

COHEN, G. y SPIRO, M. 1990. *La matière-espace-temps*. Gallimard: París.

EINSTEIN, A. 1984. *Sobre la teoría de la relatividad especial y general*. Alianza: Madrid.

EINSTEIN, A. e INFELD, L. 1983. *La evolución de la física*. Salvat: Barcelona.

EINSTEIN, A. y otros. 1968. *La teoría de la relatividad*. Alianza: Madrid.

GLICK, T.F. 1989. *Einstein y los españoles. Ciencia y sociedad en la España de entreguerras*. Alianza: Madrid.

HAWKING, S. 2002. *El universo en una cáscara de nuez*. Crítica: Barcelona.

HOFFMANN, B. 1985. *La relatividad y sus orígenes*. Labor: Barcelona.

HOLTON, G. 1992. *Ensayos del pensamiento científico en la época de Einstein*. Madrid: Alianza.

LANDAU, L. y RUMER, Y. 1970. *¿Qué es la teoría de la relatividad?* Aguilar: Madrid.

MERLEAU-PONTY, J. 1994. *Albert Einstein: vida, obra y filosofía*. Alianza: Madrid.

PÉREZ CELADA, H. 2003. *La teoría de la relatividad y su didáctica en el bachillerato: análisis de dificultades y una propuesta de tratamiento*. Tesis doctoral. Departamento de didáctica de las ciencias. Universitat de València.

SÁNCHEZ-RON, J.M. 2001. *Historia de la física cuántica*. Crítica: Barcelona.

SÁNCHEZ-RON, J.M. 1983. *El origen y desarrollo de la relatividad*. Alianza: Madrid.

SCHWINGER, J. 1995. *El legado de Einstein*. Biblioteca Scientific American: Barcelona.

STRATHERN, P. 1999. *Einstein y la relatividad*. Siglo XXI: Madrid.

### ARTÍCULOS

ALAMAÑ B. 2002. Enseñanza por cambio conceptual: de la física clásica a la relatividad. *Enseñanza de las Ciencias*, vol. 18, nº 3, 463-471.

ALCAINE, G. 1989. Sobre masa y energía. *Revista Española de Física*, vol. 3, nº 1, 59-62.

ALEMAÑ, R.A. 1997. Errores comunes sobre relatividad entre los profesores de enseñanza secundaria. *Enseñanza de las Ciencias*, vol. 15, nº 3, 301-307.

ALONSO, M. SOLER, V. 2006. La relatividad en el bachillerato. *Enseñanza de las Ciencias*, vol. 24, nº 3, 439-453.

ALONSO, M. 2001. Masa y velocidad. *Revista Española de Física*, vol. 15, nº 1, 40-41.

BRUNE, E. y MERGNY, P. 2002. La relatividad restringida. *Mundo científico*. nº 236, 76-79.

FRANCO, S. 1997. El principio de la relatividad y la naturaleza del tiempo (I). *Revista Española de Física*, vol. 11, nº 3, 37-42.

FRANCO, S. 1997. El principio de la relatividad y la naturaleza del tiempo (II). *Revista Española de Física*, vol. 11, nº 4, 23-28.

GALISON, P. 2002. Einstein, los relojes y la relatividad. *Mundo científico*, nº 234, pp.32-37.

GIL, D., SENENT, J. y SOLBES, J. 1988.  $E = mc^2$ , la ecuación más famosa de la física: una incomprendida. *Revista Española de Física*, vol. 2, nº 2, 53-55.

PASCUAL, P. y LATORRE, J.I. 2005) La teoría de la relatividad especial. *Revista Española de Física*, vol. 19, nº 1, 4-9.

PÉREZ, H y SOLBES, J. 2006. Una propuesta sobre la enseñanza de la relatividad con motivación para el aprendizaje de la física. *Enseñanza de las Ciencias*, vol. 24, nº 2, 269-283.

VV.AA. 1995. La historia de la ciencia como estrategia para la enseñanza del Bachillerato. Análisis interdisciplinar de la figura de Albert Einstein. *Alambique 5*, 123-129.

# FÍSICA NUCLEAR

# 8

## 1. PRESENTACIÓN GENERAL DEL TEMA

El tema comienza con un pequeño resumen del desarrollo histórico de la radiactividad, usando una tabla en la que comparamos los fenómenos radiactivos y la evolución de los modelos atómicos, con el objetivo de establecer el concepto de **núcleo**. Tras ello estudiamos las características físicas del núcleo y planteamos el problema de explicar su estabilidad.

La estabilidad nuclear se justifica desde el punto de vista energético por la **energía de enlace**, estableciendo la energía de enlace por nucleón como criterio de estabilidad, y desde el punto de vista mecánico a partir de la interacción nuclear, cuyas características se detallan.

A continuación desarrollamos los **procesos de desintegración**, explicando su naturaleza, representándolos mediante ecuaciones que verifican los principios de conservación de la carga y del número de nucleones (leyes de Soddy) y estableciendo las leyes de desintegración. Para ello anali-

zamos el carácter estadístico de las leyes y el significado de los conceptos asociados: actividad, periodo de semidesintegración y vida media. Consideramos importante comentar el significado y las relaciones entre los conceptos implicados, para lo cual incluimos ejemplos de aplicación, estableciendo pautas de resolución, diagramas conceptuales y applets que reproducen los procesos de desintegración.

Posteriormente analizamos las **reacciones nucleares** mediante su representación por ecuaciones que verifican los principios de conservación de la carga y del número de nucleones, y el aspecto energético, con ayuda del factor  $Q$ . El análisis y valoración de las reacciones de fisión y fusión, por su gran importancia técnica y política, recibe un tratamiento especial.

Finalmente se realiza una introducción a las **partículas elementales** de la materia y a sus **interacciones**, que explican las fuerzas fundamentales de la Física.

## 2. CONTENIDOS

### 1 *La radiactividad y el descubrimiento del núcleo*

- Desarrollo histórico
- Concepto de radiactividad

### 2 *Estructura y características del núcleo*

- Nucleidos
- Isótopos
- Unidad de masa atómica
- Tamaño y densidad nuclear

### 3 *La estabilidad nuclear*

- Estudio energético
- Energía de enlace por nucleón
- Estudio mecánico. Características de la interacción nuclear
- Carta de isótopos: diagrama N-Z

### 4 *Modos de desintegración y leyes de desplazamiento radiactivo*

- Emisión  $\alpha$
- Emisión  $\beta$
- Emisión  $\beta^+$
- Emisión  $\gamma$

### 5 *Ley de desintegración radiactiva: actividad, periodo de semidesintegración y vida media*

- Constante radiactiva
- Actividad radiactiva
- Ley de desintegración radiactiva
- Periodo de semidesintegración
- Vida media

### 6 *Las familias radiactivas y el equilibrio radiactivo*

- Concepto de familia radiactiva
- Equilibrio radiactivo

### 7 *Reacciones nucleares*

- La representación y clasificación de las reacciones
- Estudio energético de las reacciones
- Radiactividad artificial

### 8 *Fisión y fusión nuclear*

- Fisión nuclear
- Reactores nucleares
- Centrales nucleares en España
- Problemas derivados de la energía nuclear
- Fusión nuclear
- Tendencias actuales de la fusión nuclear

### 9 *La importancia de la física nuclear y las aplicaciones de los radioisótopos*

- El papel de la mujer en el desarrollo de la física nuclear
- La importancia de los aspectos sociales y políticos
- Aplicaciones tecnológicas de los radioisótopos
- Dosis física y efectiva de la radiación
- La radiactividad en la vida diaria

### 10 *Partículas elementales y fuerzas fundamentales de la naturaleza*

- Partículas fundamentales: Quarks y leptones
- Las cuatro fuerzas fundamentales y las partículas de fuerza

### 3. OBJETIVOS ESPECÍFICOS (Capacidades que hay que desarrollar)

CONCEPTOS	PROCEDIMIENTOS	ACTITUDES
<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Establecer las principales características del fenómeno de radiactividad.</li> <li>2. Definir el fenómeno de radiactividad.</li> <li>3. Diferenciar y caracterizar las radiaciones emitidas en los procesos radiactivos.</li> <li>4. Caracterizar el núcleo en función de sus nucleones.</li> <li>5. Establecer las características físicas del núcleo.</li> <li>6. Comprender el significado del defecto de masa y la energía de ligadura.</li> <li>7. Establecer las características de la interacción nuclear.</li> <li>8. Explicar los procesos radiactivos.</li> <li>9. Definir los conceptos de constante radiactiva, periodo de semidesintegración y vida media.</li> <li>10. Comprender el origen y la representación de las reacciones nucleares.</li> <li>11. Diferenciar las reacciones de fisión y fusión.</li> <li>12. Comprender el fundamento de las aplicaciones de los radioisótopos.</li> <li>13. Comprender las interacciones fundamentales en la naturaleza.</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Determinar las características físicas de un nucleido.</li> <li>2. Calcular el defecto de masa y la energía de ligadura de un nucleido.</li> <li>3. Establecer qué nucleido es más estable a partir de la energía de ligadura por nucleón.</li> <li>4. Ajustar reacciones de desintegración y nucleares aplicando los principios de conservación de la carga y del nº de nucleones.</li> <li>5. Aplicar la ley exponencial de desintegración para calcular las variaciones de la actividad, la masa y la cantidad de núcleos de una muestra radiactiva.</li> <li>6. Establecer relaciones entre la constante radiactiva, el periodo de semidesintegración y la vida media.</li> <li>7. Calcular el factor Q de una reacción nuclear.</li> <li>8. Aplicar las leyes radiactivas a problemas prácticos como la datación de muestras.</li> <li>9. Aplicar distintos criterios de valoración para comparar aspectos de las reacciones nucleares, como las reacciones de fisión y fusión.</li> <li>10. Realizar un estudio comparativo de las características y dominios de influencia de las principales interacciones.</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Adquirir una comprensión de la <b>naturaleza de la ciencia</b> y del trabajo científico a partir del desarrollo de la física nuclear.</li> <li>2. Conectar la física nuclear con sus <b>aplicaciones tecnológicas</b> y los fenómenos de la vida cotidiana y abordar el estudio de aquellas aplicaciones de mayor relevancia social.</li> <li>3. Abordar las <b>implicaciones sociales y éticas</b> del uso de la física nuclear.</li> <li>4. Valorar cómo pueden contribuir los procesos nucleares a un futuro mejor y sostenible.</li> <li>5. Evaluar la evolución de los modelos teóricos en función del desarrollo de los conocimientos.</li> <li>6. Comprender el problema de la contaminación radiactiva y sus implicaciones.</li> <li>7. Evaluar las implicaciones sociales y políticas de la energía nuclear desde diferentes criterios.</li> </ol>

## 4. SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS PROPUESTOS

### 4.1 ACTIVIDADES PROPUESTAS

#### A.1

Propiedades del fenómeno de radiactividad:

- Se produce en algunos tipos de átomos, los isótopos radiactivos.
- La emisión de radiación es espontánea (no requiere aporte energético externo), persistente y continua.
- La radiación emitida es compuesta (radiación  $\alpha$ ,  $\beta$ , y  $\gamma$ ).
- El proceso de emisión es estadístico y su ritmo no depende de las interacciones atómicas del isótopo.

- La emisión de radiación origina que el isótopo de donde procede se desintegre en otro isótopo distinto (teoría de la transmutación) que puede ser radiactivo o estable.

La radiactividad se relaciona con el origen de la física nuclear al utilizar la radiación  $\alpha$ , emitida por muestras radiactivas, para descubrir el núcleo (experimento de Rutherford) y por demostrarse, posteriormente, que estas supuestas “radiaciones” proceden del interior del núcleo.

La emisión radiactiva sólo depende del tipo de núcleo y no de las interacciones a nivel atómico, originadas por la distribución electrónica. Al ser un fenómeno estadístico se incrementa con la cantidad de núcleos radiactivos.

#### A.2

Radiación / Propiedad	Comportamiento eléctrico	Poder de penetración	Naturaleza
Alfa ( $\alpha$ )	Partículas con carga relativa + 2, respecto a la carga fundamental, y muy pesadas, que se desvían por la acción de campos eléctricos y magnéticos.	Poco penetrantes; recorren distancias cortas al atravesar la materia como consecuencia de su gran poder ionizante.	Núcleos de helio.
Beta ( $\beta$ )	Partículas con carga relativa -1, con muy poca masa y con elevada velocidad; por ello interactúan con campos magnéticos o eléctricos haciendo que se desvíen considerablemente de su trayectoria.	Más penetrantes que las partículas $\alpha$ .	Electrones con elevada velocidad.
Gamma ( $\gamma$ )	Sin carga ni masa en reposo.	Muy penetrantes.	Radiación de elevada frecuencia.

#### A.3

Estos átomos tienen idéntica estructura electrónica, que determina el comportamiento químico, y distinto tipo de núcleo, como consecuencia de sus partículas integrantes. Al establecer que el núcleo está compuesto por protones y neutrones se dedujo que puesto que el número de protones es el mismo que el de electrones (carácter neutro de los átomos), los núcleos isotópicos difieren en la cantidad de neutrones del núcleo.

#### A.4

Un elemento químico puede tener varios isótopos y a cada isótopo le corresponde un nucleido, o clase de núcleo. La abundancia isotópica indica el tipo y el porcentaje de cada isótopo de un elemento químico y, en consecuencia, los nucleidos que lo componen. Los átomos isotópicos están formados por un núcleo, su nucleido, y una estructura electrónica que determina su comportamiento químico.

#### A.5

Por definición:

$$1\text{ u} = \frac{1}{12} \text{ masa de isótopo de } {}^{12}_6\text{C}$$

Por ello, calculamos la masa de un átomo de  ${}^{12}\text{C}$ :

$$1 \text{ átomo de } {}^{12}\text{C} \frac{12 \cdot 10^{-3} \text{ kg}}{6,022 \cdot 10^{23} \text{ átomos de } {}^{12}\text{C}} = 1,992 \cdot 10^{-26} \text{ kg}$$

Por tanto:

$$1\text{ u} = \frac{1}{12} 1,992 \cdot 10^{-26} \text{ kg} = 1,6605 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

#### A.6

La masa relativa del nitrógeno es:

$$m_{\text{N}} = \frac{99,64 \cdot 14,003074 + 0,36 \cdot 15,000109}{100} = 14,006663$$



### A.7

Esta actividad se propone para establecer la elevada densidad del núcleo respecto a la materia en general, lo cual permite establecer que la materia ordinaria se distribuye en un espacio vacío inmenso en comparación al volumen nuclear.

### A.8

- Determinación de nucleones:  
protones =  $Z = 2$ ; neutrones =  $A - Z = 4 - 2 = 2$ .
- Masa de átomos hidrógeno (para considerar protones y electrones) y neutrones:  
 $m_{\text{partículas (H+n)}} = 2 \cdot 1,007825 \text{ u} + 2 \cdot 1,008665 \text{ u} = 4,032980 \text{ u}$
- Cálculo del defecto de masa:  
 $\delta m = 4,032980 \text{ u} - 4,002603 \text{ u} = 0,030377 \text{ u}$ .
- Cálculo de la energía de ligadura:  
 $E_b = 0,030377 \text{ u} \cdot 931,47 \text{ MeV/u} = 28,30 \text{ MeV}$ .

