Guía del profesor

1 bachillerato

Matemáticas

Rodolfo Esteve
Maribel Deusa
Pascual Montesinos
Antonio J. Ramírez
Ernesto Veres

ECIR EDITORIAL

Guía Didáctica I

bachillerato 1

Matemáticas

Autores
Rodolfo Esteve
Maribel Deusa
Pascual Montesinos
Antonio J. Ramírez
Ernesto Veres

ECIR EDITORIAL

Matemáticas

1 bachillerato

Guía Didáctica I

©ES PROPIEDAD

Rodolfo Esteve
Maribel Deusa
Pascual Montesinos
Antonio J. Ramírez
Ernesto Veres

Editorial ECIR, S.A.

Diseño de interior: Diseño gráfico ECIR
Edición: Editorial ECIR
Impresión: Industrias gráficas Ecir (IGE)

Cualquier forma de reproducción, distribución, comunicación pública o transformación de esta obra solo puede ser realizada con la autorización de sus titulares, salvo excepción prevista por la ley. Diríjase a CEDRO (Centro Español de Derechos Reprográficos, www.cedro.org) si necesita fotocopiar o escanear algún fragmento de esta obra.

Ilustraciones: Diseño Gráfico ECIR
Diseño e ilustración cubierta: Valverde e Iborra / Diseño gráfico ECIR

Depósito legal: V-3375-2008
I.S.B.N.: 978-84-9826-428-9

Villa de Madrid, 60 - 46988 - P. I. Fuente del Jarro - PATERNA (Valencia)
Tels: 96 132 36 25 - 96 132 36 55
Móvil: 677 431 115
Fax: 96 132 36 05
E-mail: ecir@ecir.com - http://www.ecir.com

Índice interactivo. Situar el cursor sobre el tema al que se desee ir y hacer clic.

Índice

1 LOS NÚMEROS REALES 4

2 ECUACIONES Y SISTEMAS DE ECUACIONES 15

3 COMBINATORIA 28

4 SUCESIONES DE NÚMEROS REALES 38

5 RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO AGUDO 46

6 RAZONES TRIGONOMÉTRICAS: GENERALIZACIÓN 56

7 LOS NÚMEROS COMPLEJOS 72

8 VECTORES 92

9 LA RECTA EN EL PLANO 101

10 LAS CÓNICAS 113

11 LAS FUNCIONES 126

12 LÍMITES DE FUNCIONES. CONTINUIDAD 143

13 FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS 157

14 LAS FUNCIONES EXPONENCIAL Y LOGARÍTMICA 164

15 DERIVADA DE UNA FUNCIÓN. APLICACIONES 179

16 DISTRIBUCIONES BIDIMENSIONALES. REGRESIÓN Y CORRELACIÓN 197

17 PROBABILIDAD 212

18 LA DISTRIBUCIÓN BINOMINAL 233

19 LA DISTRIBUCIÓN NORMAL 243

Tema 1 LOS NÚMEROS REALES

1 **Dados los números $A = \frac{27}{17}$; $B = 2 + \sqrt{5}$; $C = \pi - \sqrt{3}$ se pide dar de cada uno un redondeo de orden:**

a) entero; b) a décimas; c) a centésimas; d) a milésimas.

a) $A \simeq 2$; $B \simeq 4$; $C \simeq 1$;

c) $A \simeq 1{,}59$; $B \simeq 4{,}24$; $C \simeq 1{,}41$;

b) $A \simeq 1{,}6$; $B \simeq 4{,}2$; $C \simeq 1{,}4$

d) $A \simeq 1{,}588$; $B \simeq 4{,}236$; $C \simeq 1{,}410$

2 **Da el error absoluto y el relativo que se comete al hacer los redondeos anteriores.**

a) $A \begin{cases} E = 0{,}4 \\ e = 26\% \end{cases}$ $B \begin{cases} E = 0{,}24 \\ e = 5{,}6\% \end{cases}$ $C \begin{cases} E = 0{,}4 \\ e = 29\% \end{cases}$

b) $A \begin{cases} E = 0{,}012 \\ e = 0{,}7\% \end{cases}$ $B \begin{cases} E = 0{,}04 \\ e = 0{,}9\% \end{cases}$ $C \begin{cases} E = 0{,}009 \\ e = 0{,}7\% \end{cases}$

c) $A \begin{cases} E = 0{,}0017 \\ e = 0{,}1\% \end{cases}$ $B \begin{cases} E = 0{,}004 \\ e = 0{,}09\% \end{cases}$ $C \begin{cases} E = 0{,}0005 \\ e = 0{,}0003\% \end{cases}$

d) $A \begin{cases} E = 0{,}00024 \\ e = 0{,}01\% \end{cases}$ $B \begin{cases} E = 0{,}00007 \\ e = 0{,}002\% \end{cases}$ $C \begin{cases} E = 0{,}0005 \\ e = 0{,}0003\% \end{cases}$

3 **Se ha medido una longitud de 500 m con un «metro» cuya longitud exacta es de 98 cm. Determina el error absoluto y el error relativo cometido.**

$E = 10{,}204$ m; $e \simeq 0{,}0204$

4 **Sabiendo que $\sqrt{2} \approx 1{,}414\,213\,562\ldots$ Indica cuál es la cota de error cometido al redondear $\sqrt{2}$ como:**

a) 1 **b) 1,41** **c) 1,414 21.**

a) $\varepsilon = 0{,}4$ **b)** $\varepsilon = 0{,}004$ **c)** $\varepsilon = 0{,}000004$

5 **Usa la descomposición factorial de los radicandos y calcula:**

a) $\sqrt[3]{2744}$ **b)** $\sqrt[4]{0{,}0016}$ **c)** $\sqrt{49^3}$ **d)** $\sqrt[3]{-512}$

a) 14 **b)** $\frac{1}{5}$ **c)** 343 **d)** -8

6 **Calcula:**

a) $2\sqrt[3]{9}\cdot\sqrt{27}$ b) $\sqrt[4]{2^3}\cdot\sqrt{12}\cdot\sqrt[3]{3^2\cdot 2^2}$ c) $\dfrac{\sqrt[3]{9a^2b}}{\sqrt[6]{27a}}$ d) $\dfrac{\sqrt{2x}\cdot\sqrt[5]{8x^3}}{\sqrt{16x^3}}$

a) $18\sqrt[6]{3}$ **b)** $12\sqrt[12]{288}$ **c)** $\sqrt[6]{3\,a^3\,b^2}$ **d)** $\dfrac{1}{\sqrt[10]{2^9\,x^4}}$

7 **Calcula:** a) $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{4}}}}}$ b) $\sqrt{27\sqrt{24\sqrt{36}}}$

c) $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{4}}}}}$ d) $\sqrt{\sqrt[4]{256}}$

a) 2; **b)** 18; **c)** 2; **d)** 2

8 **Extrae los factores posibles de los radicales**

a) $\sqrt[5]{256}$ b) $\sqrt[3]{3x^4y^6}$ c) $\sqrt{8x^3y^{12}}$ d) $\sqrt[6]{36a^8a^5}$

a) $2\sqrt[5]{8}$ **b)** $xy^2\sqrt[3]{3x}$ **c)** $2xy^6\sqrt{2x}$ **d)** $a^2\sqrt[6]{36\,a}$

9 **Escribe de la forma $\sqrt[n]{a}$ los radicales**

a) $3x^3y^4\sqrt{2y^2}$ b) $-3ab\sqrt[3]{4a}$ c) $(a-b)\sqrt{a+b}$ d) $\dfrac{3x}{2}\sqrt[3]{\dfrac{2x}{3}}$

a) $\sqrt{18x^6y^{10}}$; **b)** $\sqrt[3]{-108a^4b^3}$; **c)** $\sqrt{(a-b)^2(a+b)}$; **d)** $\sqrt[3]{\dfrac{9x^4}{4}}$

10 **Racionaliza los denominadores:**

a) $\dfrac{3}{\sqrt{6}}$ b) $\dfrac{3}{2\sqrt{12}}$ c) $\dfrac{2}{\sqrt[5]{4}}$ d) $\dfrac{5}{\sqrt{7}-\sqrt{2}}$ e) $\dfrac{22}{5+\sqrt{3}}$

a) $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ **b)** $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ **c)** $\sqrt[5]{8}$ **d)** $\sqrt{7}+\sqrt{2}$ **e)** $5-\sqrt{3}$

11 **Opera las siguientes expresiones y da el resultado sin exponentes fraccionarios:**

a) $3\cdot 2^{5/2}$; b) $\dfrac{4}{6^{1/2}-2^{1/2}}$;

c) $3a^{1/2}b^{-1/2}c^{3/4}$; d) $(2a)^{1/3}(3a^2)^{1/4}(ab^5)^{-1/6}$

a) $12\sqrt{2}$; **b)** $\sqrt{6}+\sqrt{2}$; **c)** $3\sqrt[4]{\dfrac{a^2c^3}{b^2}}$; **d)** $\sqrt[12]{\dfrac{432\,a^8}{b^{10}}}$

12 **¿Verdadero o falso?**

a) $[2, 3[\subset]2, 3[$ **b)** $]2, 3[\subset [2, 3[$;

c) $[1, 3] \subset]-\infty, 3]$ **d)** $[-3, 2] \subset [-4, 4]$

a) F **b)** V **c)** V **d)** V

13 **Determina el conjunto** $A = \{[1, 4[\cup]5, 8]\} \cap \{[-1, 2] \cup]3, 6[\cup]7, 9]\}$

$[1, 2] \cup]3, 4[\cup]5, 6[\cup]7, 8]$

14 **Determina el conjunto** $B = \{]-1, 2[\cap [0, 3[\cap]-5, 1[\} \cup]1, 3]$.

$B = [0, 1[\cup]1, 3]$

15 **Da el valor absoluto de los siguientes números:**

a) 4,6; **b)** $\pi + 3$; **c)** $5 - \sqrt{26}$; **d)** 5^{-2}; **e)** -3^2; **f)** 2800^0

a) 4,6; **b)** $\pi + 3$; **c)** $\sqrt{26} - 5$; **d)** 5^{-2}; **e)** 3^2; **f)** $2800° = 1$

16 **Calcula:** $||-2| - |-4| - |-3 \times 5|| - |2 \times (-5)|$

7

17 **Halla** x **en las ecuaciones siguientes:**

a) $|x| = 7$; **b)** $|x - 2| = 3$; **c)** $|2 - 3x| = 1$

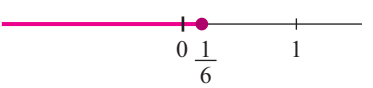
a) $x_1 = 7$; $x_2 = -7$; **b)** $x_1 = -1$; $x_2 = 5$; **c)** $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = 1$

18 **Resuelve las siguientes inecuaciones y expresa la solución gráficamente sobre la recta y como un intervalo:**

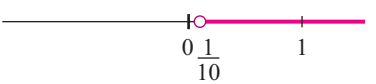
a) $2x - \frac{1}{3} \leq 0$ **b)** $\frac{x}{100} - 10^{-3} > 0$

c) $\frac{5x-9}{3} > \frac{7x+5}{2}$ **d)** $x\sqrt{3} - 6 \leq 3 - 4x$

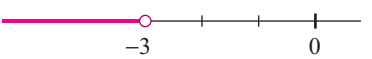
a) $x \in \left]-\infty, \frac{1}{6}\right]$



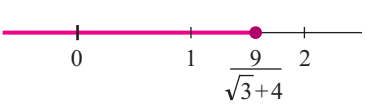
b) $x \in \left]\frac{1}{10}, \infty\right[$



c) $x \in]-\infty, -3[$



d) $x \in \left]-\infty, \frac{9}{\sqrt{3}+4}\right]$



19 **Mismo ejercicio:**

a) $\frac{6-5x}{3} - \frac{9-8x}{4} - \frac{11-10x}{12} < 0$;

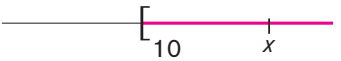
b) $3x + 2 - (5x + 1) \leq -(2x + 3) + x - 6$;

c) $\frac{x-2}{3} - \frac{x-1}{5} > \frac{x-6}{3}$

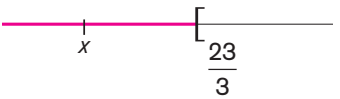
d) $2x - \frac{1+2x}{3} > 2 + \frac{x}{2}$

a) $x < 1$; $x \in]-\infty, 1[$

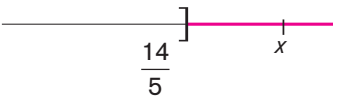
b) $x \geq 10$; $x \in [10, +\infty[$



c) $x < \frac{23}{3}$; $x \in]-\infty, \frac{23}{3}[$



d) $x > \frac{14}{5}$; $x \in]\frac{14}{5}, +\infty[$



20 **Dí qué números pertenecen a Q y cuáles a I.**

a) $\sqrt{10}$ **b)** $\sqrt{4}$ **c)** $\sqrt{0{,}04}$ **d)** 4,323232…

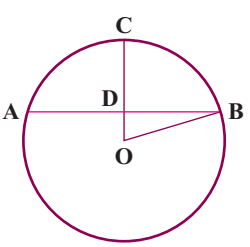
e) 2,010010001… **f)** $7{,}32\widehat{4}$ **g)** $\frac{2}{3}$ **h)** π^2

a) I **b)** Q **c)** Q **d)** Q **e)** I **f)** Q **g)** Q **h)** I

21 **¿Es cierto que $\frac{355}{113} = \pi$? Razona la respuesta.**

No porque π es un número irracional.

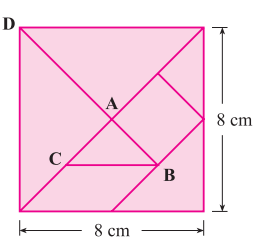
22 **En la figura siguiente es OB = 7 cm y CD = 5 cm.**



Da el valor exacto y un redondeo a milésimas de la medida del segmento AB.

$AB = 6\sqrt{5} \simeq 13{,}416$

23 **Da la medida exacta y un redondeo a centésimas de los segmentos AB, BC y BD del tangram siguiente:**



$AB = 2\sqrt{2}$ cm $\simeq$ 2,83 cm

BC = 4 cm = 4,00 cm

$BD = 6\sqrt{2}$ cm $\simeq$ 8,49 cm

24 **¿Cuál es el error absoluto y relativo que se comete al redondear**

a) 16,7528 a milésimas?

b) π a centésimas?

c) $\sqrt{2}$ a enteros?

d) 1,2345678... a diezmilésimas?

a) E = 0,0002 e = 0,001%

b) E = 0,0016 e = 0,05%

c) E = 0,41 e = 29%

d) E = 0,00003 e = 0,003%

25 **Expresa de la forma $a = a' \pm \varepsilon$ una medida de la que se sabe que su valor está entre:**

a) 24,96 y 25,12; b) 10,52 y 10,84; c) −6,4 y −6,28; d) 5 y 6

Indica en cada caso cuál es la cota del error absoluto cometido.

a) 25,04 ± 0,08 Cota de error absoluto 0,08.

b) 10,68 ± 0,16 Cota de error absoluto 0,16.

c) −6,34 ± 0,06 Cota de error absoluto 0,06.

d) 5,5 ± 0,5 Cota de error absoluto 0,5.

26 **En un reconocimiento médico se establece la estatura de un individuo en 183 cm cuando su estatura real es 181 cm. La longitud de una pista de atletismo es de 100,5 m cuando debería ser de 100 m. ¿Cuál de las dos medidas comete menor error absoluto? ¿Cuál tiene menor error relativo?**

La estatura del individuo comete menor error absoluto.

La longitud de la pista comete menor error relativo.

27 **Indica qué porcentaje de error relativo se comete cuando se hace un redondeo a décimas del número 15,86352.**

100 e $\simeq$ 0,23 %

28 **Ordena en forma creciente los radicales: $\sqrt[3]{2}$; $\sqrt{3}$; $\sqrt[4]{6}$; $\sqrt[4]{3}$; $\sqrt[3]{4}$.**

$\sqrt[3]{2} < \sqrt[4]{3} < \sqrt[4]{6} < \sqrt[3]{4} < \sqrt{3}$

29 **Escribe de la forma $a\sqrt[n]{b}$ con b lo menor posible:**

a) $\sqrt{1200}$; **b)** $\sqrt[3]{2000}$; **c)** $\sqrt[5]{3^6 \cdot 2^4 \cdot 5^7 \cdot x^{11}}$;

d) $\sqrt{x^2 - y^2}$; **e)** $\sqrt[3]{x^3 - x^6}$; **f)** $\sqrt[4]{32xy}$

a) $20\sqrt{3}$; **b)** $10\sqrt[3]{2}$; **c)** $15x^2\sqrt[5]{3\cdot 2^4\cdot 5^2\cdot x}$

d) $\sqrt{x^2-y^2}$; **e)** $x\sqrt[3]{1-x^3}$; **f)** $2\sqrt[4]{2xy}$

30 **Justifica que:**

a) $\sqrt{(a^2-b^2)(a+b)}=(a+b)\sqrt{a-b}$ **(con $a>b$)**

b) $\sqrt{(a+b)^2-4ab}=a-b$ **(con $a>b$)**

c) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\sqrt{3}-1$

a) $\sqrt{(a^2-b^2)(a+b)}=\sqrt{(a+b)^2(a-b)}=(a+b)\sqrt{a-b}$

b) $\sqrt{(a+b)^2-4ab}=\sqrt{a^2+b^2-2ab}=\sqrt{(a-b)^2}=a-b$

c) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}-1}{2-1}+\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2}=\sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}=\sqrt{3}-1$

31 **Calcula:**

a) $\sqrt{\dfrac{1}{2}}+\sqrt{2}+\sqrt[4]{4}+\sqrt[6]{8}-\dfrac{7}{2}\sqrt[4]{64}$

b) $\sqrt[4]{324}-\dfrac{5}{2}\sqrt[6]{8}+\dfrac{1}{2}\sqrt{18}-\sqrt[4]{64}$

c) $\sqrt[6]{576}-\dfrac{1}{2}\sqrt[3]{81}+\dfrac{3}{5}\sqrt[4]{\sqrt[3]{81}}-\dfrac{1}{10}\sqrt[3]{3993}$

d) $5\sqrt[6]{8}-3\sqrt[10]{32}-8\sqrt[8]{16}+24\sqrt{\dfrac{1}{8}}$

a) $-\dfrac{7}{2}\sqrt{2}$; **b)** 0; **c)** 0; **d)** 0

32 **Calcula y da el resultado utilizando una sola raíz como máximo.**

a) $\sqrt{5}\cdot\sqrt[3]{15}\cdot\sqrt[4]{75}$

b) $\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{8}\cdot\sqrt[8]{32}$

c) $\sqrt[4]{2x}\cdot\sqrt[6]{8x^5}\cdot\sqrt[6]{64x^2}$

d) $\sqrt{30}\cdot\sqrt[5]{75a^4}\cdot\sqrt{180a}$

e) $\sqrt{3ab}\cdot\sqrt[4]{8a^3b}\cdot\sqrt[6]{24a^3b^5}$

f) $\sqrt{2xy}\cdot\sqrt{3z}\cdot\sqrt[4]{18z^3y^2}$

a) $5\sqrt[12]{3^7 5^4}=5\sqrt[12]{1366875}$

b) $2\sqrt[8]{2^7} = 2\sqrt[8]{128}$

c) $2\sqrt[12]{2^9\,x^5} = 2\sqrt[12]{512\,x^5}$

d) $30\,a\sqrt[10]{2^5\,3^7\,5^4\,a^3} = 30\,a\sqrt[10]{43740000\,a^3}$

e) $4\,a^2b^2\sqrt[12]{3^{11}a^6b^{10}} = 4\,a^2b^2\sqrt[12]{177147\,a^6b^{10}}$

f) $3yz\sqrt[4]{2^3x^2z} = 3yz\sqrt[4]{8x^2z}$

33 **Mismo ejercicio:**

a) $\dfrac{\sqrt[3]{200}}{\sqrt[3]{25}}$; **b)** $\dfrac{\sqrt[4]{8}}{\sqrt{2}}$; **c)** $\dfrac{\sqrt[3]{50}}{\sqrt[4]{50}}$; **d)** $\dfrac{3\sqrt[4]{24a}}{\sqrt[3]{12}}$; **e)** $\dfrac{\sqrt[4]{8a^6}}{\sqrt{2a}}$; **f)** $\dfrac{\sqrt{2ab}\cdot\sqrt[3]{a^2b}}{\sqrt[4]{32a^3b^3}}$

a) 2; **b)** $\sqrt[4]{2}$; **c)** $\sqrt[12]{50}$; **d)** $\dfrac{1}{2}\sqrt[4]{216a}$; **e)** $a\sqrt[4]{2}$; **f)** $\dfrac{1}{2}\sqrt[12]{8a^5b}$

34 **Calcula y simplifica:**

a) $(\sqrt{10} - \sqrt[3]{25})(\sqrt{10} + \sqrt[3]{25})$

b) $\sqrt[3]{(2a-3)^2}\cdot\sqrt{\dfrac{1}{2a-3}}$

c) $(5 - \sqrt{3})(5 + \sqrt[4]{9})$

d) $(5\sqrt{3} - 3\sqrt{5})(5\sqrt{5} - 3\sqrt{3})$

e) $\left(\sqrt{2} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$

f) $(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2})$

a) $10 - 5\sqrt[3]{5}$

b) $\sqrt[6]{2a-3}$

c) 22

d) $34\sqrt{15} - 120$

e) $\dfrac{9}{2}$

f) $a - b$

35 **Justifica que:** $\left(\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}} + \dfrac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\right)\sqrt{3+2\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2}$

$$\left(\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}} + \frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\right)\sqrt{3+2\sqrt{2}} = \left(\sqrt{\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{1}{3}} + \sqrt{\frac{1}{3}} - \frac{1}{2}\right)\sqrt{3+2\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{2-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\sqrt{3+2\sqrt{2}} = \sqrt{\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)^2\frac{3+2\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{\frac{3-2\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{3+2\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{2}$$

36 **Simplifica:**

A $= \sqrt{\dfrac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2}}$

B $= \sqrt{17-2\sqrt{30}}\cdot\sqrt{17+2\sqrt{30}}$

C $= (2\sqrt{3} - 3\sqrt{5})^2$

D $= \left[(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)\right]^2$

A $= \sqrt{5} - 2$ **B** $= 13$

C $= 57 - 12\sqrt{15}$ **D** $= 1$

37 **Introduce en el radical todos los factores posibles:**

a) $4\sqrt{2}$ **b)** $3a\sqrt{2b}$

c) $2xy\sqrt[3]{3y^2}$ **d)** $(a+b)\sqrt{a-b}$

e) $(a-b)\sqrt{a}$ **f)** $3a^2b\sqrt[4]{2ab^3}$

a) $\sqrt{32}$ **b)** $\sqrt{18a^2b}$

c) $\sqrt[3]{24x^3y^5}$ **d)** $\sqrt{(a+b)^2(a-b)} = \sqrt{(a+b)(a^2-b^2)}$

e) $\sqrt{a(a-b)^2}$ **f)** $\sqrt[4]{162a^9b^7}$

38 **Calcula:** $\sqrt[3]{1{,}08} - \sqrt[3]{2{,}56} + \sqrt[3]{1{,}715} - \sqrt[3]{0{,}625}$

0

39 **Escribe las siguientes expresiones bajo un solo radical y simplifica el resultado:**

a) $\sqrt{\sqrt[3]{8}}$ **b)** $\sqrt{2\sqrt{2}}$ **c)** $\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{9}}}$ **d)** $\sqrt[3]{9\sqrt[3]{\frac{1}{9}}}$

e) $\sqrt{4\sqrt[3]{8}\sqrt[4]{256}}$ **f)** $(\sqrt[3]{4})^4$ **g)** $\left(\sqrt{a\sqrt[3]{b}}\right)^3$ **h)** $\left(\sqrt[3]{x^2y}\right)^5$

a) $\sqrt{2}$ **b)** $\sqrt[4]{8}$ **c)** $\sqrt{6}$ **d)** $\sqrt[9]{81}$

e) $4\sqrt{2}$ **f)** $4\sqrt[3]{4}$ **g)** $a\sqrt{ab}$ **h)** $x^3y\sqrt[3]{xy^2}$

40 **Racionaliza:**

a) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ **b)** $\frac{25}{\sqrt{15}}$ **c)** $\frac{15}{\sqrt{3}}$ **d)** $\frac{6}{\sqrt{2}}$ **e)** $\sqrt{\frac{8}{5}}$

f) $\sqrt{\frac{2+x}{2-x}}$ **g)** $\frac{3}{\sqrt[3]{3}}$ **h)** $\frac{2a}{\sqrt[4]{3a^2}}$ **i)** $\frac{8xy}{\sqrt[5]{4x^3y^4}}$

a) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ **b)** $\frac{2\sqrt{15}}{3}$ **c)** $5\sqrt{3}$ **d)** $3\sqrt{2}$ **e)** $\frac{2\sqrt{10}}{5}$

f) $\frac{\sqrt{4-x^2}}{2-x}$ **g)** $\sqrt[3]{9}$ **h)** $\frac{2\sqrt[4]{27a^2}}{3}$ **i)** $4\sqrt[5]{8x^2y}$

41 **Escribe sin radicales las siguientes expresiones:**

a) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; b) $\sqrt[3]{9}$; c) $\sqrt[4]{2+\frac{1}{4}}$; d) $\sqrt{\sqrt{8}}$; e) $\frac{5\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{3x}}{15\sqrt{3x}}$; f) $\sqrt[3]{8+\sqrt{8}}$

a) $3^{-\frac{1}{2}}$; **b)** $3^{\frac{2}{3}}$; **c)** $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$; **d)** $2^{\frac{3}{4}}$; **e)** $3^{-\frac{2}{3}}x^{-\frac{1}{6}}$; **f)** $\left(8+8^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}$

42 **Escribe las siguientes expresiones sin exponentes fraccionarios ni negativos:**

a) $5x^{\frac{1}{2}}$; **b)** $(4x^2)^{\frac{2}{3}}$; **c)** $4^{-\frac{1}{2}}$;

d) $5\cdot 3^{-\frac{1}{2}}$; **e)** $\frac{5}{2^{\frac{1}{2}}-1}$; **f)** $(1-x)^{-\frac{1}{2}}$

a) $5\sqrt{x}$ **b)** $2x\sqrt[3]{2x}$ **c)** $\frac{1}{2}$

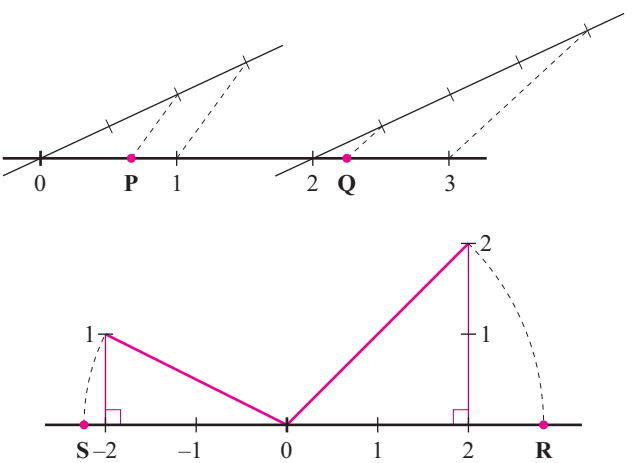
d) $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ **e)** $5(\sqrt{2}+1)$ **f)** $\frac{\sqrt{1-x}}{1-x}$

43 **¿Verdadero o falso?**

a) $4x^{\frac{1}{2}}=2\sqrt{x}$; **b)** $\sqrt[3]{27a^2}=3a^{2/3}$; **c)** $4^{-\frac{1}{2}}=0{,}5$; **d)** $\frac{5}{3\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$

a) Falso; **b)** Verdadero; **c)** Verdadero; **d)** Verdadero.

44 **Indica qué números representan los puntos P, Q, R y S representados a continuación.**



P = $\frac{2}{3}$ Q = $\frac{9}{4}$ S = $-\sqrt{5}$ R = $\sqrt{8}$

Del 45 al 53. Determina los números reales que verifican la ecuación o inecuación propuesta.

45 **a)** $|x| = 5$ **b)** $|x| = \frac{3}{2}$ **c)** $|x - 2| = 5$

a) –5 y 5 **b)** $-\frac{3}{2}$ y $\frac{3}{2}$ **c)** –3 y 7

46 **a)** $|x - 1| = 0$ **b)** $|x + 5| = 3$

a) $x = 1$ **b)** $x = -2$, $x = -8$

47 **a)** $|x - 1| = 0$ **b)** $|x + 5| = 3$

a) No existe ninguno **b)** 1 y 2

48 **a)** $|x| \leq 5$ **b)** $|x| \geq 1$ **c)** $|x| < \frac{5}{4}$

a) $-5 \leq x \leq 5$ **b)** $x \geq 1$, $x \leq -1$ **c)** $-\frac{5}{4} < x < \frac{5}{4}$

49 **a)** $|x - 4| \leq 4$ **b)** $|2x - 1| < 3$

a) $x \in [0, 8]$ **b)** $x \in]-1, 2[$

50 **a)** $|3 - 2x| \leq 3$ **b)** $\left|x - \frac{1}{2}\right| \geq 2$

a) $0 \leq x \leq 3$ **b)** $x \geq \frac{5}{2}$, $x \leq -\frac{3}{2}$

51 **a)** $|-x - 2| < 1$ **b)** $|-x + 1| > \frac{1}{2}$

a) $x \in]-3, -1[$ **b)** $x \in]-\infty, \frac{1}{2}[\cup]\frac{3}{2}, +\infty[$

52 $|x + 3| = |x - 1|$

$x = -1$

53 $\left|\frac{x-2}{2}\right| = |x + 1|$

$x = 0$ y $x = -4$

54 **Calcula las intersecciones siguientes:**

A =]–2, 5[∩ [–1, 7] **B =]–∞, 6] ∩ [–3, 10]**

A = [–1, 5[B = [–3, 6]

55 **Calcula las uniones siguientes:**

C =]– 6, 8] ∪ [–3, 10[; **D =]–∞, 3[∪ [0, 12]**

C =]–6, 10[D =]–∞, 12]

56 **Expresa como un intervalo el conjunto de valores de *x* que verifican:**

a) $\begin{cases} x > 5 \\ x < 8 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x \geq 3 \\ x < 4 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x < 1 \\ x \geq -4 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} -2 < x \leq 10 \\ -8 < x < 5 \end{cases}$

a) $x \in]5, 8[$ **b)** $x \in [3, 4[$ **c)** $x \in [-4, 1[$ **d)** $x \in]-2, 5[$

57 **Expresa como intervalos:**

a) [–1, 3] – {0} **b) [2, 5[– {2}**

c) R – {–2, 3} **d) R – [–5, 0[**

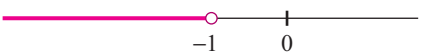
a) [–1, 0[∪]0, 3] **b)**]2, 5[;

c)]–∞, –2[∪]–2, 3[∪]3, +∞[**d)**]–∞, –5[∪ [0, +∞[

Del 58 al 62. Resuelve las siguientes inecuaciones y representa la solución sobre la recta real.

58 $4x - 2(x - 3) > 7 + 3x$

$x < -1$ ó $x \in]-\infty, -1[$



59 $\frac{x+1}{2} - \frac{x+3}{5} \geq \frac{2x-3}{2}$

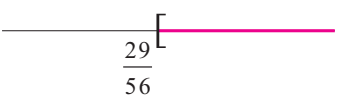
$x \leq 2$

60 $x - \frac{6-2x}{4} \leq 2x + 2 - \frac{3-x}{2}$

$x \in [-2, \infty[$

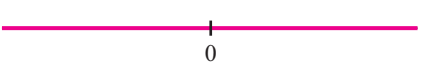
61 $2x - \frac{x+6}{5} \geq \frac{1}{4} - x$

$x \geq \frac{29}{56}$



62 $4\left(5 - \frac{x}{4}\right) > 2 - x$

$x \in]-\infty, \infty[$



Tema 2 ECUACIONES Y SISTEMAS DE ECUACIONES

1 **Busca la solución general y tres soluciones particulares de las ecuaciones:**

a) $3x + 7y - 15 = 0$; **b)** $7x + 3y = 0$; **c)** $x - \frac{1}{3}y = 2$; **d)** $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$

a) Solución general: $\left(x, \frac{15 - 3x}{7}\right)$ ó $y = \frac{15 - 3x}{7}$

Soluciones particulares: $\left(0, \frac{15}{7}\right)$; $\left(1, \frac{12}{17}\right)$; $\left(2, \frac{9}{7}\right)$

b) Solución general: $\left(x, -\frac{7x}{3}\right)$ ó $y = -\frac{7x}{3}$

Soluciones particulares: (0, 0); $\left(1, -\frac{7}{3}\right)$; (3, –7)

c) Solución general: $(x, 3x - 6)$ ó $y = 3x - 6$

Soluciones particulares: (0, –6); (1, –3); (2, 0)

d) Solución general: $\left(x, \frac{6 - 2x}{3}\right)$ ó $y = \frac{6 - 2x}{3}$

Soluciones particulares: (0, 2); $\left(1, \frac{4}{3}\right)$; (3, 0)

2 **Descubre la afirmación falsa:**

a) La recta de ecuación $-x + 2y + 3 = 0$ pasa por el punto A(3, 0).

b) Una solución de la ecuación $4x - y + 1 = 0$ es el par (0, 1).

c) El par (–3, 1) es solución de la ecuación $2x + y + 1 = 0$.

d) El punto $\left(\frac{2}{3}, \frac{3}{5}\right)$ pertenece a la recta de ecuación $3x - 5y + 1 = 0$.

La c.

3 **Resuelve por el método de sustitución:**

a) $\left.\begin{matrix} 2x + y = 13 \\ x - y = 2 \end{matrix}\right\}$ **b)** $\left.\begin{matrix} 4x - 3y = 29 \\ 5x + 3y = 16 \end{matrix}\right\}$ **c)** $\left.\begin{matrix} -2x + y = -4 \\ 3x + 5y = -7 \end{matrix}\right\}$

a) $x = 5,\ y = 3$ **b)** $x = 5,\ y = -3$ **c)** $x = 1,\ y = -2$

4 **Resuelve por el método de reducción:**

a) $\left.\begin{matrix} 9x - 4y = 1 \\ 3x + 6y = 4 \end{matrix}\right\}$ **b)** $\left.\begin{matrix} 10x + 3y = 8 \\ 15x + 12y = 22 \end{matrix}\right\}$ **c)** $\left.\begin{matrix} 7x + 8y = -77 \\ -2x - 9y = 22 \end{matrix}\right\}$

a) $x = \frac{1}{3}$; $y = \frac{1}{2}$ **b)** $x = \frac{2}{5}$; $y = \frac{4}{3}$ **c)** $x = -11;\ y = 0$

5 **Resuelve por el método de igualación:**

a) $\left.\begin{matrix} 10x + 11y = -15 \\ 9x + 10y = 30 \end{matrix}\right\}$ **b)** $\left.\begin{matrix} -3x + 2y = 4 \\ 4x - 5y = 1 \end{matrix}\right\}$ **c)** $\left.\begin{matrix} 0{,}8x - 0{,}9y = 2 \\ 6x + 3y = 2{,}5 \end{matrix}\right\}$

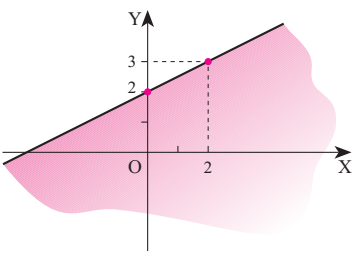
a) $x = -480,\ y = 435$ **b)** $x = -\frac{22}{7},\ y = -\frac{19}{7}$ **c)** $x = \frac{55}{22},\ y = -\frac{50}{39}$

6 **Resuelve gráficamente las inecuaciones siguientes:**

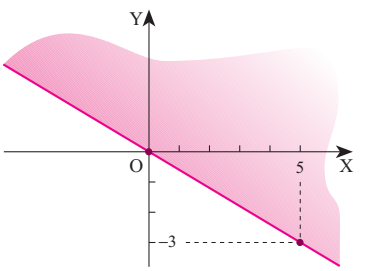
a) $x - 2y + 4 > 0$ **b)** $3x + 5y \geq 0$

c) $x \leq 2$ **d)** $y > -3$

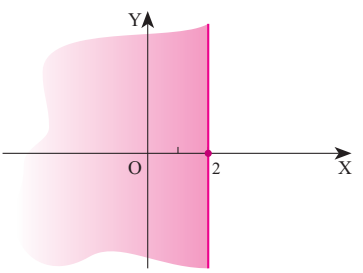
a)



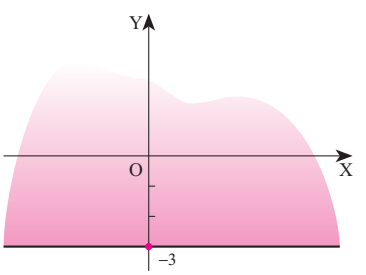
b)



c)

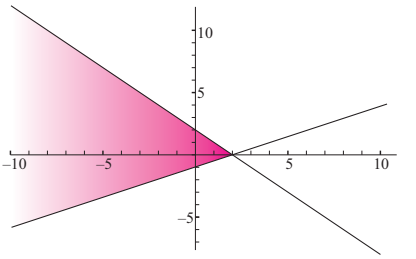


d)

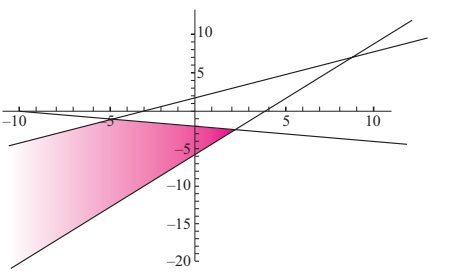


7 **Resuelve gráficamente los sistemas:**

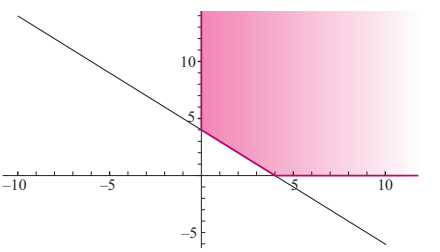
a) $\left.\begin{matrix} x - 2y < 2 \\ x + y < 2 \end{matrix}\right\}$



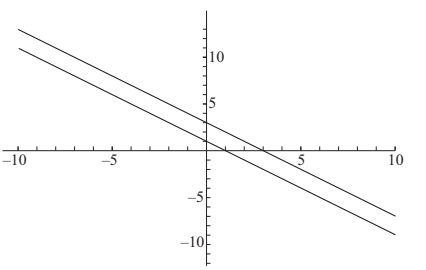
b) $\left.\begin{matrix} 4x - 7y > -13 \\ 3x - 2y < 12 \\ 2x + 11y < -21 \end{matrix}\right\}$



c) $\left.\begin{matrix} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \geq 4 \end{matrix}\right\}$



d) $\left.\begin{matrix} x + y > 3 \\ x + y < -2 \end{matrix}\right\}$



8 **Resolver las ecuaciones:**

a) $x^2 - 7x + 12 = 0$

b) $4x^2 + 7x - 2 = 0$

c) $9x^2 - 9x + 2 = 0$

d) $-x^2 + 3x - 1 = 0$

a) $x_1 = 4; \quad x_2 = 3$

b) $x_1 = -2; \quad x_2 = \frac{1}{4}$

c) $x_1 = \frac{2}{3}; \quad x_2 = \frac{1}{3}$

d) $x_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}; \quad x_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$

9 **Sin resolver, indica cuántas soluciones tiene cada una de las ecuaciones siguientes:**

a) $x^2 + 7x - 12 = 0$ **b)** $8x^2 - 2x = 0$

c) $x^2 - 10x - 4 = 0$ **d)** $x^2 + 5x + 8 = 0$

a) 2 **b)** 2

c) 2 **d)** 0

10 **Resolver las ecuaciones:**

a) $t^2 + 2t + 3 = 0$ **b)** $a^2 - 3a = 0$

c) $3(a^2 - 5) = 0$; **d)** $8y^2 + 20y = 0$

a) no tiene soluciones reales **b)** $a_1 = 0$; $a_2 = 3$

c) $a_1 = \sqrt{5}$; $a_2 = -\sqrt{5}$ **d)** $y = 0$; $y = -\frac{5}{2}$

11 **Halla el valor de *m* para que la ecuación $25x^2 - 19x + m - 3 = 0$ tenga una raíz doble.**

$\frac{661}{100}$

12 **Escribe una ecuación de segundo grado cuyas raíces sean:**

a) 11 y 3 **b) –11 y 3**

c) $\frac{1}{10}$ **y** $-\frac{2}{5}$ **d)** $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ **y** $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$

a) $x^2 - 14x + 33 = 0$ **b)** $x^2 + 8x - 33 = 0$

c) $50x^2 + 15x - 2 = 0$ **d)** $4x^2 - 4x - 2 = 0$

13 **En la ecuación $ax^2 + bx + 5 = 0$, determina *a* y *b* para que sus raíces sean 2 y 5.**

$a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{7}{2}$

14 **La suma de la raíces de la ecuación $x^2 - (a + 2)x + b = 0$ vale –5 y su diferencia 7. Calcula *a*, *b* y las raíces de la ecuación.**

$a = -7$; $b = -6$ y las raices $x_1 = 1$; $x_2 = -6$

15 **Resuelve las ecuaciones:**

a) $4x^4 + 7x^2 - 2 = 0$; **b)** $x^4 + 5x^2 + 4 = 0$;

c) $x^4 - 11x^2 + 18 = 0$; **d)** $4x^4 - 39x^2 + 27 = 0$.

a) $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{1}{2}$ y las otras dos no son reales.

b) No tiene soluciones reales.

c) $x_1 = -3$, $x_2 = 3$, $x_3 = -\sqrt{2}$, $x_4 = \sqrt{2}$

d) $x_1 = -3,\ x_2 = 3,\ x_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2},\ x_4 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

16 **Mismo ejercicio:**

a) $(x^2 - 25)(x^2 + 1) = 0$ **b)** $x^2(4x^2 - 9) + 8 = 0$

c) $x^4 - 1 = 0$ **d)** $9x^4 - 31x^2 + 12 = 0$

a) $x_1 = 5;\ x_2 = -5$ **b)** no tiene soluciones reales

c) $x_1 = 1;\ x_2 = -1$ **d)** $x_1 = \sqrt{3};\ x_2 = -\sqrt{3};\ x_3 = \frac{2}{3};\ x_4 = -\frac{2}{3}$

17 **Resuelve las siguientes ecuaciones:**

a) $\sqrt{2x + 6} + 1 = x + 4$ **b)** $\sqrt{2x + 3} - 3 = 3x - \frac{5}{2}$

c) $\sqrt{3 - x} = x - 1$ **d)** $\sqrt{8 + x} + 3 = \sqrt{1 - 6x}$

a) $x_1 = -3,\ x_2 = -1$ **b)** $x = \frac{1}{2}$

c) $x = 2$ **d)** $x = -8$

18 **Resuelve los siguientes sistemas:**

a) $\left.\begin{array}{r} x + 2y + 2z = 19 \\ 2x + y + 2z = 20 \\ 2x + 2y + z = 21 \end{array}\right\}$ **b)** $\left.\begin{array}{r} 2x + 3y - 9z = 17 \\ 4x - 3y - 2z = 10 \\ 6x - 4y - 5z = 13 \end{array}\right\}$

a) $x = 5;\ y = 4;\ z = 3$ **b)** $x = 10;\ y = 8;\ z = 3$

19 **Resuelve e interpreta geométricamente la solución de los sistemas:**

a) $\left.\begin{array}{r} x + 2y = 3 \\ x - 4y = -3 \\ 5x - 2y = 3 \end{array}\right\}$ **b)** $\left.\begin{array}{r} 3x - 2y = 1 \\ x + y = 2 \\ 6x - 4y = -2 \end{array}\right\}$

a) $x = 1,\ y = 1$ **b)** No tiene solución (incompatible).

20 **Resuelve los sistemas:**

a) $\left.\begin{array}{r} x^2 + y^2 = 9 \\ 2x + y = 3 \end{array}\right\}$ **b)** $\left.\begin{array}{r} 4x^2 - xy = 2(x + y) \\ y - x = 1 \end{array}\right\}$

a) $x_1 = 0,\ y_1 = 3;\quad x_2 = \frac{12}{5},\ y_2 = -\frac{9}{5}$

b) $x_1 = 2,\ y_1 = 3;\quad x_2 = -\frac{1}{3},\ y_2 = \frac{2}{3}$

21 **La edad de un hijo es la quinta parte de la edad de su padre, y dentro de 7 años el padre tendrá el triple de la edad de su hijo. Calcula las edades de cada uno.**

La edad del hijo es 7 años y la edad del padre 35 años.

22 **Un hijo tiene 30 años menos que su padre y éste tiene 4 veces la de su hijo. ¿Qué edad tiene cada uno?**

Padre 40 años; hijo 10 años.

Del 23 al 26. Resuelve los siguientes sistemas:

23 a) $\left.\begin{array}{l} 6x + 3y = \frac{7}{2} \\ 5x - 2y = \frac{2}{3} \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{l} \frac{x}{5} - \frac{y}{2} = 1{,}3 \\ 2x - y = 1 \end{array}\right\}$

a) $x = \frac{1}{3}$, $y = \frac{1}{2}$ **b)** $x = -1$, $y = -3$

24 a) $\left.\begin{array}{l} \frac{x+1}{3} + \frac{y+1}{2} = 2 \\ x + 2y = 4 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{l} \frac{11-2x}{7} - \frac{2y-5}{5} = 0 \\ \frac{x+2}{4} - \frac{y-2}{3} = 0 \end{array}\right\}$

a) $x = 2$; $y = 1$ **b)** $x = 2$; $y = 5$

25 a) $\left.\begin{array}{l} 4x + 3y = 7 \\ \frac{x}{3} + \frac{y}{4} = \frac{7}{5} \end{array}\right\}$

b) $(x - 5)(y - 5) = (x - 7)(y - 4)$

$(x - 11)(y - 2) = (x - 10)(y - 4)$

a) Sistema incompatible (no tiene solución).

b) $x = 13$, $y = 8$

26 a) $\left.\begin{array}{l} \frac{x-1}{2} + \frac{y}{3} = 1 \\ x - \frac{y+1}{2} = 3 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{l} 2x - 4y = 5 \\ 6y - 3x = 2 \end{array}\right\}$

a) $x = \frac{23}{7}$; $y = -\frac{3}{7}$ **b)** Incompatible

Del 27 al 30. Estudia la posición relativa de las rectas *r* y *s*.

27 ***r*: $2x - 3y + 7 = 0$** ***s*: $2x - y + \frac{5}{2} = 0$**

Secantes.

28 r: $8x + 3y = 7$ s: $24x = 3(7 - 3y)$

Coincidentes

29 r: $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$ s: $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} - 1 = 0$

Secantes.

30 r: $2x + y - 1 = 0$ s: $3 - 4x - 2y = 0$

Paralelas

31 **Pedro y Pepa son hermanos. Pedro tiene el mismo número de hermanas que de hermanos, pero Pepa tiene doble número de hermanos que de hermanas. ¿Cuántos hermanos y hermanas son?**

4 hermanos y 3 hermanas.

32 **Un observador ha cronometrado el paso de un tren por un túnel y sabe que desde que la máquina entra en el túnel hasta que sale el último vagón transcurren 49 segundos, mientras que desde que entra el último vagón hasta que aparece la máquina por el otro extremo transcurren 37 segundos. Halla la longitud del túnel y del tren sabiendo que la velocidad del tren es de 72 km/h.**

860 m y 120 m

33 **Halla dos números sabiendo que suman 108 y que si se dividen el cociente es 2 y el resto 12.**

76 y 32.

34 **El área de un rectángulo crece 5 661 m^2 cuando se doblan simultáneamente sus dos dimensiones y crece 2 664 m^2 cuandos se disminuye la longitud en 10 m y se triplica su anchura. Determinar las dimensiones del rectángulo y su área.**

Ancho 37 m; largo 51 m; área = 1887 m^2

35 **En un viejo libro de Matemáticas de 1930 se lee: «Dos obreros trabajan juntos, uno gana al día los 3/4 de lo que gana el otro. El primero ha trabajado 16 días y el segundo 20 dias, y han ganado entre los dos 1408 pta.» ¿Cuál era en 1930 el salario diario de cada obrero?**

45,4 ptas. y 34,1 ptas.

36 **La bodega de un petrolero contiene 20 000 Tm de petróleo. Una bomba A la puede vaciar en 40 h; otra B la puede vaciar en 60 h. ¿En cuánto tiempo vaciarán la bodega las dos bombas trabajando simultáneamente?**

24 horas

37 **Un ciclista recorre el trayecto AB en el que hay partes llanas, subidas y bajadas. Las velocidades respectivas son: 12 km/h en las par-**

tes llanas, 8 km/h en las subidas, 15 km/h en las bajadas. De A a B el ciclista tarda 5 h y de B a A 4 h 39 minutos. Sabiendo que las partes llanas tienen una longitud total de 28 km, se pide la longitud total de las subidas (sentido A a B) así como de las bajadas.

16 km de subida y 10 km de bajada.

38 **Halla un número de dos cifras sabiendo que su valor es igual al cuádruplo de las sumas de sus cifras, y que si se invierte el orden de las cifras aumenta en 36 unidades.**

48

39 **La suma de las dos cifras de un número es 11. Si se invierte el orden de las cifras se obtiene un número que se diferencia del anterior en 45. ¿Cuál es el número?**

83 o 38.

40 **Resuelve los sistemas:**

a) $\left.\begin{array}{l} x+y+z=24 \\ 2x=y+6z \\ 5x+5y=11z-3y \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{l} x+y-z=\dfrac{2}{3} \\ x-y+z=\dfrac{1}{3} \\ -x+y+z=0 \end{array}\right\}$

. **a)** $x=\dfrac{59}{13}$; $y=-\dfrac{8}{3}$; $z=7$ **b)** $x=\dfrac{1}{2}$; $y=\dfrac{1}{3}$; $z=\dfrac{1}{6}$

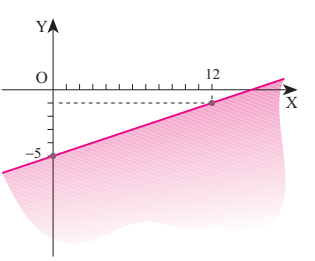
41 **Mismo ejercicio:** a) $\left.\begin{array}{l} x+y-z=26 \\ \dfrac{3x}{4}=\dfrac{2y}{3}=\dfrac{4z}{7} \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r} x-2y=5 \\ 2x+3y=-4 \\ 3x-2y=7 \end{array}\right\}$

$x = 32$, $y = 36$, $z = 42$

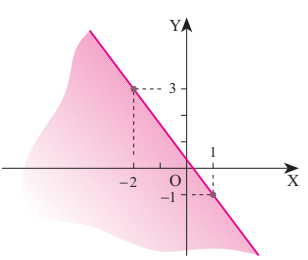
Del 42 al 46. Resuelve gráficamente las inecuaciones o sistemas propuestos.

42 a) $x-3y-15>0$ b) $\dfrac{x+2}{3} \leq \dfrac{3-y}{4}$

a)

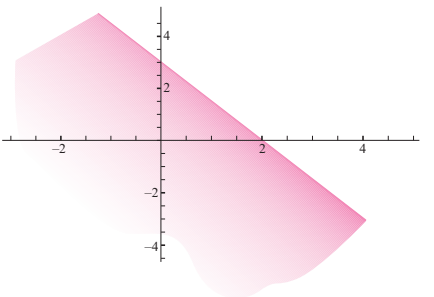


b)

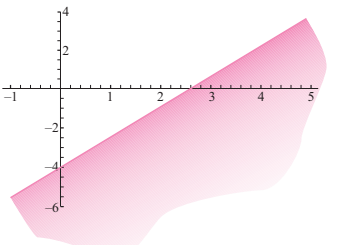


43 a) $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}<1$ b) $y \leq \frac{3}{2}x-4$

a)

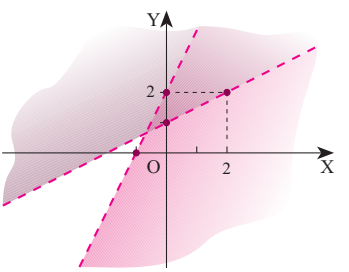


b)

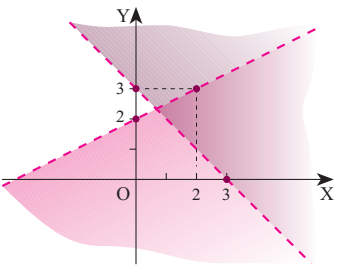


44 a) $\left.\begin{array}{l} 2x-y+2>0 \\ x-2y+2<0 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{l} x-2y>-4 \\ x+y>3 \end{array}\right\}$

a)

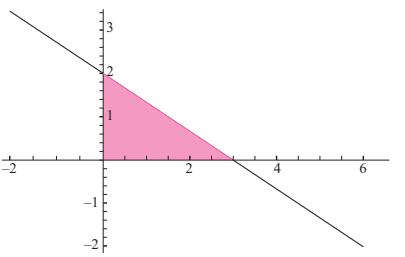


b)

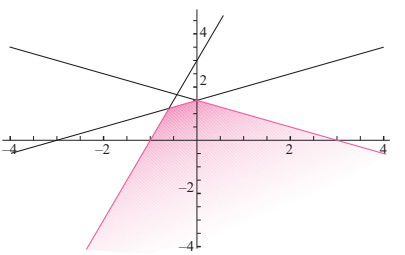


45 a) $\left.\begin{array}{l} x>0 \\ y>0 \\ 2x+3y \leq 6 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{l} x-2y+3 \geq 0 \\ x+2y-3 \leq 0 \\ -3x+y-3 \leq 0 \end{array}\right\}$

a)

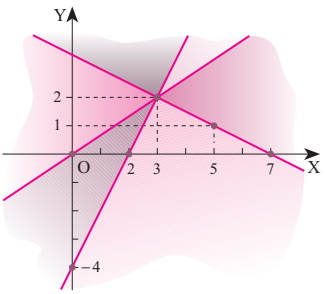


b)

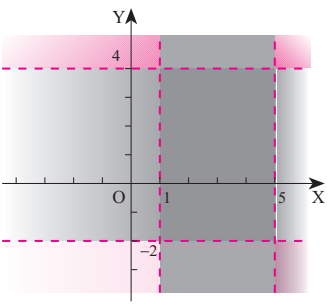


46 a) $\left.\begin{array}{l} x + 2y - 7 \geq 0 \\ 2x - 3y \geq 0 \\ 2x - y - 4 \leq 0 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{l} x > 1 \\ y > -2 \\ x < 5 \\ y < 4 \end{array}\right\}$

a) no tiene solución



b)



Del 47 al 54. Resuelve las ecuaciones siguientes:

47 a) $x^2 + 3x - 28 = 0$; b) $2x^2 - 5x - 3 = 0$

a) $x_1 = -7$, $x_2 = 4$; **b)** $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = 3$

48 a) $x^2 - 2x - 1 = 0$ b) $x^2 - 3x + \frac{5}{4} = 0$

a) $x_1 = 1 + \sqrt{2}$; $x_2 = 1 - \sqrt{2}$ **b)** $x_1 = \frac{5}{2}$; $x_2 = \frac{1}{2}$

49 a) $4x^2 - 12x + 9 = 0$; b) $x^2 - 4x + 6 = 0$

a) $x = \frac{3}{2}$ (raíz doble); **b)** No tiene solución real.

50 a) $\frac{4}{x} - \frac{2x-1}{5} = 1$ b) $\frac{3-x}{5} = \frac{2}{x} - \frac{4}{5}$

a) $x_1 = -1 + \sqrt{11}$; $x_2 = -1 - \sqrt{11}$ **b)** $x_1 = 5$; $x_2 = 2$

51 **a)** $\dfrac{3x-4}{5x-16}=\dfrac{3x+11}{6x-11}$;

a) $x_1=\dfrac{32-2\sqrt{91}}{3}$, $x_2=\dfrac{32+2\sqrt{91}}{3}$

b) $2x-\dfrac{12}{1-x}=5+\dfrac{11}{9}(x+2)$

b) $x_1=\dfrac{25}{7}$, $x_2=7$

52 **a)** $\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{2}{x-1}=\dfrac{2}{3}$

a) $x_1=-1$; $x_2=\dfrac{5}{2}$

b) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{x+5}-\dfrac{1}{2}$

b) $x_1=-2$; $x_2=-3$

53 **a)** $\dfrac{12}{9-x}+\dfrac{8}{5-x}=6$;

a) $x_1=3$, $x_2=\dfrac{23}{3}$

b) $\dfrac{x^2-x+1}{x+2}=2x+3$

b) $x_1=-4-\sqrt{11}$, $x_2=-4+\sqrt{11}$

54 **Formar ecuaciones de segundo grado de raíces:**

a) 1/2 y –1/3

b) 3 y – 4

c) $\sqrt{2}-1$ **y** $\sqrt{2}+1$

d) 2/5 y 3/5

e) 0 y –3

f) 1/2 (solución doble)

g) 4 y 1/4

h) –2 y –3

a) $6x^2-x-1=0$

b) $x^2+x-12=0$

c) $x^2-2\sqrt{2}\,x+1=0$

d) $25x^2-25x+6=0$

e) $x^2+3x=0$

f) $4x^2-4x+1=0$

g) $4x^2-17x+4=0$

h) $x^2+5x+6=0$

Del 55 al 60 Resuelve las ecuaciones:

55 **a)** $x^4-10x^2+9=0$;

b) $x^4-13x^2+36=0$;

c) $x^4-16x^2-225=0$

d) $x^4-81=0$

a) $x_1=-3$, $x_2=3$, $x_3=-1$, $x_4=1$

b) $x_1=-3$, $x_2=3$, $x_3=-2$, $x_4=2$

c) $x_1=-5$, $x_2=5$, las otras dos no son reales

d) $x_1=-3$, $x_2=3$, las otras dos no son reales

56 **a)** $4x^4-x^2=0$

b) $3x^4+2x^2=0$

c) $16x^4+16x^2+3=0$

d) $x^6+19x^3-216=0$ **(hacer** $x^3=t$**)**

a) $x_1=x_2=0$; $x_3=\dfrac{1}{2}$; $x_4=-\dfrac{1}{2}$

b) $x_1=x_2=0$

c) no tiene soluciones reales

d) $x_1=2$; $x_2=-3$

57 **a)** $\sqrt{10+x}-\sqrt{10-x}=2$; **b)** $\sqrt{4x+7}-\sqrt{8x-7}=1$

a) $x=6$ **b)** $x=\dfrac{17-2\sqrt{23}}{4}$

58 **a)** $\sqrt{3-x}=4-\sqrt{3x+7}$ **b)** $5-\sqrt{1+2x}=\sqrt{x}$

a) $x_1=3$; $x_2=-1$ **b)** $x=4$

59 **a)** $2x+1+\sqrt{x^2-x-3}=0$ **b)** $3\sqrt{9+x}=2x+16$

a) No tiene soluciones reales. **b)** $x=-5$

60 **a)** $\sqrt{x+1}+4=2x$ **b)** $\sqrt{2x+14}-\sqrt{x-7}=\sqrt{x+5}$

a) $x=3$ **b)** $x=11$

61 **Dada la ecuación $12x^2-17x+6=0$, formar otra ecuación cuyas raíces sean:**

a) opuestas a las de la ecuación dada

b) inversas a las de la ecuación dada

c) cuadrado de las mismas

a) $12x^2+17x+6=0$

b) $6x^2-17x+12=0$

c) $144x^2-145x+36=0$

62 **Las raíces de la ecuación $x^2+mx+n=0$ son 1 y -6. Halla m y n.**

$m=5$; $n=-6$

63 **En la ecuación $8x^2-(m-1)x+m-7=0$, determina el valor de m para que sus raíces sean:**

a) iguales

b) opuestas

a) $m_1=9$, $m_2=25$

b) $m=1$

64 **Halla m para que la ecuación $3x^2-8x-3m=0$ tenga dos raíces iguales.**

$m=-\dfrac{16}{9}$

65 **Determina k en la ecuación $x^2 + kx + 24 = 0$ teniendo en cuenta que la diferencia de sus raíces es 5.**

$k_1 = -11$, $k_2 = 11$

66 **Determina el valor de m en la ecuación $9x^2 - 18(m-1)x - 8m + 24 = 0$ para que una raíz sea doble que la otra.**

$m = 2$; $m = -1$

67 **En la ecuación $12x^2 + bx + 15 = 0$, determina b para que la diferencia de sus raíces sea $\frac{11}{12}$.**

$b_1 = -29$, $b_2 = 29$

68 **Halla dos números consecutivos cuyo producto sea 182.**

13 y 14 ó −14 y −13

69 **Un rectángulo tiene 34 cm de perímetro y sus diagonales miden 13 cm. Calcula las longitudes de sus lados.**

5 cm y 12 cm

70 **La mitad de un número más su raíz cuadrada es igual a 24. ¿Cuál es el número?**

36

71 y 72. Resuelve los sistemas de ecuaciones siguientes:

71 a) $\left.\begin{matrix} x + y = 4 \\ x^2 + y^2 = 10 \end{matrix}\right\}$

a) $x_1 = 1$, $y_1 = 3$; $x_2 = 3$, $y_2 = 1$

b) $\left.\begin{matrix} x - y = 2 \\ xy = 35 \end{matrix}\right\}$

b) $x_1 = -5$, $y_1 = -7$; $x_2 = 7$, $y_2 = 5$

72 a) $\left.\begin{matrix} x - 2y = 5 \\ x^2 + y^2 = 85 \end{matrix}\right\}$

a) $x = -7$; $y = -6$

$x = 9$; $y = 2$

b) $\left.\begin{matrix} 2x - 5y = 3 \\ x^2 + xy = 20 \end{matrix}\right\}$

b) $x = 4$; $y = 1$

$x = -\frac{25}{7}$; $y = -\frac{71}{35}$

Tema 3 COMBINATORIA

1 **En una carrera ciclista internacional participan los equipos de Alemania, Bélgica, Croacia, Dinamarca y España. ¿De cuántas formas puede resultar la clasificación general?**

120

2 **Con tu calculadora (mejor si tiene la función factorial** **), halla el mayor valor de *n* cuyo *n*! puedas calcular con ella, calculando los sucesivos valores de *n*! hasta que te dé error.**

69

3 **Calcula: a)** $V_{9,3}$; **b)** $V_{11,4}$; **c)** $V_{6,6}$; **d)** $V_{7,1}$.

a) 504; **b)** 7 920; **c)** 720; **d)** 7

4 **Con los dígitos 1, 2, 3, 4 y 5 se pide: a) forma todos los números de dos cifras distintas; b) forma todos los números de tres cifras distintas o, si lo prefieres, di cuántos hay sin escribirlos.**

a) 12; 13; 14; 15; 21; 23; 24; 25; 31; 32; 34; 35; 41; 42; 43; 45; 51; 52; 53; 54 $\Rightarrow$ 20

b) 60

5 **Una línea de autobuses consta de 15 puntos de parada, ¿cuántos billetes tendrán que imprimir si en cada uno figuran las estaciones de origen y llegada?**

210

6 ***Samuel Morse* (USA, 1791-1872) inventó un alfabeto para ser utilizado en el telégrafo eléctrico (también de su invención) basado en dos caracteres (punto y raya), de tal forma que las letras y los signos vienen expresados por sucesiones de puntos y rayas.**

Así, por ejemplo, A = {· –}; B = {– ···}; C = {– · – ·}; 1 = {· – – – –}; 2 = {· · – – –}.