### A.9

Isótopo	$\delta m = Z \cdot 1,007825 \text{ u} + (A - Z) \cdot 1,008665 \text{ u} - m_{\text{isó}}$	$E_b = \delta m \cdot 931,47 \text{ MeV/u}$	$E_b / A$
$^{60}_{28}\text{Ni}$	$28 \cdot 1,007825 \text{ u} + (32) \cdot 1,008665 \text{ u} - 59,930779 = 0,565601 \text{ u}$	526,84 MeV	8,78 MeV/nucleón
$^{62}_{28}\text{Ni}$	$28 \cdot 1,007825 \text{ u} + (34) \cdot 1,008665 \text{ u} - 61,928340 = 0,585370 \text{ u}$	545,25 MeV	8,794 MeV/nucleón
$^{58}_{26}\text{Fe}$	$26 \cdot 1,007825 \text{ u} + (32) \cdot 1,008665 \text{ u} - 57,933274 = 0,547456 \text{ u}$	509,94 MeV	8,792 MeV/nucleón
$^{60}_{26}\text{Fe}$	$26 \cdot 1,007825 \text{ u} + (34) \cdot 1,008665 \text{ u} - 59,934048 = 0,564012 \text{ u}$	525,36 MeV	8,76 MeV/nucleón

La  $E_b/A$  de los isótopos  $^{62}_{28}\text{Ni}$  y  $^{58}_{26}\text{Fe}$  es muy parecida, indicando que son muy estables, aunque el isótopo  $^{62}_{28}\text{Ni}$  es más estable.

### A.10

Un modelo de núcleo constituido por partículas  $\alpha$  y  $\beta$  no puede explicar la composición del núcleo más simple, el de hidrógeno, cuya masa es la cuarta parte de la de una partícula  $\alpha$ . Por otra parte, se comprobó que la masa de cualquier isótopo era, aproximadamente, múltiplo de la del átomo de hidrógeno. Por ello, se propuso un modelo inicial en que los núcleos estaban constituidos por protones y electrones. De ahí el nombre que recibió la partícula  $^1_1\text{H}$ , del griego "protos" primero. Sin embargo, este modelo no conseguía justificar la estabilidad nuclear. La composición nuclear pudo verificarse al desintegrar el núcleo, mediante reacciones nucleares, y comprobar que está compuesto por protones y neutrones.

### A.11

Proceso a	$^{32}_{15}\text{P} \rightarrow ^0_{-1}\text{e} + ^0_0\bar{\nu}_e + ^A_Z\text{X}$
C. carga	$15 = (-1) + Z; Z = 15 + 1 \quad Z = 16 \text{ (S)}$
C. n° nucleones	$32 = A \quad A = 32$
Ecuación	$^{32}_{15}\text{P} \rightarrow ^0_{-1}\text{e} + ^0_0\bar{\nu}_e + ^{32}_{16}\text{S}$

Proceso b	$^{222}_{86}\text{Rn} \rightarrow ^4_2\text{He} + ^A_Z\text{X}$
C. carga	$86 = 2 + Z; Z = 86 - 2 \quad Z = 84 \text{ (Po)}$
C. n° nucleones	$222 = A + 4; A = 222 - 4 \quad A = 218$
Ecuación	$^{222}_{86}\text{Rn} \rightarrow ^4_2\text{He} + ^{218}_{84}\text{Po}$

Proceso c	$^{232}_{90}\text{Th} \rightarrow ^4_2\text{He} + ^A_Z\text{X}^*; ^A_Z\text{X}^* \rightarrow ^A_Z\text{X} + ^0_0\gamma$
C. carga	$90 = 2 + Z; Z = 90 - 2 \quad Z = 88 \text{ (Ra)}$
C. n° nucleones	$232 = A + 4; A = 232 - 4 \quad A = 228$
Ecuación	$^{232}_{90}\text{Th} \rightarrow ^4_2\text{He} + ^{228}_{88}\text{Ra}^* \rightarrow ^{228}_{88}\text{Ra} + \gamma$

Proceso d	$^{40}_{19}\text{K} \rightarrow ^0_{-1}\text{e} + ^0_0\bar{\nu}_e + ^A_Z\text{X}$
C. carga	$19 = (-1) + Z; Z = 19 + 1 \quad Z = 20 \text{ (Ca)}$
C. n° nucleones	$40 = A \quad A = 40$
Ecuación	$^{40}_{19}\text{K} \rightarrow ^0_{-1}\text{e} + ^0_0\bar{\nu}_e + ^{40}_{20}\text{Ca}$

Proceso e	$^{40}_{19}\text{K} + ^0_{-1}\text{e} \rightarrow ^A_Z\text{X} + \text{RX}$
C. carga	$19 + (-1) = Z \quad Z = 18 \text{ (Ar)}$
C. n° nucleones	$40 = A \quad A = 40$
Ecuación	$^{40}_{19}\text{K} + ^0_{-1}\text{e} \rightarrow ^{40}_{18}\text{Ar} + \text{RX}$

Los procesos de desintegración siguen una ley estadística por ello un porcentaje de núcleos puede desintegrarse mediante un proceso y otro por otro procedimiento.

### A.12

La tabla de constantes expresada en el SI es:

Isótopo	Constante radiactiva (1/s)
$^{221}\text{Bi}$	$2,38 \cdot 10^{-3}$
$^{220}\text{Rn}$	$12,66 \cdot 10^{-3}$
$^{222}\text{Rn}$	$2,08 \cdot 10^{-6}$

- a) Cuanto mayor es el valor de la constante de desintegración el ritmo de desintegraciones del isótopo, actividad, es mayor.
- b) No todos los elementos tienen isótopos radiactivos.
- c) Sí, puesto que la constante depende del isótopo radiactivo y un elemento puede tener más de un isótopo radiactivo.
- d) Del isótopo radiactivo de que se trate.

### A.13

- Cálculo del número de nucleidos radiactivos:

$$1 \text{ g de } {}^{54}\text{Mn} \times \frac{6,022 \cdot 10^{23} \text{ átomos de } {}^{54}\text{Mn}}{54 \text{ g de } {}^{54}\text{Mn}} =$$

$$= 1,115 \cdot 10^{22} \text{ átomos de } {}^{54}\text{Mn} = 1,115 \cdot 10^{22} \text{ núcleos de } {}^{54}\text{Mn}$$

- Expresión de la constante en unidades del SI

$$2,48 \cdot 10^{-3} \frac{1}{\text{día}} \times \frac{1 \text{ día}}{86400 \text{ s}} = 2,87 \cdot 10^{-3} \frac{1}{\text{s}}$$

- Cálculo de la actividad:

$$A = \lambda \cdot N = 2,87 \cdot 10^{-3} \frac{1}{\text{s}} \cdot 1,115 \cdot 10^{22} \text{ núcleos} =$$

$$= 3,2 \cdot 10^{14} \text{ Bq} \cdot \frac{1 \text{ Ci}}{3,7 \cdot 10^{10} \text{ Bq}} = 8650 \text{ Ci}$$

### A.14

- Cálculo de la constante radiactiva de  ${}^{226}\text{Ra}$  a partir del concepto de periodo de semidesintegración:

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda} \rightarrow \lambda = \frac{\ln 2}{T} = \frac{\ln 2}{1600 \text{ años}} =$$

$$= 4,332 \cdot 10^{-4} \frac{1}{\text{años}} \cdot \frac{1 \text{ año}}{(365 \cdot 24 \cdot 3600) \text{ s}} = 1,374 \cdot 10^{-11} \frac{1}{\text{s}}$$

- Determinación del número de núcleos presentes en 1 g de  ${}^{226}\text{Ra}$ :

$$1 \text{ g de } {}^{226}\text{Ra} \times \frac{6,022 \cdot 10^{23} \text{ átomos de } {}^{226}\text{Ra}}{226 \text{ g de } {}^{226}\text{Ra}} =$$

$$= 2,66 \cdot 10^{21} \text{ átomos de } {}^{226}\text{Ra} =$$

$$= 2,66 \cdot 10^{21} \text{ núcleos de } {}^{226}\text{Ra}$$

- Cálculo de la actividad inicial:

$$A_0 = \lambda \cdot N_0 = 1,374 \cdot 10^{-11} \frac{1}{\text{s}} \cdot 2,66 \cdot 10^{21} \text{ núcleos de } {}^{226}\text{Ra} =$$

$$= 3,7 \cdot 10^{10} \text{ Bq} = 1 \text{ Ci}$$

Para calcular las variaciones de la masa de la muestra aplicamos la ley radiactiva:

$$m = m_0 \cdot e^{-\lambda \cdot \Delta t} = 1 \text{ g} \cdot e^{-1,374 \cdot 10^{-11} \frac{1}{\text{s}} \Delta t}$$

$$\text{Si } \Delta t = 1 \text{ semana} = 7 \text{ días} = 6,048 \cdot 10^5 \text{ s}$$

$$m = 1 \text{ g} \cdot e^{-1,374 \cdot 10^{-11} \frac{1}{\text{s}} \cdot 6,048 \cdot 10^5 \text{ s}} = 0,99999 \text{ g}$$

$$\text{Si } \Delta t = 1 \text{ mes} = 30 \text{ días} = 2,592 \cdot 10^6 \text{ s}$$

$$m = 1 \text{ g} \cdot e^{-1,374 \cdot 10^{-11} \frac{1}{\text{s}} \cdot 2,592 \cdot 10^6 \text{ s}} = 0,99996 \text{ g}$$

Para calcular el tiempo que debe transcurrir para reducir la masa a  $m_0 / 10$  aplicamos las condiciones:

$$n_0 \xrightarrow{\Delta t=?} m = 0,1 m_0$$

a la ley de desintegración en función de la masa:

$$0,1 m_0 = m_0 \cdot e^{-\lambda \cdot \Delta t} \rightarrow$$

$$\rightarrow \Delta t = \frac{-\ln 0,1}{1,374 \cdot 10^{-11} \frac{1}{\text{s}}} = 1,676 \cdot 10^{11} \text{ s} = 5314,56 \text{ años}$$

El tiempo que debe transcurrir para reducir la actividad inicial de la muestra a la mitad es de 1600 años, por la definición del periodo de semidesintegración.

### A.15

En base al concepto de periodo de semidesintegración:

$$N_0 \xrightarrow{\Delta t=T} N = \frac{N_0}{2}$$

Por ello, al aplicar la ley de desintegración establecemos:

$$\frac{N_0}{2} = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot T} \rightarrow T = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

Y como:  $\tau = \frac{1}{\lambda}$ , establecemos que  $T = \tau \cdot \ln 2$

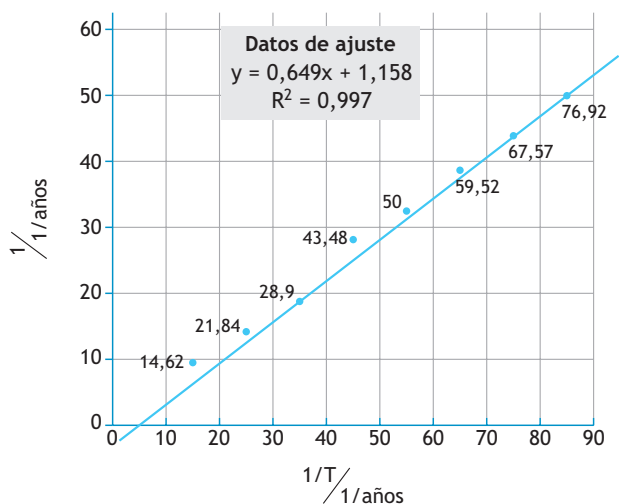
### ACD 1

- a) El alumnado debe comprobar que cuando hay pocos núcleos el proceso de desintegración se produce sin que se puede establecer alguna regularidad. Sin embargo, cuando la cantidad de núcleos es enorme (en el applet se puede apreciar a partir de 3600 núcleos) su desintegración da lugar a una disminución exponencial, que es más pronunciada cuanto mayor es el valor de la constante.

- b) Para relacionar el periodo de semidesintegración (T) con la constante ( $\lambda$ ) elaboramos una tabla de datos que relacione el valor de la constante, que elegimos a voluntad, con el tiempo que tarda en reducirse el número de núcleos iniciales a la mitad, que medimos colocando el indicador del ratón sobre la curva y pulsando para leer sus coordenadas. Recomendamos usar el número máximo de núcleos iniciales (10000), y repetir el proceso varias veces, para cada constante, a fin de obtener el valor de T con la máxima exactitud. Con este procedimiento podemos obtener una tabla del tipo:

$\lambda$	T	1/T
10	0,0684	14,62
15	0,0458	21,84
20	0,0346	28,9
30	0,0230	43,48
35	0,0200	50
40	0,0168	59,52
45	0,0148	67,57
50	0,0130	76,92

Que al representar el valor de la constante en función de la inversa del periodo (1/T), da lugar a una gráfica del tipo:



#### A.16

En primer lugar determinamos la fracción de núcleos sin desintegrar, aplicando la ley de decaimiento:

$$N = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot \Delta t}$$

lo que da lugar  $\frac{N}{N_0} \cdot 100 = 100 \cdot e^{-\lambda \cdot \Delta t}$ .

Teniendo en cuenta que  $\lambda = \frac{\ln 2}{T} = \frac{\ln 2}{1600 \text{ años}}$  y que

$\Delta t = 100$  años, obtenemos que el porcentaje de núcleos sin

desintegrar es del 95,8 %. Y, en consecuencia, el porcentaje desintegrado es del 4,2 %.

#### ACD 2

- a) La curva que representa la variación de los núcleos de A es siempre decreciente, de tipo exponencial; la de D es siempre creciente, también del tipo exponencial, mientras que las correspondientes a los núcleos intermedios poseen un tramo inicial de rápido crecimiento hasta un valor máximo, para a continuación decaer lentamente. El alumnado puede observar estas variaciones con los valores de  $\lambda$ :

Isótopo	A	B	C
$\lambda(1/\text{año})$	10	30	40

- b) El único isótopo de la familia que sigue la ley radiactiva de decaimiento es el padre (A), puesto que los intermedios deben originarse para después desintegrarse y el núcleo final siempre crece.

#### ACD 3

- a) El valor de la constante de desintegración del isótopo padre (A) debe ser muy inferior a la de su hijo (B). Teóricamente el equilibrio perfecto corresponde a:

$$\frac{\lambda_B}{\lambda_A} = \infty$$

- b) La gráfica *actividad - tiempo*, una vez alcanzado el equilibrio, corresponde a una curva de decrecimiento lento en que, en cada instante, coinciden los valores de las actividades de los isótopos implicados. La gráfica que indica la variación de la relación entre las actividades corresponde a una línea horizontal próxima a 1, que confirma que las actividades de cada isótopo en el equilibrio son idénticas.

#### A.17

Proceso a	$^{10}_5\text{B} + ^4_2\text{He} \rightarrow ^A_Z\text{X} + ^1_0\text{n}; ^A_Z\text{X} \rightarrow ^A_Z\text{Y} + \beta^+$	
C. carga	$5 + 2 = Z; Z = 7$	$Z = 7 \text{ (N)}$
C. nº nucleones	$10 + 4 = A + 1; A = 14 - 1$	$A = 13$
Ecuación	$^{10}_5\text{B} + ^4_2\text{He} \rightarrow ^{13}_7\text{N} + ^1_0\text{n}$ $^{13}_7\text{N} \rightarrow ^A_Z\text{Y} + ^0_{+1}\text{e}^+$	
C. carga	$7 = Z + 1$	$Z = 6 \text{ (C)}$
C. nº de nucleones	$13 = A$	$A = 13$
Ecuación	$^{13}_7\text{N} \rightarrow ^{13}_6\text{C} + ^0_{+1}\text{e}^+$	

Proceso b	${}^{31}_{15}\text{P} + {}^2_1\text{H} \rightarrow {}^1_1\text{H} + {}^A_Z\text{X}$	
C. carga	$15 + 1 = 1 + Z; Z = 15$	$Z = 15 \text{ (P)}$
C. nº nucleones	$31 + 2 = A + 1; A = 33 - 1$	$A = 32$
Ecuación	${}^{31}_{15}\text{P} + {}^2_1\text{H} \rightarrow {}^1_1\text{H} + {}^{32}_{15}\text{P}$	

Proceso c	${}^{235}_{92}\text{U} + {}^1_0\text{n} \rightarrow {}^{142}_{55}\text{Cs} + {}^{90}_{37}\text{Rb} + a {}^1_0\text{n}$	
C. carga	$92 + 0 = Z + 37 + 0; Z = 92 - 37$	$Z = 55 \text{ (Cs)}$
C. nº nucleones	$235 + 1 = 142 + 90 + a \cdot 1; a = 236 - 232$	$a = 4$ nº de neutrones liberados
Ecuación	${}^{235}_{92}\text{U} + {}^1_0\text{n} \rightarrow {}^{142}_{55}\text{Cs} + {}^{90}_{37}\text{Rb} + 4 {}^1_0\text{n}$	

### A.18

En la página web del WIKIPEDIA podemos obtener la siguiente información:

**Arturo Duperier Vallesa** (Pedro Bernardo, Ávila, 12 de noviembre de 1896 – Madrid, España, 10 de febrero de 1959). Físico español, destacado especialmente por su estudio de la radiación cósmica, por el cual llegó a ser propuesto candidato para el Premio Nobel de Física en 1958. En 1959 le fue concedido, a título póstumo, el Premio de Ciencias Juan March.

Se formó desde 1924 bajo la dirección de Blas Cabrera, de quien era el discípulo predilecto, primero en el Laboratorio de Investigaciones Físicas, fundado en 1910, y luego en el departamento de Electricidad y Magnetismo del Instituto Nacional de Física y Química, que aquél dirigió hasta su exilio; ambas instituciones bajo la égida de la Junta para Ampliación de Estudios e Investigaciones Científicas. Con Blas Cabrera formuló la luego conocida como «ley de Cabrera-Duperier». En 1929, durante una estancia en Estrasburgo, trabajó con Pierre Weiss, y luego, en 1932, en París con Charles Maurin.

En el año 1939, con el final de la guerra civil, se exilió a Inglaterra, ejerciendo como profesor de la Universidad de Birmingham y del Imperial College de Londres. Es en esta época, en la que se comenzó a considerar fundamental el conocer las variaciones de intensidad de los rayos cósmicos a nivel del mar en el transcurso del tiempo, fue requerida su participación en un proyecto desarrollado a tal fin, llevado a cabo por el Departamento de Física de la Universidad de Manchester. El proyecto estaba dirigido por el posteriormente Premio Nobel de Física P. M. S. Blackett. Duperier se consolidó, gracias al trabajo de esos años, como una autoridad mundial en materia de rayos cósmicos, la especialidad de la que ha derivado la moderna física de partículas.

Duperier había sido destituido de su cátedra universitaria, como parte del proceso radical de depuración al final

de la guerra, a la vez que Blas Cabrera, Enrique Moles, Cándido Bolívar y otros catedráticos de ciencias. El principal cargo contra él ante el Tribunal de Responsabilidades Políticas nº 9 de Madrid, fue no haber aprovechado para desertar de la República una estancia en París, en julio de 1937, donde representaba a España en la Conferencia Internacional de Cronometría y Metrología.

En 1953 vuelve definitivamente a España, y empieza a impartir en su Cátedra de la Universidad de Madrid la nueva disciplina de Radiación Cósmica, que alterna con importantes estudios que presenta en numerosos Congresos Internacionales donde es insistentemente solicitado. Duperier retornó a España aprovechando el impulso dado por Joaquín Ruiz-Giménez, a la sazón ministro de Educación Nacional, a la recuperación de cerebros exiliados, pero a su regreso, no le fue permitido introducir al país el laboratorio donado por los físicos británicos, lo que no consiguió tampoco durante el resto de su vida. Duperier que había destacado como experimentador, no pudo continuar su investigación empírica de los rayos cósmicos, quedando relegado a la impartición de cursos teóricos.

Electo miembro numerario de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales el 5 de febrero de 1958. Fue nombrado para el mismo sillón que Miguel Ángel Catalán, pero como él falleció sin haber tomado posesión.

### A.19

El diagrama conceptual tiene como objetivo plantear un proceso de análisis de los contenidos expuestos. En el diagrama podemos diferenciar tres ejes:

- Las características del núcleo como entidad física y la justificación de su estabilidad.
- El estudio de los procesos radiactivos, estableciendo y relacionando las leyes que lo rigen.
- Las reacciones nucleares representadas mediante ecuaciones y evaluadas, desde el referente energético, por el factor Q.

### A.20

Representación de la reacción:

Proceso	${}^9_4\text{Be} + {}^4_2\text{He} \rightarrow {}^A_Z\text{X} + {}^{12}_6\text{C}$	
C. carga	$4 + 2 = Z + 6; Z = 0$	$Z = 0 \text{ (n)}$
C. nº de nucleones	$9 + 4 = A + 12;$	$A = 1$
Ecuación	${}^9_4\text{Be} + {}^4_2\text{He} \rightarrow {}^1_0\text{n} + {}^{12}_6\text{C}$	

En palabras de Chadwick:

*“Estos resultados, al igual que otros que he obtenido en el curso de este trabajo, son muy difíciles de explicar en la hipótesis de que la radiación que sale del berilio es un cuan-*

to de radiación, producido en una colisión que conserva energía y momento. Sin embargo, las dificultades desaparecen si suponemos que la radiación está formada por partículas de masa 1 y de carga 0; es decir, por neutrones. Se puede suponer que la captura de la partícula  $\alpha$  por el núcleo de  $^9\text{Be}$  da lugar a la formación de un núcleo  $^{12}\text{C}$  y a la emisión del neutrón”

Con ello se confirma la hipótesis de Rutherford de la existencia en el interior del núcleo de una partícula masiva y neutra. El neutrón adquiere un papel fundamental como proyectil nuclear por carecer de carga.

### A.21

- Cálculo de la cantidad de sustancia en 13,6 kg de butano:

$$13,6 \cdot 10^3 \text{ g de } \text{C}_4\text{H}_{10} \cdot \frac{1 \text{ mol de } \text{C}_4\text{H}_{10}}{58 \text{ g de } \text{C}_4\text{H}_{10}} = 234,48 \text{ mol de } \text{C}_4\text{H}_{10}$$

- Cálculo de la energía obtenida al quemar el butano:

$$234,48 \text{ mol de } \text{C}_4\text{H}_{10} \cdot \frac{876 \cdot 10^3 \text{ J}}{1 \text{ mol de } \text{C}_4\text{H}_{10}} = 205,41 \cdot 10^6 \text{ J}$$

- Cálculo de la cantidad de núcleos de  $^{235}\text{U}$  presentes en 13,6 kg:

$$13,6 \cdot 10^3 \text{ g de } ^{235}\text{U} \cdot \frac{6,022 \cdot 10^{23} \text{ átomos de } ^{235}\text{U}}{235 \text{ g de } ^{235}\text{U}} =$$

$$= 3,5 \cdot 10^{25} \text{ átomos de } ^{235}\text{U} = 3,5 \cdot 10^{25} \text{ núcleos de } ^{235}\text{U}$$

- Cálculo de la energía liberada en la fisión de todos los núcleos de  $^{235}\text{U}$ :

$$3,5 \cdot 10^{25} \text{ núcleos de } ^{235}\text{U} \cdot \frac{200 \cdot 10^6 \text{ eV} \cdot \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}}{1 \text{ eV}}}{\text{núcleo de } ^{235}\text{U}_{\text{fisionado}}} =$$

$$= 1,115 \cdot 10^{15} \text{ J}$$

- Comparación:

$$\frac{\Delta E_{\text{uranio}}}{\Delta E_{\text{butano}}} = \frac{1,115 \cdot 10^{15} \text{ J}}{205,41 \cdot 10^6 \text{ J}} = 5,4 \cdot 10^6$$

### A.22

Del análisis de las páginas web reseñadas se pueden establecer las siguientes conclusiones:

- Los ocho reactores nucleares españoles tienen una potencia total instalada de 7728 MW y una producción de energía eléctrica que representa como media anual la quinta parte de la producción total de electricidad en España.
- Las centrales españolas se construyeron en el periodo comprendido entre 1971 y 1988, lo que implica que ya sean consideradas antiguas.

- El consumo actual de energía eléctrica, y las previsiones de aumento, obligan a no prescindir de las centrales nucleares como fuente de energía eléctrica.
- El periodo de funcionamiento de las centrales nucleares españolas no tiene un plazo fijo. Las autorizaciones de explotación se renuevan periódicamente (recientemente, junio 2009, se ha renovado el permiso de explotación de la central nuclear de Santa María de Garoña. Este hecho puede aprovecharse para realizar un trabajo sobre los distintos aspectos implicados en la renovación de permisos). La central nuclear objeto de la renovación del permiso de explotación, envía al Consejo de Seguridad Nuclear un informe anual.
- Para continuar el funcionamiento de las centrales nucleares españolas es necesario:
  - Adoptar en cada momento las acciones adecuadas para que la central nuclear se encuentre en condiciones óptimas de funcionamiento, garantizando la seguridad, la fiabilidad y la disponibilidad necesarias para poder alargar el periodo previsto inicialmente.
  - Conocer y realizar el seguimiento del estado de los componentes, evaluando y controlando los mecanismos de degradación de aquellos que son más importantes.
  - Identificar e implantar las mejoras necesarias en los programas de mantenimiento e inspección, incorporando las medidas de mitigación adecuadas.
  - Un adecuado control del envejecimiento de los componentes que permita asegurar que la instalación funcionará con garantías más allá del tiempo inicialmente previsto.
- El coste de estas operaciones de actualización pueden variar de una central a otra, pero puede considerarse que suponen un coste 48% menor que el estimado para una central de nueva construcción. Sin embargo, ello supone la no renovación del reactor por uno de nueva generación más eficaces, menos peligrosos y más eficientes en la generación y reciclado de residuos.

Para operar a largo plazo, las centrales nucleares deben cubrir de forma satisfactoria, al menos, cuatro aspectos:

1. **Seguridad y fiabilidad garantizadas** por medio de un exigente programa de modernización y actualización de la planta y de las consiguientes inversiones.
2. **Un equipo humano formado, cualificado y motivado** donde se tenga en cuenta los programas de formación y entrenamiento, así como una adecuada política de recursos humanos que prevea la transmisión del conocimiento y la experiencia acumulada.
3. **Adecuada supervisión técnica** tanto por parte del Consejo de Seguridad Nuclear como por organismos y organizaciones internacionales independientes que avalen la validez de la operación a largo plazo de cada instalación.



4. Integración social en el entorno que permita la toma de decisiones y el desarrollo de proyectos en este ámbito con transparencia y consenso social.

A.23

El ajuste de la reacción corresponde a:

Reacción	$4\, {}^1_1\text{H} \rightarrow {}^4_2\text{He} + {}^A_Z\text{X}$	
C. carga	$4 \cdot 1 = 2 + Z; Z = 2$	$Z = 2$
C. nº nucleones	$4 \cdot 1 = A + 4; A = 0$	$A = 0$
Análisis	La partícula ${}^0_Z\text{X}$ no existe, la única partícula con $A = 0$ y carga positiva es el positrón ${}^0_1\text{e}^+$ , por tanto deben emitirse dos positrones.	
Ecuación	$4\, {}^1_1\text{H} \rightarrow {}^4_2\text{He} + 2\, {}^0_1\text{e}^+$	

Para calcular la energía emitida al consumirse 1 kg de H (supuestamente atómico) realizaremos:

a) El balance energético de la reacción de fusión:

Cálculo del factor Q
Reacción de fusión
$4\, {}^1_1\text{H} \rightarrow {}^4_2\text{He} + 2\, {}^0_1\text{e}^+$
$-\Delta m = m_i - m_f$
$-\Delta m = (4 \cdot 1,007276) \text{ u} - (4,002603 + 2 \cdot 0,000548) \text{ u} = 0,025405 \text{ u}$
$Q = (-\Delta m) \cdot c^2$
$0,025405 \text{ u} \cdot \frac{1,6605 \cdot 10^{-27} \text{ kg}}{1 \text{ u}} \cdot (2,997925 \cdot 10^3 \text{ m/s})^2 = 3,8 \cdot 10^{-12} \text{ J}$

Es decir, por cada cuatro átomos de hidrógeno fusionados se liberan  $3,8 \cdot 10^{-12} \text{ J}$ .

A.24

La comparación de ambos procesos puede resumirse en la siguiente tabla.

Proceso	FISIÓN	FUSIÓN	COMPARACIÓN
Fundamento	Escisión de núcleos fisionables en otros de masa intermedia liberando neutrones y energía	Aproximación de núcleos ligeros para obtener un núcleo más estable y energía	La fisión consiste en romper núcleos pesados, mientras que en la fusión se unen núcleos ligeros
Materia prima	Núcleos de ${}^{235}\text{U}$ y núcleos fértiles que puedan originar núcleos fisionables	Isótopos del hidrógeno	La materia prima necesaria para la fisión es escasa en comparación a la de fusión, hidrógeno
Rendimiento	En los reactores nucleares se genera gran cantidad de energía de forma continua y controlada	El rendimiento teórico de la energía liberada en la fusión es superior al de fisión. Pero aún no pueden desarrollarse reacciones de fusión controladas	La fusión posee un mayor rendimiento teórico que la fisión, pero no existen reactores de fusión operativos
Nivel tecnológico	La fisión se desarrolla en reacciones en cadena controladas en los reactores nucleares	Se estudian diversas posibilidades para su desarrollo pero aún no se controlan	Los procesos de fisión son operativos y los de fusión todavía no
Residuos	Restos radiactivos de baja y alta actividad que requieren procesos de manipulación y aislamiento especiales	Teóricamente se considera que se originen residuos radiactivos de escasa actividad e ino cuos antes de un siglo	La fisión da lugar a importantes problemas de generación de residuos radiactivos mientras que en la fusión se originan residuos de escasa intensidad

A.25

La inclusión de actividades CTSA (Ciencia, Tecnología, Sociedad y Medio Ambiente) en el proceso de enseñanza y aprendizaje permite relacionar la ciencia con la vida cotidiana y el entorno, con la sociedad y el medio ambiente, favorece la motivación del alumnado y propicia el cambio conceptual, metodológico y de actitud, que hace posible el aprendizaje significativo.

Es importante alejar al alumnado de la visión simplista de la ciencia como:

- La ciencia como solución de todos los problemas: El desarrollo científico y tecnológico es la solución de todos los grandes problemas sociales.
- La ciencia como origen de todos los problemas: la causante de todos los grandes males son las aplicaciones de la ciencia.

Se debe reflexionar sobre las aplicaciones del conocimiento científico y las implicaciones morales que deben plantearse y asumir las colectividades que los desarrollan. Para ello el alumnado ha de alcanzar los siguientes objetivos:

- Adquirir una comprensión de la **naturaleza de la ciencia** y del trabajo científico. Aspecto desarrollado en el primer curso de bachillerato y expuesto de forma transversal a largo de los distintos temas.
- Conectar la Ciencia con sus **aplicaciones tecnológicas** y los fenómenos de la vida cotidiana y abordar el estudio de aquellas aplicaciones de mayor relevancia social. (Ciencia aplicada). Objetivo que se pretende superar al exponer las diferentes aplicaciones de los radioisótopos y de la energía nuclear.
- Conocer las **implicaciones sociales y éticas** que el uso de la ciencia y de la tecnología conlleva (Ciencia y sociedad). Este aspecto es el que pretendemos analizar con la información de este apartado del tema (La importancia de los aspectos sociales y políticos) conjuntamente con esta actividad.

La historia nuclear permite reflexionar sobre las aplicaciones de los conocimientos científicos y las valoraciones éticas de las personas implicadas. El papel activo de los científicos en analizar las consecuencias de su trabajo, y en este caso de la física nuclear, se evidencia en hechos como: el manifiesto de Russell-Einstein, el manifiesto de Gotinga, el llamamiento de Bohr ante la ONU, el Movimiento Pugwash, etcétera.... Sin embargo, estos hechos no han impedido el desarrollo de armas como la bomba de fusión, la bomba de neutrones (*bomba "limpia"*), los euromisiles y la guerra de las galaxias, las bombas racimo o de uranio "empobrecido".