¿Cuántas letras y símbolos se pueden expresar si se emplean desde 1 hasta 5 puntos o rayas?

62

7 **Para obtener un artículo que vale 8,5 € de una máquina automática de importe justo hay que introducir 3 monedas de 2 €, 2 de 1 € y 1 de 0,5 €. ¿De cuántas maneras pueden introducirse las monedas?**

60

8 **Se sabe que al lanzar una moneda 7 veces se han obtenido 3 caras y 4 cruces. ¿Cuántos han sido los órdenes posibles?**

35

9 **Una heladería dispone de 12 clases de helados. ¿Cuántas copas con 3 helados diferentes puede formar?**

220

10 **En una bolsa hay 9 bolas numeradas del 1 al 9.**

a) Se forma un número extrayendo, una a una, 6 bolas sin devolver. ¿Cuántos números pueden formarse?

b) Se apuesta a que salen seis dígitos determinados. ¿Cuántas apuestas diferentes pueden hacerse?

a) 60480; **b)** 84

11 **Calcula:**

a) $\binom{52}{50}$ **b)** $\binom{1\,000}{999}$

a) 1326 **b)** 1000

12 **Comprueba que:**

a) $\binom{11}{4}+\binom{11}{5}=\binom{12}{5}$ **b)** $\binom{n}{1}+\binom{n}{2}=\binom{n+1}{2}$

a) 330 + 462 = 792 **b)** $n+\dfrac{n-1}{2}=\dfrac{n^2+n}{2}=\dfrac{(n+1)\,n}{2}$

13 **Resuelve la ecuación:** $\binom{7}{x}+\binom{7}{4}=\binom{8}{4}$

$x = 3$

14 **Desarrolla las siguientes potencias y simplifica los resultados:**

a) $\left(\dfrac{x}{2}+2\right)^6$ **b)** $\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^4$

a) $\dfrac{x^6}{64}+\dfrac{3x^5}{8}+\dfrac{15x^4}{4}+20x^3+60x^2+96x+64$

b) $x^2+4x\sqrt{xy}+6xy+4y\sqrt{xy}+y^2$

15 **Halla:**

a) El término central del desarrollo de $(x-3)^8$.

b) Los términos tercero y décimo del desarrollo de $(a+b)^{11}$.

a) $5670x^4$

b) El tercero es $55a^9b^2$ y el décimo es $55a^2b^9$

16 **En el desarrollo de $(2a + b)^n$ hay un término cuya parte literal es a^6b^8. Halla su coeficiente y el valor de n.**

Coeficiente 192192, $n = 14$

17 **En el desarrollo de $\left(\frac{x^2}{2} - \frac{3}{x}\right)^8$ hay un término cuya parte literal es x^7.**

¿Cuál es su coeficiente?

$\frac{189}{4}$

18 **Simplifica: a) $\frac{14! \times 4!}{16!}$ b) $\frac{8!}{4! \times 2!}$**

a) $\frac{1}{10}$; **b)** 840

19 **Simplifica: a) $\frac{6! + 7!}{6! - 5!}$; b) $\frac{10! + 7!}{8! + 10!}$**

a) $\frac{48}{5}$; **b)** $\frac{721}{728}$

20 **Escribe como cociente de factoriales:**

a) $12 \cdot 13 \cdot 14$ **b) $20 \cdot 19$** **c) $(x + 2)(x + 1)x$** **d) 15**

a) $\frac{14!}{11!}$ **b)** $\frac{20!}{18!}$ **c)** $\frac{(x+2)!}{(x-1)!}$ **d)** $\frac{15!}{14!}$

21 **Simplifica: a) $\frac{5! + 6! - 7!}{5!}$ b) $\frac{(n+1)!}{(n-2)!}$**

a) –35; **b)** $n + 1$

22 **Saca factor común en las siguientes expresiones:**

a) 5! + 6! + 7! **b) 9! – 8! + 6!**

a) $5!(1 + 6 + 42) = 5! \cdot 49$ **b)** $6!(504 - 56 + 1) = 6! \cdot 449$

23 **Una cadena de televisión dispone para sus telediarios de 4 presentadores para la sección de nacional, 3 para internacional, 2 para deportes y 2 hombres del tiempo. ¿De cuántas formas puede desarrollarse el telediario si en cada sección actúa un solo presentador?**

48

24 **De una colección de 10 novelas diferentes me regalan 3. ¿De cuántas formas puedo elegirlas? ¿Y si tengo predilección por una determinada?**

120; 36

25 **Tan mala suerte tuvo Lucrecia Pérez en el hipódromo que de los 9 caballos participantes, apostó por Estrella Azul y llegó el último. ¿De cuántas formas pudo ocurrir esto?**

40320

26 **Cinco amigos van al cine, ¿de cuántas formas pueden sentarse en sus butacas?**

Después van a cenar y ocupan una mesa redonda, ¿de cuántas formas pueden ahora sentarse?

120; 24

27 **Del conjunto {Ana, Inés, Juan, Pepe, Rosa} forma y cuenta:**

a) Todas las parejas.

b) Todos los tríos.

c) ¿Por qué hay tantas parejas como tríos?

a) 10; **b)** 10; **c)** Por la propiedad 1 de los números combinatorios.

$$\binom{m}{n} = \binom{m}{m-n}$$

28 **Se rifan 3 bolígrafos iguales en un grupo de 35 alumnos de manera que nadie puede obtener dos, ¿de cuántas formas puede hacerse? ¿y si los bolígrafos son de tres modelos diferentes?**

6545; 39270

29 **Se tienen 3 monedas de 1 €. ¿De cuántas maneras se pueden distribuir entre 7 personas de forma que no corresponda más de una moneda a cada persona? ¿Y si las monedas son una de 10, otra de 20 y otra de 50 céntimos?**

35; 210

30 **Una marca de cerraduras construye llaves con 11 dientes, los cuales puede mellarlos un poco, mellarlos más o no mellarlos. ¿Cuántas llaves diferentes puede construir?**

177147

31 **Un examen consta de 8 preguntas y se deben contestar solamente 5. ¿Cuántas elecciones pueden hacerse?**

56

32 **Resuelve las siguientes ecuaciones:**

a) $P_x = 132P_{x-2}$ **b)** $V_{x,4} = 20V_{x,2}$

c) $3C_{m,4} = 5C_{m,2}$ **d)** $P_n = 6V_{n,3}$

e) $V_{x,5} = 120C_{x,3}$ **f)** $V_{x+2,\,3} = 5V_{x+1,\,2}$

g) $P_n = 42P_{n-2}$ **h)** $P_n = 24V_{n,2}$

a) 12; **b)** 7; **c)** 7; **d)** 6; **e)** 8; **f)** 3; **g)** 7; **h)** 6

33 **En una competición deportiva participan 7 equipos de tal forma que cada uno debe enfrentarse a todos los demás una sola vez. ¿Cuántos encuentros se disputarán?**

21

34 **Ocho atletas corren la final de los «cien metros». ¿Cuántos podiums posibles hay?**

336

35 **La autoevaluación final de cada unidad consta de 10 preguntas y cada una tiene cuatro respuestas posibles. ¿Cuántas maneras hay de responder?**

1048576

36 **Se tienen 9 puntos en el plano de forma que 3 cualesquiera de ellos no están alineados. ¿Cuántos segmentos determinan?**

36

37 **¿De cuántas formas se pueden colocar en una estantería 3 libros de Matemáticas, 4 de Filosofía y 5 de Historia, todos ellos distintos, con la condición de que los de la misma materia deben estar juntos?**

103680

38 **Debo telefonear a un amigo y no recuerdo exactamente su número. Sé que tiene nueve cifras y que comienza por 96340, también recuerdo que luego hay un 0, dos 5 y un 7, pero no sé en qué orden.**

Si decido llamar y ensayar todas las posibilidades, ¿cuántas tentativas deberé hacer como máximo?

6

39 **En la Liga de Fútbol Profesional intervienen 20 equipos en la primera división. Cada uno juega contra todos los demás en campo propio y en campo ajeno. ¿De cuántos partidos consta el campeonato? ¿Y si fueran 18 los equipos?**

38; 34

40 **En una clase de 30 alumnos se debe formar una comisión de 4. ¿De cuántas maneras debe formarse? ¿Y si en ella debe figurar el delegado?**

27405; 3654

41 **Un equipo de fútbol tiene en plantilla 3 porteros, 7 defensas, 6 centrocampistas y 5 delanteros.**

Si cada jugador juega en su demarcación, determina cuántas alineaciones distintas de pueden hacer si utiliza la táctica:

a) 4 – 4 – 2; b) 4 – 3 – 3; c) 5 – 3 – 2

a) 15750; **b)** 21000; **c)** 12600

42 **Calcula la suma de los números representados por las permutaciones sin repetición de las cifras 1, 3, 5 y 7.**

106656

43 **Calcula el número y la suma de todos los números de cuatro cifras diferentes que se pueden escribir con los dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7.**

Hay 840 y suman 3732960.

44 **Se consideran las seis cifras 1, 2, 3, 4, 5, y 9 se pide:**

a) ¿Cuántos números de seis cifras diferentes se pueden formar que sean múltiplos de 11?

b) ¿Cuáles son el menor y el mayor?

c) ¿Cuánto vale la suma de todos ellos?

a) 72; **b)** 132495, 952413; **c)** 27999972

45 **Halla la suma de todos los números de 3 cifras que puedes formar con los dígitos 2, 3, 4 y 5.**

24864

46 **Con seis pesas de 1, 2, 5, 10, 20 y 50, ¿cuántas pesadas diferentes puedes efectuar?**

63

47 **Se suponen ordenadas de menor a mayor todas las permutaciones ordinarias que se pueden formar con las cifras 1, 2, 3, 4 y 5. ¿Qué lugar corresponde a la 43125?**

El 85°

48 **Determina el número de diagonales de un hexágono y de un dodecágono.**

El hexágono tiene 9 diagonales y el dodecágono tiene 54

49 **Una línea de autobuses consta de 15 puntos de parada. ¿Cuántos billetes se deberán imprimir, si cada uno lleva las estaciones de origen y llegada sabiendo que cada billete sirve para un sentido o para el contrario?**

105

50 **En una clase de 12 chicos y 10 chicas se eligen delegado y subdelegado. Si se establece como condición que deben ser de diferente sexo, ¿cuántos resultados diferentes se pueden dar?**

240

51 **En una reunión hay 8 personas y cada una estrecha la mano de todos los demás. ¿Cuántos apretones de mano se dan en total?**

28

52 **En un plano hay rectas que no son paralelas ni concurren tres en un punto. Sabiendo que el número de intersecciones es de 190, halla el número de rectas.**

20

53 **¿Cuántos grupos de letras se pueden formar con las de la palabra ISABEL, con tal que no vayan ni dos vocales ni dos consonantes juntas? ¿Cuántos grupos comenzarán por vocal?**

Se pueden formar 72 grupos. Empiezan por vocal 36.

54 **Una finca tiene distribuidas por el monte una serie de casetas de forma que siempre hay un camino que une dos cualesquiera de ellas. Si el número de caminos es 28, ¿cuántas casetas hay?**

8

55 **¿Cuántos números hay entre 5000 y 6000 que tengan todas sus cifras diferentes?**

504

56 **¿Cuántos números capicuas hay entre 5000 y 6000?**

10

57 y 58. Calcula los siguientes números combinatorios.

57 **a)** $\binom{8}{3}$ **b)** $\binom{9}{6}$ **c)** $\binom{12}{10}$

a) 56 **b)** 84 **c)** 66

58 **a)** $\binom{11}{4}$ **b)** $\binom{20}{0}$ **c)** $\binom{6}{1}$

a) 330 **b)** 1 **c)** 6

Del 59 al 66. Resuelve las ecuaciones siguientes:

59 **a)** $\binom{x}{5} = 2\binom{x}{4}$ **b)** $\binom{x}{4} = 20\binom{x}{2}$

a) $x = 14$ **b)** $x = 18$

60 **a)** $\binom{x}{3} = 5(x-1)(x-2)$ **b)** $\binom{x}{3} = 35(x-2)$

a) 30 **b)** 15

61 **a)** $V_{x,2} = 190 + \binom{x}{2}$ **b)** $2\binom{x}{2} + 3\binom{x}{3} = 21x$

a) $x = 20$ **b)** $x = 7$

62 **a)** $\binom{x}{2} + \binom{x}{3} = \binom{7}{3}$ **b)** $\binom{23}{x} = \binom{23}{3x-1}$

a) 6 **b)** 6

63 **a)** $\binom{11}{5} + \binom{11}{x} = \binom{12}{x}$ **b)** $\binom{26}{19} - \binom{25}{19} = \binom{25}{x}$

a) $x = 6$ **b)** $x = 18$

64 **a)** $\binom{x}{2} = 55$ **b)** $\binom{x}{6} = 7\binom{x}{4}$

a) 11 **b)** 19

65 **a)** $2\binom{x}{4} = 7\binom{x-2}{3}$ **b)** $4\binom{19}{x} = 19\binom{17}{x}$

a) $x = 8$, $x = 7$ **b)** $x = 10$

66 **a)** $2\binom{17}{x} = 17\binom{16}{x}$ **b)** $\binom{9}{x} = \binom{9}{2x-6}$

a) 15 **b)** 5

Del 67 al 71. Desarrollar:

67 **a)** $(x + 2)^6$

b) $(x + m)^8$

a) $(x + 2)^6 = x^6 + 12x^5 + 60x^4 + 160x^3 + 240x^2 + 192x + 64$

b) $(x + m)^8 = x^8 + 8mx^7 + 28m^2x^6 + 56m^3x^5 + 70m^4x^4 + 56m^5x^3 + 28m^6x^2 + 8m^7x + m^8$

68 **a)** $(a - 3b)^5$

b) $(2x - 3y)^3$

a) $a^5 - 15a^4b + 90a^3b^2 - 270a^2b^3 + 405ab^4 - 243b^5$

b) $8x^3 - 36x^2y + 54xy^2 - 27y^3$

69 **a)** $\left(x - \frac{2}{x}\right)^6$ **b)** $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^4$

a) $\left(x - \frac{2}{x}\right)^6 = x^6 - 12x^4 + 60x^2 - 160 + \frac{240}{x^2} - \frac{192}{x^4} + \frac{64}{x^6}$

b) $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^4 = x^2 + 4x + 6 + \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}$

70 **a)** $(-2 + b)^5$

b) $\left(3x + \frac{1}{3}\right)^5$

a) $-32 + 80b - 80b^2 + 40b^3 - 10b^4 + b^5$

b) $243x^5 + 135x^4 + 30x^3 + \frac{10}{3}x^2 + \frac{5}{27}x + \frac{1}{243}$

71 **a)** $\left(\sqrt{x} + 1\right)^6$ **b)** $\left(\sqrt{x} - 1\right)^6$

a) $\left(\sqrt{x} + 1\right)^6 = x^3 + 6x^2\sqrt{x} + 15x^2 + 20x\sqrt{x} + 15x + 6\sqrt{x} + 1$

b) $\left(\sqrt{x} - 1\right)^6 = x^3 - 6x^2\sqrt{x} + 15x^2 - 20x\sqrt{x} + 15x - 6\sqrt{x} + 1$

72 **Halla el quinto término del desarrollo de $(2a - 8)^7$.**

$1\,146\,880\ a^3$

73 **Halla el término de lugar 14 en el desarrollo de $(x + 1)^{25}$.**

$5\,200\,300\ x^{12}$

74 **Halla el término sexto del desarrollo de $(a^2 - 2ab^3)^{20}$.**

$-496\,128\ a^{35}b^{15}$

75 **Halla el término central del desarrollo de $(2a + b)^{16}$.**

$1\,464\,320\ a^7b^9$

76 **a^6b^8 es la parte literal de un término del desarrollo de una potencia de $a + b$. Halla el coeficiente que le corresponde.**

3003

77 **Halla el término que no contiene x en el desarrollo de** $\left(\frac{2x^2}{3} - \frac{1}{3x}\right)^9$.

$\frac{224}{6561}$

78 **Halla el lugar que ocupa el término del desarrollo $(a^4 - x^2)^{24}$ en el que a tiene exponente 20.**

El vigésimo

79 **En el desarrollo de $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^{13}$ ¿Cuál es el término de segundo grado?, ¿hay algún término en el cual no figure x?**

$1287x^2$; en todos los términos figura x

80 **¿Cuál es el coeficiente de x^4 en el desarrollo de $(1 + x)^3 \cdot (2 + x)^4$?**

128

81 **Demuestra que $\binom{m}{n} = \frac{m}{n}\binom{m-1}{n-1}$**

$$\frac{m}{n}\binom{m-1}{n-1} = \frac{m}{n}\,\frac{(m-1)!}{(n-1)!\,(m-n)!} = \frac{m!}{n!\,(m-n)!} = \binom{m}{n}$$

82 **Sea n un entero tal que $n \geq 1$. Demuestra, utilizando el binomio de Newton, que el número**

$$N = \left(2 + \sqrt{3}\right)^n + \left(2 - \sqrt{3}\right)^n$$

es un número natural.

$$(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n = \binom{n}{0}2^n + \binom{n}{1}2^{n-1}\cdot\sqrt{3} + \binom{n}{2}2^{n-2}\cdot\sqrt{3^2} + \ldots +$$

$$+\binom{n}{n-1}2\cdot\sqrt{3^{n-1}} + \binom{n}{n}\sqrt{3^n} + \binom{n}{0}2^n - \binom{n}{1}2^{n-1}\cdot\sqrt{3} + \binom{n}{2}2^{n-2}\cdot\sqrt{3^2} + \ldots +$$

$$+(-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}2\cdot\sqrt{3^{n-1}} + (-1)^n\binom{n}{n}(\sqrt{3})^n = 2\binom{n}{0}2^n + 2\binom{n}{2}2^{n-2}\left(\sqrt{3}\right)^2 +$$

$$+\ldots + 2\binom{n}{n}\left(\sqrt{3}\right)^n \text{ si } n \text{ es par} \Rightarrow \text{Natural}$$

$$\binom{n}{0}2^n + 2\binom{n}{2}2^{n-2}\left(\sqrt{3}\right)^2 + \ldots + 2\binom{n}{n-1}\cdot 2\left(\sqrt{3}\right)^{n-1}$$

si n es impar $\Rightarrow$ Natural

83 **La suma de los términos extremos del desarrollo de $(x + y)^4$ es 4112 y el término central vale 1536. Calcula x e y.**

$x = 2$, $y = 8$; $x = -2$, $y = -8$; $x = 8$, $y = 2$; $x = -8$, $y = -2$

Tema 4 SUCESIONES DE NÚMEROS REALES

1 **Dada la sucesión de término general $a_n = 3n + 1$ calcula:**

a) Sus cuatro primeros términos

a) 4, 7, 10, 13

b) a_{50} **y** a_{100}

b) $a_{50} = 151$; $a_{100} = 301$

c) a_{2n} **y** a_{n+1}

c) $a_{2n} = 6n + 1$; $a_{n+1} = 3n + 4$

d) n **para que** $a_{n+4} = 4\ a_{n-3}$

d) $n = 5$

2 **Encontrar términos generales de las sucesiones:**

a) $\frac{3}{5}, \frac{4}{6}, \frac{5}{7}, \frac{6}{8}, \ldots$ **b)** $\frac{1}{5}, \frac{4}{8}, \frac{9}{13}, \frac{16}{20}, \ldots$ **c) –1, 1, –1, 1, ...**

d) 4, 7, 12, 19, ... **e)** $1, \frac{3}{5}, \frac{1}{2}, \frac{5}{11}, \ldots$ **f) –4, 0, 4, 8, 12, ...**

a) $\frac{n+2}{n+4}$ **b)** $\frac{n^2}{n^2+4}$ **c)** $(-1)^n$

d) $n^2 + 3$ **e)** $\frac{n+1}{3n-1}$ **f)** $4(n-2)$

3 **Analiza si la sucesión de los múltiplos de tres es una sucesión aritmética y, en su caso, halla el término general.**

Es una sucesión aritmética de diferencia 3. $a_n = 3n$.

Del 4 al 7. Resolver los siguientes ejercicios referidos a sucesiones aritméticas.

4 **Datos: $a_1 = 14$, $d = 7/2$. Halla a_{30}.**

$a_{30} = \frac{231}{2}$

5 **Datos: $a_1 = 1$, $a_{22} = -18$. Halla d.**

$d = -\frac{19}{21}$

6 **Datos: $a_1 = -4$, $a_n = 26$, $d = 3$. Halla n.**

$n = 11$

7 **Datos: $a_{33} = 48$, $a_{45} = -2$. Halla d, a_1 y a_n.**

$d = -\frac{25}{6}$; $a_1 = \frac{544}{3}$; $a_n = \frac{1113 - 25n}{6}$

8 **Calcula el lugar que ocupa el –20 en la sucesión aritmética 7, 11/2, 4, 5/2, ...**

El decimonoveno

9 **Halla la suma de todos los números pares comprendidos entre 233 y 545.**

60 684

10 **Calcula la suma: 2 + 5 + 8 + ... + 71.**

876

11 **Estudia si los términos de las siguientes sucesiones forman sucesión geométrica:**

a) 2, 6, 18, 72, 12; b) –3, 3/2, –3/4, 3/8, –3/16; c) 3, 6, 9, 12, 15.

a) y **c)** no son sucesiones geométricas. **b)** Si es sucesión geométrica.

12 **Construye los cinco primeros términos de las siguientes sucesiones geométricas, determinadas por:**

a) $a_1 = 5$ y $r = 4$ **b)** $a_5 = 108$ y $r = -1/3$

c) $a_7 = 9$ y $r = -1$ **d)** $a_{10} = -10$ y $r = -2$

a) 5, 20, 80, 320, 1 280 **b)** 8 748, –2 916, 972, –324, 108

c) 9, –9, 9, –9, 9 **d)** $\frac{5}{256}, \frac{-5}{128}, \frac{5}{64}, \frac{-5}{32}, \frac{5}{16}$

13 **Si el tercer término de una sucesión geométrica es 8 y la razón –2, halla el término séptimo y el primero.**

$a_1 = 2$; $a_7 = 128$

14 **En una sucesión geométrica $a_3 = 32$ y $a_{10} = 1/4$. Hallar la razón.**

2

15 **Calcula $20 + 10 + 5 + \frac{5}{2} + \frac{5}{4} + \ldots$**

40

16 **Halla la suma de los infinitos términos de la sucesión $a_n = \frac{100}{5^{n+1}}$**

5

17 **Halla la suma de los 10 primeros términos de la sucesión: $\frac{16}{81}, \frac{8}{27}, \frac{4}{9}, \ldots$**

$\frac{82325}{2592}$

18 **Calcular la suma de los diez primeros términos de la sucesión 3, 9, 27, ...**

88572

19 **En una sucesión geométrica se sabe que $a_5 = 1$ y $a_8 = 125$. Halla la suma de los 8 primeros términos.**

$\frac{97656}{625}$

20 **Calcula los seis primeros términos de la sucesión:**

a) $a_n = 3n - 2$ **b)** $c_n = (-2)^{n-1}$

c) $b_n = \frac{5n-6}{3}$ **d)** $d_n = \frac{3+(-1)^n}{n}$

a) 1, 4, 7, 10, 13, 16 **b)** 1, –2, 4, –8, 16, –32

c) $-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, 3, \frac{14}{3}, \frac{19}{3}, 8$ **d)** $2, 2, \frac{2}{3}, 1, \frac{2}{5}, \frac{2}{3}$

21 **Calcula el vigésimoquinto término de las sucesiones del ejercicio anterior.**

a) 73; **b)** 16 777 216; **c)** $\frac{119}{3}$; **d)** $\frac{2}{25}$

22 **Siendo (a_n) una sucesión aritmética, completa las igualdades:**

a) $a_5 + a_7 = a_1 + ...$ **b)** $a_{12} + a_3 = a_8 + ...$

c) $a_{18} + a_{22} = a_{20} + ...$ **d)** $2a_7 = a_3 + ...$

a) a_{11} **b)** a_7

c) a_{20} **d)** a_{11}

23 **Hallar un término general de la sucesión: 0, 2, 4, 6, ... y la suma de los n primeros términos.**

$a_n = 2(n-1)$; $S_n = n(n-1)$

24 **a) Escribir todos los números naturales menores que 60 que divididos por 8 den de resto 2.**

b) Comprobar que forman una sucesión aritmética.

c) Hallar la expresión del término general y su suma.

9, 16, 23, 30, 37, 44, 51, 58

$a_n = 7n + 2$; S = 268

25 **Si $a_1 = 15$; $a_2 = 14{,}3$, hallar la diferencia de esta sucesión, el primer término que sea entero y negativo y la suma de todos los términos positivos.**

$a_{31} = -6$; $S = 168{,}3$

26 **Conocida una sucesión aritmética por sus términos $a_5 = 17$ y $a_{11} = 35$, se pide:**

a) Calcular si el número 72 pertenece a la sucesión.

b) Si pertenece a la sucesión, calcular el lugar que ocupa.

c) Si no pertenece a la sucesión calcular entre qué dos términos se encuentra su valor.

a) no

c) 71 y 74

Del 27 al 34. Los datos siguientes están referidos a sucesiones aritméticas.

27 **$a_1 = 17$; $d = 11/2$; $n = 79$. Hallar a_n y S_n.**

$a_{79} = 446$; $S_{79} = \dfrac{36\,577}{2}$

28 **$a_1 = -6$; $d = 3/4$; $S_n = 146{,}25$. Hallar n y a_n.**

$n = 407$; $a_{407} = 298{,}5$

29 **$a_n = 24$; $d = 5/7$; $n = 22$. Hallar a_1 y S_n.**

$a_1 = 9$; $S_{22} = 341$

30 **$a_1 = 3{,}6$; $n = 41$; $S_n = 2.427'2$. Hallar d y a_n.**

$d = 2{,}78$; $a_{41} = 114{,}8$

31 **$a_1 = -3/4$; $d = -7/8$; $a_n = -21{,}75$. Hallar n y S_n.**

$n = 25$; $S_{25} = -\dfrac{1125}{4}$

32 **$n = 24$; $d = 1{,}25$; $S = 405$. Hallar a_1 y a_n.**

$a_1 = 2{,}5$; $a_{24} = 31{,}25$

33 **$a_n = 45$; $d = 2$; $S = 520$. Hallar a_1 y n.**

$a_1 = 7$, $n = 20$; $a_1 = -5$, $n = 26$

34 **$a_1 = 5$; $a_n = 23$; $S = 392$. Hallar n y d.**

$n = 28$; $d = \dfrac{2}{3}$

35 **Halla la suma de todos los múltiplos de 3 comprendidos entre 701 y 1 541.**

313 740

36 **Halla tres números naturales en sucesión aritmética sabiendo que si su suma es 12 y su producto 28.**

1, 4, 7 o 7, 4, 1

37 **La suma de un cierto número de términos de una sucesión aritmética es 117 y su término central es 13. Calcula el número de términos que se han sumado.**

9

38 **¿Cuántos términos hay que sumar de la sucesión aritmética 3, 7, 11, ..., para que su suma sea 210?**

10

39 **En una sucesión aritmética, la suma de los términos segundo y tercero es 32, y la suma de los términos quinto y séptimo es 46. Calcula el décimo término.**

31

40 **Descomponer la unidad en tres partes, que formen sucesión aritmética y tales que la suma de sus cuadrados valga 7/18.**

$\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$

41 **La suma de los seis términos de una sucesión aritmética es 36, y el producto de los términos extremos, 11. Halla a_1, a_6 y d.**

$a_1 = 1$, $a_6 = 11$, $d = 2$;

$a_1 = 11$, $a_6 = 1$, $d = -2$

42 **La suma de tres términos consecutivos de una sucesión aritmética es 12 y la suma de sus cuadrados es 66. Calcula dichos números.**

1, 4, 7

43 **Hallar los lados de un triángulo rectángulo sabiendo que están en sucesión aritmética de diferencia 7 m.**

21, 28, 35

44 **La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 30 dm., halla el perímetro y el área si los lados están en sucesión aritmética.**

$P = 72$ dm; $A = 216$ dm^2

45 **Entre dos postes que distan 225 m. hay que reponer los 4 que ha tirado la tormenta. ¿A qué distancia entre ellos habrán de ponerse?**

45 m

46 **La suma de 3 números en sucesión aritmética es 3 y la de sus cubos, 99. Hallar esos 3 números.**

–3, 1 y 5

47 **Hallar la suma de los múltiplos de 7 comprendidos entre 100 y 1 000.**

70 336

48 **En un cine, la quinta fila dista de la pantalla 12 m. y la décimosegunda 18 m. ¿A qué distancia de la pantalla se encuentra la primera fila? ¿Y la vigésimoquinta?**

$\frac{60}{7}$ m

49 **Un jardinero desea plantar 861 árboles formando con ellos un triángulo de modo que la primera fila tenga un solo árbol, la segunda dos árboles, la tercera tres árboles, etc. ¿Cuántas filas habrá?**

41 filas

50 **Un jardinero tiene que echar un cubo de agua a cada uno de los 21 árboles que hay a lo largo de un camino. Calcula el camino que tiene que recorrer para regar todos los árboles y devolver el cubo al pozo, si el pozo dista del primer árbol 50 m. y la distancia entre dos árboles es 12 m.**

7 140 m

51 **Sea la sucesión (a_n) definida por $a_1 = 1$ y para todo número natural $n > 0$ es $a_{n+1} = \frac{a_n}{1 + a_n}$**

a) Calcula a_2, a_3, a_4, a_5 y a_n.

b) Si $b_n = \frac{1}{a_n}$ calcula b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 y b_n.

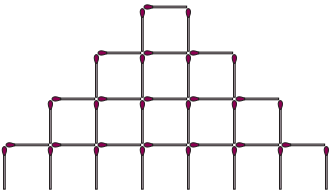
c) Demostrar que la sucesión (b_n) es una sucesión aritmética.

a) $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{1}{3}$, $a_4 = \frac{1}{4}$, $a_5 = \frac{1}{5}$, $a_n = \frac{a_{n-1}}{1 + a_{n-1}}$

b) $b_1 = 1$, $b_2 = 2$, $b_3 = 3$, $b_4 = 4$, $b_5 = 5$, $b_n = 1 + b_{n-1}$

c) Es una sucesión aritmética de diferencia 1.

52 **Colocando cerillas de igual longitud en una mesa se realiza una figura plana como la siguiente:**



¿Cuántas «filas» se pueden construir con 10 440 cerillas?

72

53 **El primer término de una sucesión geométrica es 0,2 y el segundo 0,6. Escribe sus 6 primeros términos. ¿Cuál es la razón?**

0,2; 0,6; 1,8; 5,4; 16,2; 48,6; $r = 3$

Del 54 al 57. Los datos siguientes están referidos a sucesiones geométricas.

54 **Dados $a_1 = 1/9$, $r = 3$, halla a_8 y S_8.**

$a_8 = 243$; $P_8 = 531\,441$

55 **Dados $a_2 = \frac{1}{4}$ y $a_5 = \frac{1}{256}$, hallar r y S_5.**

$r = \frac{1}{4}$, $S_5 = \frac{341}{256}$

56 **Dados $a_{10} = 64$ y $r = 2$, halla a_1 y a_4.**

$a_1 = \frac{1}{8}$; $a_4 = 1$

57 **Dados $a_4 = 125$ y $a_6 = 3125$, halla a_1, r y S_6.**

$a_1 = 1$; $r = 5$; $S_6 = 3906$

58 **Calcula el producto de los siete primeros términos de una sucesión geométrica sabiendo que $a_1 = 1$ y $a_{11} = 32$.**

$P_7 = 1024\sqrt{2}$

59 **Halla a_{15} conociendo $r = 2$ y $S_{15} = 98\,301$.**

49 152

60 **En una sucesión geométrica, $a_1 = 3$ y $a_2 = 1$. Halla S_5.**

$S_5 = \frac{121}{27}$

61 **En una sucesión geométrica, la suma de sus tres primeros términos es 28 y la diferencia entre el tercero y el primero, 12. Halla la razón y el primer término.**

$r = 2,\ a_1 = 4; \quad r = -\frac{5}{4},\ a_1 = \frac{64}{3}$

62 **En un Centro Escolar con 1 000 alumnos, el Director comunica al Delegado que no habrá clase por la tarde. Este lo comunica a dos compañeros diferentes, cada uno a otros dos y así sucesivamente. Si cada transmisión tarda 10 sg. ¿En cuánto tiempo se habrán enterado todos?**

90 seg.