El profesor o profesora puede presentar como elemento de reflexión el caso del físico J. Rotblat, el caso de Oppenheimer, o el movimiento Pugwash (movimiento internacional que ha venido actuando sin descanso desde 1955 con el fin de acercar, durante el periodo de guerra fría, a los principales científicos de occidente y del bloque del Este, para crear **una conciencia que ayude a frenar la carrera de armas nucleares**) que se citan en la figura 9.2. Para ampliar información sobre estos científicos, manifiestos o sobre el movimiento Pugwash se puede realizar una búsqueda en internet.

#### A.26

A)	Proceso	${}^{18}_8\text{O} + {}^1_1\text{H} \rightarrow {}^{18}_9\text{F} + {}^1_0\text{n}; {}^{18}_9\text{F} \rightarrow {}^{18}_8\text{O} + {}^0_{+1}\text{e}$
	C. carga	$8 + 1 = 9 = 9 + 0$
	C. n° de nucleones	$18 + 1 = 19 = 18 + 1$

B) Condiciones del problema:

$$A_0 = 136 \text{ Ci} \xrightarrow{\Delta t = 1 \text{ h}} A = 65 \text{ Ci}$$

- Determinación de la constante radiactiva:

Al aplicar estas condiciones a la ecuación general de la ley de desintegración (en función de la actividad):

$$A = A_0 \cdot e^{-\lambda \cdot \Delta t}$$

Calculamos la constante de desintegración:

$65 \text{ Ci} = 136 \text{ Ci} \cdot e^{-\lambda \cdot 1 \text{ h}}$ . Al aislar el exponencial, aplicar logaritmos neperianos y despejar  $\lambda$ , se obtiene:

$$\lambda = -\ln \frac{65}{136} \frac{1}{\text{h}} = 0,738 \text{ h}^{-1} = 2,05 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$$

- Determinación del periodo de semidesintegración:

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{\ln 2}{0,738 \text{ h}^{-1}} = 0,94 \text{ h}$$

- Cálculo de la masa inicial.

Determinación de la cantidad inicial de núcleos de  ${}^{18}\text{F}$ :

$$N_0 = \frac{A_0}{\lambda} = \frac{136 \text{ Ci} \cdot \frac{3,7 \cdot 10^{10} \text{ Bq}}{1 \text{ Ci}}}{2,05 \cdot 10^{-4} \text{ s}} = 2,45 \cdot 10^{16} \text{ núcleos de } {}^{18}\text{F}$$

Cálculo de la masa:

$$2,45 \cdot 10^{16} \text{ núcleos de } {}^{18}\text{F} \cdot \frac{18 \text{ g de } {}^{18}\text{F}}{N_A \text{ núcleos de } {}^{18}\text{F}} = 732,3 \text{ ng}$$

#### A.27

La actividad del isótopo de C-14 debe seguir la ley de desintegración radiactiva, que en este caso expresamos como:

$$A = A_0 \cdot e^{-\lambda \cdot \Delta t}$$

siendo:

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T} = \frac{\ln 2}{5730 \text{ años}}$$

Aplicando las condiciones del enunciado establecemos:

$$12,5 \frac{\text{des}}{\text{mín}} = 16 \frac{\text{des}}{\text{mín}} \cdot e^{-\frac{\ln 2}{5730 \text{ años}} \cdot \Delta t}$$

Aislado el exponencial, aplicando logaritmos neperianos y despejando  $\Delta t$ :

$$\Delta t = \frac{-\ln 0,78125}{\frac{\ln 2}{5730 \text{ años}}} = 2040 \text{ años}$$

Como limitaciones del método de C-14 se pueden reseñar dos esenciales:

- La muestra debe participar en el ciclo del carbono.
- La edad de la muestra no debe ser muy pequeña ni muy grande en relación al periodo de semidesintegración de  ${}^{14}\text{C}$ .



Por otra parte debemos tener en cuenta que la datación con  $^{14}\text{C}$  se fundamenta en la premisa de que la relación  $^{14}\text{C}/^{12}\text{C}$  en la naturaleza se ha mantenido constante. Esto supone que el flujo de rayos cósmicos que genera el  $^{14}\text{C}$  fue y es constante, y que no hay fuentes de  $^{14}\text{C}$  o  $^{12}\text{C}$  que modifiquen el equilibrio natural. Sin embargo, ninguno de estos supuestos es estrictamente cierto, y por ello deben realizarse correcciones en la datación realizadas con este método.

El flujo de rayos cósmicos depende de las fluctuaciones de la actividad solar y de las variaciones del campo magnético terrestre. A su vez, la relación  $^{14}\text{C}/^{12}\text{C}$  ha sido modificada por la acción industrial fundamentada en el uso de hidrocarburos, por el funcionamiento de las centrales nucleares o por los ensayos con bombas nucleares entre otros factores.

## 4.2 SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS FINALES

### PROBLEMA 1

El alumnado debe explicar la unión de los protones por la acción de una fuerza muy intensa, fuerza nuclear fuerte, que actúa en el interior de núcleo. Debe citar las características de esta fuerza indicadas en el texto.

### PROBLEMA 2

La energía asociada a los procesos radiactivos es del orden del MeV, muy superior a las implicadas en los procesos químicos, del orden de decenas de eV. Esta gran diferencia de energías es una prueba de que las emisiones radiactivas no son originadas por transiciones electrónicas y plantea el problema de justificar su origen. Por ello, se estableció que los procesos radiactivos están asociados a transformaciones del interior del núcleo, que generan una gran cantidad de energía.

### PROBLEMA 3

La masa de un núcleo es siempre menor a la suma de la masa de sus nucleones. Esta diferencia se justifica por la energía de enlace liberada en la formación del núcleo.

### PROBLEMA 4

#### Apartado a

- Determinación de nucleones:  
protones =  $Z = 17$ ; neutrones =  $A - Z = 36 - 17 = 19$
- Masa de las partículas:  
 $m_{(n + H)} = 17 \cdot 1,007825 \text{ u} + 19 \cdot 1,008665 \text{ u} = 36,29766 \text{ u}$
- Cálculo del defecto de masa:  
 $\delta m = 36,29766 - 35,968307 = 0,329353 \text{ u}$

- Cálculo de la energía de ligadura:  
 $E_b = 0,329353 \text{ u} \cdot 931,47 \text{ MeV/u} = 306,78 \text{ MeV}$
- Energía de ligadura por nucleón:  
 $E_b / A = 306,78 \text{ MeV} / 36 = 8,52 \text{ MeV} / \text{nucleón}$

#### Apartado b

- Determinación del defecto de masa:  
 $\delta m = E_b / 931,47 \text{ MeV/u} = 0,3619 \text{ u}$
- Cálculo de la masa de las partículas:  
 $m_{(n + H)} = m_{\text{atómica}} + \delta m = 39,970440 + 0,3619 = 40,33234 \text{ u}$
- Determinación del número de neutrones. Al ser un átomo de cloro,  $Z = 17$ ; por tanto:  
 $m_{(n + H)} = 17 \cdot 1,007825 + N \cdot 1,008665 = 40,33234$   
Despejando  $N$ , obtenemos:  $N = 23$   
Por tanto,  $A = Z + N = 17 + 23 = 40$
- Energía de ligadura por nucleón:  
 $E_b / A = 337,100 \text{ MeV} / 40 = 8,43 \text{ MeV} / \text{nucleón}$

#### Apartado c

- Masa de las partículas:  
 $m_{(H + n)} = 20 \cdot 1,007825 \text{ u} + 20 \cdot 1,008665 \text{ u} = 40,3298 \text{ u}$
- Masa atómica:  
masa atómica =  $40,3298 - 0,367208 = 39,962592 \text{ u}$
- Cálculo de la energía de ligadura:  
 $E_b = 0,367208 \text{ u} \cdot 931,47 \text{ MeV/u} = 342,04 \text{ MeV}$
- Energía de ligadura por nucleón:  
 $E_b / A = 342,0432 \text{ MeV} / 40 = 8,55 \text{ MeV} / \text{nucleón}$

#### Apartado d

- Masa de las partículas:  
 $m_{(H + n)} = 20 \cdot 1,007825 \text{ u} + 26 \cdot 1,008665 \text{ u} = 46,38179 \text{ u}$
- Cálculo del defecto de masa:  
 $\delta m = 46,38179 - 45,953689 = 0,428101 \text{ u}$
- Cálculo de la energía de ligadura:  
 $E_b = 0,428101 \text{ u} \cdot 931,47 \text{ MeV/u} = 398,76 \text{ MeV}$
- Energía de ligadura por nucleón:  
 $E_b / A = 398,76 \text{ MeV} / 46 = 8,67 \text{ MeV} / \text{nucleón}$

El isótopo más estable es el de mayor energía de ligadura por nucleón, en este caso corresponde al isótopo 46 – Ca.

#### Solución:

Símbolo	Z	A	$M_{\text{atómica}}/\text{u}$	$\delta m/\text{u}$	$E_b/\text{MeV}$	$E_b/A$
Cl	17	36	35,968307	0,329353	306,78	8,52
Cl	17	40	39,970440	0,3619	337,10	8,43
Ca	20	40	39,962592	0,367208	342,04	8,55
Ca	20	46	45,953689	0,428101	398,76	8,67

Más estable

PROBLEMA 5

$m_{\text{nucleones (H + n)}} = Z \cdot 1,007825 \text{ u} + (A - Z) \cdot 1,008665 \text{ u}$	$\delta m = m_{\text{nucleones (n + H)}} - m_{\text{at}}$	$E_b = \delta m \text{ u} \cdot 931,47 \text{ MeV/u}$	$E_b / A$
$6 \cdot 1,007825 \text{ u} + 6 \cdot 1,008665 \text{ u} = 12,09894 \text{ u}$	0,09894 u	92,16 MeV	7,68 MeV/nucleón
$6 \cdot 1,007825 \text{ u} + 7 \cdot 1,008665 \text{ u} = 13,107605 \text{ u}$	0,104250	97,11 MeV	7,47 MeV/nucleón
$6 \cdot 1,007825 \text{ u} + 8 \cdot 1,008665 \text{ u} = 14,11627 \text{ u}$	0,113028	105,31 MeV	7,52 MeV/nucleón

La estabilidad de los isótopos aumenta con el valor de la energía de ligadura por nucleón, por ello:

Menos estable	<sup>13</sup> C	<sup>14</sup> C	<sup>12</sup> C	Más estable
---------------	-----------------	-----------------	-----------------	-------------

PROBLEMA 6

Isótopo	$m_{(p+n)} = Z \cdot 1,007276 \text{ u} + (A - Z) \cdot 1,008665 \text{ u}$	$\delta m / \text{u}$	$E_b / \text{J}$	$E_b / A / \text{J}$
<sup>40</sup> <sub>18</sub> Ar	$18 \cdot 1,007276 \text{ u} + 22 \cdot 1,008665 \text{ u} = 40,321598 \text{ u}$	0,369078	$5,514 \cdot 10^{-11}$	$1,378 \cdot 10^{-12}$
<sup>222</sup> <sub>86</sub> Rn	$86 \cdot 1,007276 \text{ u} + 136 \cdot 1,008665 \text{ u} = 223,804176 \text{ u}$	1,83373	$2,7395 \cdot 10^{-10}$	$1,234 \cdot 10^{-12}$

PROBLEMA 7

La comparación entre las interacciones la podemos resumir en la siguiente tabla:

TABLA COMPARATIVA ENTRE LAS INTERACCIONES				
Interacción	Origen y acción	Alcance	Intensidad relativa	Carácter
Nuclear (fuerte)	Entre partículas nucleares	Muy corto, sólo en el interior del núcleo	Muy elevada	Saturado, sólo se ejerce entre nucleones vecinos
Eléctrica	Entre cuerpos con una carga resultante	Infinito	Muy inferior a la nuclear, pero más intensa que la gravitatoria	Actúa en la línea que une los cuerpos y es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre los cuerpos
Gravitatoria	Actúa sobre todos los cuerpos		Poco intensa; para que sea apreciable la masa de uno de los cuerpos debe ser muy elevada	

LEYES DE EMISIÓN RADIATIVA

PROBLEMA 8

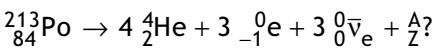
Con el objetivo de diferenciar y comparar las radiaciones  $\alpha$ ,  $\beta$ , y  $\gamma$  elaboramos la siguiente tabla:

Radiación	Carga relativa, respecto a la fundamental	Masa relativa, respecto al protón	Poder de penetración	Acción del campo eléctrico y magnético	Naturaleza
$\alpha$	+2	4	Bajo	Se desplaza en un campo eléctrico hacia potenciales decrecientes. En un campo magnético uniforme gira en sentido opuesto a las cargas negativas	Núcleos de helio <sup>4</sup> <sub>2</sub> He
$\beta$	-1	1 / 2000	Mucho mayor que el de la radiación $\alpha$	Se desplaza en un campo eléctrico hacia potenciales crecientes. En un campo magnético uniforme giran en sentido opuesto a las cargas positivas	Electrones libres <sup>0</sup> <sub>-1</sub> e
$\gamma$	Sin carga	Sin masa	Elevado	Los campos eléctrico y magnético no ejercen ninguna acción	Radiación electromagnética de elevada frecuencia

La radiación  $\gamma$  se produce después de la emisión  $\alpha$  o  $\beta$ , lo que se interpreta como un proceso de estabilización.

PROBLEMA 9

El proceso puede representarse mediante la ecuación:

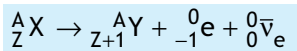


Aplicando los principios de conservación de carga y del número de nucleones establecemos las ecuaciones:

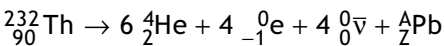
Principio	Aplicación y establecimiento de la ecuación	Calculo de la incógnita
C. carga	$84 = 4 \cdot 2 + 3(-1) + Z$ ; $84 = 8 - 3 + Z$	$Z = 79$ (Au)
C. del nº nucleones	$218 = 4 \cdot 4 + A$ ; $218 = 16 + A$	$A = 202$

PROBLEMA 10

- a) La explicación se basa en la teoría según la cual el electrón liberado por el núcleo es consecuencia de la **transformación de un neutrón nuclear en un protón, un electrón y un antineutrino**. Este proceso proporciona la suficiente energía cinética al electrón, y al antineutrino, para escapar del núcleo, a pesar de la atracción electrostática tan intensa a la que estaría sometido el electrón. Así, la emisión  $\beta$  puede escribirse como  $n \rightarrow p^+ + e^- + \bar{\nu}_e$ ; y, en general,



- b) El proceso puede representarse mediante la ecuación:



Aplicando los principios de conservación de carga y nucleones establecemos las ecuaciones:

Principio	Aplicación y establecimiento de la ecuación	Calculo de la incógnita
C. carga	$90 = 6 \cdot 2 + 4(-1) + z$ ; $90 = 12 - 4 + Z$	$Z = 82$ (Pb)
C. del nº nucleones	$232 = 6 \cdot 4 + A$ ; $234 = 24 + A$	$A = 208$

PROBLEMA 11

La radiactividad no es un fenómeno periódico, ya que en ella no se repite ninguna propiedad cíclicamente. Sin embargo, por su carácter estadístico, podemos introducir la magnitud **periodo de semidesintegración**, representada por  $T_{1/2}$  o simplemente  $T$ , como el *tiempo necesario para que se transmuten la mitad de los átomos de la muestra inicial*.

El periodo de semidesintegración ( $T$ ) está relacionado con el valor de la constante radiactiva ( $\lambda$ ), de modo que cuanto mayor sea el valor de  $\lambda$  menor será el valor del periodo de semidesintegración. Para establecer esta relación haremos uso de la definición del periodo y de la ley desintegración radiactiva.

Si partimos de una muestra inicial formada por  $N_0$  núcleos al cabo de un tiempo  $\Delta t = T$  el número de núcleos sin transmutarse será  $N = N_0 / 2$ , por la propia definición del periodo de semidesintegración.