63 **Los tres términos de lugar impar de una sucesión geométrica suman 84 y los tres de lugar par, 168. Halla *r* y a_1.**

$r = 2,\ a_1 = 4$

64 **Tres números están en sucesión geométrica. Si al segundo se le suma 2, resulta una sucesión aritmética. Si en esta aritmética se añaden 9 al tercer término, se convierte de nuevo en geométrica. ¿Cuáles son dichos números?**

4, 8, 16 ó $\frac{4}{25}, \frac{-16}{25}, \frac{64}{25}$

65 **Halla tres números en sucesión geométrica, si su suma es 19 y su producto 216.**

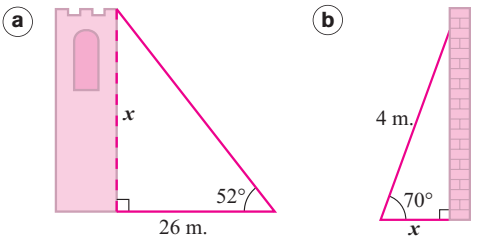
4, 6, 9 ó 9, 6, 4

66 **De tres números reales distintos *x*, *y*, *z* ($x \neq 0$), se sabe que escritos en orden *x*, *y*, *z* son tres términos consecutivos de una sucesión geométrica de razón *r* y que 3*x*, 2*y*, *z* son tres términos consecutivos de una sucesión aritmética. Calcular *r*.**

$r = 1$ y $r = 3$

Tema 5 RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO AGUDO

1 **Halla *x* en cada una de las figuras siguientes:**



a) $x \simeq 33{,}28$ m; **b)** $x \simeq 1{,}37$ m

2 **Usa tu calculadora y da el valor de:**

a) sen 36° **b) cos 52° 30'** **c) tg 75° 23' 10''** **d) sen 67,52°**

a) 0,587785 **c)** 3,835248 **b)** 0,608761 **d)** 0,924013

3 **Pasa a grados, minutos y segundos el ángulo $\alpha = 15{,}4275°$. Halla luego cos α.**

$\alpha = 15° 25' 39''$; $\cos \alpha \simeq 0{,}963967835$

4 **Si tg $\alpha = 1{,}58$, halla α y luego sen α.**

$\alpha = 57° 40' 11''$ sen $\alpha = 0{,}844980$

5 **Si sen $\alpha = 0{,}4526$, expresa la medida del ángulo α en grados, minutos y segundos.**

$\alpha = 26° 54' 38''$

6 **Halla sin usar la calculadora las restantes razones trigonométricas del ángulo α en los casos siguientes:**

a) cos $\alpha = 0{,}5$ **b) sec $\alpha = \sqrt{2}$** **c) tg $\alpha = 2$** **d) sen $\alpha = \frac{2}{3}$**

a) $\cos \alpha = \frac{1}{2}$, $\operatorname{sen} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3}$, $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\sec \alpha = 2$, $\operatorname{cosec} \alpha = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

b) $\operatorname{sen} \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{tg} \alpha = 1$, $\operatorname{ctg} \alpha = 1$, $\sec \alpha = \sqrt{2}$, $\operatorname{cosec} \alpha = \sqrt{2}$

c) $\operatorname{sen} \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\operatorname{cosec} \alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\sec \alpha = \sqrt{5}$, $\operatorname{tg} \alpha = 2$, $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{2}$

d) $\operatorname{sen} \alpha = \frac{2}{3}$, $\operatorname{cosec} \alpha = \frac{3}{2}$, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $\sec \alpha = \frac{3\sqrt{5}}{5}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$

7 **Resuelve el triángulo rectángulo del que se sabe que sus dos catetos miden 6 y 8 cm.**

$a = 10$ cm; $\alpha \simeq 36° 52' 12''$; $\beta \simeq 53° 7' 48''$

8 **Resuelve el triángulo rectángulo *ABC* del que se sabe que el ángulo *B* mide 25° y el cateto *c* = 9 m.**

$\hat{C} = 65°$ $b = 4'2$ m $a = 9{,}9$ m

9 **De un triángulo rectángulo se conoce la hipotenusa 15 m y un cateto 8 m. Resuélvelo.**

$x \simeq 12{,}69$ m; $\alpha \simeq 57° 46' 9''$; $\beta \simeq 32° 13' 51''$

10 **Construye un triángulo *ABC* rectángulo en *A* y completa:**

a) $\frac{CA}{CB}$ = cos... **b)** $\frac{CA}{CB}$ = sen... **c)** $\frac{CA}{AB}$ = tg...

d) $\frac{AB}{CB}$ = sen... **e)** $\frac{AB}{CB}$ = cos... **f)** $\frac{AB}{CA}$ = tg...

a) C **b)** B **c)** B

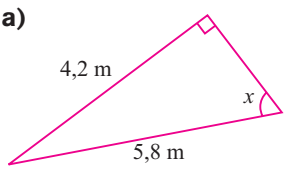
d) C **e)** B **f)** C

11 **Usa tu calculadora para encontrar un ángulo agudo α tal que tg $\alpha > 100$.**

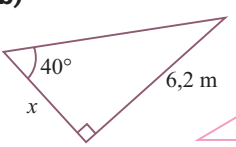
Por ejemplo $\alpha = 89° 30'$

12 **Halla *x* en cada una de las siguientes figuras:**

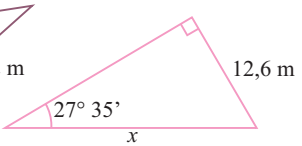
a)



b)



c)



a) 46° 23' 49'' **b)** 7,39 m **c)** 27,21 m

13 **Los catetos de un triángulo rectángulo *ABC* son *b* = 4 cm y *c* = 3 cm. Calcula, a partir de estos datos, las razones trigonométricas del ángulo *B*.**

sen $B = \frac{4}{5} = 0{,}8$; cos $B = \frac{3}{5} = 0{,}6$; tg $B = \frac{4}{3} \simeq 1{,}33$

cosec $B = \frac{5}{4} = 1{,}25$; sec $B = \frac{5}{3} \simeq 1{,}67$; ctg $B = \frac{3}{4} = 0{,}75$

14 **Dibuja un triángulo *ABC* rectángulo en *A* tal que sus catetos verifican *AC* = 3 *AB*. Calcula los ángulos de dicho triángulo.**

C = 18° 26' 6''; B = 71° 33' 54''

15 **Halla las restantes razones trigonométricas del ángulo agudo α en los casos siguientes:**

a) sen α = 0,3; b) cos α = 0,6; c) tg α = 1,5;

d) ctg α = 2; e) sec α = 4 f) cosec α = 2,5

a) cos $\alpha \simeq$ 0,9539; tg $\alpha \simeq$ 0,3145; cosec $\alpha \simeq$ 3,3333; sec $\alpha \simeq$ 1,0483; ctg $\alpha \simeq$ 3,1798

b) sen α = 0,8; tg $\alpha \simeq$ 1,3333; cosec α = 1,25; sec $\alpha \simeq$ 1,6667; ctg α = 0,75

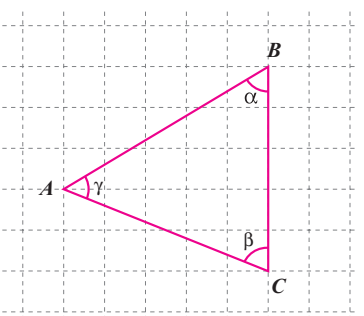
c) sen $\alpha \simeq$ 0,8321; cos $\alpha \simeq$ 0,5547; cosec $\alpha \simeq$ 1,2019; sec $\alpha \simeq$ 1,8028; ctg $\alpha \simeq$ 0,6667

d) sen $\alpha \simeq$ 0,4472; cos $\alpha \simeq$ 0,8944; tg α = 0,5; cosec $\alpha \simeq$ 2,2361; sec $\alpha \simeq$ 1,1180

e) sen $\alpha \simeq$ 0,9682; cos α = 0,25; tg $\alpha \simeq$ 3,8730; cosec $\alpha \simeq$ 1,0328; ctg $\alpha \simeq$ 0,2582

f) sen α = 0,4; cos $\alpha \simeq$ 0,9165; tg $\alpha \simeq$ 0,4364; sec $\alpha \simeq$ 1,0911; ctg $\alpha \simeq$ 2,2913

16 **Observa la figura siguiente:**



a) Prueba que tg $\alpha = \frac{5}{3}$ y que tg $\beta = \frac{5}{2}$

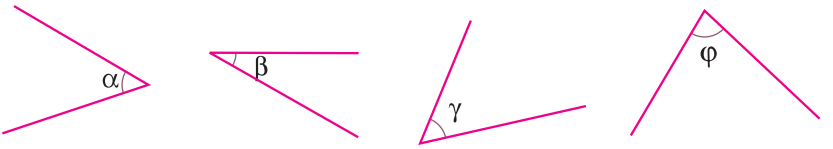
b) Deduce un valor aproximado de los ángulos del triángulo *ABC*.

$\alpha \simeq$ 59° 2' 10''; $\beta \simeq$ 68° 11' 54''; $\gamma \simeq$ 52° 45' 56''

17 **¿Existe un ángulo agudo α tal que cos α = 0,3 y sen α = 0,8? Razona la respuesta.**

No, porque no cumple la relación fundamental de la trigonometría.

18 **Utiliza solamente reglas graduadas para realizar las medidas necesarias y obtén seno, coseno y tangente de los siguientes ángulos.**



No tiene solución

19 **Con la ayuda de la calculadora, halla:**

a) sen 37° **b) cos 58°** **c) tg 26°** **d) ctg 67°**

e) sen 23° 37' **f) cos 15° 85' 13''** **g) tg 62° 35' 26''** **h) ctg 26° 18'**

a) sen 37° ≃ 0,601815 **b)** cos 58° ≃ 0,529919

c) tg 26° ≃ 0,487733 **d)** ctg 67° ≃ 0,424475

e) sen 23° 37' ≃ 0,400616 **f)** cos 15° 85' 13'' ≃ 0,959214

g) tg 62° 35' 26'' ≃ 1,928417 **h)** ctg 26° 18' ≃ 2,023346

20 **Determina, si es posible, la medida de un ángulo α en cada uno de los siguientes casos.**

a) cos α = 0,63 **b) cos α = 1,5** **c) sen α = $\frac{2}{3}$**

d) sen α = 4,5 × 10^{-1} **e) tg α = 300** **f) tg α = 5,2**

a) α = 50° 56' 59'' **b)** no existe α **c)** α = 41° 48' 37''

d) α = 26° 44' 37'' **e)** α = 89° 48' 32'' **f)** α = 79° 6' 52''

21 **Resuelve un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 9 cm y 12 cm.**

a = 15 cm; α ≃ 36° 52' 12''; β ≃ 53° 7' 48''

22 **Resuelve el triángulo rectángulo sabiendo que un cateto mide 15 m y que su ángulo agudo adyacente es de 62°.**

El otro ángulo 28°, el otro cateto 28,21 m y la hipotenusa 31,95 m.

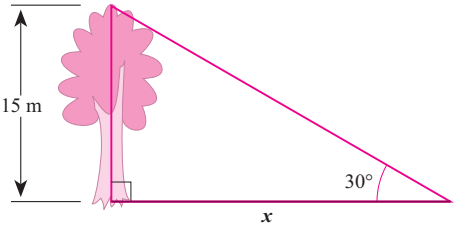
23 **De un triángulo rectángulo se conoce un cateto que mide 23 m y su ángulo opuesto 40°. Calcula sus demás elementos.**

α = 50°; *a* ≃ 35,78 m; *b* ≃ 27,41 m

24 **Los catetos de un triángulo rectángulo *ABC* son: *b* = 0,17 m y *c* = 0,67 m. Calcula el ángulo *C*.**

75° 45' 45''

25 **Cuando el sol está a 30° por encima del horizonte, ¿cuánto mide la sombra *x* proyectada por un árbol de 15 m de altura?**



$x \simeq 25{,}98$ m

26 **Calcula la altura que alcanza una escalera de 6 m de longitud cuando descansa sobre una pared y forma un ángulo de 60° con el suelo.**

5,2 m

27 **Hallar la altura de un triángulo isósceles conociendo su base, 4 cm, y el ángulo opuesto 30°.**

$h \simeq 7{,}46$ cm

28 **Calcula la base de un triángulo isósceles conociendo el ángulo opuesto a ésta, 40° y la altura 7 cm.**

5,1 cm.

29 **Halla los ángulos de un triángulo rectángulo sabiendo que las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa miden 7 y 10 cm. (Ver ejercicio resuelto núm. 5)**

$\alpha \simeq 50° 4' 56''$; $\beta \simeq 39° 55' 4''$

30 **¿Verdadero o falso?**

a) $\cos 60° = 2\cos^2 30° - 1$ **b)** $\cos 60° = 1 - 2\,\text{sen}^2 30°$

c) $\text{sen}\, 60° = 2\,\text{sen}\, 30° \cos 30°$ **d)** $\cos 60° = \cos^2 30° - \text{sen}^2 30°$

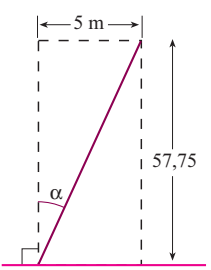
a) V; **b)** V; **c)** V; **d)** V

31 ***La torre de Pisa*. Se comenzó a construir en 1173 y se terminó en 1284. En ese momento el campanario se separaba 90 cm. de la vertical. Actualmente la desviación se aproxima a los 5 m. El esquema de la derecha representa los datos actuales en una figura sin escala real.**

a) Calcula un valor aproximado de la tangente del ángulo α.

b) Deduce un valor aproximado del ángulo α.

c) Deduce un valor aproximado de la longitud de la torre.



a) $\text{tg}\, \alpha \simeq 0{,}0866$

b) $\alpha \simeq 4° 56' 54''$

c) $l \simeq 57{,}966$ m

32 **¿Verdadero o falso?**

a) $\text{sen}^2\ 30° = \dfrac{1 - \cos 60°}{2}$

b) $\cos^2 30° = \dfrac{1 - \cos 60°}{2}$

c) $\text{sen}\ 30° + \cos 60° = 1$

d) $\cos^2 45° \ (1 + \text{tg}^2\ 45°) = 1$

a) V

b) F

c) F

d) V

33 **En un triángulo rectángulo *ABC* se verifica que tg *B* = ctg *B*. ¿Qué relación existe entre los catetos?**

Son iguales.

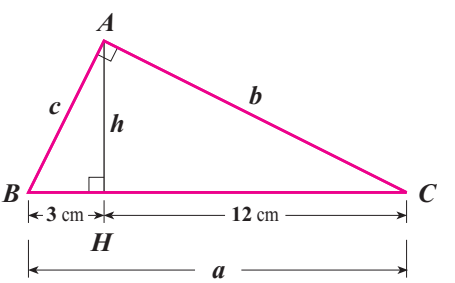
34 **Calcula las longitudes del lado y de la apotema de un pentágono regular inscrito en una circunferencia de radio 5 cm.**

$l \simeq 5{,}88$ cm; $ap \simeq 4{,}05$ cm

35 **Halla el área de un hexágono regular de 10 cm de lado.**

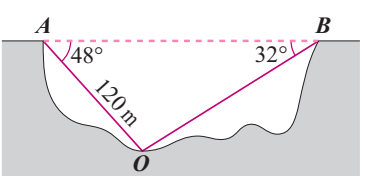
$A \simeq 259{,}81\ \text{cm}^2$

36 **De un triángulo rectángulo *ABC*, rectángulo en *A*, se sabe que *BH* mide 3 cm, que *HC* mide 12 cm, siendo *H* el pie de la altura trazada desde *A*. Calcula las longitudes de los lados y el valor de los ángulos agudos.**



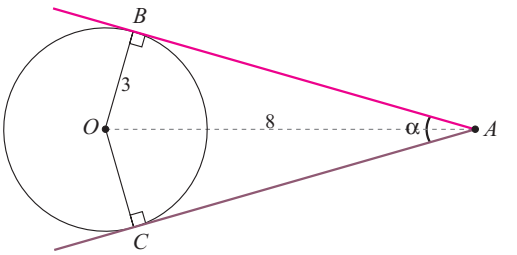
B ≃ 63° 26' 6''; C ≃ 26° 33' 54''; $b = 13{,}42$ cm; $c \simeq 6{,}71$ cm

37 **Calcula la longitud del puente que se quiere construir entre los puntos *A* y *B*, observa la figura, para lo cual se sabe que los ángulos *ABO* y *OAB* miden 32 y 48 grados respectivamente y que la distancia entre *A* y *O* es de 120 m.**



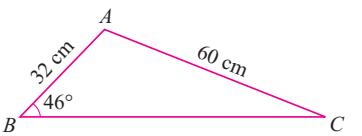
$l = 223$ m

38 **Desde un punto *A* situado a 8 cm del centro *O* de una circunferencia de 3 cm de radio se han trazado las dos tangentes a la circunferencia. Halla el ángulo α que éstas forman.**



44° 2' 55''

39 **Resuelve el triángulo siguiente:**

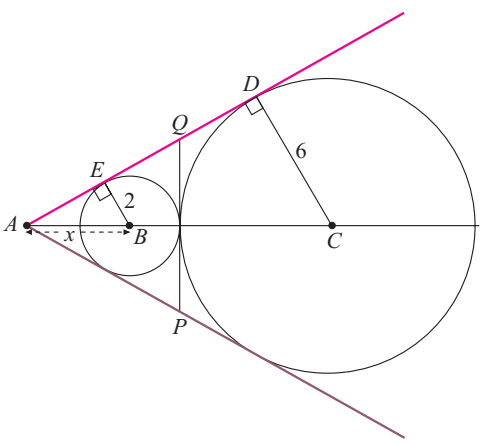


$a \simeq 77{,}64$ cm

$A \simeq 111° 26' 25''$

$C \simeq 22° 33' 35''$

40 **Dados dos círculos tangentes exteriores de 6 y 2 m de radio, halla el área del triángulo *APQ* formado por las tangentes comunes a ambos círculos.**

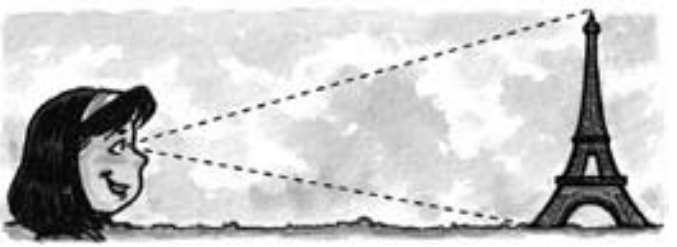


$12\sqrt{3} \simeq 20{,}78\ m^2$

41 **Resolver el triángulo isósceles *ABC* conociendo el lado desigual *BC* = 100 cm y *AH* + *BH* = 84 cm. Siendo *H* el pie de la altura relativa al lado *BC*.**

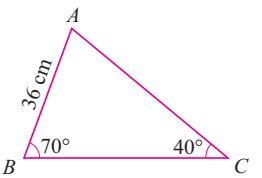
$AB = AC \simeq 60{,}46$ cm; $A \simeq 111° 34' 7''$; $B = C \simeq 34° 12' 56''$

42 **La torre Eiffel mide alrededor de 318 m y Carmen 1,60 m. ¿Bajo que ángulo ve Carmen la torre cuando se encuentra a 100 m de su pie?**



72° 27' 38''

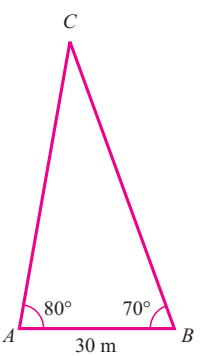
43 **Resuelve el triángulo siguiente:**



$A = 70°$

$AC = BC \simeq 52{,}63$ cm

44 **Observa el triángulo siguiente:**

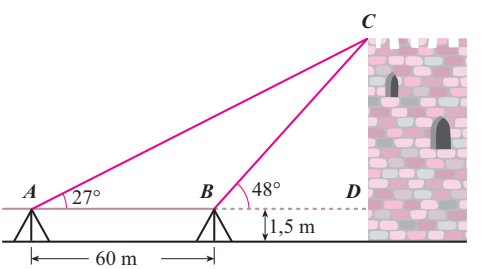


a) Calcula la altura *BH* del triángulo *ABC*. Da un redondeo a décimas.

b) Calcula la longitud del lado *BC*. Da un redondeo entero.

BH $\simeq$ 29,5 m; BC $\simeq$ 59 m

45 **Observa la siguiente figura y las medidas realizadas en ella (medidas no a escala).**



a) Expresa *BD* y *AD* en función de *CD*.

b) Deduce la altura de la torre.

a) $BD = \dfrac{CD}{\text{tg } 48°} \simeq 0{,}9\ CD$; $AD = \dfrac{CD}{\text{tg } 27°} \simeq 1{,}96\ CD$

b) $h \simeq 57{,}99$ m

46 ***ABC* es un triángulo isósceles de base *AC* y altura *AH*. Se sabe que *AH* = 5 cm y que sen $\widehat{ABH} = 0{,}4$. Calcula el área de este triángulo.**

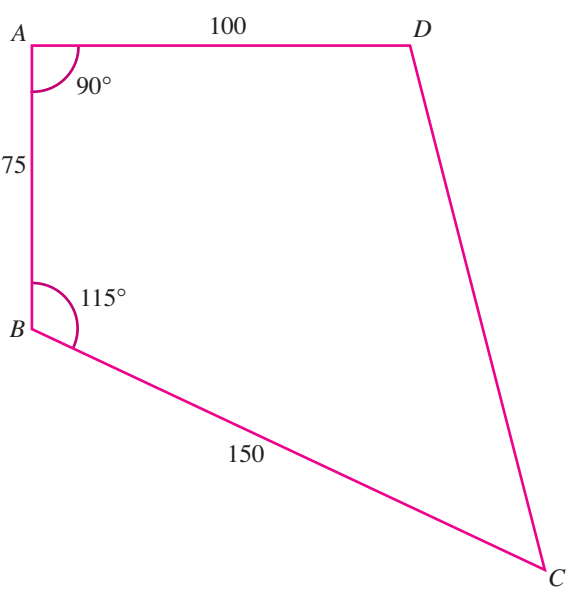
32,25 cm^2

47 **Un terreno tiene la forma de un cuadrilátero *ABCD*. Se sabe que *A* = 90°, *AD* = 100 m, *AB* = 75 m, *B* = 115° y *BC* = 150 m.**

a) Haz un dibujo a escala 1:2000.

b) Halla el área del cuadrilátero.

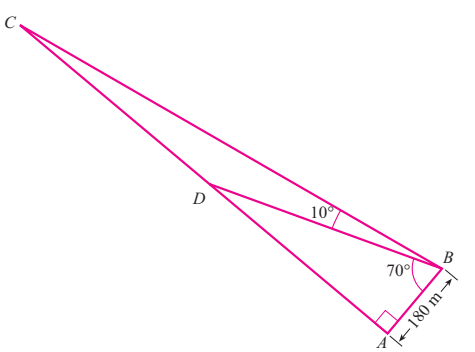
a)



b) área $\simeq$ 12017,62 m^2

48 **Halla la longitud *CD* en la figura siguiente:**

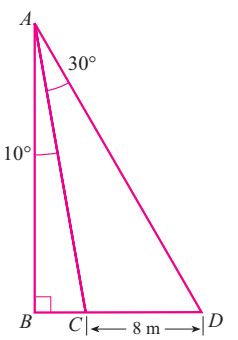
510,29 m



49 **Da un valor aproximado de la medida de un ángulo agudo α que verifica la ecuación: $\operatorname{sen}\alpha - 2\cos\alpha = 0$**

$\alpha \simeq 63° 26' 6''$

50 **Determina la medida *AB* en la siguiente figura.**



51 **Calcula un valor aproximado de la medida de un ángulo agudo α que verifica la ecuación: $\operatorname{sen}^2\alpha - \cos^2\alpha = 0{,}7$**

$\alpha \simeq 22° 47' 11''$

52 **Demuestra que cualquiera que sea la medida del ángulo α se verifica:**

a) $\dfrac{1+\operatorname{tg}^2\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha} = \dfrac{1}{\operatorname{sen}^2\alpha}$

b) $2 - \operatorname{sen}^2\alpha = \cos^2\alpha\,(2 + \operatorname{tg}^2\alpha)$

c) $(\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha + 1)(\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha - 1) = 2\operatorname{sen}\alpha\cos x$

d) $\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha = 1 - 2\operatorname{sen}^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

a) $\dfrac{1+\operatorname{tg}^2\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha} = \dfrac{\dfrac{1}{\cos^2\alpha}}{\dfrac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \dfrac{1}{\operatorname{sen}^2\alpha}$

b) $\cos^2\alpha\,(2 + \operatorname{tg}^2\alpha) = \cos^2\alpha\,(1 + 1 + \operatorname{tg}^2\alpha) = \cos^2\alpha\left(1 + \dfrac{1}{\cos^2\alpha}\right) =$

$= \cos^2\alpha + 1 = 1 - \operatorname{sen}^2\alpha + 1 = 2 - \operatorname{sen}^2\alpha$

c) $(\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha + 1)(\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha - 1) = (\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha)^2 - 1 =$
$= \cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha + 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha - 1 = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$

d) $\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha = \cos^2\alpha - 2\operatorname{sen}^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha = 1 - 2\operatorname{sen}^2\alpha$

$\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha = 2\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha - \cos^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

Tema 6 RAZONES TRIGONOMÉTRICAS: GENERALIZACIÓN

1 **Reduce al primer giro los siguientes ángulos:**

a) 540° **b) 1 000°** **c) 2 467°** **d) 3 750°**

a) 180° **b)** 280° **c)** 307° **d)** 150°

2 **Siendo sen $\alpha = \frac{1}{2}$ y $90° < \alpha < 180°$, calcula las demás razones trigonométricas del ángulo α.**

$\text{sen } \alpha = \frac{1}{2}$, $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\text{tg } \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\text{ctg } \alpha = -\sqrt{3}$,

$\text{cosec } \alpha = 2$, $\sec \alpha = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$

3 **De un ángulo α del segundo cuadrante se sabe que $\cos \alpha = -\frac{1}{3}$, calcula sus demás razones trigonométricas.**

$\text{sen } \alpha \simeq 0{,}9428$; $\text{tg } \alpha \simeq -2{,}8284$; $\text{cosec } \alpha \simeq 1{,}0607$;

$\sec \alpha \simeq -3$; $\text{ctg } \alpha \simeq -0{,}3536$

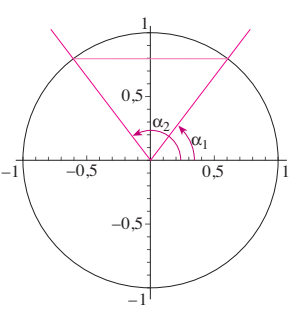
4 **Se sabe que $\text{tg } \alpha = 2$ y que $180° < \alpha < 270°$. Calcula las demás razones trigonométricas del ángulo α.**

$\sec \alpha = -\sqrt{5}$, $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$, $\text{sen } \alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\text{cosec } \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{2}$, $\text{ctg } \alpha = \frac{1}{2}$

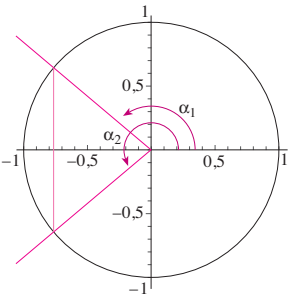
5 **Dibuja y obtén el valor de los ángulos α tales que:**

a) sen $\alpha = 0{,}8$; **b) cos $\alpha = -\frac{3}{4}$** **c) tg $\alpha = 4$**

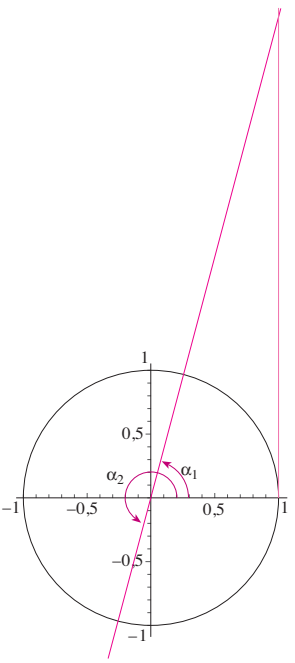
a) $\alpha_1 \simeq 53° \ 7' \ 48''$; $\alpha_2 \simeq 126° \ 52' \ 12''$



b) $\alpha_1 \simeq 138° 35' 25''$; $\alpha_2 \simeq 221° 24' 35''$



c) $\alpha_1 \simeq 75° 57' 50''$; $\alpha_2 \simeq 255° 57' 50''$



6 **Determina las soluciones de las ecuaciones siguientes:**

a) sen $x = -0{,}25$ **b) cos $x = 0{,}6$** **c) tg $x = -1{,}5$**

a) $x = -14° 28' 39''$ o $x = 345° 31' 21''$ y $x = 194° 28' 39''$

b) $x = 53° 7' 48''$ y $x = 306° 52' 12''$

c) $x = -56° 18' 35''$ o $x = 303° 41' 25''$ y $x = 123° 41' 25'$

7 **Expresa en función de un ángulo del primer cuadrante las razones trigonométricas de los ángulos:**

a) 130° **b) 240°** **c) 300°** **d) –80°**

a) sen 130° = sen 50°
cos 130° = –cos 50°
tg 130° = –tg 50°

b) sen 240° = –sen 60
cos 240° = –cos 60°
tg 240° = tg 60°

c) sen 300° = –sen 60°
cos 300° = cos 60°
tg 300° = –tg 60°

d) sen –80° = –sen 80°
cos –80° = cos 80°
tg –80° = –tg 80°

8 **¿Es cierto que sen 30° – sen 260° = cos 60° – cos 190°?**

Si

9 **¿Verdadero o falso? No debes usar la calculadora.**

a) cos 10° = cos 350° **b) sen 200° = sen 160°**

c) tg 220° – tg 40° = 0 **d) sen 190° + sen 350° = 0**

a) V; **b)** F; **c)** V; **d)** F

10 **Si sen $\alpha = \frac{1}{3}$ y cos $\beta = -\frac{2}{3}$ calcula: a) sen (180° + α); b) cos (90° + β); c) cos ($\alpha - \beta$); d) sen ($\alpha + \beta$), siendo $0 \leq \alpha \leq 90°$ y $90° \leq \beta \leq 180°$.**

a) sen (180° + α) = sen $\alpha = \frac{1}{3}$ **b)** cos (90 + β) = $-\frac{\sqrt{5}}{3}$

c) cos ($\alpha - \beta$) = $\frac{-4\sqrt{2}+\sqrt{5}}{9}$ **d)** sen ($\alpha + \beta$) = $\frac{-2+2\sqrt{10}}{9}$

11 **Sabiendo que tg α = 1 y que tg β = –2, calcula:**

a) tg ($\alpha + \beta$); b) tg ($\alpha - \beta$)

a) $-\frac{1}{3}$; **b)** -3

12 **En un triángulo PQR se conoce el lado *p* = 35 cm y los ángulos P = 114° y Q = 42°. Calcula la longitud de los lados *q* y *r*.**

$q \simeq 25{,}64$ cm; $r \simeq 15{,}58$ cm

13 **De un triángulo ABC se conoce el lado *a* = 12 m y los ángulos A = 37° y B = 65°. Calcula el lado *b*.**

$b \simeq 18{,}07$ m

14 **De un triángulo ABC se conoce el lado *c* = 12 m y los ángulos A = 42° y B = 58°. Calcula los lados *a* y *b*.**

$a \simeq 8{,}15$ m; $b \simeq 10{,}33$ m

15 **En un triángulo ABC se conocen los lados *a* = 20 m, *b* = 17 m y el ángulo C = 35°. Calcula el lado *c*.**

$c \simeq 11{,}49$ m

Resuelve el triángulo ABC en cada uno de los siguientes casos.

16 ***a* = 10 m, *b* = 15 m y C = 20°**

A = 31° 24' 2''; B = 128° 35'; C = 6,6 m

17 ***a* = 20 m, *b* = 12 m y B = 33°**

$A \simeq 65°\ 11'\ 38''$; $C \simeq 81°\ 48'\ 22''$; $c \simeq 21{,}81$ m

18 ***a* = 15 m, *b* = 17 m y A = 35°**

B = 40° 32' 44"; C = 104° 27"; $c = 25'32$ m o también

B' = 139° 27"; C' = 5° 33"; $c' = 2{,}52$ m

19 ***a* = 13 m, *b* = 16 m y *c* = 5 m**

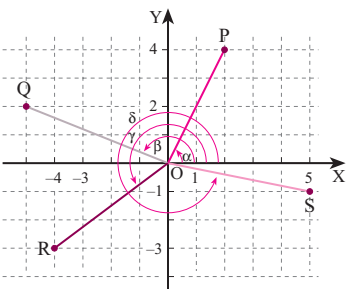
$A \simeq 45°\ 34'\ 22''$; $B \simeq 118°\ 29'\ 4''$; $C \simeq 15°\ 56'\ 32''$

20 ***a* = 25 m, B = 30° y C = 50°**

A = 100°; $b = 12{,}7$ m; $c = 19{,}5$ m

21 **Tomando como lado origen la dirección positiva del eje OX y lado extremo el determinado por el origen O y cada uno de los puntos P, Q, R y S, determina:**

a) sen α; b) cos β; c) tg γ; d) medida del ángulo δ



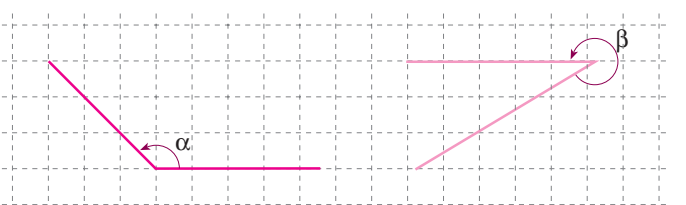
a) $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{5}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

b) $\cos\beta = -\dfrac{5}{\sqrt{29}} = -\dfrac{5\sqrt{29}}{29}$

c) $\operatorname{tg}\gamma = \dfrac{3}{4}$

d) $\delta \simeq -11°\ 18'\ 35'' = 348°\ 41'\ 25''$

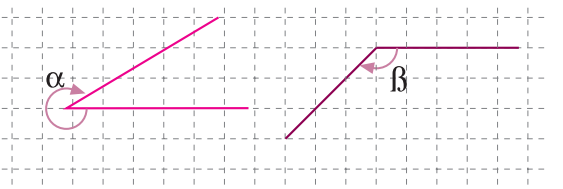
22 **Determina el valor de las razones trigonométricas de los ángulos α y β de la siguiente figura.**



$\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $\cos\alpha = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $\operatorname{tg}\alpha = -1$

$\operatorname{sen}\beta = -\dfrac{3\sqrt{34}}{34}$ $\cos\beta = -\dfrac{5\sqrt{34}}{34}$ $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{3}{5}$

23 **Mismo ejercicio**



$\alpha \simeq 30° 57' 49''$; $\beta = -135°$

24 **Reduce al primer giro los siguientes ángulos:**

a) 1 328° **b) 5 160°** **c) 45 042°** **d) 1 999°**

a) 248° **b)** 120° **c)** 42° **d)** 199°

25 **Reduce al primer giro los siguentes ángulos:**

a) 3 572° 25' 18''; **b) 16 320° 30' 20'';** **c) 1 000° 10' 10'';** **d) 2 200° 22'**

a) 332° 25' 18''; **b)** 120° 30' 20''; **c)** 280° 10' 10''; **d)** 40° 22''

26 **Reduce al primer giro positivo los siguientes ángulos:**

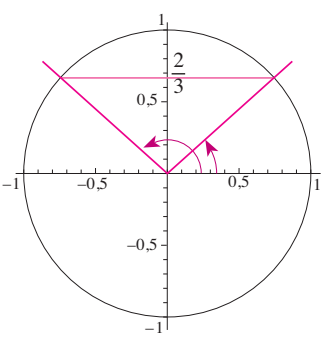
a) –237° **b) –805°** **c) –2 315°**

a) 133° **b)** 230° **c)** 205°

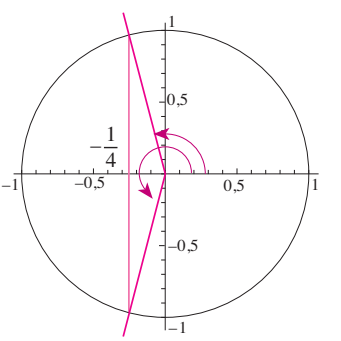
27 **Representa gráficamente los ángulos α tales que:**

a) $\operatorname{sen}\alpha = \frac{2}{3}$ **b)** $\cos\alpha = -\frac{1}{4}$ **c)** $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3}$

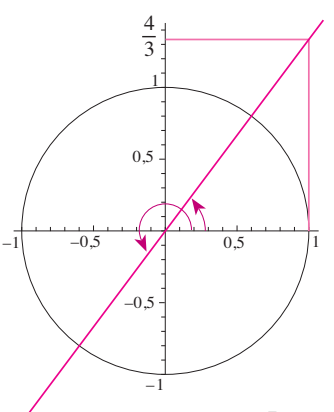
a)



b)



c)



28 **De un ángulo α del segundo cuadrante se sabe que sen $\alpha = 0{,}31$. Calcula sus demás razones trigonométricas.**

cos $\alpha = -0{,}95$; tg $\alpha = -0{,}33$; sec $\alpha = -1{,}05$; cosec $\alpha = 3{,}23$; ctg $\alpha = -3{,}07$

29 **De un ángulo α del tercer cuadrante se sabe que cos $\alpha = -0{,}64$. Calcula sus demás razones trigonométricas.**

sen $\alpha \simeq -0{,}7684$: tg $\alpha \simeq 1{,}2006$; cosec $\alpha \simeq -1{,}3014$;

sec $\alpha \simeq -1{,}5625$; ctg $\alpha \simeq 0{,}8329$

30 **De un ángulo α del 4º cuadrante se sabe que su tangente es $-1{,}2$. Calcula sus demás razones trigonométricas.**

sen $\alpha = -0{,}77$; cos $\alpha = 0{,}64$; sec $\alpha = 1{,}56$; cosec $\alpha = -1{,}30$;
ctg $\alpha = -0{,}83$

31 **¿Verdadero o falso?**

a) Si $45° < \alpha < 90°$ entonces sen $\alpha >$ cos α.

b) Si $90° < \alpha < 180°$ entonces sen $\alpha <$ cos α.

c) Siempre es tg $\alpha >$ sen α.

d) tg $\alpha =$ sen α sólo cuando $\alpha = 0°$.

a) V; **b)** F; **c)** F; **d)** F.

32 **Sabiendo que sen $\alpha = \frac{2}{3}$ y $90° < \alpha < 180°$, calcula las demás razones trigonométricas de α.**

cos $\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$; tg $\alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$; sec $\alpha = -\frac{3\sqrt{5}}{5}$

cosec $\alpha = \frac{3}{2}$; ctg $\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{2}$

33 **Sabiendo que cos $\alpha = -\frac{1}{2}$ y $90° < \alpha < 180°$, calcula las demás razones trigonométricas de α.**

sen $\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$; tg $\alpha = -\sqrt{3}$; cosec $\alpha = \frac{2\sqrt{3}}{3}$; sec $\alpha = -2$; ctg $\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

34 **De un ángulo α se sabe que su tangente es $\sqrt{2}$ y que $180° < \alpha < 270°$, calcula sus demás razones trigonométricas.**

sen $\alpha = -\frac{\sqrt{6}}{3}$; cos $\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$; sec $\alpha = -\sqrt{3}$; cosec $\alpha = -\frac{\sqrt{6}}{2}$;

ctg $\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$

35 **Sean α y β dos ángulos tales que sen $\alpha = \frac{1}{4}$, siendo α un angulo del primer cuadrante, y cos $\beta = -\frac{1}{3}$, siendo β del segundo cuadrante. Calcula:**

a) sen $(\alpha + \beta)$; b) cos $(\alpha + \beta)$; c) tg $(\alpha + \beta)$

a) $\text{sen}\,(\alpha + \beta) = \dfrac{\sqrt{120} - 1}{12} \simeq 0{,}8295$

b) $\cos(\alpha + \beta) = \dfrac{-\sqrt{15} - \sqrt{8}}{12} \simeq -0{,}5585$

c) $\text{tg}\,(\alpha + \beta) = \dfrac{1 - \sqrt{120}}{\sqrt{15} + \sqrt{8}} \simeq -1{,}4854$

36 **Sea α un ángulo de 2º cuadrante tal que sen $\alpha = \frac{1}{2}$.**

Calcula:

a) sen $(180° - \alpha)$ b) cos $(180° - \alpha)$ c) tg $(180° - \alpha)$

a) $\text{sen}\,(180° - \alpha) = \dfrac{1}{2}$ **b)** $\cos(180° - \alpha) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **c)** $\text{tg}\,(180° - \alpha) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

37 **Sea α un ángulo del tercer cuadrante tal que cos $\alpha = -\frac{1}{3}$. Calcula:**

a) sen $(\alpha + 180°)$; b) cos $(\alpha + 180°)$; c) tg $(\alpha + 180°)$

a) $\text{sen}\,(\alpha + 180°) = \dfrac{\sqrt{8}}{3} \simeq 0{,}9428$

b) $\cos(\alpha + 180°) = \dfrac{1}{3} \simeq 0{,}3333$

c) $\cos(\alpha + 180°) = \sqrt{8} \simeq 2{,}8284$

38 **Sea α un ángulo del segundo cuadrante tal que sen $\alpha = 0{,}3$. Calcula:**

a) sen 2α b) cos 2α c) tg 2α

a) $\text{sen}\,2\alpha \simeq -0{,}57$ **b)** $\cos 2\alpha = 0{,}82$ **c)** $\text{tg}\,2\alpha = -0{,}70$

39 **Se sabe que tg $(45° + \alpha) = 2$. Calcula el valor del ángulo α.**

$\alpha \simeq 18°\ 26'\ 6''$

40 **Demuestra las identidades:**

a) $\cos a\ \text{sen}\,(b - c) + \cos b\ \text{sen}\,(c - a) + \cos c\ \text{sen}\,(a - b) = 0$

b) $\text{sen}\,4x - 4\ \text{sen}\,x \cos x + 8\ \text{sen}^3 x \cos x = 0$

c) $\dfrac{\text{ctg}\,x + \text{tg}\,x}{\text{ctg}\,x - \text{tg}\,x} = \sec 2x$

d) $\mathbf{ctg^2\, x - \cos^2 x = ctg^2\, x \cos^2 x}$

a) $\cos a\,(\text{sen}\, b \cos c - \cos b \,\text{sen}\, c) + \cos b\,(\text{sen}\, c \cos a - \cos c \,\text{sen}\, a + \cos c\,(\text{sen}\, a \cos b - \cos a \,\text{sen}\, b) = \cos a \,\text{sen}\, b \cos c - \cos a \cos b \,\text{sen}\, c + \cos a \cos b \,\text{sen}\, c - \text{sen}\, a \cos b \cos c + \text{sen}\, a \cos b \cos c - \cos a \,\text{sen}\, b \cos c = 0$

b) $\text{sen}\, 4x = \text{sen}\, 2(2x) = 2\,\text{sen}\, 2x \cos 2x = 2 \cdot 2\,\text{sen}\, x \cos x\,(\cos^2 x - \text{sen}^2 x) = 4\,\text{sen}\, x \cos^3 x - 4\,\text{sen}^3 x \cos x = 4\,\text{sen}\, x \cos^3 x - 4(1 - \cos^2 x)\,\text{sen}\, x \cos x = 4\,\text{sen}\, x \cos^3 x - 4\,\text{sen}\, x \cos x + 4\,\text{sen}\, x \cos^3 x = 8\,\text{sen}\, x \cos^3 x - 4\,\text{sen}\, x \cos x$

c) $$\frac{\text{ctg}\, x + \text{tg}\, x}{\text{ctg}\, x - \text{tg}\, x} = \frac{\dfrac{\cos x}{\text{sen}\, x} + \dfrac{\text{sen}\, x}{\cos x}}{\dfrac{\cos x}{\text{sen}\, x} - \dfrac{\text{sen}\, x}{\cos x}} = \frac{\dfrac{\cos^2 x + \text{sen}^2 x}{\text{sen}\, x \cos x}}{\dfrac{\cos^2 x - \text{sen}^2 x}{\text{sen}\, x \cos x}} = \frac{1}{\cos 2x} = \sec 2x$$

d) $$\text{ctg}^2\, x - \cos^2 x = \frac{\cos^2 x}{\text{sen}^2 x} - \cos^2 x = \frac{\cos^2 x - \text{sen}^2 x \cos^2 x}{\text{sen}^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x\,(1 - \text{sen}^2 x)}{\text{sen}^2 x} = \frac{\cos^2 x \cos^2 x}{\text{sen}^2 x} = \frac{\cos^2 x}{\text{sen}^2 x} \cdot \cos^2 x = \text{ctg}^2\, x \cdot \cos^2 x$$

41 **Calcula los ángulos que estén comprendidos entre 1 440° y 1 620° y que su cotangente sea $\frac{1}{2}$.**

$\alpha \simeq 1503°\ 26'\ 6''$

42 **Deducir las fórmulas de ctg $(\alpha + \beta)$ y ctg $(\alpha - \beta)$ en función de α y β.**

$$\text{ctg}\,(\alpha + \beta) = \frac{\text{ctg}\,\alpha \cdot \text{ctg}\,\beta - 1}{\text{ctg}\,\alpha + \text{ctg}\,\beta}$$

$$\text{ctg}\,(\alpha - \beta) = \frac{\text{ctg}\,\alpha \cdot \text{ctg}\,\beta + 1}{\text{ctg}\,\alpha - \text{ctg}\,\beta}$$

43 **Utiliza la técnica aplicada en el ejercicio resuelto número 3 y calcula la expresión del cos 3α en función del cos α.**

$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha + 3 \cos \alpha$

44 **Resuelve las siguientes ecuaciones:**

a) $\mathbf{2\,\text{sen}\, x \cos x = 1}$

b) $\mathbf{\text{sen}\, 2x = \text{tg}\, x}$

c) $\mathbf{2\,\text{sen}^2 x - 4 \cos^2 x + \text{sen}\, 2x = 0}$

d) $\mathbf{\text{tg}\, 2x = 3\,\text{tg}\, x}$

e) $\mathbf{\text{sen}\, x + \cos x = \sec x}$

f) $\mathbf{\text{sen}\, x + \cos x = \sqrt{2}}$

a) $x = 45° + k\pi$

b) $x = 0 + k\pi$; $x = 45° + 2k\pi$; $x = 135° + 2k\pi$

c) $x = 45° + k\pi$

d) $x = 0 + k\pi$; $x = 150° + k\pi$

e) $x = 0 + k\pi$; $x = 45° + k\pi$

f) $x = 45° + 2k\pi$

45 **Resuelve las siguientes ecuaciones:**

a) $\text{ctg}^2 x - \text{cosec } x = 1$

b) $\cos x + \sqrt{3}\,\text{sen}\,\frac{x}{2} = 1$;

c) $2\,\text{sen}^2\,\frac{x}{2} + \cos 2x = 0$

d) $\text{sen } x \cos 2x = \text{sen } 3x$

e) $\cos x + \cos 3x = \text{sen } 3x + \text{sen } 5x$

f) $\text{sen } 2x \cos x = 6\,\text{sen}^3 x$

a) $x_1 = 30° + k360°$; $x_2 = 150° + k360°$; $x_3 = 270° + k360°$

b) $x = k120°$

c) $x_1 = 90° + k180°$; $x_2 = 60° + k360°$; $x_3 = 300° + k360°$

d) $x_1 = 90° + k180°$; $x_2 = k90°$

e) $x_1 = 15° + k180°$; $x_2 = 45° + k90°$; $x_3 = 90° + k180°$

f) $x_1 = k180°$; $x_2 = 30° + k360°$; $x_3 = 150° + k360°$;
$x_4 = 210° + k360°$; $x_5 = 330° + k360°$

46 **Resuelve los sistemas:**

a)
$$\left.\begin{array}{r} x + y = 120 \\ \text{sen } x - \text{sen } y = \dfrac{1}{2} \end{array}\right\}$$

b)
$$\left.\begin{array}{r} \text{sen } x + \text{sen } y = 1 \\ \cos x + \cos y = \sqrt{3} \end{array}\right\}$$

a) $x = 90°$; $y = 30°$

b) $x = y = 30°$

47 **Demuestra que para todo ángulo *x* del primer cuadrante se verifica:**

$1 \leq \text{sen } x + \cos x \leq \sqrt{2}$ ***Sugerencia*: Eleva al cuadrado la desigualdad.**

$1 \leq \text{sen } x + \cos x \leq \sqrt{2} \iff 1 \leq 1 + 2 \text{ sen } x \cos x \leq 2 \iff 0 \leq \text{sen } 2x \leq 1$

Cierto para cualquier ángulo x del primer cuadrante.

48 **Demuestra que:**

a) $\text{tg } (45° + \alpha) - \text{tg } (45° - \alpha) = 2 \text{ tg } 2\alpha$

b) $\text{sen } A = \text{sen } B \cos (A - B) + \cos B \text{ sen } (A - B)$

c) $\text{tg } A = \text{ctg } A - 2 \text{ ctg } 2A$

d) $\dfrac{\text{sen}^2\,\alpha}{\cos \alpha} + \dfrac{2 \text{ sen } \alpha}{\text{tg } 2\alpha} = \cos \alpha$

a)

$$\text{tg}\,(45° + \alpha) - \text{tg}\,(45° - \alpha) = \frac{\text{tg}\,45° + \text{tg}\,\alpha}{1 - \text{tg}\,45°\,\text{tg}\,\alpha} - \frac{\text{tg}\,45° - \text{tg}\,\alpha}{1 + \text{tg}\,45°\,\text{tg}\,\alpha} =$$

$$= \frac{1 + \text{tg}\,\alpha}{1 - \text{tg}\,\alpha} - \frac{1 - \text{tg}\,\alpha}{1 + \text{tg}\,\alpha} = \frac{(1 + \text{tg}\,\alpha)^2 - (1 - \text{tg}\,\alpha)^2}{(1 - \text{tg}\,\alpha)\,(1 + \text{tg}\,\alpha)} = \frac{4\,\text{tg}\,\alpha}{1 - \text{tg}^2\,\alpha}$$

$$2\,\text{tg}\,2\alpha = 2\,\frac{2\,\text{tg}\,\alpha}{1 - \text{tg}^2\,\alpha} = \frac{4\,\text{tg}\,\alpha}{1 - \text{tg}^2\,\alpha}$$

b) sen B cos (A – B) + cos B (sen A – B) = sen B (cos A cos B + sen A sen B) + cos B (sen A cos B – cos A sen B) = sen A sen^2 B + sen A $\cos^2$ B = = sen A (sen^2 B + $\cos^2$ B) = sen A

c) $\text{ctg}\,A - 2\,\text{ctg}\,2A = \frac{1}{\text{tg}\,A} - 2\,\frac{1}{\text{tg}\,2\,A} = \frac{1}{\text{tg}\,A} - 2\,\frac{1 - \text{tg}^2\,A}{2\,\text{tg}\,A} =$

$$= \frac{1}{\text{tg}\,A} - \frac{1 - \text{tg}^2\,A}{\text{tg}\,A} = \frac{\text{tg}^2\,A}{\text{tg}\,A} = \text{tg}\,A$$

d) $\frac{\text{sen}^2\,\alpha}{\cos\alpha} + \frac{2\,\text{sen}\,\alpha}{\text{tg}\,2\alpha} = \text{sen}\,\alpha\,\text{tg}\,\alpha + 2\,\text{sen}\,\alpha\,\frac{1 - \text{tg}^2\,\alpha}{2\,\text{tg}\,\alpha} =$

$$= \frac{\text{sen}\,\alpha\,\text{tg}^2\,\alpha + \text{sen}\,\alpha\,(1 - \text{tg}^2\,\alpha)}{\text{tg}\,\alpha} = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\text{tg}\,\alpha} = \cos\alpha$$

49 **Calcula "rápidamente":**

a) cos 73° cos 17° – sen 73° sen 17°;

b) $\dfrac{\text{tg}\,47° + \text{tg}\,13°}{1 + \text{tg}\,47°\,\text{tg}\,13°}$

c) $2\cos^2 45° - 1$

d) 2 sen 135° cos 135°

a) cos 90° = 0; **b)** tg 60° = $\sqrt{3}$; **c)** cos 90° = 0; **d)** sen 270° = –1

50 **Halla tg α sabiendo que tg 2α = $\sqrt{3}$.**

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

51 **Desarrollar: a) sen (*a* + *b* + *c*); b) cos (*a* + *b* + *c*)**

a) sen (*a* + *b* + *c*) = sen *a* cos *b* cos *c* + cos *a* sen *b* cos *c* + + cos *a* cos *b* sen *c* – sen *a* sen *b* sen *c*

b) cos (*a* + *b* + *c*) = cos *a* cos *b* sen *c* – sen *a* sen *b* sen *c* – – sen *a* cos *b* sen *c* – cos *a* sen *b* sen *c*

52 **Simplifica las expresiones siguientes:**

a) $\dfrac{1-\cos 2A}{1+\cos 2A}$

b) $\dfrac{\operatorname{sen} 2A}{2 \operatorname{sen} A}$

c) $\dfrac{1+\operatorname{ctg} A \operatorname{ctg} B}{1-\operatorname{ctg} A \operatorname{ctg} B}$

d) $\operatorname{sen}(60° + x) + \operatorname{sen}(60° - x)$

e) $\operatorname{sen}(30° + x) + \operatorname{sen}(30° - x)$

f) $\operatorname{sen}(90° + x) \cos(180° - x) + \cos(90° + x) \operatorname{sen}(180° - x)$

a) $\dfrac{1-\cos 2A}{1+\cos 2A} = \operatorname{tg}^2 \alpha$

b) $\dfrac{\operatorname{sen} 2A}{2 \operatorname{sen} A} = \cos A$

c) $\dfrac{1+\operatorname{ctg} A \operatorname{ctg} B}{1-\operatorname{ctg} A \operatorname{ctg} B} = -\dfrac{\cos(A-B)}{\cos(A+B)}$

d) $\operatorname{sen}(60° + x) + \operatorname{sen}(60° - x) = \sqrt{3} \cos$

e) $\operatorname{sen}(30° + x) + \operatorname{sen}(30° - x) = \cos x$

f) $\operatorname{sen}(90° + x) \cos(180° - x) + \cos(90° + x) \operatorname{sen}(180° - x) = -1$

53 **Halla los ángulos de un triángulo isósceles conociendo la base 12,4 cm y un lado desigual 20,6 cm.**

Los ángulos iguales miden 72° 29' 3'' y el otro 35° 1' 55''.

Del 54 al 58. Resuelve el triángulo ABC en cada uno de los siguientes casos.

54 ***a* = 26 m, *b* = 40 m y *c* = 42 m.**

A ≃ 36° 52' 11''; B ≃ 67° 22' 48''; C ≃ 75° 44' 59''

55 ***b* = 13 m, *c* = 15 m y A = 14° 15'.**

B ≃ 53° 7' 48''; C ≃ 112° 37' 2''; a = 4 m

56 ***a* = 13 m, *b* = 14 m y A = 53° 8'.**

c ≃ 15 m; B ≃ 59° 29' 37''; C ≃ 67° 22' 22''

57 ***a* = 41 m, A = 8° 22' y B = 67° 23'.**

C ≃ 104° 15'; b ≃ 260,6 m; c ≃ 273,6 m

58 ***c* = 6 m, A = 45° y B = 75°.**

a ≃ 4,9 m; b ≃ 6,7 m; C = 60°

59 **Resuelve el triángulo ABC del que se conoce $a = 10$ m, $h_a = 6$ m y $C = 15°$. (h_a, es la altura sobre el lado a).**

$A \simeq 10° 49'$; $B \simeq 154° 10'$; $b \simeq 23{,}2$ m; $c \simeq 13{,}8$ m

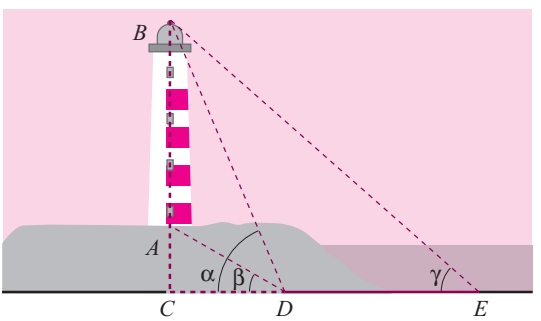
60 **Hallar la longitud de la diagonal de un pentágono regular de 3 m de lado.**

$d \simeq 4{,}85$ m

61 **Calcula la altura del edificio de la figura con los datos que en él aparecen.**

$h \simeq 60{,}62$ m

62 **Calcula la altura de la torre de la figura donde DE = 50 m, $\alpha = 68°$, $\beta = 30°$ y $\gamma = 42°$.**



54,26 m

63 **El ángulo bajo el cuál se ve, desde un barco, la torre de un faro es de 30°. Cuando el barco ha recorrido 200 m. en la dirección del faro dicho ángulo es de 45°. Calcula la altura de la torre sobre el nivel del mar y la distancia a la que se encuentran el barco del faro en el momento de la segunda medición.**

Altura de la torre: 273,2 m. Distancia: 273,2 m.

64 **Calcula la distancia entre los puntos A y B, entre los que hay un obstáculo, sabiendo que las distancias a un punto fijo C son AC = 175 m y BC = 90 m y que el ángulo ACB es de 37°.**

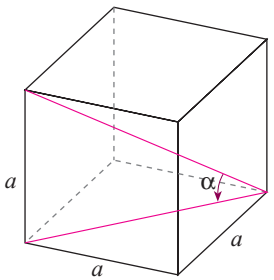
116,48 m

65 **Desde un faro de 25 m de altura se observa un punto sobre la superficie del mar con un ángulo de depresión de 28° 30'. Hallar la distancia de dicho punto al pie del faro.**

Ángulo de depresión es el ángulo que forma la visual con el plano horizontal.

Distancia: 46,04 m.

66 **Halla el ángulo α de la figura determinado por la diagonal de una cara de un cubo y la diagonal del mismo.**

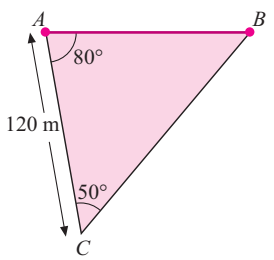


35° 15' 51''

67 **Para medir la distancia que hay entre dos puntos A y B entre los que se interpone un obstáculo, por lo que no se puede medir directamente, se procede de la siguiente manera:**

Se elige otro punto C accesible desde A por lo que se puede medir la distancia AC = 120 m y con un teodolito se miden los ángulos BAC = 80° y ACB = 50°.

Haz un esquema y calcula la distancia AB.



AB = 120 m

68 **Queremos saber la distancia entre dos puntos A y B, ambos inaccesibles. Elegimos dos puntos C y D y efectuamos las mediciones siguientes: CD = 85 m y los ángulos ACB = 12°, BCD = 23°, CDA = 20° y ADB = 17°.**

Haz un esquema y calcula la distancia AB.

AB $\simeq$ 25,45 m

69 **Calcula los ángulos de un rombo sabiendo que su lado mide 20 cm y que su diagonal menor es 26 cm.**

A = 81° 5'; B = 98° 55'

70 **Desde un punto de una superficie horizontal se ve una chimenea bajo un ángulo de 25°.**

Calcula bajo qué ángulo se verá al doble de distancia de la chimenea.

$\alpha \simeq$ 13° 7' 27''

71 **En una circunferencia de 1 m de radio trazamos una cuerda que une los extremos de un arco de 110°. Calcula la distancia del centro a la cuerda.**

Distancia; 0,57 m.

72 **Calcula el ángulo que forman las dos rectas tangentes a una circunferencia de 25 cm de radio trazadas desde un punto que dista 40 cm del centro.**

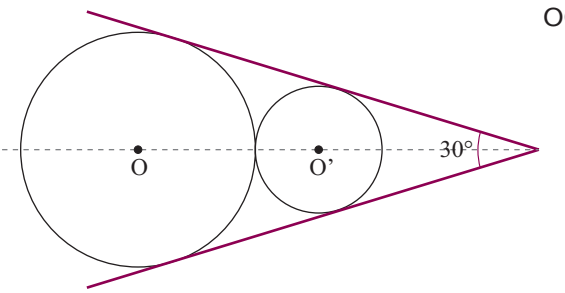
77° 21' 51''

73 **Calcula la distancia de un avión A a los puntos P y Q sabiendo que $\alpha = 70°$, $\beta = 40°$ y que la distancia entre P y Q es 7 Km.**

d(A, Q) $\simeq$ 9 km. d (A, P) $\simeq$ 13,16 km.

74 **Las circunferencias de la figura tiene radios 8 y 5 cm respectivamente. Halla la distancia entre los centro O y O'.**

OO' $\simeq$ 11,59 m.



75 **Demuestra que si A, B y C son los ángulos de un triángulo se verifica:**

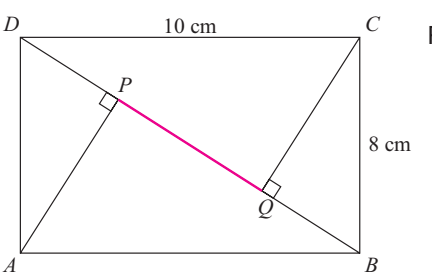
$$\text{sen}\frac{A}{2} - \cos\frac{B+C}{2} = 0$$

Si A, B, C son los ángulos de un triángulo, se cumple que B + C = 180° – A.

Entonces:

$$\text{sen}\,\frac{A}{2} - \cos\frac{180° - A}{2} = \text{sen}\,\frac{A}{2} - \cos\left(90° - \frac{A}{2}\right) = \text{sen}\,\frac{A}{2} - \text{sen}\,\frac{A}{2} = 0$$

76 **Haya la longitud del segmento *PQ* de la figura siguiente:**



PQ $\simeq$ 2,81 cm

77 **Demuestra que si A, B y C son los ángulos de un triángulo se verifica:**

$$1 - \operatorname{sen}^2 \frac{A}{2} = \operatorname{sen}^2 \frac{B+C}{2}$$

$$\operatorname{sen}^2 \frac{B+C}{2} = \operatorname{sen}^2 \frac{180° - A}{2} = \operatorname{sen}^2 \left(90° - \frac{A}{2}\right) = \cos^2 \frac{A}{2} = 1 - \operatorname{sen}^2 \frac{A}{2}$$

78 **Resuelve el triángulo cuyos lados miden 16 cm, 24 cm y 32 cm. y determina el radio de su circunferencia circunscrita.**

28° 57' 18''; 46° 34' 3''; 104° 28' 39''; $r \simeq 33{,}05$ cm

79 **¿Qué se deduce de un triángulo ABC en el que se verifica:**

$$\operatorname{sen} A \cdot \cos A = \operatorname{sen} B \cdot \cos B?$$

Que es un triángulo rectángulo.