Si aplicamos la ley de desintegración establecemos la relación:

$$N_0 / 2 = N_0 e^{-\lambda \cdot T}$$

Y después de aplicar logaritmos neperianos a ambos términos:

$$\ln \frac{N}{N_0} = \ln \frac{(N_0/2)}{N_0} = -\ln 2 = -\lambda T; \quad T = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

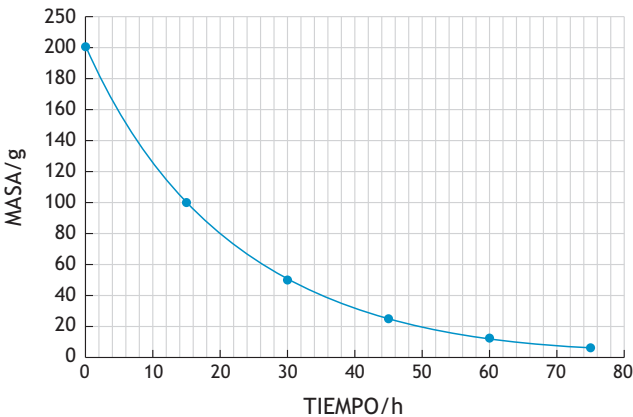
Esta expresión indica que  $T$  es inversamente proporcional a la constante radiactiva ( $\lambda$ ).

Cada isótopo radiactivo tiene un periodo de semidesintegración distinto, que depende de la constante radiactiva según la relación:  $T = \ln 2/\lambda$ .

Podemos analizar el significado aplicando la definición del periodo a la variación de la masa del isótopo  $^{24}\text{Na}$ , lo que permite establecer la tabla:

Tiempo/h	Masa/g
0	200
15	100
30	50
45	25
60	12,5
75	6,25

Al representar la variación de la masa en función del tiempo obtenemos la siguiente curva exponencial.



**PROBLEMA 12**

Aplicando la condición del enunciado:

$$A_0 \xrightarrow{\Delta t=1d} A = A_0 - \frac{1}{12} A_0 = \frac{11}{12} A_0$$

De la ecuación general de la ley de desintegración (en función de la actividad):

$$A = A_0 \cdot e^{-\lambda \cdot \Delta t}$$

calculamos la constante de desintegración:

$$\frac{11}{12} A_0 = A_0 \cdot e^{-\lambda \cdot 1d}$$

y al aplicar logaritmos neperianos y despejar  $\lambda$ , se obtiene:

$$\lambda = -\ln \frac{11}{12} \frac{1}{d} = 0,087 d^{-1}$$

Y puesto que el periodo de desintegración es:  $T = \frac{\ln 2}{\lambda}$ , establecemos:

$$T = \frac{\ln 2}{0,087 d^{-1}} = 7,96 \text{ días} \simeq 8 \text{ días}$$

**PROBLEMA 13**

a) Para calcular la constante de desintegración aplicamos la definición operativa de la actividad radiactiva:  $A = N \cdot \lambda$ .

Despejando la constante, establecemos:  $\lambda = \frac{A}{N}$ .

Como  $A = 3,7 \cdot 10^{10} \text{ Bq}$ , y el número de núcleos en 1 g de  $^{226}\text{Ra}$  es:

$$N = 1 \text{ g de } ^{226}\text{Ra} \cdot \frac{1 \text{ mol de } ^{226}\text{Ra}}{226 \text{ g de } ^{226}\text{Ra}} \cdot \frac{6,022 \cdot 10^{23} \text{ núcleos de } ^{226}\text{Ra}}{1 \text{ mol de } ^{226}\text{Ra}} = 2,665 \cdot 10^{21} \text{ núcleos}$$

$$\text{obtenemos: } \lambda = \frac{3,7 \cdot 10^{10} \text{ Bq}}{2,665 \cdot 10^{21} \text{ núcleos}} = 1,39 \cdot 10^{-11} s^{-1}$$

b) El periodo de semidesintegración es:

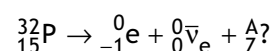
$$T = \frac{\ln 2}{1,39 \cdot 10^{-11} s^{-1}} = 5 \cdot 10^{10} s \cdot \frac{1 \text{ año}}{31,536 \cdot 10^6 s} = 1585,5 \text{ años}$$

c) La vida media es:

$$\tau = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{1,39 \cdot 10^{-11} s^{-1}} = 7,14 \cdot 10^{10} s \cdot \frac{1 \text{ año}}{31,536 \cdot 10^6 s} = 2264,1 \text{ años}$$

**PROBLEMA 14**

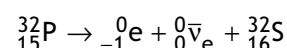
a) La ecuación del proceso corresponde a:



Aplicando los principios de conservación de carga y del n° de nucleones establecemos las ecuaciones:

Principio	Aplicación y establecimiento de la ecuación	Calculo de la incógnita
C. carga	$15 = (-1) + Z; Z = 15 + 1$	$Z = 16 \text{ (S)}$
C. del n° denucleones	$32 = A$	$A = 32$

Por tanto:



b) Aplicando la condición del enunciado

$$m_0 = 1,0000 \text{ g} \xrightarrow{\Delta t=7d} m = 0,7123 \text{ g}$$

a la ecuación general de la ley de desintegración (en función de la masa):

$$m = m_0 \cdot e^{-\lambda \cdot \Delta t}$$

calculamos la constante de desintegración:

$$0,7123 \text{ g} = 1,0000 \text{ g} \cdot e^{-\lambda \cdot 7d}$$

Al aplicar logaritmos neperianos y despejar  $\lambda$ , se obtiene:

$$\lambda = -\frac{1}{7d} \ln \frac{0,7123}{1,0000} = 0,0485 \text{ días}^{-1}$$

Y puesto que el periodo de desintegración es:  $T = \frac{\ln 2}{\lambda}$

$$\text{establecemos: } T = \frac{\ln 2}{0,0485 d^{-1}} = 14,3 \text{ días}$$

**PROBLEMA 15**

a) La interpretación de este hecho se basa en el carácter estadístico de los procesos de desintegración, un porcentaje de núcleos radiactivos se desintegra por emisión  $\beta$  y el resto por emisión  $\alpha$ .

Los dos procesos se representan mediante las ecuaciones:

Proceso $\beta$	$^{212}_{83}\text{Bi} \rightarrow ^0_{-1}\text{e} + ^0_0\bar{\nu}_e + ^A_Z?$	
C. carga	$83 = (-1) + Z; Z = 83 + 1$	$Z = 84 \text{ (Po)}$
C. del n° nucleones	$212 = A$	$A = 212$
Ecuación	$^{212}_{83}\text{Bi} \rightarrow ^0_{-1}\text{e} + ^0_0\bar{\nu}_e + ^{212}_{84}\text{Po}$	

Proceso $\alpha$	${}_{33}^{212}\text{Bi} \rightarrow {}_2^4\text{He} + \frac{A}{Z}?$	
C. carga	$83 = 2 + Z; Z = 83 - 2$	$Z = 81 \text{ (Tl)}$
C. del nº nucleones	$212 = A + 4; A = 212 - 4$	$A = 208$
Ecuación	${}_{33}^{212}\text{Bi} \rightarrow {}_2^4\text{He} + {}_{31}^{208}\text{Tl}$	

- b) En primer lugar calculamos el valor de la constante de desintegración a partir del periodo de semidesintegración:

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda} \rightarrow \lambda = \frac{\ln 2}{T} = \frac{\ln 2}{60,5 \text{ min}}$$

Al cabo de una hora (60 min) quedarán sin desintegrar:

$$n = n_0 \cdot e^{-\lambda \cdot \Delta t} \xrightarrow{\Delta t = 60 \text{ min}}$$

$$n = 3 \text{ mol} \cdot e^{-\frac{\ln 2}{60,5 \text{ min}} \cdot 60 \text{ min}} = 1,51 \text{ mol de } {}_{33}\text{Bi}$$

Se han desintegrado:

Núcleos desintegrados = 3 mol – 1,51 mol = 1,49 mol

El 36% de estas desintegraciones lo hacen por emisión  $\beta$ ;

$n_\beta = 0,36 \cdot 1,49 \text{ mol} = 0,5364 \text{ mol}$  de partículas  $\beta$ , que corresponden a:

$$0,5364 \text{ mol de } \beta \cdot \frac{6,022 \cdot 10^{23} \text{ electrones}}{1 \text{ mol de } \beta} =$$

$$= 3,23 \cdot 10^{23} \text{ partículas } \beta$$

El resto (64 %) por emisión  $\alpha$ :

$n_\alpha = 0,9536 \text{ mol}$  de partículas  $\alpha$ .

### PROBLEMA 16

Según los datos del problema:

$$A_0 \xrightarrow{\Delta t = 1 \text{ h}} A = A_0 - 0,04 A_0 = 0,96 A_0$$

Al aplicar estas condiciones a la ecuación general de la ley de desintegración (en función de la actividad):

$$A = A_0 \cdot e^{-\lambda \cdot \Delta t}$$

calculamos la constante de desintegración:

$0,96 A_0 = A_0 \cdot e^{-\lambda \cdot 1 \text{ h}}$ , al aplicar logaritmos neperianos y despejar  $\lambda$ , se obtiene:

$$\lambda = -\ln 0,96 \frac{1}{\text{h}} = 0,0408 \text{ h}^{-1}$$

Y puesto que la vida media es:  $\tau = \frac{1}{\lambda}$

$$\text{establecemos: } \tau = \frac{1}{0,0408 \text{ h}^{-1}} = 24,5 \text{ h}$$

### PROBLEMA 17

- a) Para calcular la masa inyectada a partir de la actividad inicial calculamos el número de núcleos:

$$N = \frac{A_0}{\lambda}$$

Para ello determinamos  $\lambda$ :

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{\ln 2}{T} = \frac{\ln 2}{77,8 \text{ h}} = 8,909 \cdot 10^{-3} \frac{1}{\text{h}} \cdot \frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}} = \\ &= 2,4748 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\text{s}} \end{aligned}$$

Y puesto que:

$$A_0 = 6 \cdot 10^{-3} \text{ Ci} \cdot \frac{3,7 \cdot 10^{10} \text{ Bq}}{1 \text{ Ci}} = 222 \cdot 10^6 \text{ Bq}$$

calculamos N:

$$\begin{aligned} N &= \frac{A_0}{\lambda} = \frac{222 \cdot 10^6 \text{ Bq}}{2,4748 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\text{s}}} = \\ &= 8,97 \cdot 10^{13} \text{ núcleos de Ga-67} = 8,97 \cdot 10^{13} \text{ átomos} \\ &\text{de } {}^{67}\text{Ga} \end{aligned}$$

Si consideramos que la masa molar del Ga-67 es 67 g/mol, establecemos:

$$8,97 \cdot 10^{13} \text{ átomos de } {}^{67}\text{Ga} \cdot \frac{1 \text{ mol de } {}^{67}\text{Ga}}{6,022 \cdot 10^{23} \text{ átomos}} \cdot$$

$$\cdot \frac{67 \text{ g de } {}^{67}\text{Ga}}{1 \text{ mol de } {}^{67}\text{Ga}} = 9,98 \cdot 10^{-9} \text{ g de } {}^{67}\text{Ga}$$

- b) Aplicando la ley de desintegración:

$$A = A_0 \cdot e^{-\lambda \cdot \Delta t} \rightarrow A = 6 \text{ mCi} \cdot e^{-8,909 \cdot 10^{-3} \left(\frac{1}{\text{h}}\right) \cdot \Delta t}$$

Si  $\Delta t = 1 \text{ h} \rightarrow A = 5,95 \text{ mCi}$ .

Si  $\Delta t = 24 \text{ h} \rightarrow A = 4,84 \text{ mCi}$ .

- c) Aplicando la ley de desintegración expresada en función de la masa:

$$m = m_0 \cdot e^{-\lambda \cdot \Delta t} \rightarrow m = 9,98 \text{ ng} \cdot e^{-8,909 \cdot 10^{-3} \left(\frac{1}{\text{h}}\right) \cdot \Delta t}$$

Si  $\Delta t = 1 \text{ semana} = 7 \text{ días} = 168 \text{ h} \rightarrow m = 2,23 \text{ ng}$

### PROBLEMA 18

a) La ecuación del proceso es:

Proceso	${}^{60}_{27}\text{Co} \rightarrow {}^0_{-1}\text{e} + {}^0_0\bar{\nu}_e + {}^A_Z?$	
C. carga	$27 = (-1) + Z; Z = 27 + 1$	$Z = 28 \text{ (Ni)}$
C. del nº de nucleones	$60 = A$	$A = 60$
Ecuación	${}^{60}_{27}\text{Co} \rightarrow {}^0_{-1}\text{e} + {}^0_0\bar{\nu}_e + {}^{60}_{28}\text{Ni}^* \rightarrow {}^{60}_{28}\text{Ni} + \gamma$	

b) En este caso la condiciones del problema son:

$$m_0 \xrightarrow{\Delta t=?} m = m_0 - 0,3 m_0 = 0,7 m_0$$

Aplicando la ley de desintegración en función de la masa:

$$0,7 m_0 = m_0 \cdot e^{-\lambda \cdot \Delta t} \rightarrow \Delta t = \frac{-\ln 0,7}{\lambda}$$

El valor de la constante se obtiene a partir del periodo de semidesintegración:

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T} = \frac{\ln 2}{5,3 \text{ años}} = 0,131 \frac{1}{\text{años}}$$

$$\text{Por tanto: } \Delta t = \frac{-\ln 0,7}{0,131 \left( \frac{1}{\text{años}} \right)} = 2,73 \text{ años}$$

c) Puesto que por cada núcleo desintegrado se genera una partícula  $\beta$ , el número de partículas  $\beta$  emitidas por segundo equivale a la actividad de la muestra:

$A = N \cdot \lambda$ . Para calcularla determinamos el número de núcleos:

$$1 \text{ g de } {}^{60}\text{Co} \cdot \frac{1 \text{ mol de } {}^{60}\text{Co}}{60 \text{ g de } {}^{60}\text{Co}} \cdot \frac{6,022 \cdot 10^{23} \text{ núcleos de } {}^{60}\text{Co}}{1 \text{ mol de } {}^{60}\text{Co}} =$$

$$= 1,004 \cdot 10^{22} \text{ núcleos}$$

y el valor de la constante en el SI:

$$\lambda = 0,131 \frac{1}{\text{años}} \cdot \frac{1 \text{ año}}{31,536 \cdot 10^6 \text{ s}} = 4,1539 \cdot 10^{-9} \left( \frac{1}{\text{s}} \right)$$

Por tanto:

$$A = N \lambda = 1,004 \cdot 10^{22} \text{ núcleos} \cdot 4,1539 \cdot 10^{-9} \frac{1}{\text{s}} =$$

$$= 4,169 \cdot 10^{13} \text{ partículas } \beta / \text{s}$$

### PROBLEMA 19

La proporción entre los isótopos de C-14 y C-12 debe seguir la ley de desintegración radiactiva, que en este caso expresamos como:

$$\left( \frac{{}^{14}\text{C}}{{}^{12}\text{C}} \right) = \left( \frac{{}^{14}\text{C}}{{}^{12}\text{C}} \right)_0 \cdot e^{-\lambda \cdot \Delta t}$$

siendo:

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T} = \frac{\ln 2}{5730 \text{ años}}$$

Aplicando las condiciones del enunciado establecemos:

$$0,578 \cdot \left( \frac{{}^{14}\text{C}}{{}^{12}\text{C}} \right)_0 = \left( \frac{{}^{14}\text{C}}{{}^{12}\text{C}} \right)_0 \cdot e^{-\frac{\ln 2}{5730 \text{ años}} \cdot \Delta t}$$

Aplicando logaritmos neperianos y despejando  $\Delta t$ :

$$\Delta t = \frac{-\ln 0,578}{\frac{\ln 2}{5730 \text{ años}}} = 4531,62 \text{ años}$$

### PROBLEMA 20

En primer lugar tenemos que determinar la actividad de 1 g de carbono de la muestra, para ello a la actividad de 8 g le restamos la de fondo:

$$176,0 \text{ des/min} - 92,5 \text{ des/min} = 83,5 \text{ des/min}$$

y la dividimos por ocho. Por tanto, la actividad de 1 g de carbono de la muestra es:  $A = 10,4 \text{ des/min}$ .