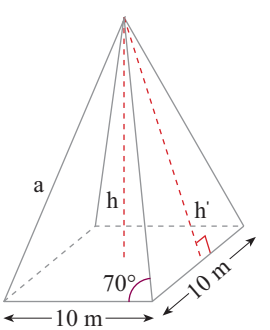
80 **En un triángulo *ABC* se sabe que *A* = 40°, *B* = 60° y el radio de la circunferencia circunscrita mide 6 cm. Resuelve el triángulo *ABC*.**

$a \simeq 7{,}71$ cm; $b \simeq 10{,}39$ cm; $c \simeq 11{,}82$ cm; C = 80°

81 **Las bases de un trapecio miden 20 m y 13 m, uno de sus lados mide 7 m y el ángulo que forman la prolongación de los lados, que no son base, es de 62°. Calcula el área del trapecio.**

Area: 95,72 m^2.

82 **En una pirámide regular de base cuadrada, el lado de la base mide 10 m. y un ángulo de una cara 70°. Calcula la arista, la altura de una cara 4*h'* y la altura de la pirámide *h*.**



$a \simeq 7{,}78$ m; $h \simeq 3{,}24$ m; $h' \simeq 5{,}96$ m

83 **De un paralelogramo conocemos uno de los lados que mide 25 cm y los ángulos que forma este lado con las diagonales son de 27° y 43°. Calcula los lados de paralelogramo.**

El otro lado mide: 18,03 cm.

84 **Calcula el lado de un octógno regular, sabiendo que el radio de su circunferencia circunscrita mide 8 m.**

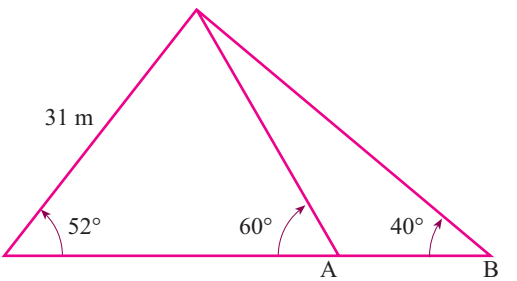
$l \simeq 6{,}12$ m

85 **Queremos lanzar un cable entre los picos de dos montañas. Calcula la longitud del cable con los datos siguientes:**

Longitud: 411,3 m.

86 **Halla la medida de AB en la figura siguiente:**

AB $\simeq$ 15 m

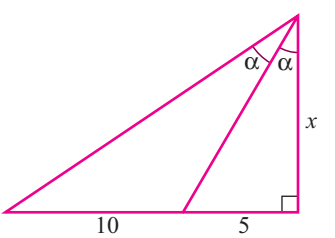


87 **El radio de la circunferencia circunscrita a un triángulo rectángulo es 8 m, y uno de sus ángulos agudos satisface la ecuación 2 sen B cos B = tg B. Halla el área.**

Area: 64 m^2.

88 **Halla *x*.**

$x \simeq 8{,}66$



Tema 7 LOS NÚMEROS COMPLEJOS

1 **Resuelve en C las ecuaciones:**

a) $x^2 + 4 = 0$ **b)** $x^2 + 25 = 0$ **c)** $x^2 - 2x + 5 = 0$

a) $x_1 = -2i,\ x_2 = 2i$ **b)** $x_1 = -5i,\ x_2 = 5i$ **c)** $x_1 = 1 - 2i,\ x_2 = 1 + 2i$

2 **Escribe:**

a) el opuesto de $7 + 11i$

b) el conjugado de $5 - i$

c) El opuesto del conjugado de $-1 + i$

d) el conjugado del opuesto de $3 - 4i$

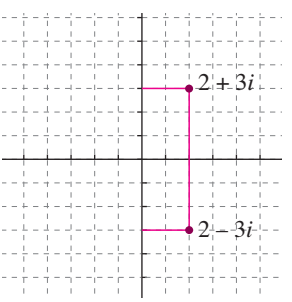
a) $-7 - 11i$ **b)** $5 + i$ **c)** $1 + i$ **d)** $-3 - 4i$

3 **Representa gráficamente los números complejos siguientes, así como sus conjugados:**

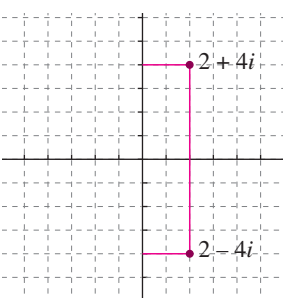
a) $2 + 3i$ **b)** $2 - 4i$ **c)** $2i$ **d)** 6

¿Cómo son, en términos de simetría, las representaciones gráficas de dos complejos conjugados?

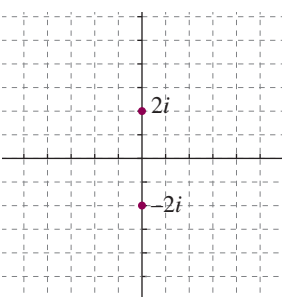
a)



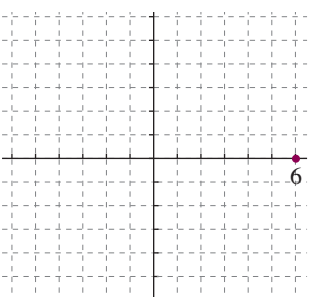
b)



c)



d)



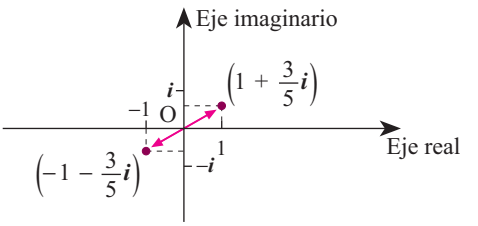
Son simétricas respecto del eje de abscisas.

4 **Representa gráficamente los números complejos siguientes, así como sus opuestos:**

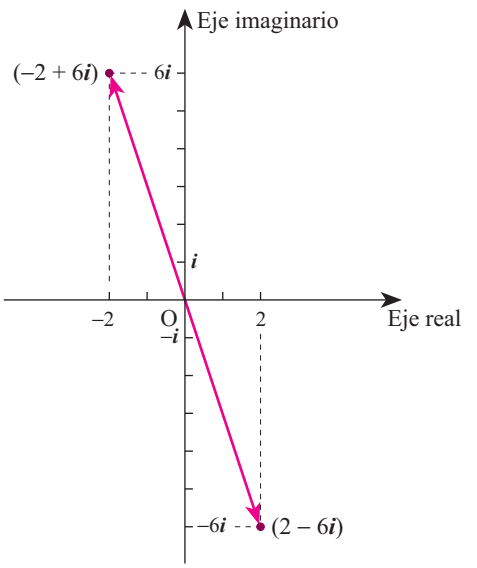
a) $-1 - \frac{3}{5}i$ **b)** $-2 + 6i$ **c)** 4 **d)** $\sqrt{2} + \sqrt{2}i$

¿Cómo son, en términos de simetría, las representaciones gráficas de dos complejos opuestos?

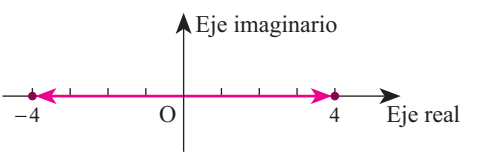
a)



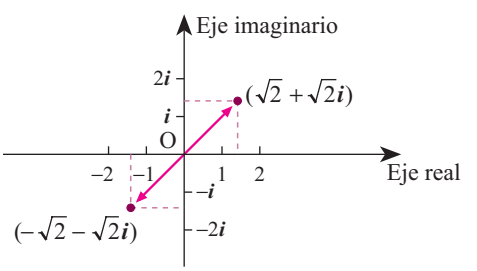
b)



c)

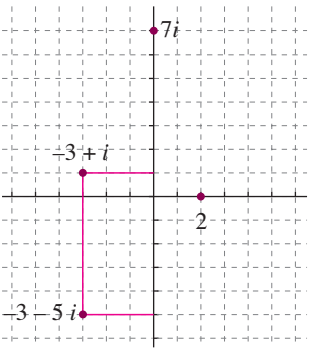


d)



5 **Representa gráficamente los números complejos siguientes:**

a) $7i$ **b)** 2 **c)** $-3 + i$ **d)** $-3 - 5i$



6 **Calcula:**

a) $\left(3 - \frac{2}{3}i\right) - \left(\frac{3}{5} - \frac{i}{2}\right) + 2$ **b)** $3(-2 - 4i) + 5\left(\frac{3}{2} - i\right)$

a) $\frac{22}{5} - \frac{1}{6}i$ **b)** $\frac{3}{2} - 17i$

7 **Siendo $z_1 = 2 - 3i$ y $z_2 = 4 + i$, calcula:**

a) $z_1 + z_2$ **b)** $z_1 - z_2$ **c)** $\bar{z}_1 + z_1$ **d)** $z_2 - \bar{z}_2$

a) $6 - 2i$ **b)** $-2 - 4i$ **c)** $2 + \frac{23}{3}i$ **d)** $-16 - 30i$

8 **Calcula los inversos de los complejos z_1 y z_2 del ejercicio anterior.**

Inverso de $z_1 = \frac{1}{z_1} = \frac{2}{13} + \frac{3}{13}i$

Inverso de $z_2 = \frac{1}{z_2} = \frac{4}{17} - \frac{1}{17}i$

9 **Siendo $z_1 = 1 + 2i$ y $z_2 = 3 - 5i$, calcula:**

a) $2z_1 \cdot z_2$ **b)** $z_1 \cdot z_1$ **c)** $3z_1 - \frac{1}{3}z_2$ **d)** $z_2 \cdot z_2$

a) $26 + 2i$ **b)** $-3 + 4i$ **c)** $22 + \frac{23}{3}i$ **d)** $-16 - 30i$

10 **Siendo $z_1 = 3 + 2i$ y $z_2 = 5 - 2i$, calcula:**

a) $\frac{z_1}{z_2}$ **b)** $\frac{z_1}{z_1}$ **c)** $\frac{z_2}{z_1}$ **d)** $\frac{\bar{z}_1}{z_2}$

a) $\frac{11}{29} + \frac{16}{29}i$ **b)** 1 **c)** $\frac{11}{13} - \frac{16}{13}i$ **d)** $\frac{19}{29} - \frac{4}{29}i$

11 **Escribe en forma polar y trigonométrica los números:**

a) $1 + i$ **b)** $2 - 3i$ **c)** $-\sqrt{2} - \sqrt{2}i$ **d)** $3 - \sqrt{3}i$

a) $1 + i = \sqrt{2}_{45°} = \sqrt{2}\ (\cos 45° + i \operatorname{sen} 45°)$

b) $2 - 3i = \sqrt{13}_{303°\,41'\,24''} = \sqrt{13}\ (\cos 303°\,41'\,24'' + i \operatorname{sen} 303°\,41'\,24'')$

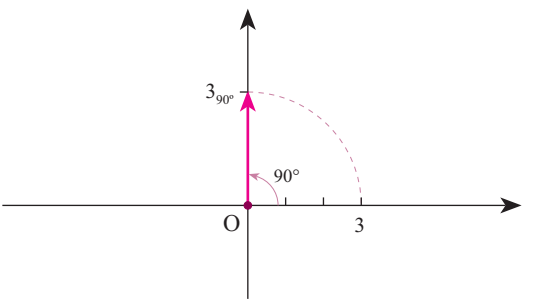
c) $-\sqrt{2} - \sqrt{2}i = 2_{225°} = 2\ (\cos 225° + i \operatorname{sen} 225°)$

d) $3 - \sqrt{3}i = \sqrt{12}_{330°} = \sqrt{12}\ (\cos 30° + i \operatorname{sen} 30°)$

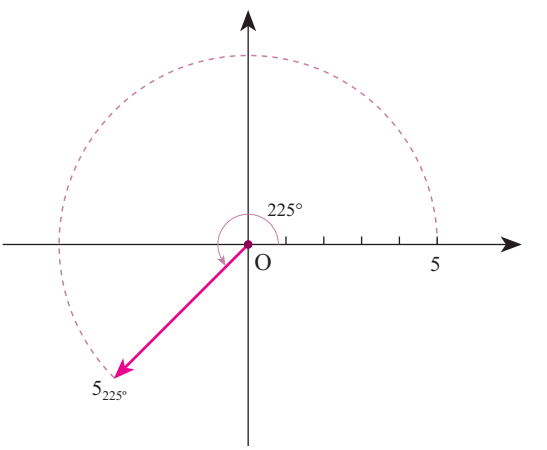
12 **Pasa a forma binómica y representa gráficamente en el plano complejo los números:**

a) $3_{90°}$ **b)** $5_{225°}$ **c)** $2_{180°}$ **d)** $6_{300°}$

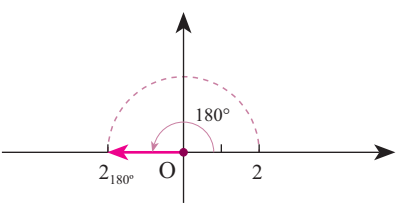
a) $3i$



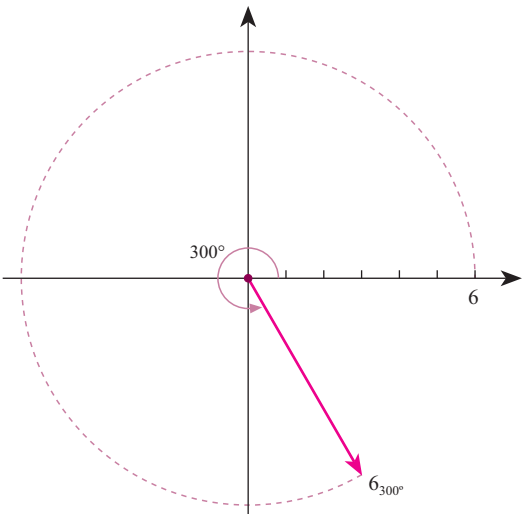
b) $-\dfrac{5\sqrt{2}}{2} - \dfrac{5\sqrt{2}}{2}i$



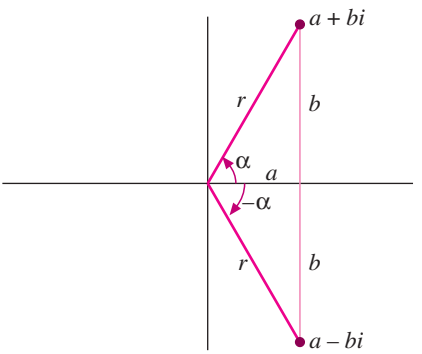
c) -2



d) $3 - 3\sqrt{3}\,i$



13 **Justifica gráficamente que dos complejos conjugados tienen igual módulo y argumentos opuestos.**



14 **Sea $z_1 = -12$, $z_2 = 3_{20°}$ y $z_3 = 4_{70°}$. Calcula:**

a) $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3$ dando el resultado en forma polar.

b) $\dfrac{z_1}{z_2 \cdot z_3}$ dando el resultado en forma binómica.

a) $144_{270°}$

b) i

15 **Calcula $\dfrac{(2_{180°} + 2_{90°}) \cdot (3_{270°} + 3_{180°})}{1_{180°}}$ dando el resultado en forma binómica.**

-12

16 **Calcula las siguientes potencias y da el resultado en forma binómica y polar.**

a) $(\sqrt{3}_{30})^3$ **b)** $(1 - 2i)^6$

c) $(2 - 2\sqrt{3}\ i)^3$ **d)** $(2 + i)^8$

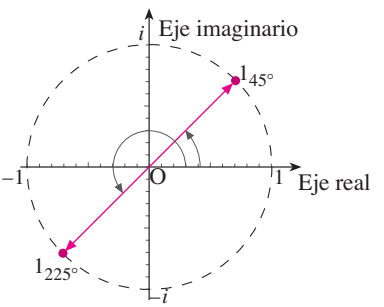
a) $3\sqrt{3}\ i = 3\ \sqrt{3}_{90°}$ **b)** $117 - 44i = 125_{339° 23'}$

c) $-4 = 4_{180°}$ **d)** $-1{,}89 - 1{,}20i = \sqrt{5}_{212° 31'}$

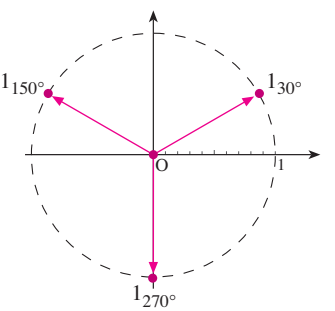
Del 17 al 19. Calcula y representa gráficamente los afijos solución de las raíces que se indican.

17 **a)** $\sqrt{i}$ **b)** $\sqrt[3]{i}$ **c)** $\sqrt[4]{i}$ **d)** $\sqrt[3]{-i}$

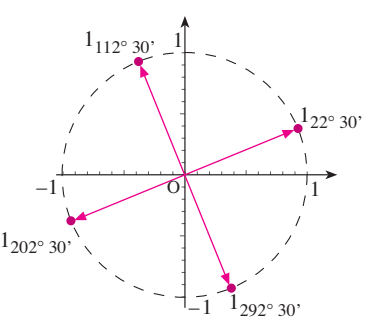
a) $\sqrt{i}$ $\nearrow 1_{45°}$ $\searrow 1_{225°}$



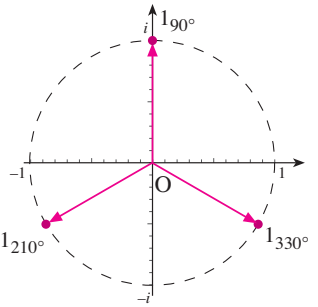
b) $\sqrt[3]{i}$ $\nearrow 1_{30°}$ $\rightarrow 1_{150°}$ $\searrow 1_{270°}$



c) $\sqrt[4]{i}$ $\nearrow 1_{22° 30'}$ $\nearrow 1_{112° 30'}$ $\searrow 1_{202° 30'}$ $\searrow 1_{292° 30'}$

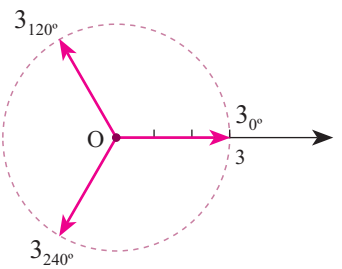


d) $\sqrt[4]{-16i}$ $\nearrow 1_{90°}$ $\rightarrow 1_{210°}$ $\searrow 1_{330°}$

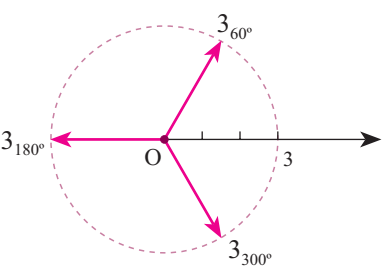


18 **a)** $\sqrt[3]{27}$ **b)** $\sqrt[3]{-27}$ **c)** $\sqrt[3]{2+2i}$ **d)** $\sqrt[4]{2-2\sqrt{3}i}$

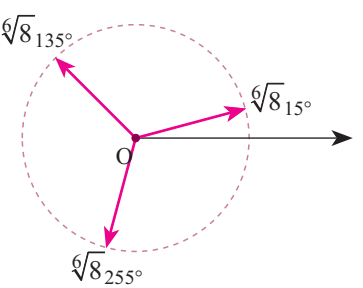
a) $3_{0°}$; $3_{120°}$; $3_{240°}$



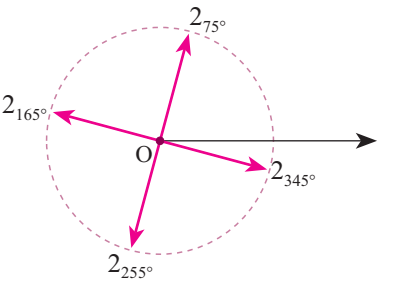
b) 3_{60}; $3_{180°}$; $3_{300°}$



c) $\sqrt[6]{8}_{15°}$; $\sqrt[6]{8}_{135°}$; $\sqrt[6]{8}_{255°}$

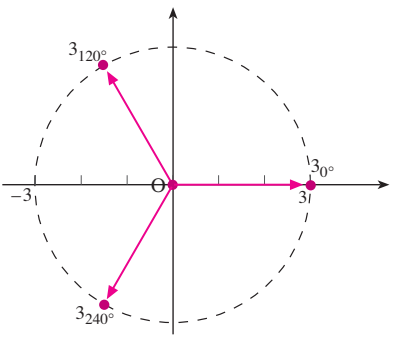


d) $2_{75°}$; $2_{165°}$; $2_{255°}$; $2_{345°}$

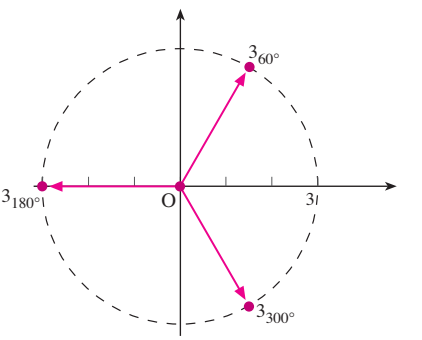


19 **a)** $\sqrt{-4+4\sqrt{3}i}$ **b)** $\sqrt[5]{32}$ **c)** $\sqrt{-64}$ **d)** $\sqrt[4]{-16i}$

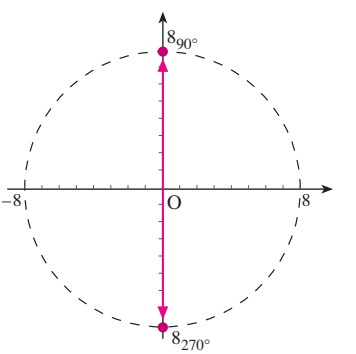
a) $\sqrt[3]{27}$ $\nearrow 3_{0°}$ $\rightarrow 3_{20°}$ $\searrow 3_{240°}$



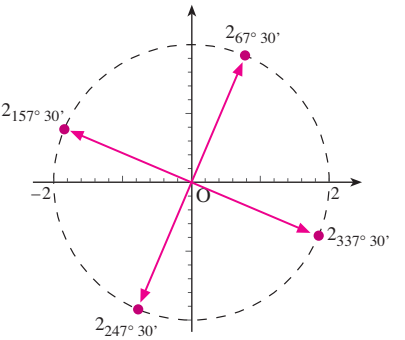
b) $\sqrt[3]{-27}$ $\nearrow 3_{60°}$ $\rightarrow 3_{180°}$ $\searrow 3_{300°}$



c) $\sqrt{-64}$ $\nearrow 8_{90°}$ $\searrow 8_{270°}$



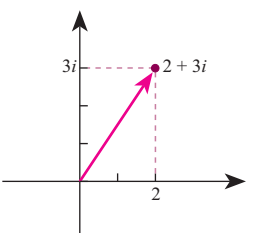
d) $\sqrt[4]{-16i}$ $\nearrow 2_{67° 30'}$ $\rightarrow 2_{157° 30'}$ $\searrow 2_{247° 30'}$ $\searrow 2_{337° 30'}$



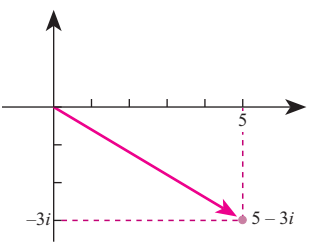
Para el 20 y el 21. Representa gráficamente los números complejos.

20 **a) 3 + 2*i*** **b) 5 − 3*i*** **c) −7 + *i*** **d) −5*i***

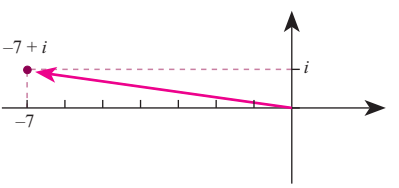
a)



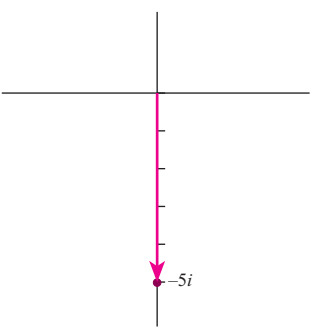
b)



c)

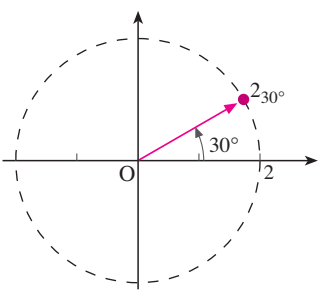


d)

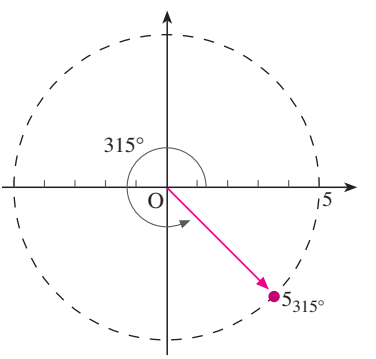


21 **a) $2_{30°}$** **b) $5_{315°}$** **c) $2_{180°}$** **d) $3_{270°}$**

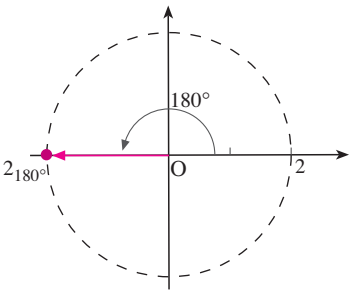
a)



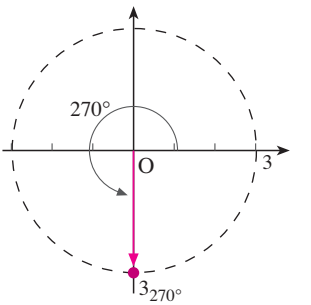
b)



c)



d)



22 **¿Existe un número real *m* tal que $1 + mi = m - 2i$?**

No

23 **a) ¿Cuál es el opuesto del conjugado de $3 - 9i$?**

b) ¿Cuál es el conjugado del opuesto de $-5 + 2i$?

c) ¿Cuál es el opuesto del opuesto de $4 + 7i$?

d) ¿Cuál es el conjugado del conjugado de $-5 - 3i$?

a) $-3 - 9i$ **b)** $5 + 2i$ **c)** $4 + 7i$ **d)** $-5 - 3i$

24 **Escribe en forma trigonométrica los complejos**

a) $\sqrt{3} + 2i$ **b)** i

c) -7 **d)** $-9i$

a) $\sqrt{7}\,(\cos 49° 6' 24'' + i \operatorname{sen} 49° 6' 24'')$ **b)** $1\,(\cos 90° + i \operatorname{sen} 90°)$

c) $7\,(\cos 180° + i \operatorname{sen} 180°)$ **d)** $9\,(\cos 270° + i \operatorname{sen} 270°)$

25 **Escribe la forma binómica de los complejos**

a) $1_{180°}$ **b)** $3_{150°}$ **c)** $2_{270°}$ **d)** $4_{240°}$

a) $1_{180°} = -1$ **b)** $3_{150°} = -\dfrac{3\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3}{2}i$

c) $2_{270°} = -2i$ **d)** $4_{240°} = -2 - 2\sqrt{3}i$

26 **a) ¿Cuál es el opuesto del conjugado de $3_{60°}$?**

b) ¿Cuál es el conjugado del opuesto de $5_{150°}$?

a) $3_{120°}$

b) $5_{30°}$

27 **Representa gráficamente el complejo *z* si:**

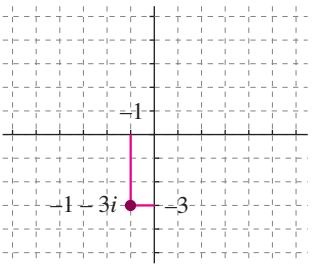
a) $z = (-4 + 2i) + (3 - 5i)$

b) $z = (2 - 5i)i$

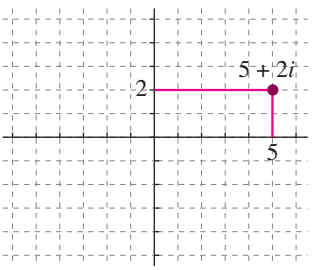
c) $z = 2(-2 + i)$

d) $z = -3(-1 + 2i)$

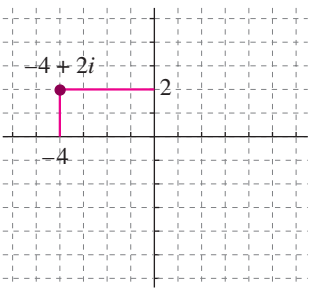
a)



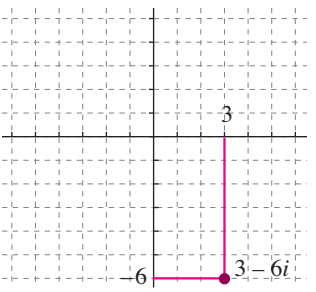
b)



c)



d)



28 **Calcula los números reales *x* e *y* si:**

a) $(4 + 2xi) + (3y - 2i) = -3 + 2i$ **b)** $(-y + 1{,}7i) + (2{,}3 - 4xi) = 3{,}1 - 5i$

a) $x = 2 \quad y = -\frac{7}{3}$ **b)** $x = 1{,}675 \quad y = -0{,}8$

29 **Si $z_1 = 3 - i$; $z_2 = \frac{i}{2}$ y $z_3 = -4i$, calcula:**

a) $z_1 - z_2$ **b)** $2z_1 - (z_2 + 2z_3)$ **c)** $3 + z_1 \cdot z_3$ **d)** $z_1 - z_2 - z_3$

a) $3 - \frac{3}{2}i$ **b)** $6 + \frac{11}{2}i$ **c)** $-1 - 12i$ **d)** $3 + \frac{5}{2}i$

30 **Si *z* es un número complejo, resuelve en C las ecuaciones:**

a) $1 - 3i + z = 2 - 8i$ **b)** $z + 3i = (\sqrt{2} + i)^2$

c) $\frac{z}{3 - i} = 4 - 2i$ **d)** $\frac{4 - 2i}{z} = i$

a) $z = 1 - 5i$ **b)** $z = 1 + (2\sqrt{2} - 3)i$

c) $z = 10 - 10i$ **d)** $z = -2 - 4i$

31 **Mismo ejercicio:**

a) $(-2 + i)z + 3 = 4 - 2i$ **b)** $2 + z - 3i = iz - 3$

c) $3z + 2 - i = iz + 4$ **d)** $z^2 + 8 = 0$

a) $z = -\frac{4}{5} + \frac{3}{5}i$ **b)** $z = -4 - i$

c) $z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

d) $z_1 = -2\sqrt{2}\,i$, $z_2 = 2\sqrt{2}\,i$

32 **Calcula y simplifica:**

a) $(\sqrt{3} + 2i)^2 - (\sqrt{3} - 2i)^2$

b) $2 + \dfrac{i}{2 + 3i + \dfrac{1}{2 + 3i}}$

a) $8\sqrt{3}\ i$

b) $\frac{356}{160} + \frac{28}{160}i = \frac{89}{40} + \frac{7}{40}i$

33 **Mismo ejercicio:**

a) $\dfrac{1 + \dfrac{1}{1 - i}}{1 - \dfrac{1}{1 + i}}$

b) $\dfrac{i - \dfrac{1}{i}}{\dfrac{2 + i}{3} - \dfrac{i}{4 - i}}$

a) $2 - i$

b) $\frac{15}{41} + \frac{111}{41}i$

34 **Calcula las siguientes potencias de *i*:**

a) i^{34} **b)** i^{235} **c)** i^{1482}

d) i^{61} **e)** i^{114} **f)** i^{143}

a) $i^{34} = -1$ **b)** $i^{235} = -i$ **c)** $i^{1482} = -1$

d) $i^{61} = i$ **e)** $i^{114} = -1$ **f)** $i^{143} = -i$

35 **a) Halla la suma de cuatro potencias enteras sucesivas de *i*.**

b) ¿Cuánto vale $i^0 + i^1 + i^2 + i^3 + \ldots + i^{12}$?

c) ¿Sabrías calcular $i^0 + i^1 + i^2 + i^3 + \ldots + i^{2009}$?

a) 0; **b)** 1; **c)** $1 + i$

36 **Calcula y simplifica:**

a) $\dfrac{i^{37} + i^9}{i^5 - i^{14}}$

b) $i^{-4} + i^{-2} + \dfrac{2 - i^{15}}{2 + i^5}$

c) $i^{13} + \dfrac{3 + 2i^3}{2 + 3i^2} - 1$

d) $i + \dfrac{i}{i + \dfrac{i}{i + i}}$

a) $1 + i$; **b)** 1; **c)** $-4 + 3i$; **d)** $\frac{4}{5} + \frac{7}{5}i$

37 **Calcula:** **a)** i^{-27} **b)** i^{-1990} **c)** $i^{45} \cdot i^{-3}$ **d)** $\dfrac{i^{27}}{i^{51}}$

¿Sigue siendo válida la regla de cálculo de las potencias de *i* cuando el exponente es un entero negativo?

a) i; **b)** -1; **c)** -1; **d)** 1

Si.

38 **Demuestra que si $z = a + bi$ entonces $\frac{z}{i} = b - ai$.**

$$\frac{z}{i} = \frac{a+bi}{i} \cdot \frac{-i}{-i} = \frac{-ai - bi^2}{-i^2} = \frac{-ai + b}{i} = b - ai$$

Del 39 al 42. Calcula las siguientes operaciones y da el resultado en forma binómica.

39 **Calcula:** $\frac{(2+i)(3-i)}{(3+2i)(1+i)} + \frac{2+i}{2(3-i)}$

$\frac{37}{52} - \frac{55}{52}i$

40 **Calcula:** $\frac{1}{i} + \frac{1+i}{i^3} - \frac{(1+i)(1-i)}{i^2-1} + \frac{2(1+i)}{i-1}$

$2i$

41 **Calcula:**

a) $\frac{(i+3)^2}{4+i}$ **b)** $\frac{2+i}{(1+i)^2}$ **c)** $\frac{i(3-2i)}{2+3i}$ **d)** $\frac{i^7 - i^{20}}{1_{270°}}$

a) $\frac{38}{17} + \frac{16}{17}i$ **b)** $\frac{1}{2} - i$ **c)** 1 **d)** $1 - i$

42 **Calcula:** $\frac{1+i}{1-i} + \frac{1-i}{(1-i)^2} + \frac{-2+2i}{(1-i)^2} + \frac{(3+i)^2 - (3-i)^2}{(3+i)^2 + (3-i)^2}$

$\frac{-2+5i}{4} = -\frac{1}{2} + \frac{5}{4}i$

Para el 43 y 44. Escribe en forma binómica los siguientes números complejos $[r, \varphi]$, donde r es el módulo y φ el argumento.

43 **a)** $[2\sqrt{2}, 135°]$ **b)** $[2, -30°]$

a) $-2 + 2i$ **b)** $\sqrt{3} - i$

44 **a)** $[2, -36°]$ **b)** $[4, 54°]$

a) $1{,}6 - 1{,}2i$ **b)** $2{,}4 + 3{,}2i$

45 **Halla las raíces cuadradas de los números complejos siguientes.**

a) $24 + 10i$ **b)** $84 - 13i$

a) $\sqrt{26}_{\,11°18'35''} = 5 + i$, $\sqrt{26}_{\,191°18'35''} = -5 - i$

b) $\sqrt{85}_{\,175°36'4''} \simeq -9{,}19 + 0{,}71i$; $\sqrt{85}_{\,355°36'4''} \simeq 9{,}19 - 0{,}71i$

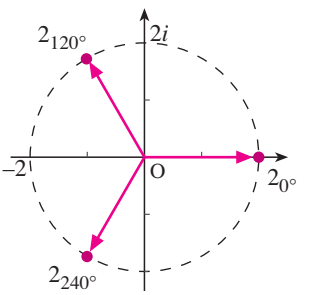
46 **a)** $7 - 24i$ **b)** $\dfrac{1-i}{1+i}$

a) $25_{143°\,7'\,48''}$ $25_{323°\,7'\,48''}$ **b)** $1_{135°}$ $1_{315°}$

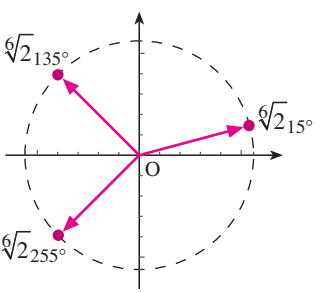
Para el 47 y 48. Halla las raíces cúbicas de los complejos siguientes y efectúa su representación gráfica.

47 **a)** 8 **b)** $1 + i$

a) $\sqrt[3]{8} \to \begin{cases} 2_{0°} \\ 2_{120°} \\ 2_{240°} \end{cases}$

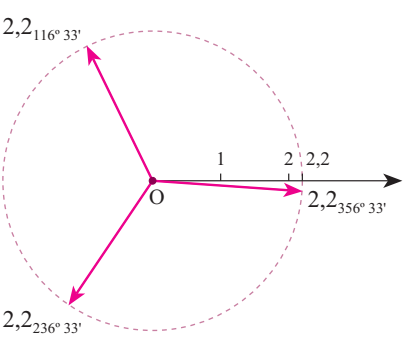


b) $\sqrt[3]{1+i} \to \begin{cases} \sqrt[6]{2}_{15°} \\ \sqrt[6]{2}_{135°} \\ \sqrt[6]{2}_{255°} \end{cases}$

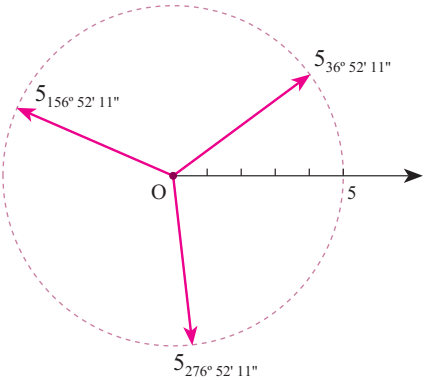


48 **a)** $11 - 2i$ **b)** $-44 + 117i$

a) $2{,}2_{116°\,33'}$; $2{,}2_{236°\,33'}$; $2{,}2_{356°\,33'}$



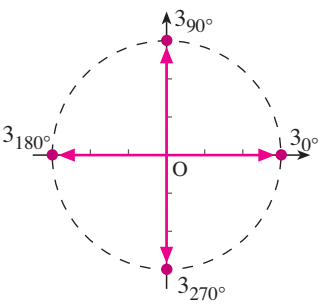
b) $5_{36^\circ\ 52'\ 11''}$; $5_{156^\circ\ 52'\ 11''}$; $5_{276^\circ\ 52'\ 11''}$



Para el 49 y 50. Halla las raíces cuartas de los siguientes complejos y efectúa su representación gráfica.

49 **a) 81** **b) 97 – (56 $\sqrt{3}$)*i***

a) $\sqrt[4]{81}$



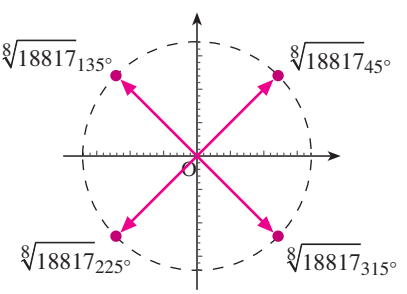
b) $\sqrt[4]{97-(56\sqrt{3})i}$

$\nearrow \sqrt[8]{18817}_{45^\circ}$

$\nearrow \sqrt[8]{18817}_{135^\circ}$

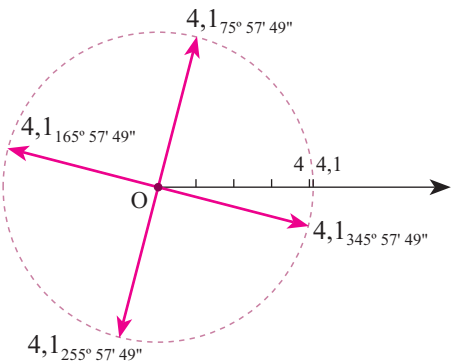
$\searrow \sqrt[8]{18817}_{225^\circ}$

$\searrow \sqrt[8]{18817}_{315^\circ}$

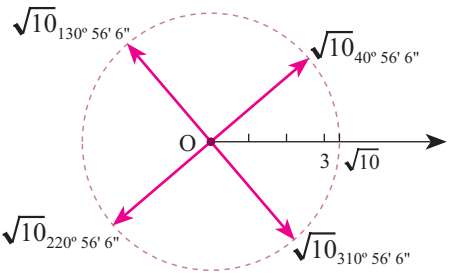


50 **a) 161 – 240*i*** **b) –96 + 28*i***

a) $4{,}1_{75^\circ\ 57'\ 49''}$; $4{,}1_{165^\circ\ 57'\ 49''}$; $4{,}1_{255^\circ\ 57'\ 49''}$; $4{,}1_{345^\circ\ 57'\ 49''}$



b) $\sqrt{10}_{40^\circ\ 56'\ 6''}$; $\sqrt{10}_{130^\circ\ 56'\ 6''}$; $\sqrt{10}_{220^\circ\ 56'\ 6''}$; $\sqrt{10}_{310^\circ\ 56'\ 6''}$



51 **Resuelve las siguientes ecuaciones.**

a) $z^6 - 1 = 0$ **b)** $z^2 + 3z - 10i = 0$

c) $2z^2 - 2iz - 5 = 0$ **d)** $z^2 - z + 1 - i = 0$

e) $z^2 + (2 - i)z - 2i = 0$ **f)** $z^2 + (2 - i)z - (3 + 3i) = 0$

a) $z_1 = 1_{0^\circ}$; $z_2 = 1_{60^\circ} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$; $z_3 = 1_{120^\circ} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$;

$z_4 = 1_{180^\circ} = -1$; $z_5 = 1_{240^\circ} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$; $z_6 = 1_{300^\circ} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

b) $z_1 = 1 + 2i$; $z_2 = -4 - 2i$

c) $z_1 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$; $z_2 = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$

d) $z_1 = 1 + i$; $z_2 = -i$

e) $z_1 = -2$; $z_2 = i$

f) $z_1 = -3$; $z_2 = 1 + i$

52 **a)** $(5 - 2i)z + 4 - 7i = 0$ **b)** $z^5 + 64\,z^2 = 0$

c) $z^4 - 8z^2 - 9 = 0$ **d)** $z^4 + 2iz^2 - 1 = 0$

e) $z^3 - 3z^2 + 4z - 12 = 0$ **f)** $z^3 - 3z^2 + 9z - 27 = 0$

a) $z = -\frac{34}{29} + \frac{27}{29}i$

b) $z_1 = 0$ es una raíz doble; $z_2 = 4_{60°}$; $z_3 = 4_{180°}$; $z_4 = 4_{300°}$

c) $z_1 = 3$; $z_2 = -3$; $z_3 = i$; $z_4 = -i$

d) $z_1 = 1_{135°}$; $z_2 = 1_{315°}$ las dos son raíces dobles

e) $z_1 = 3$; $z_2 = 2i$; $z_3 = -2i$

f) $z_1 = 3$; $z_2 = 3i$; $z_3 = -3i$

53 **Escribe una ecuación de 2º grado cuyas raíces sean:**

a) $2_{45°}$ y $2_{315°}$ **b)** $2 + 3i$ y $2 - 3i$

c) 4_{120} y 4_{240} **d)** $1_{135°}$ y $1_{225°}$

a) $z^2 - 2\sqrt{2}\,z + 4 = 0$ **b)** $z^2 - 4z + 13 = 0$

c) $z^2 + 4z + 16 = 0$ **d)** $z^2 + \sqrt{2}\,z + 1 = 0$

54 **Determina el valor del número real α para que $(-2 + 4i)(3 + \alpha i)$.**

a) sea un número real

b) sea un imaginario puro

c) su parte imaginaria sea 12.

a) $a = 6$ **b)** $a = -\frac{3}{2}$ **c)** $a = 0$

55 **Encuentra un complejo tal que sumándolo con $\frac{1+i}{2-2i}$ de otro complejo de módulo $\sqrt{2}$ y argumento 45°.**

$z + 1 + \frac{1}{2}i$

56 **El complejo $z = 2x + (x + 1)i$ varía cuando lo hace el valor de x. Hállense los correspondientes valores de x para que z sea:**

a) un número real

b) un imaginario puro

c) tenga su afijo en la bisectriz del primer cuadrante

a) $x = -1$

b) $x = 0$

c) $x = 1$

57 **La suma de dos números complejos es de 3 + 2*i* y la componente real del segundo es 2. Halla dichos números sabiendo que el cociente del primero por el segundo es un imaginario puro.**

$z_1 = 1 + (1 - \sqrt{3})\,i$ y $z_2 = 2 + (1 + \sqrt{3})i$ ó

$z_1 = 1 + (1 + \sqrt{3})i$ y $z_2 = 2 + (1 - \sqrt{3})i$

58 **Halla dos complejos tales que su suma es 3 y su cociente es *i*.**

$z_1 = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}i$ y $z_2 = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}i$

59 **Considérese el cuadrilátero *ABCD* formado por los afijos de los números complejos *z*, z^2, z^3 y z^4, siendo $z = 1 + i$.**

a) La longitud de los lados.

b) El área del cuadrilátero.

c) Los valores *n* para que z^n sea real y positivo.

a) $2 + 3\sqrt{2} + \sqrt{26}$; **b)** 5; **c)** $n = 8k$; $k = 1, 2, 3, \ldots$

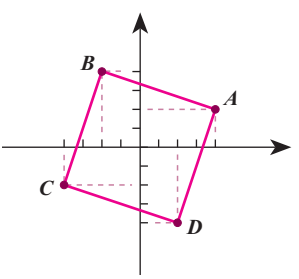
60 ***OABC* es un cuadrado que tiene un vértice en el origen de coordenadas y los otros tres en el semiplano superior, se sabe además que las coordenadas de *A* son (4, 2). Hallar las coordenadas de *B* y *C* aplicando la técnica de Manipulación de números complejos.**

A = (4, 2) = 4 + 2*i* = $\sqrt{20}_{\,26^\circ\,33'\,54''}$

B = $\sqrt{20}_{\,116^\circ\,33'\,54''} = -2 + 4\,i \Rightarrow$ B(–2, 4)

C = $\sqrt{20}_{\,206^\circ\,33'\,54''} = -4 - 2i \Rightarrow$ C(–4, –2)

D = $\sqrt{20}_{\,296^\circ\,33'\,54''} = 2 - 4i \Rightarrow$ D(2, –4)



61 **¿Cuál es el lugar geométrico de los afijos de todos los números complejos del mismo módulo?**

¿Y el de los números de igual argumento?

Una circunferencia centrada en el origen.

Una recta que pasa por el origen.

62 **Hallar dos números complejos sabiendo que:**

a) Su cociente es un imaginario puro.

b) La parte real del dividendo es igual a la del divisor multiplicada por – 4.

c) Su suma vale 9 + 12*i*.

$z = 12 + 6i$

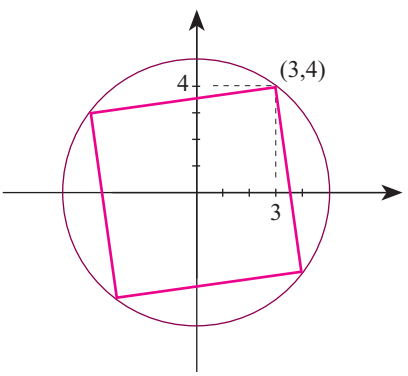
$z' = -3 + 6i$

63 **Halla dos complejos conjugados tales que su diferencia es 6*i* y su cociente un imaginario puro.**

$z_1 = 3 + 3i$ y $z_2 = 3 - 3i$ ó

$z_1 = -3 + 3i$ y $z_2 = -3 - 3i$

64 **Calcula los números complejos cuyos afijos son los vértices del cuadrado de la figura.**



(3, 4) (–4, 3) (–3, –4) (4, –3)

65 **Se sabe que *A*, *B* y *C* son los afijos de las raíces cúbicas de un número complejo, halla las coordenadas de *B* y *C* así como dicho número complejo sabiendo que $\overrightarrow{OA} = 2_{30^\circ}$.**

$B = \left(-\sqrt{3}, 1\right)$; $C = (0, -2)$; $z = 8i$

66 **Si *z* es un complejo cualquiera, ¿es cierto que $|z^2| = |z|^2$.**

No

67 **Se consideran los complejos $z = 12 - 12\sqrt{3}\,i$, $z' = -6\sqrt{3} + 6i$ y $u = \dfrac{z}{z'}$.**

a) Calcula el módulo y un argumento de *z* y *z'*.

b) Escribe *u* en forma binómica y trigonométrica.

c) Resuelve en C la ecuación $z^2 + 2\sqrt{3}\,z + 4 = 0$.

a) $|z| = 24$, $\alpha_z = 300°$; $|z'| = 12$, $\alpha_{z'} = 150°$

b) $u = -\sqrt{3} + i = 2_{150°}$

c) $z_1 = -\sqrt{3} + i$ y $z_2 = -\sqrt{3} - i$

68 **Un tesoro complejo**

Se cuenta que un experto buscador de tesoros encontró un viejo mapa en el que se detallaba la posición del tesoro escondido por un pirata en una remota isla del Pacífico.

En la isla sólo hay dos árboles (llamémosles *A*1 y *A*2) y los restos de una horca (*H*) y en ella el pirata esconde el tesoro procediendo de la siguiente forma:

Parte de la horca hasta llegar al árbol *A*1. Gira 90° en sentido antihorario, camina el mismo número de pasos y clava una estaca.

Regresa a la horca y camina desde ella hasta *A*2. Gira 90° en sentido horario, camina de nuevo el mismo número de pasos y clava una segunda estaca.

En el punto medio de ambas estacas esconde el tesoro.

El aventurero explorador viaja a la isla y observa los árboles pero, lamentablemente para él, el tiempo ha borrado cualquier resto de la horca. Totalmente desmoralizado regresa sin encontrar el tesoro.

Lo que el buscatesoros desconocía es que si hubiera estado familiarizado con las técnicas de manipulación de los números complejos, le hubiera resultado muy sencillo encontrar el tesoro.

¿Sabrías explicar por qué?

Si se elige un sistema de referencia en el que las coordenadas de A_1 y A_2 son $(a, 0)$ y $(-a, 0)$ respectivamente, el tesoro está en el punto de coordenadas $(0, a)$.

1 **Determina las componentes de los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BD}$ siendo *A*, *B*, *C* y *D* los puntos de coordenadas (2, –3), (–3, 5), (–2, 2) y (4, 1).**

$\overrightarrow{AB} = (-5, 8)$; $\overrightarrow{CD} = (6, -1)$; $\overrightarrow{BA} = (5, -8)$; $\overrightarrow{BD} = (7, -4)$

2 **Si los componentes del vector $\overrightarrow{AB}$ son (4, 1) y *A*(–2, 7), determina las coordenadas del punto *B*.**

B = (2, 8)

3 **Dados los puntos *A*(1, 1), *B*(–3, 2) y *C*(4, 2) comprueba que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$.**

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = (-4, 1) + (7, 0) + (-3, -1) = (0, 0) = \vec{0}$

4 **Encuentra las parejas de vectores colineales:**

a) (3, 4) y (9, 16) **b) (3, 0) y (–4, 0)**

c) (1, –1) y (3, 3) **d) (–1, 2) y (3, –6).**

Son coordinales b) y d).

5 **Determina en cada caso las coordenadas pedidas:**

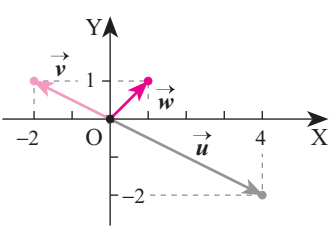
a) *A*(3, –1) y $\overrightarrow{AB}$(5, 4), halla *B*.

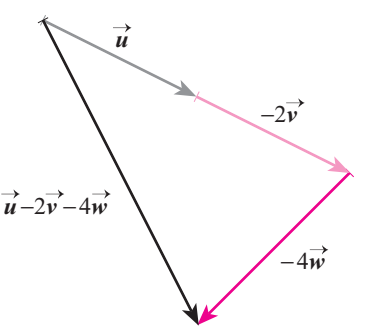
b) *B*(1, 4) y $\overrightarrow{AB}$(–1, –4), halla *A*.

c) *B*(4, –6) y $\overrightarrow{BA}$(1, 1), halla *A*.

a) *B* = (8, 3); **b)** *A* = (2, 8); **c)** *A* = (5, –5)

6 **Sean los vectores libres $\vec{u}$(4, –2); $\vec{v}$(–2, 1) y $\vec{w}$ (1, 1). Haz la representación gráfica que estimes adecuada y representa el vector $\vec{a} = \vec{u} - 2\vec{v} - 4\vec{w}$.**





7 **Sean los puntos $A(3, 2)$, $B\left(-2, \frac{7}{2}\right)$, $C\left(4, -\frac{5}{3}\right)$ calcula en cada caso las coordenadas del punto D para que:**

a) ***ABCD*** **sea un paralelogramo.**

b) ***ABDC*** **sea un paralelogramo.**

c) ***ACBD*** **sea un paralelogramo.**

a) $D = \left(9, -\frac{19}{6}\right)$; **b)** $D = \left(-1, -\frac{1}{6}\right)$; **c)** $D = \left(-3, \frac{43}{6}\right)$

8 **Halla el extremo y el origen de tres vectores equipolentes al vector $\vec{u}(-2, 5)$.**

A = (1, 1) A' = (0, 3) A'' = (–1, –3)

B = (–1, 6) B' = (–2, 8) B'' = (–3, 2)

9 **a) Determina el ángulo formado por los vectores $\vec{u}(5, 1)$ y $\vec{v}(2, 4)$.**

b) Halla el módulo de la proyección de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$.

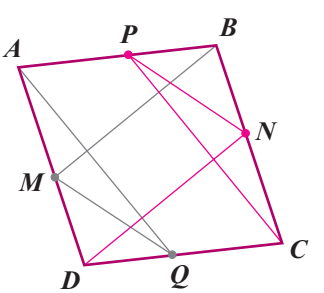
a) 52° 7' 30''; **b)** 2,75

10 ***ABCD*** **es un paralelogramo.** ***P*** **es un punto cualquiera del segmento** ***AB*** **y** ***N*** **un punto del segmento** ***BC*.**

a) Sitúa los puntos *Q* y *M* tales que $\overrightarrow{CQ} = \overrightarrow{PA}$ y

b) Demuestra que; $\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{MQ}$; $\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{PC}$; $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{ND}$.

a)



b) Si $\overrightarrow{CQ} = \overrightarrow{PA} \Rightarrow \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{DQ}$

Si $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{NC} \Rightarrow \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{BN}$

$\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{DQ} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MQ}$

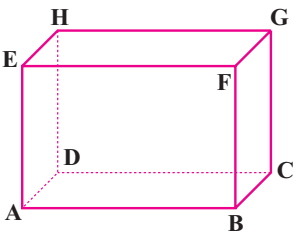
$\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DQ} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PC}$

$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{NC} = \overrightarrow{ND}$

11 **Determina el valor de *k* para que los vectores $\vec{u}(2, 2)$ y $\vec{v}(-3, k)$ formen un ángulo de 45º.**

$k = 0$

12 **Observa la figura:**



a) Escribe el vector $\overrightarrow{AC}$ como suma de dos vectores.

b) Escribe el vector $\overrightarrow{GA}$ como suma de dos vectores.

c) Escribe el vector $\overrightarrow{AH}$ como suma de tres vectores.

d) Escribe el vector $\overrightarrow{GE}$ como diferencia de dos vectores.

a) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

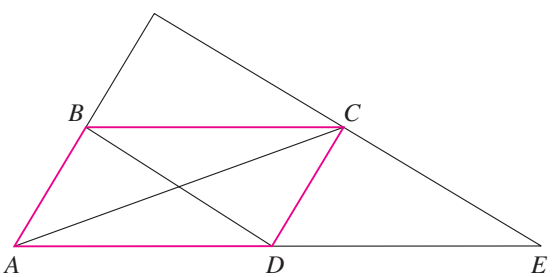
b) $\overrightarrow{GA} = \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CA}$

c) $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FH}$

d) $\overrightarrow{GE} = \overrightarrow{GH} - \overrightarrow{EH}$

13 **Dibuja un paralelogramo. Sus lados y diagonales están determinados por vectores (o sus opuestos).**

Justifica que la suma de las diagonales es el doble de un lado y su diferencia es el doble del otro.



$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AE} = 2\,\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AF} = 2\,\overrightarrow{AB}$

14 **Siendo $\vec{a}\,(3, 1)$; $\vec{b}(-2, 0)$; $\vec{c}\,(1, 4)$, halla las siguientes combinaciones lineales.**

a) $\vec{u} = 4\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c}$

b) $\vec{v} = \vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$

c) $\vec{w} = \vec{a} - 3\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$

d) $\vec{x} = \frac{3}{4}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + 0\,\vec{c}$

a) (8, – 4)

b) (4, –3)

c) $\left(\frac{19}{2}, 3\right)$

d) $\left(\frac{13}{4}, \frac{3}{4}\right)$

15 **En el ejercicio resuelto número 10 se ha demostrado que el punto medio *M* del segmento de extremos $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ tiene coordenadas $M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$. Calcula el punto medio de los segmentos *AB* y *CD* siendo *A*(1, 1), *B*(–2, 3), *C*(4, 1) y *D*(0, 6).**

Punto medio de *AB*: $\left(-\frac{1}{2}, 2\right)$

Punto medio de *CD*: $\left(2, \frac{3}{2}\right)$

16 **a) Demuestra vectorialmente que *ABCD* es un paralelogramo siendo**

$$A(5, 2),\ B\left(4, -\frac{1}{2}\right),\ C(-1, -1) \text{ y } D\left(0, \frac{3}{2}\right).$$

b) Demuestra que *ABCD* es un paralelogramo justificando que sus diagonales se cortan en su punto medio.

a) $\overrightarrow{AB} = \left(-1, -\frac{5}{2}\right)$; $\overrightarrow{DC} = \left(-1, -\frac{5}{2}\right)$

$\overrightarrow{BC} = \left(-5, -\frac{1}{2}\right)$; $\overrightarrow{AD} = \left(-5, -\frac{1}{2}\right)$

se trata de un paralelogramo

b) Punto medio AC = punto medio BD = $\left(2, \frac{1}{2}\right)$

17 **Sean *A*, *B* y *C* los puntos de coordenadas (2, –5), (–1, 3) y (2, 1).**

a) Calcula las coordenadas de los puntos *D* y *E* tales que:

$\overrightarrow{BD} = -\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BE} = 2\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}$

b) Calcula las coordenadas de los puntos *G* y *H* tales que:

$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB}$

a) $D = (2, 7)$; $E = (2, -11)$;

b) $G = \left(0, \frac{73}{3}\right)$; $H = (-4, -1)$

18 **Las *medianas* de un triángulo son los segmentos que unen cada vértice con el punto medio del lado opuesto.**

Halla las longitudes de las medianas del triángulo de vértices $A\left(-\frac{3}{2}, 4\right)$, $B(2, -1)$ y $C\left(\frac{7}{2}, 2\right)$.

La mediana correspondiente al vértice A es $\frac{\sqrt{485}}{4}$

La mediana correspondiente al vértice B es $\sqrt{17}$

La mediana correspondiente al vértice C es $\frac{\sqrt{173}}{4}$

19 **Justifica que el triángulo de vértices $A(3, -1)$, $B(5, 3)$ y $C(-1, 1)$ es rectángulo isósceles.**

$\overrightarrow{AB} = (2, 4)$; $\overrightarrow{AC} = (-4, 2)$; $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ y $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{20}$

20 **Justifica que el cuadrilátero ABCD es un trapecio isósceles, siendo $A(-4, 0)$, $B(-1, 2)$, $C(4, 1)$ y $D(6, -2)$.**

$\overrightarrow{BC} = (5, -1)$ $\overrightarrow{AD} = (10, -2)$ $|\overrightarrow{BA}| = \sqrt{13}$ $|\overrightarrow{CD}| = \sqrt{13}$

21 **Los vértices del cuadrilátero *ABCD* tienen coordenadas $\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$, $(2, 2)$, $\left(-\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right)$ y $(-3, 0)$.**

a) Calcula el perímetro del cuadrilátero.

b) Demuestra que las diagonales tienen la misma longitud.

c) ¿Cómo es el cuadrilátero *ABCD*?

a) $2\sqrt{58}$; **b)** $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BD}| = \sqrt{29}$; **c)** Es un cuadrado.

22 **Dados $\vec{a}(-4, 5)$ y $\vec{b}(3, -1)$, determina las coordenadas de los vectores:**

a) $\vec{a} + \vec{b}$; $3\vec{b}$; $-\frac{1}{2}\vec{a}$; $-\vec{a}$

b) $2\vec{a} - 3\vec{b}$; $\vec{b} - \vec{a}$; $4\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$

a) $(-1, 4)$; $(9, -3)$; $\left(2, -\frac{5}{2}\right)$; $(4, -5)$

b) $(-17, 13)$; $(7, -6)$; $\left(-14, \frac{58}{3}\right)$

23 **Analiza si las parejas de vectores siguientes son colineales:**

a) **(12, 4) y (3, 1)** **b)** **(16, −4) y (−8, 2)**

c) $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$ **y (−8, 0)** **d)** $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3}\right)$ **y** $\left(\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

Los vectores de **a)**, **b)** y **c)** son colineales. Los vectores de **d)** no son colineales.