La constante radiactiva es:

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T} = \frac{\ln 2}{5730 \text{ años}}$$

Aplicando las condiciones del enunciado establecemos:

$$10,4 \frac{\text{des}}{\text{min}} = 16,1 \text{ des/min} \cdot e^{-\frac{\ln 2}{5730 \text{ años}} \cdot \Delta t}$$

Aplicando logaritmos neperianos y despejando  $\Delta t$ :

$$\Delta t = \frac{-\ln 0,646}{\frac{\ln 2}{5730 \text{ años}}} = 3612,2 \text{ años}$$

## REACCIONES NUCLEARES

### PROBLEMA 21

Proceso a	${}^{24}_{12}\text{Mg} + {}^2_1\text{H} \rightarrow {}^4_2\text{He} + {}^A_Z\text{X}$	
C. carga	$12 + 1 = 2 + Z; Z = 13 - 2$	$Z = 11 \text{ (Na)}$
C. del nº de nucleones	$24 + 2 = A + 4; A = 26 - 4$	$A = 22$
Ecuación	${}^{24}_{12}\text{Mg} + {}^2_1\text{H} \rightarrow {}^4_2\text{He} + {}^{22}_{11}\text{Na}$	



Proceso b	${}^7_3\text{Li} + {}^1_1\text{H} \rightarrow {}^7_4\text{Be} + {}^A_Z\text{X}$	
C. carga	$3 + 1 = 4 + Z; Z = 4 - 4$	$Z = 0 \text{ (n)}$
C. del nº de nucleones	$7 + 1 = A + 7; A = 8 - 7$	$A = 1$
Ecuación	${}^7_3\text{Li} + {}^1_1\text{H} \rightarrow {}^7_4\text{Be} + {}^1_0\text{n}$	

Proceso c	${}^{235}_{92}\text{U} + {}^1_0\text{n} \rightarrow {}^{141}_{56}\text{Ba} + {}^{92}_{36}\text{Kr} + {}^A_Z\text{X}$	
C. carga	$92 + 0 = 56 + 36 + Z; Z = 92 - 92$	$Z = 0 \text{ (n)}$
C. del nº de nucleones	$235 + 1 = 141 + 92 + A; A = 236 - 233$	$A = 3$ . Por ser $Z = 0$ deben ser neutrones ( ${}^1_0\text{n}$ ) y puesto que $A = 3$ deben liberarse tres.
Ecuación	${}^{235}_{92}\text{U} + {}^1_0\text{n} \rightarrow {}^{141}_{56}\text{Ba} + {}^{92}_{36}\text{Kr} + 3 {}^1_0\text{n}$	

Proceso d	${}^{21}_{13}\text{Al} + {}^1_0\text{n} \rightarrow {}^4_2\text{He} + {}^A_Z\text{X}$	
C. carga	$13 + 0 = 2 + Z; Z = 13 - 2$	$Z = 11 \text{ (Na)}$
C. del nº de nucleones	$21 + 1 = A + 4; A = 22 - 4$	$A = 18$
Ecuación	${}^{21}_{13}\text{Al} + {}^1_0\text{n} \rightarrow {}^4_2\text{He} + {}^{18}_{11}\text{Na}$	

Proceso e	${}^3_1\text{H} + {}^2_1\text{H} \rightarrow {}^4_2\text{He} + {}^A_Z\text{X}$	
C. carga	$1 + 1 = 2 + Z; Z = 0$	$Z = 0 \text{ (n)}$
C. del nº de nucleones	$3 + 2 = A + 4; A = 5 - 4$	$A = 1$
Ecuación	${}^3_1\text{H} + {}^2_1\text{H} \rightarrow {}^4_2\text{He} + {}^1_0\text{n}$	

## PROBLEMA 22

Primer proceso a	${}^{232}_{90}\text{Th} + {}^1_0\text{n} \rightarrow {}^A_Z\text{X}_1$	
C. carga	$90 + 0 = Z; Z = 90$	$Z = 90 \text{ (Th)}$
C. nº nucleones	$232 + 1 = A$	$A = 233$
Ecuación 1	${}^{232}_{90}\text{Th} + {}^1_0\text{n} \rightarrow {}^{233}_{90}\text{Th}$	
Segundo proceso a	${}^{233}_{90}\text{Th} \rightarrow {}^0_{-1}\text{e} + {}^0_0\bar{\nu}_e + {}^A_Z\text{X}_2$	
C. carga	$90 = -1 + Z; Z = 91 \text{ (Pa)}$	
C. nucleones	$233 = A$	
Ecuación 2	${}^{233}_{90}\text{Th} \rightarrow {}^0_{-1}\text{e} + {}^0_0\bar{\nu}_e + {}^{233}_{91}\text{Pa}$	
Tercer proceso a	${}^{233}_{91}\text{Pa} \rightarrow {}^{233}_{92}\text{U} + {}^A_Z\text{X}_3$	
C. carga	$91 = 92 + Z; Z = -1 \text{ (e)}$	
C. nº nucleones	$233 = A + 233; A = 0$	
Ecuación 3	${}^{233}_{91}\text{Pa} \rightarrow {}^0_{-1}\text{e} + {}^0_0\bar{\nu}_e + {}^{233}_{92}\text{U}$	

Primer proceso b	${}^{238}_{92}\text{U} + {}^1_0\text{n} \rightarrow {}^A_Z\text{X}_1$	
C. carga	$92 + 0 = Z; Z = 92$	$Z = 92 \text{ (U)}$
C. nucleones	$238 + 1 = A; A = 239$	$A = 239$
Ecuación 1	${}^{238}_{92}\text{U} + {}^1_0\text{n} \rightarrow {}^{239}_{92}\text{U}$	
Segundo proceso b	${}^{239}_{92}\text{U} \rightarrow {}^0_{-1}\text{e} + {}^0_0\bar{\nu}_e + {}^A_Z\text{X}_2$	
C. carga	$92 = -1 + Z; Z = 92 + 1$	$Z = 93 \text{ (Np)}$
C. nº nucleones	$239 = A$	$A = 239$
Ecuación 2	${}^{239}_{92}\text{U} \rightarrow {}^0_{-1}\text{e} + {}^0_0\bar{\nu}_e + {}^{239}_{93}\text{Np}$	
Tercer proceso b	${}^{239}_{93}\text{Np} \rightarrow {}^{239}_{94}\text{Pu} + {}^A_Z\text{X}_1$	
C. carga	$93 = 94 + Z; Z = -1 \text{ (e)}$	
C. nucleones	$239 = A + 239; A = 0$	
Ecuación 3	${}^{239}_{93}\text{Np} \rightarrow {}^0_{-1}\text{e} + {}^0_0\bar{\nu}_e + {}^{239}_{94}\text{Pu}$	

Primer proceso c	${}^{239}_{94}\text{Pu} + {}^1_0\text{n} \rightarrow {}^A_Z\text{X}_1$	
C. carga	$94 + 0 = Z; Z = 94 \text{ (Pu)}$	
C. nº nucleones	$239 + 1 = A; A = 240$	
Ecuación 1	${}^{239}_{94}\text{Pu} + {}^1_0\text{n} \rightarrow {}^{240}_{94}\text{Pu}$	
Segundo proceso c	${}^{240}_{94}\text{Pu} + {}^A_Z\text{X} \rightarrow {}^{241}_{94}\text{Pu}$	
C. carga	$94 + Z = 94; Z = 0$	$Z = 0 \text{ (n)}$
C. nº nucleones	$240 + A = 241; A = 241 - 240$	$A = 1$
Ecuación 2	${}^{240}_{94}\text{Pu} + {}^1_0\text{n} \rightarrow {}^{241}_{94}\text{Pu}$	

Hay isótopos fisionables que no existen en la naturaleza pero que pueden obtenerse artificialmente. Los principales son:

- **El uranio-233**, que se obtiene por captura de un neutrón por un núcleo de torio-232. El núcleo intermedio formado presenta dos desintegraciones beta, dando lugar al mencionado U-233.
- **El plutonio-239**: Aunque han podido detectarse trazas de él, se considera que no es un isótopo natural. Se forma en la captura de un neutrón por un núcleo de uranio-238, seguida de dos emisiones beta.
- **El plutonio-241**: Tiene menor importancia que los anteriores. Se forma por la captura de un neutrón por el Pu-240, el cual procede a su vez de la captura de un neutrón por un núcleo de Pu-239.

La obtención de los dos primeros isótopos, el U-233 y el Pu-239, se puede realizar en los reactores nucleares, si introducimos en los mismos núcleos de torio-232 y uranio-238, que son los átomos que por captura de un neutrón dan lugar a los isótopos fisionables. Este material se llama **material fértil**.



### PROBLEMA 23

Para identificar el nucleído X, planteamos el siguiente proceso:

Reacción	${}^{27}_{13}\text{Al} + {}^1_1\text{H} \rightarrow {}^4_2\text{He} + {}^A_Z\text{X}$	
C. carga	$13 + 1 = 2 + Z$ ; $Z = 14 - 2$	$Z = 12$ (Mg)
C. del n° de nucleones	$27 + 1 = A + 4$ ; $A = 28 - 4$	$A = 24$
Ecuación	${}^{27}_{13}\text{Al} + {}^1_1\text{H} \rightarrow {}^4_2\text{He} + {}^{24}_{12}\text{Mg}$	

Para calcular la masa isotópica de X determinamos:

- El defecto de masa:

$$-\Delta m = \frac{Q}{931,47 \text{ MeV/u}} = \frac{1,09 \text{ MeV}}{931,47 \text{ MeV/u}} = 1,17 \cdot 10^{-3} \text{ u}$$

- La masa final del sistema:  $-\Delta m = m_i - m_f \rightarrow m_f = m_i + \Delta m$   
Puesto que:

$$m_i = 26,981541 \text{ u} + (1,007276 \text{ u}) = 27,988817 \text{ u}$$

Por tanto:

$$m_f = m_i + \Delta m = 27,988817 \text{ u} + (-1,17 \cdot 10^{-3} \text{ u}) = 27,987647 \text{ u}$$

- La masa isotópica de X ( ${}^{24}_{12}\text{Mg}$ ):

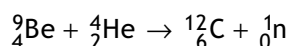
Como la masa final del sistema es:

$$m_f = m_{\text{He}} + m_{\text{X}} \rightarrow m_{\text{X}} = m_f - m_{\text{He}}$$

$$\text{Por tanto: } m_{\text{X}} = 27,987647 \text{ u} - 4,002603 \text{ u} = 23,985044 \text{ u}$$

### PROBLEMA 24

Para calcular el factor Q de la reacción:



Determinamos el defecto de masa:

$$-\Delta m = m_i - m_f = (9,012183 + 4,002603) \text{ u} - (12,000000 + 1,008665) \text{ u} = 0,006121 \text{ u}$$

El factor Q se calcula por la expresión:

$$Q = (-\Delta m) \text{ u} \cdot 931,47 \frac{\text{MeV}}{\text{u}} = 0,006121 \text{ u} \cdot 931,47 \frac{\text{MeV}}{\text{u}} = 5,70 \text{ MeV}$$

### PROBLEMA 25

La explicación de fenómeno de fisión se debe estructurar en los siguientes apartados: Origen

Las reacciones de fisión se producen cuando algunos átomos pesados, como el **uranio-235** o el **plutonio-239**, son bombardeados por neutrones. Entonces tiene lugar la partición del núcleo de uranio o de plutonio.

A) **Productos originados.** Por la fisión del U-235 se pueden generar hasta un centenar de núcleos distintos, todos ellos radiactivos, que se llaman productos de fisión. Además, se desprenden rayos gamma y neutrones en cada fisión. En una reacción de fisión tiene lugar un gran desprendimiento de energía, del orden de 200 MeV por núcleo fisionado.

B) **Aplicaciones.** Los neutrones liberados pueden a su vez chocar con otros átomos de uranio-235 y producir nuevas fisiones con su correspondiente desprendimiento de energía y liberación de nuevos neutrones. Tiene así lugar una **reacción en cadena**. Si esta reacción se controla debidamente tenemos el fundamento de los **reactores nucleares**. En caso contrario, la **bomba atómica**.

1. Dos de las posibles reacciones de fisión del  ${}^{235}_{92}\text{U}$  son:

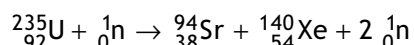
Proceso a	${}^{235}_{92}\text{U} + {}^1_0\text{n} \rightarrow {}^{133}_{51}\text{Sb} + {}^{99}_{41}\text{Nb} + a {}^1_0\text{n}$	
C. carga	$92 + 0 = Z + 41$ ; $Z = 92 - 41$	$Z = 51$ (Sb)
C. n° nucleones	$235 + 1 = 133 + 99 + a$ (n° neutrones liberados); $a = 236 - 232$	$a = 4$ Se liberan cuatro neutrones por fisión
Ecuación	${}^{235}_{92}\text{U} + {}^1_0\text{n} \rightarrow {}^{133}_{51}\text{Sb} + {}^{99}_{41}\text{Nb} + 4 {}^1_0\text{n}$	

Proceso b	${}^{235}_{92}\text{U} + {}^1_0\text{n} \rightarrow {}^{94}_{38}\text{Sr} + {}^{140}_{54}\text{Xe} + b {}^1_0\text{n}$	
C. carga	$92 + 0 = Z + 38$ ; $Z = 92 - 38$	$Z = 54$ (Xe)
C. n° nucleones	$235 + 1 = 94 + 140 + b$ (n° neutrones liberados); $b = 236 - 234$	$b = 2$ Se liberan dos neutrones por fisión
Ecuación	${}^{235}_{92}\text{U} + {}^1_0\text{n} \rightarrow {}^{94}_{38}\text{Sr} + {}^{140}_{54}\text{Xe} + 2 {}^1_0\text{n}$	

2. Para evaluar la energía liberada por núcleo fisionado en cada proceso calculamos el factor Q de cada reacción.

Cálculo del factor Q		
Reacción de fisión	$-\Delta m = m_i - m_f$	$Q = -\Delta m \text{ u} \cdot 931,47 \frac{\text{MeV}}{\text{u}}$
${}^{235}_{92}\text{U} + {}^1_0\text{n} \rightarrow {}^{133}_{51}\text{Sb} + {}^{99}_{41}\text{Nb} + 4 {}^1_0\text{n}$	$-\Delta m = (235,043944 + 1,008665) \text{ u} - (132,915190 + 98,910350 + 4 \cdot 1,008665) \text{ u} = 0,192409 \text{ u}$	179,22 MeV / fisión
${}^{235}_{92}\text{U} + {}^1_0\text{n} \rightarrow {}^{94}_{38}\text{Sr} + {}^{140}_{54}\text{Xe} + 2 {}^1_0\text{n}$	$-\Delta m = (235,043944 + 1,008665) \text{ u} - (93,915400 + 139,921370 + 2 \cdot 1,008665) \text{ u} = 0,198509 \text{ u}$	184,91 MeV / fisión

En consecuencia es más rentable, desde el punto de vista energético el proceso:



3. En primer lugar calcularemos la energía útil generada por la central en un día:

$$\Delta E_{\text{útil}} = P \cdot \Delta t = 1092 \cdot 10^6 \text{ W} \cdot 86400 \text{ s} = 9,43 \cdot 10^{13} \text{ J}$$

Puesto que el rendimiento supuesto es del 20%, para generar esta energía la central debe consumir:

$$\Delta E_{\text{consumida}} = \frac{\Delta E_{\text{útil}}}{\text{rendimiento}} = \frac{9,43 \cdot 10^{13} \text{ J}}{0,2} = 4,72 \cdot 10^{14} \text{ J}$$

La energía proporcionada en cada fisión efectiva es:

$$\Delta E_{\text{fisión}} = 179,22 \cdot 10^6 \text{ eV} \cdot \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}}{1 \text{ eV}} = 2,87 \cdot 10^{-11} \text{ J}$$

En consecuencia el número de núcleos fisionados que “quema” la central al cabo de un día es:

$$N = 4,72 \cdot 10^{14} \text{ J} \cdot \frac{\text{núcleo fisionado}}{2,87 \cdot 10^{-11} \text{ J}} =$$

$$= 1,65 \cdot 10^{25} \text{ núcleos de } {}^{235}\text{U}$$

Esta cantidad corresponde a una masa de:

$$1,65 \cdot 10^{25} \text{ núcleos de } {}^{235}\text{U} \cdot$$

$$\cdot \frac{235 \text{ g de } {}^{235}\text{U}}{6,022 \cdot 10^{23} \text{ núcleos de } {}^{235}\text{U}} \simeq 6439 \text{ g de } {}^{235}\text{U}$$

## PROBLEMA 26

Para identificar la partícula o partículas planteamos:

Proceso	$2 {}^3_1\text{H} \rightarrow {}^4_2\text{He} + {}^A_Z\text{X}$	
C. carga	$2 = Z + 2; Z = 0$	$Z = 0$ (neutrón)
C. n° nucleones	$6 = 4 + a$ (n° neutrones liberados)	$a = 2$ Se liberan dos neutrones por fusión
Ecuación	$2 {}^3_1\text{H} \rightarrow {}^4_2\text{He} + 2 {}^1_0\text{n}$	

El cálculo del  $\Delta E$  se realiza a partir del  $-\Delta m$ , siendo:

$$m_{\text{inicial}} = 2 \cdot 3,016049 = 6,032098 \text{ u}$$

$$m_{\text{final}} = 2 \cdot 1,008665 + 4,002603 = 6,019933 \text{ u}$$

Por tanto:

$$\Delta E = (6,032098 - 6,019933) \text{ u} \cdot \frac{931,47 \cdot 10^6 \text{ eV}}{1 \text{ u}} =$$

$$= 11,33 \cdot 10^6 \text{ eV}$$

## EJERCICIO 27

- a) Ajuste e identificación de los nuevos núcleos.

Reacción a	${}^{241}_{95}\text{Am} + {}^1_1\text{H} \rightarrow {}^{144}_{53}\text{Ce} + {}^{90}_Z\text{X} + a {}^1_0\text{n}$	
C. carga	$95 + 1 = Z + 58;$ $Z = 96 - 58$	$Z = 38$ (Sr)
C. del n° de nucleones	$241 + 1 = 144 + 90 + a$ (n° neutrones liberados); $a = 242 - 234$	$a = 8$ Se liberan seis neutrones
Ecuación	${}^{241}_{95}\text{Am} + {}^1_1\text{H} \rightarrow {}^{144}_{53}\text{Ce} + {}^{90}_{38}\text{Sr} + 8 {}^1_0\text{n}$	

Reacción b	${}^{240}_{94}\text{Pu} + {}^1_0\text{n} \rightarrow {}^{134}_{54}\text{Xe} + {}^{97}_Z\text{X} + b {}^1_0\text{n}$	
C. carga	$94 + 0 = Z + 54; Z = 94 - 54$	$Z = 40$ (Zr)
C. del n° de nucleones	$240 + 1 = 134 + 97 + b$ (n° neutrones liberados) $b = 241 - 231$	$b = 10$ Se liberan diez neutrones
Ecuación	${}^{240}_{94}\text{Pu} + {}^1_0\text{n} \rightarrow {}^{134}_{54}\text{Xe} + {}^{97}_{40}\text{Zr} + 10 {}^1_0\text{n}$	

- b) Cálculo de la energía asociada a los procesos.

Cálculo del factor Q		
Reacción nuclear	$-\Delta m = m_i - m_f$	$Q = -\Delta m \cdot 931,47 \frac{\text{MeV}}{\text{u}}$
${}^{241}_{95}\text{Am} + {}^1_1\text{H} \rightarrow {}^{144}_{58}\text{Ce} + {}^{90}_{33}\text{Sr} + 8 {}^1_0\text{n}$	$(241,056844 + 1,007276) \text{ u} - (143,913680 + 89,907753 + 8 \cdot 1,008665) \text{ u} = 0,173367 \text{ u}$	161,5 MeV
${}^{240}_{94}\text{Pu} + {}^1_0\text{n} \rightarrow {}^{134}_{54}\text{Xe} + {}^{97}_{40}\text{Zr} + 10 {}^1_0\text{n}$	$(240,053827 + 1,008665) \text{ u} - (133,905398 + 96,919669 + 10 \cdot 1,008665) \text{ u} = 0,150775 \text{ u}$	140,4 MeV

- c) La valoración de la transmutación de los residuos nucleares de alta actividad puede estructurarse en los siguientes apartados:

#### Planteamiento del problema

La mayor parte de los riesgos radiactivos a largo plazo del combustible nuclear irradiado procede de unos pocos elementos (plutonio, neptunio, americio, curio y algunos productos de fisión de vida larga, como yodo y tecnecio), que están presentes en bajas concentraciones, pero requieren su aislamiento para impedir su escape al ambiente.

#### Solución

La separación de estos elementos, a veces llamada partición, y su posterior transmutación (mediante neutrones que producen su fisión o protones procedentes de aceleradores) permite transformar los isótopos de elevado nivel de actividad en otros de menos actividad.

#### Aspectos positivos

- Reducción de la radiotoxicidad al transmutar los isótopos de alta actividad y elevado periodo en otros de baja actividad y de periodo muy corto, e incluso estables.
- Generación de energía; al ser el factor  $Q > 0$ , se libera energía que puede transformarse en energía útil.

#### Aspectos negativos

- Se incrementa el tiempo de manipulación dando lugar a un mayor riesgo de fugas o accidentes.
- Se precisa de una tecnología de elevado nivel y cara.

#### PROBLEMA 28

El ajuste de la reacción corresponde a:

Reacción	$2\ ^3_2\text{He} \rightarrow\ ^4_2\text{He} +\ ^A_Z\text{X}$	
C. carga	$2 \cdot 2 = 2 + Z; Z = 2$	$Z = 2$
C. nº nucleones	$2 \cdot 3 = A + 4; A = 2$	$A = 2$
Análisis	La partícula $\ ^A_Z\text{X}$ no existe, por ello serán dos protones $\ ^1_1\text{H}$	
Ecuación	$2\ ^3_2\text{He} \rightarrow\ ^4_2\text{He} + 2\ ^1_1\text{H}$	

Para calcular la energía emitida al consumirse 1 kg de  $\ ^3\text{He}$  (supuestamente atómico) realizaremos:

- a) El balance energético de la reacción de fusión:

Cálculo del factor Q	
Reacción de fusión	$2\ ^3_2\text{He} \rightarrow\ ^4_2\text{He} + 2\ ^1_1\text{H}$
$-\Delta m = m_i - m_f$	
$-\Delta m = (2 \cdot 3,016029) \text{ u} - (4,002603 + 2 \cdot 1,007276) \text{ u} = 0,014903 \text{ u}$	
$Q = -\Delta m \cdot c^2$	$0,014903 \text{ u} \cdot \frac{931,47 \text{ MeV}}{1 \text{ u}} = 13,88 \text{ MeV}$

Es decir, por cada dos átomos de helio-3 fusionados se liberan 13,88 MeV

- b) La cantidad de núcleos presentes en 1 kg de helio:

$$1000 \text{ g de } ^3\text{He} \cdot \frac{6,022 \cdot 10^{23} \text{ núcleos de He}}{3 \text{ g de He}} =$$

$$= 2,01 \cdot 10^{26} \text{ núcleos de } ^3\text{He}$$

- c) La cantidad de energía liberada:

$$\Delta E = 2,01 \cdot 10^{26} \text{ núcleos de } ^3\text{He} \cdot \frac{13,88 \text{ MeV}}{2 \text{ núcleos de He}} =$$

$$= 1,4 \cdot 10^{27} \text{ MeV}$$

### 4.3. SOLUCIÓN DE LOS PROBLEMAS DE AUTOEVALUACIÓN

#### Ejercicio 1

- a) Ecuación de la reacción nuclear:

Proceso $\alpha$	$\ ^{226}_{88}\text{Ra} \rightarrow\ ^4_2\text{He} +\ ^A_Z\text{Rn}$	
C. carga	$88 = 2 + Z; Z = 88 - 2$	$Z = 86 \text{ (Rn)}$
C. del número de nucleones	$226 = A + 4; A = 226 - 4$	$A = 222$
Ecuación	$\ ^{226}_{88}\text{Ra} \rightarrow\ ^4_2\text{He} +\ ^{222}_{86}\text{Rn}$	

Determinación de la energía liberada en el proceso de desintegración:

Cálculo del factor $\Delta E = Q$	
Reacción de fusión	
$\ ^{226}_{88}\text{Ra} \rightarrow\ ^4_2\text{He} +\ ^{222}_{86}\text{Rn}$	
$-\Delta m = m_i - m_f$	
$-\Delta m = (226,025406) \text{ u} - (4,002603 + 222,017574) \text{ u} = 0,005229 \text{ u}$	
$Q = (-\Delta m) \cdot c^2$	
$0,005229 \text{ u} \cdot \frac{1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}}{1 \text{ u}} \cdot (3 \cdot 10^8 \text{ m/s})^2 = 7,8 \cdot 10^{-13} \text{ J}$	

b) Cálculo de la energía de enlace y la energía de enlace por nucleón.

Isótopo	$m_{(p+n)} = Z \cdot 1,007276 \text{ u} + (A - Z) \cdot 1,008665 \text{ u}$	$\delta m$	$E_b = \delta m (\text{u}) \cdot 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ u} / \text{kg} \cdot (3 \cdot 10^8 \text{ m/s})^2$	$E_b/A$
$^{226}_{88}\text{Ra}$	$88 \cdot 1,007276 \text{ u} + 138 \cdot 1,008665 \text{ u} = 227,836058 \text{ u}$	$1,810652 \text{ u}$	$2,71 \cdot 10^{-10} \text{ J}$	$1,19 \cdot 10^{-12} \text{ J}$
$^{222}_{86}\text{Rn}$	$86 \cdot 1,007276 \text{ u} + 136 \cdot 1,008665 \text{ u} = 223,804176 \text{ u}$	$1,786602 \text{ u}$	$2,67 \cdot 10^{-10} \text{ J}$	$1,20 \cdot 10^{-12} \text{ J}$

La estabilidad viene indicada por el factor energía de enlace por nucleón. En este caso ambos isótopos tienen un valor de  $E_b/A$  muy parecido, siendo apenas mayor el del  $^{222}_{86}\text{Rn}$  y, por ello, se considera más estable.

## Ejercicio 2

a) Para calcularla el número de desintegraciones por segundo (Actividad) determinamos el número de núcleos:

$$N_0 = 50 \cdot 10^{-3} \text{ g de } ^{32}\text{P} \cdot \frac{1 \text{ mol de } ^{32}\text{P}}{32 \text{ g de } ^{32}\text{P}} \cdot \frac{6,022 \cdot 10^{23} \text{ núcleos de } ^{32}\text{P}}{1 \text{ mol de } ^{32}\text{P}} = 9,41 \cdot 10^{20} \text{ núcleos}$$

Y el valor de la constante radiactiva a partir del concepto del periodo de semidesintegración:

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda} \rightarrow \lambda = \frac{\ln 2}{T} = \frac{\ln 2}{14,6 \text{ días}} = 47,48 \cdot 10^{-3} \frac{1}{\text{día}}$$

Expresando la constante en unidades del SI:

$$\lambda = 47,48 \cdot 10^{-3} \frac{1}{\text{día}} \cdot \frac{1 \text{ día}}{86400 \text{ s}} = 549,54 \cdot 10^{-9} \left(\frac{1}{\text{s}}\right)$$

Por tanto la actividad inicial de la muestra es:

$$A_0 = \lambda N_0 = 549,54 \cdot 10^{-9} \left(\frac{1}{\text{s}}\right) \cdot 9,41 \cdot 10^{20} \text{ núcleos} = 5,17 \cdot 10^{14} \frac{\text{desintegraciones}}{\text{s}}$$

c) Para calcular los días que tarda la muestra en reducirse a 1 mg aplicamos la ley de desintegración referida a la masa:

$$m = m_0 e^{-\lambda \cdot \Delta t} \rightarrow 1 \text{ mg} = 50 \text{ mg} \cdot e^{-\frac{\ln 2}{14,6 \text{ días}} \Delta t}$$

$$\text{Despejando } \Delta t; \Delta t = \frac{-\ln \frac{1}{50}}{\frac{\ln 2}{14,6 \text{ días}}} = 82,4 \text{ días}$$

## Ejercicio 3

a) La representación del proceso corresponde a:

Proceso de fisión	$^{235}_{92}\text{U} + ^1_0\text{n} \rightarrow ^{131}_{54}\text{X} + ^{99}_{38}\text{Tc} + a ^1_0\text{n}$	
C. carga	$92 + 0 = Z + 43; Z = 92 - 43$	$Z = 49 (\text{In})$
C. nº de nucleones	$235 + 1 = 131 + 99 + a$ (nº neutrones liberados); $a = 236 - 230$	$a = 6$ Se liberan seis neutrones por fisión
Ecuación	$^{235}_{92}\text{U} + ^1_0\text{n} \rightarrow ^{131}_{54}\text{In} + ^{99}_{38}\text{Tc} + 6 ^1_0\text{n}$	

b) La ecuación de desintegración de  $^{99}\text{Tc}$  es:

Proceso	$^{99}_{43}\text{Tc} \rightarrow ^0_{-1}\text{e} + ^0_0\bar{\nu}_e + ^A_Z\text{X}$	
C. carga	$43 = (-1) + Z; Z = 43 + 1$	$Z = 44 (\text{Ru})$
C. nº de nucleones	$99 = A$	$A = 99$
Ecuación	$^{99}_{43}\text{Tc} \rightarrow ^0_{-1}\text{e} + ^0_0\bar{\nu}_e + ^{99}_{44}\text{Ru}$	

c) La cantidad de núcleos presentes en 1994 de  $^{99}\text{Tc}$  en el ambiente es:

$$N_0 = 250 \cdot 10^3 \text{ g de } ^{99}\text{Tc} \cdot \frac{1 \text{ mol de } ^{99}\text{Tc}}{99 \text{ g de } ^{99}\text{Tc}} \cdot \frac{6,022 \cdot 10^{23} \text{ núcleos de } ^{99}\text{Tc}}{1 \text{ mol de } ^{99}\text{Tc}} = 1,52 \cdot 10^{27} \text{ núcleos}$$

Para calcular la actividad inicial determinamos el valor de la constante:

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda} \rightarrow \lambda = \frac{\ln 2}{T} = \frac{\ln 2}{2,11 \cdot 10^5 \text{ años}} = 3,285 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\text{año}}$$

que expresada en el SI es

$$\lambda = 3,285 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\text{año}} \cdot \frac{1 \text{ año}}{31,536 \cdot 10^6 \text{ s}} = 1,04 \cdot 10^{-13} \left(\frac{1}{\text{s}}\right)$$

Por tanto la actividad inicial es:

$$A_0 = N_0 \cdot \lambda = 1,52 \cdot 10^{27} \text{ núcleos} \cdot 1,04 \cdot 10^{-13} \left(\frac{1}{\text{s}}\right) = 1,58 \cdot 10^{14} \text{ Bq}$$

que expresada en Ci es:

$$A_0 = 1,58 \cdot 10^{14} \text{ Bq} \cdot \frac{1 \text{ Ci}}{3,7 \cdot 10^{10} \text{ Bq}} = 4270 \text{ Ci}$$

En el año 3000 ( $\Delta t = 1016$  años) la actividad será:

$$A = 4270 \text{ Ci} \cdot e^{-3,235 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\text{año}} \cdot 1016 \text{ años}} = 4255,7 \text{ Ci}$$

Es decir, apenas se habrá reducido.

### Ejercicio 4

El alumnado debe remarcar los aspectos positivos del uso de la radiactividad (aplicaciones sanitarias, científicas y energéticas) y establecer pautas para reducir los efectos perjudiciales, asociados esencialmente a la generación y acumulación de residuos radiactivos.

### Ejercicio 5

La comparación de ambos procesos puede resumirse en la siguiente tabla.

Proceso	FISIÓN	FUSIÓN	COMPARACIÓN
Fundamento	Escisión de núcleos fisionables en otros de masa intermedia liberando neutrones y energía	Aproximación de núcleos ligeros para obtener un núcleo más estable y energía	La fisión se fundamenta en romper núcleos pesados mientras que la fusión implica unir núcleos ligeros
Materia prima	Núcleos de <sup>235</sup> U y núcleos fértiles que puedan originar núcleos fisionables	Isótopos del hidrógeno	La materia prima necesaria para la fisión es escasa en comparación a la de la fusión, hidrógeno
Rendimiento	En los reactores nucleares se genera gran cantidad de energía de forma continua y controlada	El rendimiento teórico de la energía liberada en la fusión es superior al de fisión. Pero aún no pueden desarrollarse reacciones de fusión controladas	La fusión posee un mayor rendimiento teórico que la fisión, pero no existen reactores de fusión operativos
Nivel tecnológico	La fisión se desarrolla en reacciones en cadena controladas en los reactores nucleares	Se estudian diversas posibilidades para su desarrollo pero aún no se desarrollan	Los procesos de fisión son operativos y los de fusión todavía no
Residuos	Restos radiactivos de baja y alta actividad que requieren procesos de manipulación y aislamiento especiales	Teóricamente se considera que se originen residuos radiactivos de escasa actividad e inocuos antes de un siglo	La fisión da lugar a importantes problemas de generación de residuos radiactivos, mientras que en la fusión se originan residuos de escasa intensidad

## 5. CRITERIOS DE EVALUACIÓN

Al finalizar el presente tema pretendemos que seas capaz de:

- Comprender la naturaleza de la radiactividad.
- Diferenciar el tipo de radiaciones radiactivas e identificarlas.
- Relacionar la radiactividad con las propiedades nucleares.
- Establecer el criterio de la energía de enlace por nucleón ( $E_b / A$ ) para clasificar los núcleos en función de su estabilidad.
- Diferenciar la interacción nuclear (fuerte y débil) de los otros tipos de interacciones.
- Representar los procesos nucleares por ecuaciones, aplicando para ello los principios de la conservación de carga y del número de nucleones.
- Aplicar la relación entre las variaciones de masa, en los sistemas nucleares, con las variaciones equivalentes de energía para cuantificar sus transformaciones energéticas.
- Asumir el carácter estadísticos de las leyes de desintegración.
- Aplicar las leyes de desintegración radiactiva al estudio de sus procesos.
- Comprender el concepto de reacción nuclear evaluando las transformaciones energéticas asociadas y representándola mediante una ecuación.
- Comparar los procesos de fisión y fusión nuclear.
- Valorar las ventajas e inconvenientes asociados al uso de los reactores de fisión como fuente energética.
- Conocer las implicaciones sociales y políticas involucradas en la evolución de la física nuclear.
- Conocer las principales aplicaciones de los radioisótopos.
- Diferenciar las características de las partículas elementales: quarks y leptones.
- Comprender el papel de las partículas elementales en la constitución de la materia.

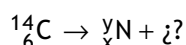
## 6. EJERCICIOS PROPUESTOS PARA LA EVALUACIÓN FINAL DEL TEMA

### LEYES DE EMISIÓN RADIATIVA

#### Ejercicio 1

El  $^{14}\text{C}$  es un isótopo emisor de radiaciones  $\beta$ , con una vida media de 8266,6 años. Como sabes este isótopo se utiliza para datar muestras arqueológicas.

- a) Completa la reacción de desintegración radiactiva



- b) La actividad de un determinado hueso es 16 veces inferior a la actividad de un hueso actual del mismo tipo e idéntica masa. Calcula la antigüedad del hueso.
- c) Explica cómo un núcleo puede emitir electrones.
- d) Calcula la actividad de 1 mg de  $^{14}\text{C}$ . ¿Cuánto tiempo debe transcurrir para que la actividad sea 1 mCi?

Dato:  $N_A = 6,022 \cdot 10^{23}$  partículas / mol

#### Ejercicio 2

Se aíslan 250 g de una muestra radiactiva y al cabo de una hora se ha desintegrado el 25% de la masa inicial. Calcula:

- a) El valor de la constante radiactiva.
- b) El periodo de semidesintegración y la vida media de la sustancia radiactiva. Explica el concepto de vida media.
- c) La masa de la muestra radiactiva que habrá transcurrido un mes.

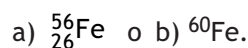
#### Ejercicio 3

- a) Determina el número atómico y el número másico del isótopo originado a partir del  $^{218}_{84}\text{Po}$  al emitir 4 partículas  $\alpha$  y 2  $\beta$ .
- b) Un núcleo de  $^{115}_{49}\text{In}$  absorbe un neutrón y se transforma en un núcleo  $^{116}_{50}\text{Sn}$  emitiendo una partícula. Identifica la partícula.
- c) Explica la diferencia entre la radiactividad natural y la artificial.

#### Ejercicio 4

- a) Define los conceptos de constante radiactiva, periodo de semidesintegración y vida media. Establece las relaciones entre estas magnitudes.
- b) El periodo de semidesintegración de un isótopo del Po es de 120 s. Calcula el porcentaje de una cierta masa inicial del isótopo de polonio que hay al cabo de 9 minutos.

- c) ¿Qué núcleo es más estable?:



Datos: masas atómicas:

$$m_{\text{Fe-56}} = 55,934934 \text{ u}; m_{\text{Fe-60}} = 59,934048 \text{ u};$$

$$m_n = 1,008665 \text{ u}; m_H = 1,007825 \text{ u};$$

1u equivale a 931,47 MeV

#### Ejercicio 5

- a) Un isótopo inestable del astato  $^{217}_{85}\text{At}$  emite una partícula alfa y se transforma en un elemento X, el cual emite una partícula beta y da lugar a un elemento Y. Establece los números atómicos y másicos de X e Y.
- b) El periodo de semidesintegración del Rn-222 es de 3,9 días; si inicialmente se dispone de 20  $\mu\text{g}$  de Rn-222, ¿cuánto queda después de una semana?

#### Ejercicio 6

El isótopo  $^{234}\text{U}$  tiene un periodo de semidesintegración de 250 000 años. Si partimos de una muestra de 10 g de este isótopo, determina:

- a) La constante de desintegración radiactiva.
- b) La masa que quedará sin desintegrarse después de 50 mil años.
- c) El tiempo que debe transcurrir para que la masa de la muestra se reduzca a la cuarta parte.

#### Ejercicio 7

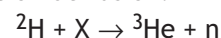
En noviembre de 2006, el ex espía A. Litvinenko murió por intoxicación radiactiva al haber inhalado o ingerido  $^{210}_{84}\text{Po}$ . El  $^{210}_{84}\text{Po}$  es inestable y emite una partícula  $\alpha$  transformándose en Pb.

- a) Escribe la ecuación de desintegración correspondiente y determina los números másico y atómico del isótopo del Pb resultante.
- b) Explica por qué el  $^{210}_{84}\text{Po}$  es letal por irradiación interna (inhalación o ingestión) y no por irradiación externa

### REACCIONES NUCLEARES

#### Ejercicio 8

- a) Explica la reacción de fusión. ¿Qué diferencias existen entre los procesos de fusión y fisión?
- b) Considera la reacción de fusión:



- Identifica el núcleo X.

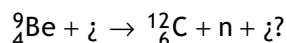
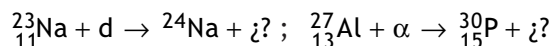


- Calcula el factor Q.

- c) ¿Qué isótopo es más estable,  $^2\text{H}$  o  $^3\text{He}$ ?  
 Datos:  $^2\text{H}$  (2,014102);  $^3\text{He}$  (3,016029); n (1,008665);  
 p (1,007825); 1 u equivale a 931,47 MeV

### Ejercicio 9

- a) Completa las siguientes reacciones:



- b) Explica la reacción de fisión y su aplicación como fuente energética. ¿Qué ventajas e inconvenientes se asocian a este proceso?
- c) ¿Qué se entiende por estabilidad nuclear? Explica, cualitativamente, la dependencia de la estabilidad nuclear con el número másico y justifica el tipo de reacciones nucleares más típicas.

### Ejercicio 10

Cuando se bombardea un blanco de  $^7_3\text{Li}$  con protones rápidos se produce  $^7_4\text{Be}$  más una partícula ligera.

- a) Escribe la ecuación de esta reacción nuclear e identifica razonadamente la partícula ligera.
- b) Calcula la mínima energía cinética que deben tener los protones para que pueda producirse esta reacción. Expresa tu resultado en MeV y en J.

Datos:  $^2\text{H}$  (2,014102);  $^3\text{He}$  (3,016029); n (1,008665);  
 p (1,007825); Li (7,016004); (Be) = 7,016929;  
 1 u equivale a 931,47 MeV

### Ejercicio 11

En una reacción nuclear hay una pérdida de masa de  $8,31 \cdot 10^{-10}$  kg. ¿Cuánta energía se libera en el proceso? Expresa el resultado en J y en kWh.

Dato:  $c = 3 \cdot 10^8$  m/s

El profesor o profesora puede buscar más ejercicios de referencia para elaborar sus pruebas de evaluación en las siguientes páginas WEB:

COMUNIDAD	DIRECCIÓN DE INTERNET DE BÚSQUEDA
Aragón	<a href="http://wzar.unizar.es/servicios/acceso/logse/indice.htm">http://wzar.unizar.es/servicios/acceso/logse/indice.htm</a>
Andalucía	<a href="http://www.ujaen.es/">http://www.ujaen.es/</a> En la ventana <b>PERFILES</b> , escoge <b>Nuevo Alumno</b> , y seguidamente en la etiqueta <b>SELECTIVIDAD</b> , pulsa <b>Exámenes anteriores</b> .
Castilla-La Mancha y León	<a href="http://www.uclm.es">http://www.uclm.es</a> Elige en la ventana <b>Estudiantes</b> la opción <b>Estudiante nuevo</b> ; seguidamente pulsa <b>PAU</b> . Y finalmente escoger <b>Modelos Propuestos en las PAU</b> . <a href="http://www.usal.es">http://www.usal.es</a> Escoge en la ventana <b>Futuros estudiantes</b> , la opción <b>Acceso</b> , <b>preinscripción y matrícula</b> . En el apartado " <b>Acceso</b> " pulsa <b>Pruebas de acceso: Selectividad</b>
Catalunya	<a href="http://www.gencat.cat/">http://www.gencat.cat/</a> En la ventana <b>TEMES</b> escoge <b>Universitats</b> para en la opción <b>Accés a la universitat</b> , pulsar <b>Proves d'Accés a la Universitat (PAU)</b> y finalmente <b>Exàmens i informació de les matèries</b>
C. Valenciana	<a href="http://www.ua.es">http://www.ua.es</a> En la ventana <b>Estudios y acceso</b> , escoge la opción <b>Acceso</b> y activa <b>Selectividad alumnos de bachillerato LOGSE</b> y finalmente pulsa exámenes del apartado <b>Currículo de las asignaturas y Exámenes de años anteriores</b> .
Islas Baleares	<a href="http://www.uib.es/depart/dfs/apl/aac/paufisica/">http://www.uib.es/depart/dfs/apl/aac/paufisica/</a>
Madrid	<a href="http://www.uc3m.es/">http://www.uc3m.es/</a> En la ventana <b>Futuros estudiantes</b> elige la opción <b>trámites de admisión</b> , y a continuación el rótulo <b>Pruebas de Acceso</b> y posteriormente en <b>Selectividad</b> pulsa la opción <b>Modelos de examen y criterios de corrección</b> .

## 7. RECURSOS DIDÁCTICOS Y BIBLIOGRAFÍA DE CONSULTA

### LIBROS

- DRY, S. 2006. *Curie*. Ed. Tutor.
- FARMELO, G. 2004. *Fórmulas elegantes*. Ed. Tusquets: metatemas.
- FÉRNANDEZ-RAÑADA, A. 2004. *Heisenberg*. Ed. Nivola.
- FORO NUCLEAR. 2007. *222 Cuestiones sobre la energía*.
- FORO NUCLEAR. 2008. *Energía 2008*.
- GRIBBIN, J. 1984. En busca del gato de Schrödinger. Barcelona: Biblioteca Científica Salvat.
- HEWIT. 1997. *Conceptos de Física*. Ed. Limusa.
- LOVELAND, W. MORRISSEY, D. SEABORG, G. 2006. *Modern Nuclear Chemistry*. Wiley-Interscience.
- RADVANYI, P. y BORDRY, M. 1987. *La radiactividad artificial*. Barcelona: Biblioteca Científica Salvat.
- SÁNCHEZ RON, J. M. 1998. *Marie Curie y la radiactividad*. Consejo de Seguridad Nuclear.
- SERWAY, R. y JOHN, J.R. 2003. *Física*. Volumen 2. Ed. Thomson.
- STEVEN, W. 1985. *Partículas subatómicas*. Prensa Científica. Editorial Labor
- TEMAS 9. 1997. *Núcleos atómicos y radiactividad*. Investigación y Ciencia.
- TIPLER-MOSCA. 2005. *Física para la ciencia y la tecnología*. Volumen 2. Ed. Reverté.
- VELASCO, J. 2000. *La textura del món*. Edicions Bromera, sense fronteres.

### ARTÍCULOS

- BALLESTER, F., UDÍAS J.M. 2008. Física Nuclear y medicina. *Revista Española de Física*, vol. 22, nº 1, 29-36.
- CANO, D. 2008. La transmutación de los residuos radioactivos. *Revista Española de Física*, vol. 22, nº 1, 45- 50.
- CASTEJÓN, F. 2006. El ITER que viene. *Revista Española de Física*, vol. 20, nº 1, 28-31.
- DEUTCH, J. M, ENERST J. 2006. La opción nuclear. *Investigación y Ciencia*. Noviembre 2006, número monográfico, 42-48.
- DOBADO, A. 2007. La física de partículas al servicio de la salud. Transferencias tecnológicas del CERN a la biomedicina. *Revista Española de Física*, vol. 21, nº 3, 46-50.
- GARCÍA, A. CRIADO, A. M. 2007. La energía atómica en la Educación Secundaria Obligatoria. *Revista Española de Física*, vol. 21, nº 1, 50-54.
- GARCÍA, M. Y MARTÍN, A. 2008. La Física Nuclear en otras ciencias, la industria y la tecnología. *Revista Española de Física*. Volumen 22, nº 1, 37-44.
- GARCÍA-CARMONA, A Y CRIADO, A. M. 2008. Enfoque CTS en la enseñanza de la energía nuclear: análisis de su tratamiento en textos de física y química de la ESO. *Enseñanza de las ciencias*, vol. 26, nº 1, 107-122.
- ROQUÉ, X. 2003. La radioactivitat i el Nobel de Física de 1903. *Revista de Física*, vol. 3, nº 1, 28-35
- TEMAS 9. 1997. Núcleos atómicos y radiactividad. *Investigación y ciencia*.
- THOMA, M. 2007. ¿Existen estrellas de quarks? *Investigación y Ciencia*, nº 373, 74-79.
- VON HIPPEL, F. 2008. El reciclado nuclear. *Investigación y Ciencia*, nº 382, 78-83.