24 **Sea el vector $\vec{u}(2, x)$. Determina en cada caso el valor de x para que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean colineales, siendo:**

a) $\vec{v}(1, -4)$ **b)** $\vec{v}\left(2, -\frac{5}{3}\right)$ **c)** $\vec{v}\left(1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}\right)$

a) $x = -8$ **b)** $x = -\frac{5}{3}$ **c)** $x = -6 - 4\sqrt{2}$

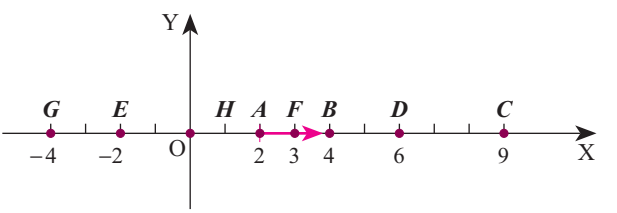
25 **Halla las componentes de un vector de módulo 15 y colineal con el vector $\vec{a}(4, -3)$.**

(12, −9)

26 **Si A y B son dos puntos cualesquiera del plano tales que $|\overrightarrow{AB}| = 2$. Dibuja los puntos C, D, E, F, G y H tales que:**

$\overrightarrow{BC} = \frac{5}{2}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{DA} = -2\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{EB} = -3\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EB}$; $\overrightarrow{GB} = 4\overrightarrow{BA}$; $\overrightarrow{HA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{HB}$



27 **Calcula los transformados de los puntos $A(2, 0)$, $B(1, 4)$, $C\left(-\frac{5}{2}, 2\right)$ y $D(-1{,}5, 0)$ mediante una traslación de vector $\vec{u}$ en los siguientes casos:**

a) $\vec{u} = (2, -5)$ **b)** $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ **c)** $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ **d)** $\vec{u} = 2 \cdot \overrightarrow{AB}$

a) $A'(4, -5)$; $B'(3, -1)$; $C'\left(-\frac{1}{2}, -3\right)$; $D'(0{,}5, -5)$

b) $A'(-1, 4)$; $B'(0, 8)$; $C'\left(-\frac{7}{2}, 6\right)$; $D'(-2{,}5, 4)$

c) $A'(2, 2)$; $B'(1, 6)$; $C'\left(-\frac{5}{2}, 4\right)$; $D'(-1{,}5, 2)$

d) $A'(0, 8)$; $B'(-1, 12)$; $C'\left(-\frac{9}{2}, 10\right)$; $D'(-3{,}5, 8)$

28 **Calcular el producto escalar de cada una de las siguientes parejas de vectores.**

a) $\vec{u}(1, -1), \vec{v}(-4, 5)$ — **a)** -9

b) $\vec{u}(4, 3), \vec{v}(0, 0)$ — **b)** 0

c) $\vec{u}(\sqrt{2}, -1), \vec{v}(\sqrt{2}, 2)$ — **c)** 0

d) $\vec{u}(3, 0), \vec{v}(4, -5)$ — **d)** 12

e) $\vec{u}(1, 4), \vec{v}\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{8}\right)$ — **e)** $\frac{3}{4}$

29 **Si *ABCD* es un cuadrado de lado 1, hallar el producto escalar de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.**

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 1$

30 **Dados los puntos de R^2: $A(3, 5)$, $B(5, -2)$, $C(1, -1)$ y $D(0, 4)$, halla los productos escalares siguientes:**

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ — **a)** 38

b) $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \cdot \overrightarrow{CD}$ — **b)** -28

c) $2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ — **c)** 2

d) $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{DB}$ — **d)** -61

31 **Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores de módulos 3 y 5, respectivamente, y de producto escalar -4. Calcula los siguientes productos escalares:**

a) $\vec{u}(3\vec{u} - 2\vec{v})$

b) $(4\vec{u} + 3\vec{v})(2\vec{u} - 3\vec{v})$

c) $(2\vec{u} + 3\vec{v})(2\vec{u} - 3\vec{v})$

d) $(3\vec{u} - \vec{v})^2$

a) 35; **b)** -129; **c)** -189; **d)** 130

32 **Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$, dos vectores de módulos 1 y 3 y de producto escalar -2. Determinar si es posible el número real *x* en los siguientes casos:**

a) $(x\vec{u} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{u} = \vec{v}$

b) $(2\vec{u} + x\vec{v}) \cdot 3\vec{v} = -3$

c) $(\vec{u} + x\vec{v})^2 = 0$

d) $(x\vec{u} + \vec{v})^2 = 14$

a) 0

b) $\frac{1}{3}$

c) no es posible

d) 5 y -1

33 Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores ortogonales de módulos respectivamente 2 y $\frac{2}{3}$. Calcula el valor del número real x en los siguientes casos:

a) $(\vec{u} + x\vec{v})(\vec{u} - \vec{v}) = -\frac{1}{2}$

b) $(x\vec{u} - \vec{v})^2 = \frac{8}{9}$

c) $(2x\vec{u} + 3\vec{v})(\vec{u} - 2\vec{v}) = 0$

d) $(3\vec{u} - x\vec{v})(-x\vec{u} + 9\vec{v}) = 16$

a) $x = \frac{81}{8}$; **b)** $x_1 = \frac{1}{3}$; $x_2 = -\frac{1}{3}$; **c)** $x = \frac{1}{3}$; **d)** $x = -1$

34 Halla el módulo del vector proyección del vector $\vec{v}$ sobre el vector $\vec{u}$ en los siguientes casos: (α es el ángulo que determinan $\vec{u}$ y $\vec{v}$).

a) $|\vec{v}| = 1$; $\alpha = 60°$

b) $|\vec{v}| = \sqrt{2}$; $\alpha = 135°$

c) $|\vec{v}| = 4$; $\alpha = 210°$

d) $|\vec{v}| = 3$; $\alpha = 300°$

a) $\frac{1}{2}$

b) 1

c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

d) $\frac{3}{2}$

35 Dados los vectores de $\mathbb{R}^2$, $\vec{u}(-1, 0)$ y $\vec{v}(m, 2)$, calcula m para que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ determinen un ángulo de 45°.

$m_1 = 2$; $m_2 = -2$

36 Halla la medida del ángulo determinado por las siguientes parejas de vectores:

a) (4, 3) y (–1, 5) — **a)** 64° 26'

b) (0, 5) y (0, –4) — **b)** 180°

c) $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ y $(-\sqrt{2}, 0)$ — **c)** 126° 52'

d) (3, 2) y (0, –3) — **d)** 123° 41' 24''

e) $(\sqrt{2}, 1)$ y $(\sqrt{3}, -2)$ — **e)** 84° 22' 16''

37 Se dan los puntos $A(1, 2)$, $B(0, 3)$, $C(5, x)$.

a) Determinar x para que $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ sean perpendiculares.

b) Determina x para que $\cos \widehat{BAC} = \frac{1}{2}$.

a) $x = 6$; **b)** $x_1 = 10 + 4\sqrt{3}$; $x_2 = 10 - 4\sqrt{3}$

38 **Dados los vectores $\vec{u}(2, 1)$ y $\vec{v}(1, -1)$ demuestra que existe un vector $\vec{w}(x, y)$ tal que $(\vec{w} - \vec{u}) \perp \vec{u}$ y $(\vec{w} - \vec{v}) \perp \vec{v}$.**

$\vec{w} = \left(\frac{7}{3}, \frac{1}{3}\right)$

39 **Se consideran los puntos $A(1, 2)$, $B(5, 0)$, $C(-1, -2)$.**

a) Calcula las longitudes de los lados del triángulo ABC.

b) Calcula las medidas de los ángulos del triángulo.

c) Clasifica el triángulo.

a) $AB = \sqrt{20}$; $BC = \sqrt{40}$; $AC = \sqrt{20}$

b) $\widehat{A} = 90°$; $\widehat{B} = \widehat{C} = 45°$

c) Es un triángulo rectángulo isósceles.

40 **Halla el perímetro y los ángulos del triángulo de vértices $A(2, 0,)$, $B(0, 2)$, $C(3, 1)$.**

$P \simeq 7{,}4$; $\widehat{A} = 90°$; $\widehat{B} = 26° 33' 54''$; $\widehat{C} = 63° 26' 6''$

41 **Halla las coordenadas de los vectores ortogonales unitarios a $\vec{u}(2, 1)$.**

$\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}}\right)$; $\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$

42 **Halla en cada caso las coordenadas del punto que falta sabiendo que M es el punto medio del segmento AB.**

a) $M(2, -4)$ y $A(1, -2)$

b) $M(0, 3)$ y $A(1, -1)$

c) $M\left(\frac{3}{2}, -\frac{2}{5}\right)$ y $B(2, 5)$

d) $A\left(-4, \frac{5}{3}\right)$ y $B(1, 3)$

a) B(3, –6)

b) B(–1, 7)

c) $A\left(1, -\frac{29}{5}\right)$

d) $M\left(-\frac{3}{2}, \frac{7}{3}\right)$

43 **Sitúa en el plano cartesiano los puntos $A(-1, -2)$, $B(3, 2)$ y $C(5, 0)$.**

a) Calcula las coordenadas del punto medio M del segmento AC.

b) Calcula las coordenadas del punto N simétrico de B con respecto a M.

c) ¿Cómo es el cuadrilátero $ABCN$?

a) $M = (2, -1)$; **b)** $N = (1, -4)$; **c)** paralelogramo.

44 **Dados los puntos $A(-3, 1)$ y $B(2, 2)$, halla las coordenadas de los puntos C y D para que $ABCD$ sea un paralelogramo tal que sus diagonales se corten en $O(0, 0)$.**

$C(3, -1)$ y $D(-2, -2)$

Tema 9 LA RECTA EN EL PLANO

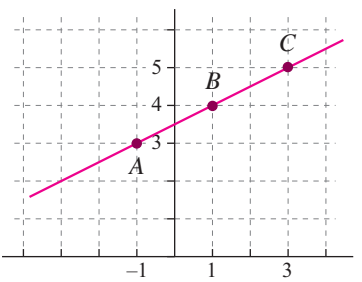
1 **a) Halla las ecuaciones vectorial y paramétricas de la recta que pasa por el punto $A(-1, 3)$ y tiene a $\vec{u}(2, 1)$ como vector director. Una vez obtenidas las ecuaciones:**

b) Dale al parámetro los valores que desees y comprueba gráficamente que los puntos que resultan están alineados.

c) Considera distintos vectores entre los puntos obtenidos y comprueba que todos son proporcionales al vector director de la recta.

a) Vectorial: $(x, y) = (-1, 3) + \lambda(2, 1)$; Paramétricas: $\begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = 3 + \lambda \end{cases}$

b)



$\lambda = 0 \Rightarrow (x, y) = (-1, 3)$

$\lambda = 1 \Rightarrow (x, y) = (1, 4)$

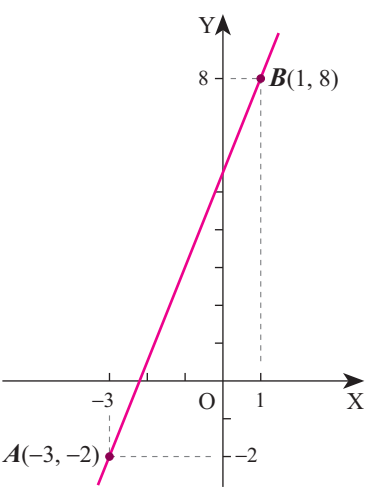
$\lambda = 2 \Rightarrow (x, y) = (3, 5)$

c) $\overrightarrow{AB} = (2, 1)$; $\overrightarrow{AC} = (4, 2)$; $\overrightarrow{BC} = (2, 1)$; $\overrightarrow{CA} = (-4, -2)$ ...

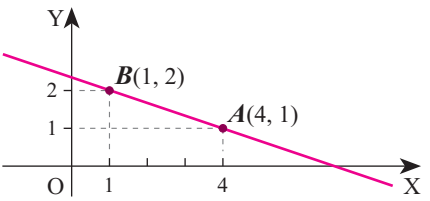
2 **Halla un punto y la dirección (vector director) de cada una de las siguientes rectas y haz su representación gráfica:**

a) $\dfrac{x+3}{2} = \dfrac{y+2}{5}$ **b)** $x + 3y - 7 = 0$ **c)** $y = 5x - 2$ **d)** $\begin{cases} x = -2\lambda \\ y = -2 - \lambda \end{cases}$

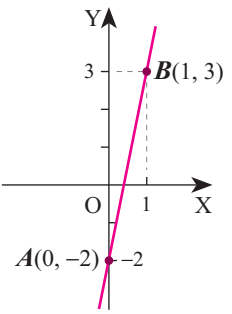
a) A(–3, –2) $\vec{v}$ (2, 5)



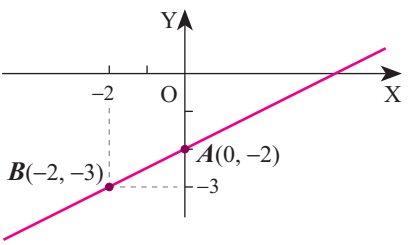
b) A(4, 1) $\vec{v}$ (–3, 1)



c) A(0, –2) $\vec{v}$ (1, 5)



d) A(0, –2) $\vec{v}$ (–2, –1)



3 ***¿Verdadero o falso?***

Los siguientes pares de ecuaciones representan la misma recta.

a) $\frac{x-2}{3} = \frac{y}{2}$; $y = \frac{2}{3}x - \frac{4}{3}$

b) $(x, y) = (2, 1) + \lambda(-1, 2)$; $2x - y - 5 = 0$

c) $(x, y) = (-1, 4) + \lambda(-2, 1)$; $(x, y) = (3, 2) + \lambda(4, -2)$

d) $y - x = 0$; $\frac{x-3}{5} = \frac{y-3}{-5}$

a) Verdadero; **b)** Falso; **c)** Verdadero; **d)** Falso.

4 **Determina el ángulo determinado por las rectas:**

a) $x + 3y - 5 = 0$ y $3x - 2y + 7 = 0$

b) $2x + y - 5 = 0$ y $\frac{x-1}{3} = \frac{y+5}{-1}$

a) 74° 45'

b) 45°

5 **Determina el ángulo determinado por los siguientes pares de rectas:**

a) $x + 1 = \dfrac{y-3}{-3}$ y $\dfrac{x+2}{2} = \dfrac{y-4}{4}$

b) $3x + y = 0$ y $x + 3y + 4 = 0$

a) 45°; **b)** 53° 7' 48"

6 **Halla la ecuación general de una recta paralela a** r: $\begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = -3 - 5\lambda \end{cases}$ **y que pasa por** $A(4, 3)$.

$5x + 3y - 29 = 0$

7 **Halla unas ecuaciones paramétricas de la perpendicular trazada desde el punto** $A(-2, 5)$ **a la recta** $(x, y) = (8, -3) + \lambda(5, 1)$

$\begin{cases} x = -2 - \lambda \\ y = 5 + 5\lambda \end{cases}$

8 **Hallar la ecuación de la recta paralela a la** $3x + 6y + 5 = 0$ **que tenga de ordenada en el origen** -2.

$x + 2y + 4 = 0$

9 **Hallar la ecuación de la recta que pasa por** $(-2, 3)$ **y es paralela al eje OY.**

$x = -2$

10 **La recta que pasa por** $M(2, 3)$ **y es paralela a la** $y = 3x + 1$ **determina con los ejes coordenados un triángulo. Hallar su área.**

$A = \dfrac{3}{2}$ u.s

11 **Halla la ecuación general y explícita de la recta** r **que pasa por el punto** $A(-2, 3)$ **y forma con el eje** OX^+ **un ángulo de 135°.**

Ecuación general: $x + y - 1 = 0$

Ecuación explícita: $y = -x + 1$

12 **Halla la ecuación general de la recta s paralela a la de ecuación** $-2x + y + 8 = 0$ **y que pase por** $B\left(2, \dfrac{3}{4}\right)$.

$8x - 4y - 13 = 0$

13 **De todas las rectas que pasan por** $C(2, -1)$ **sólo hay una que pasa por el punto** $D(0, 1)$. **¿Cuál es su ecuación continua?**

$\dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{x+1}{1}$

14 **Halla las bisectrices de los ángulos formados por los siguientes pares de rectas:**

a) $8x + 6y - 5 = 0$; $5x - 12y = 0$

b) $3x + 4y - 1 = 0$; $5x + 12y - 2 = 0$

a) $54x + 198y - 65 = 0$ y $154x - 42y - 65 = 0$

b) $14x - 8y - 3 = 0$ y $64x + 112y - 23 = 0$

15 **Halla las ecuaciones de las bisectrices de los ángulos formados por la recta $3x - 4y - 3 = 0$ con el eje de abscisas.**

$x - 3y - 1 = 0$ y $3x + y - 3 = 0$

16 **Una recta pasa por P(2, 1) y Q(–3, 0). Dar una ecuación continua.**

$$\frac{x-2}{5} = \frac{y-1}{1}$$

17 **¿Es $\vec{v}(-1, 3)$ un vector director de la recta $2x - y + 5 = 0$?**

No, son los colineales del (1, 2).

18 **Las rectas r:** $\begin{cases} x = -1 + 3\lambda \\ y = 2 - 2\lambda \end{cases}$ **y s: $4x + 6y - 8 = 0$; ¿son la misma?**

Si.

19 **Misma pregunta: $(x + 2, y) = \lambda(3, 1)$; $y = \dfrac{x-2}{3}$.**

No.

20 **¿Pertenece el punto P(– 4, 3) a la recta $2x + y - 5 = 0$?**

No.

21 **Dar unas ecuaciones paramétricas de la recta $y = \dfrac{2}{3}x + 1$.**

$$\begin{cases} x = 3\lambda \\ y = 1 + 2\lambda \end{cases}$$

22 **Una recta forma con el eje OX un ángulo de 30°. ¿Cuál puede ser su ecuación?**

$\sqrt{3}x - 3y + k = 0$ con $k \in \mathbb{R}$

23 **Ecuación general de la recta que pasa por P(2, 5) y O(0, 0). ¿Cómo se puede saber si una recta pasa por el origen?**

$5x - 2y = 0$

Porque la ecuación general no tiene término independiente.

24 **Ecuación de una recta paralela y una perpendicular a la $(x-1, y+3) = \alpha(2, -1)$ por el punto R(2, –5).**

paralela: $x + 2y + 8 = 0$; perpendicular. $2x - y - 9 = 0$

25 **Ecuación de una recta paralela y una perpendicular a la $\frac{x+4}{3} = \frac{y-1}{-4}$ por el punto Q(1, 0).**

Paralela: $\frac{x-1}{3} = \frac{y}{-4}$; Perpendicular: $\frac{x-1}{4} = \frac{y}{3}$

26 **Ecuación de una recta paralela y una perpendicular a la $\begin{cases} x = -2 + 5\alpha \\ y = 3 - \alpha \end{cases}$ por el punto S(–1, 1).**

paralela: $x + 5y - 4 = 0$; perpendicular. $5x - y + 6 = 0$

27 **Ecuación de una paralela y una perpendicular a la $2x - y - 7 = 0$ por el punto M(1, –4).**

Paralela: $2x - y - 6 = 0$

Perpendicular: $x + 2y + 7 = 0$

28 **Ecuación de la paralela a la $y = \frac{2}{5}x - 7$ por el punto N(0, 1).**

$y = \frac{2}{5}x + 1$

29 **Ecuación de una paralela y una perpendicular a la $\frac{x}{2} + \frac{y}{2} + 1$ por el punto P(3, 3).**

Paralela: $x + y - 6 = 0$

Perpendicular: $x - y = 0$

30 **Calcula el valor de *a* para que las rectas *r*: $ax + 2y - 1 = 0$, *s*: $3x + y + 4 = 0$ y *t*: $x - y = 2$ pasen por el mismo punto.**

$a = -12$

31 **Hallar la pendiente y la ordenada en el origen de la recta $4x + 3y - 5 = 0$. ¿Forma con *OX* un ángulo mayor o menor de 90°?**

Pendiente: $-\frac{4}{3}$

Ordenada en el origen: $\frac{5}{3}$

Forma con OX un ángulo mayor de 90°.

32 **Hallar el ángulo que forman las rectas r: $2x - 5y = 4$ y s: $3x - 4y = 7$.**

$\alpha = 15° 4' 7''$

33 **Hallar el ángulo que forman las rectas r: $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$ y s: $\frac{x}{4} + \frac{y}{2} = 1$.**

$29° 44' 41''$

34 **Las rectas $ax + 2y = 3$; $5x + by = 7$ se cortan en el punto $(-1, 3)$. Halla la tangente del menor de los ángulos que forman.**

$a = 3$; $b = 4$; $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{23}$

35 **Hallar el ángulo que forman las rectas:**

r: $\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{4}$ y s: $\frac{x}{12} = \frac{y-3}{5}$

$30° 30' 36''$

36 **Mismo ejercicio para las rectas: r: $-x + 2y + 5 = 0$ y s: $2x - 3y + 4 = 0$**

$\alpha = 7° 7' 30''$

37 **Mismo ejercicio para las rectas:**

r: $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3}$ y s: $-2x + 3y - 5 = 0$

$22° 37' 11''$

38 **Una recta corta a los ejes de coordenadas en los puntos A(8, 0) y B(0, 5). Hallar la ecuación de la recta perpendicular a AB que pasa por el punto de intersección de las $4x - 3y + 6 = 0$ y $2x + y - 12 = 0$.**

$8x - 5y + 6 = 0$

39 **Las dos rectas: $3x - my - 5 = 0$ y $2x + ny - 7 = 0$ son perpendiculares. Determinar m y n sabiendo además que la segunda pasa por M(2, –1).**

$m = -2$, $n = -3$

40 **Hallar la proyección del punto (0, –5) sobre la recta $3x + 5y - 9 = 0$.**

$5x - 3y - 15 = 0$

41 **Calcular los parámetros m y n para que las rectas $2x + 3y - 2 = 0$ y $x + my + n = 0$, sean: a) paralelas; b) perpendicular; c) una misma recta.**

a) $m = \frac{3}{2}$ y n cualquier número real. **b)** $m = -\frac{2}{3}$ y n cualquier número real.

c) $m = \frac{3}{2}$ y $n = -1$

42 **Demostrar que las rectas:**

***p*: $x + 2y - 15 = 0$** **q: $2x - y - 10 = 0$**

***r*: $2x + 4y + 5 = 0$** **s: $2x - y = 0$**

determinan un rectángulo. Hallar el centro del mismo.

$\left.\begin{matrix} x + 2y - 15 = 0 \\ 2x + 4y + 5 = 0 \end{matrix}\right\}$ son paralelas

$\left.\begin{matrix} 2x - y - 10 = 0 \\ 2x - y = 0 \end{matrix}\right\}$ son paralelas

$\left.\begin{matrix} x + 2y - 15 = 0 \\ 2x - y - 10 = 0 \end{matrix}\right\}$ son perpendiculares

Centro $\left(\frac{13}{4}, \frac{3}{2}\right)$

43 **En el cuadrilátero *ACDB* de vértices *A*(3, 2), *B*(4. 6), *C*(7, 3) y *D*(8, 7).**

a) Demuestra que las diagonales son perpendiculares.

b) Halla los ángulos del cuadrilátero.

a) $\left.\begin{matrix} \overrightarrow{AD} = (5, 5) \\ \overrightarrow{BC} = (3, -3) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Rightarrow$ son perpendiculares

b) $A = D = 61° 55' 39''$; $B = C = 118° 4' 21''$

44 **Dos lados de un paralelogramo están sobre *r*: $y = 5x + 2$ y *s*: $x + 3y + 7 = 0$ y tiene un vértice en el punto (4, 6). Hallar los otros vértices.**

$(1, 7), \left(\frac{35}{16}, -\frac{49}{16}\right), \left(-\frac{13}{16}, -\frac{33}{16}\right)$

45 **Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas $5x - 2y = 8$ y $4x + 9y = 17$ y es perpendicular a la bisectriz del segundo cuadrante.**

$y = x - 1$

46 **Hallar la ecuación de una recta que pasa por el punto *P*(2, 1) y que forme un ángulo de 45° con la recta $4x - 3y + 8 = 0$.**

$x - 7y + 5 = 0$

47 **Determina los valores de *a* y *b* para que las rectas $ax + by - 1 = 0$ y la $2x - 3y + 4 = 0$ sean paralelas y que la primera pase por el punto (1, 1).**

$a = -2$; $b = 3$

48 **Calcula los coeficientes de las rectas $ax - 2y = 0$; $bx + 6y = 5$, sabiendo que son perpendiculares y que la primera pasa por el punto (2, 3).**

$a = 3$; $b = 4$

49 **Un triángulo isósceles tiene por base el segmento *AB*, *A*(1, 2) y *B*(6, 3), y el tercer vértice está sobre la recta $y = 3x + 8$. Hallar la altura del triángulo y el perimetro.**

Altura: $2\sqrt{26}$

Perímetro: $\sqrt{442} + \sqrt{26}$

50 **Hallar el vértice B de un triángulo equilátero situado en el primer cuadrante conociéndose los vértices O(0, 0) y A(4,2).**

$B(2 - \sqrt{3}, 1 + 2\sqrt{3}) \simeq (0{,}26, 4{,}46)$

51 **Dados el punto P(2, 7) y el Q(1, 2), hallar las ecuaciones de las rectas que pasan por P y distan 5 unidades del Q.**

$r_1 : y - 7 = 0$; $r_2 : 5x + 12y - 94 = 0$

52 **Hallar la ecuación de una recta que pasa por el punto A(2, 2) de manera que diste 5 unidades del punto B(–1, 6).**

$3x - 4y + 2 = 0$

53 **Hallar la ecuación de la recta que pasa por A(3, 1) y equidista de los puntos B(7, 4) y C(9, –6). (Hay dos soluciones).**

$r_1 : 5x + y - 16 = 0$; $r_2 : 2x + 5y - 11 = 0$

54 **Hallar el área de cada uno de los triángulos que tienen un vértice en el origen de coordenadas y los otros dos en:**

a) (4, 6), (2, 6) **b) (5, –11), (4, –6)**

a) 6 u.s **b)** 7 u.s

55 **Dado el triángulo *A*(1, 0), *B*(2, 1) y *C*(0, 3), halla la ecuación de la recta que pasa por los puntos medios de los lados *AB* y *AC* y comprueba que es paralela al lado *BC*.**

Recta que pasa por los puntos medios de *AB* y *AC*: $x + y - 2 = 0$.

Recta que pasa por *B* y *C*: $x + y - 3 = 0$.

Luego son paralelas.

56 **Los puntos A(0, 1), B(1, –1) y C(4, 2) son vértices consecutivos del paralelogramo ABCD. Determinar el área del paralelogramo y las coordenadas del cuarto vértice.**

Area: 9 u.s.; vértice (3, 4)

57 **Hallar el área del triángulo *ABC* siendo *A*(1, 2), *B*(7, 4) y *C*(3, 10).**

8 u^2

58 **La recta *OA*: $x - 2y = 0$, la *OC*: $3x + y = 0$ y el punto B(3, 5) determinan el paralelogramo ABCO. Hallar su área y las ecuaciones de los lados AB y BC.**

$\overline{BC} \equiv x - 2y + 7 = 0$

$\overline{AB} \equiv 3x + y - 14 = 0$

Sup. = 14 u.s

59 **Dos lados de un cuadrado tienen por ecuaciones: $2x - 3y + 4 = 0$, $6x - 9y - 31 = 0$. Hallar su área.**

$\frac{1849}{117}$ u^2

60 **Hallar el punto de la recta $2x - 4y = 1$ que con el origen de coordenadas y el punto (–4, 0) determine un triángulo de área 3 u.s.**

$P\left(\frac{7}{2}, \frac{3}{2}\right)$

61 **Hallar las coordenadas de los puntos situados en la recta $x + 3y - 3 = 0$ y que disten 2 unidades de la $4x - 3y + 9 = 0$.**

$P_1 = \left(\frac{4}{5}, \frac{11}{15}\right)$; $P_2 = \left(-\frac{16}{5}, \frac{31}{15}\right)$

62 **Calcula las coordenadas del punto simétrico de *A*(–3, 7) respecto de la recta $x - y + 4 = 0$.**

(1, 3)

63 **Encuentra las coordenadas del punto simétrico de *P*(3, –4) respecto de la recta *r*: $2x - 3y + 6 = 0$.**

$\left(-\frac{57}{13}, \frac{92}{13}\right)$

64 **Calcula las longitudes de las tres alturas del triángulo determinado por los puntos *A*(–1, 1), *B*(1, –3) y *C*(4, 5).**

$d(C, \overline{AB}) = \frac{14}{\sqrt{5}}$; $d(B, \overline{AC}) = \frac{28}{\sqrt{41}}$; $d(A, \overline{BC}) = \frac{28}{\sqrt{73}}$

65 **Escribe las ecuaciones de las bisectrices de *r*: $3x - 4y + 1 = 0$ y *s*: $8x - 6y + 1 = 0$.**

$2x + 2y - 1 = 0$; $14x - 14y + 3 = 0$

66 **Se dan los puntos A(–1, 12) y B(9, 28) y se determinan las coordenadas del punto A' simétrico del A respecto del eje de abscisas y las del punto B' simétrico del B respecto del eje de ordenadas. Se pide:**

a) Las ecuaciones de las rectas AB' y A'B.

b) Las coordenadas del punto C en que se cortan ambas rectas.

c) Hallar la distancia del punto C a la recta AB.

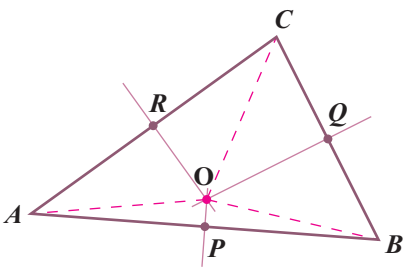
a) AB' $\equiv 2x + y - 10 = 0$; A'B $\equiv 4x - y - 8 = 0$

b) C(3, 4)

c) $d \approx 7{,}6$

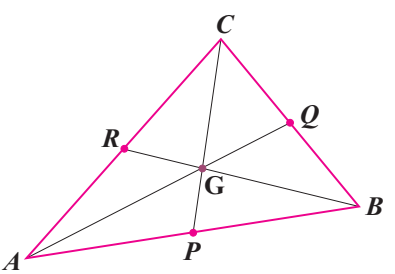
67 **La mediatriz de un segmento es la perpendicular a dicho segmento por su punto medio. Las tres mediatrices de los lados de un triángulo se cortan en un punto llamado circuncentro (O en la figura) y es el centro de la circunferencia que pasa por los tres vértices (circunferencia circunscrita al triángulo).**

Halla el circuncentro del triángulo de vértices A(–2, 3), B(0, 1) y C(2, 5).



$\left(\frac{1}{3}, \frac{10}{3}\right)$

68 **Mediana de un triángulo es el segmento que une cada vértice con el punto medio del lado opuesto. Las tres medianas de un triángulo concurren en un punto llamado baricentro, G, o centro de gravedad del triángulo.**



a) Halla el baricentro G del triángulo del ejercicio anterior.

b) Comprueba la siguiente propiedad: «*el baricentro de un triángulo dista de cada vértice los dos tercios de la mediana correspondiente*».

c) Comprueba que si los vértices de un triángulo tiene coordenadas (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) entonces las coordenadas del baricentro son

$$G\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$$

a) G(0, 3)

b) Mediana = $3\sqrt{2}$; d(G, C) = $2\sqrt{2}$; d(G, C) = $\frac{2}{3}$ de la mediana $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $2\sqrt{2} = \frac{2}{3}$ de $3\sqrt{2}$

c) G(0, 3)

69 **Las alturas de un triángulo son los segmentos de las perpendiculares trazadas desde cada vértice a su lado opuesto. Las alturas de un triángulo se cortan en un punto llamado ortocentro.**

Halla las coordenadas del ortocentro del triángulo de vértice (2, 2), (8, 2) y (5, 8).

$\left(5, \frac{7}{2}\right)$

70 **Las bisectrices de los ángulos de un triángulo se cortan en un punto llamado incentro.**

Halla las coordenadas del incentro del triángulo de vértices (–3, 1), (8, 1) y (–8, –11).

Incentro (–1, –2)

71 **Se dan los puntos A(0, 4), B(4, 0) y C(–3, 0).**

a) Calcula las coordenadas del centro de gravedad, del ortocentro y del circuncentro.

b) Comprueba que los tres puntos están alineados.

a) Centro de gravedad $\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$

Ortocentro (0, 3)

Circuncentro $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

b) Los tres pertenecen a la recta $5x + y - 3 = 0$.

72 **Se considera la familia de rectas $r(m)$ de ecuación $(m - 1)x - (2m - 3)y - 4m + 1 = 0$ y el punto A(4, 6).**

a) Calcular las distancias del punto A a las rectas $r(1)$, $r\left(\frac{3}{2}\right)$ y $r(0)$.

b) Determinar m para que la distancia del punto A a la recta $r(m)$ sea $\frac{12\sqrt{5}}{5}$.

a) d $(r(1), A) = 3$; d $\left(r\left(\frac{3}{2}\right), A\right) = 6$; d$(r(0), A) = \frac{15}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{2} \simeq 4{,}7$

b) $m = \frac{35}{24}$

73 **Dadas las rectas *r*: $ax + 5y$ y *s*: $\begin{cases} x = -3 + 2\lambda \\ y = -1 - 3\lambda \end{cases}$**

Determina el valor de *a* para que sean paralelas y halla, para ese valor de *a*, la distancia entre *r* y *s*.

$a = \frac{15}{2}$; distancia: $\frac{11}{\sqrt{13}}$

Deduce la posición relativa de la circunferencia y la recta dada.

1 $\mathscr{C}$: $x^2 + y^2 = 8$; r: $x - y = 0$

Secantes.

2 $\mathscr{C}$: $x^2 + y^2 = 25$; r: $4x - 3y - 25 = 0$

Tangentes

3 $\mathscr{C}$: $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 3 = 0$; r: $x + y - 9 = 0$

Secantes.

4 $\mathscr{C}$: $x^2 + y^2 - 6x - 6y + 13 = 0$; r: $x - y - 1 = 0$

Secantes

5 **En las elipses que se dan a continuación indica dónde está situado el eje focal, calcula las coordenadas de los focos, de los vértices y la excentricidad.**

a) $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$ **b)** $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{36} = 1$

c) $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{8} = 1$ **d)** $x^2 + 4y^2 = 16$

e) $4x^2 + 25y^2 = 100$ **f)** $7x^2 + 16y^2 + 42x - 49 = 0$

a) Eje focal $y = 0$; $F(3, 0)$; $F'(-3, 0)$; $A(5, 0)$; $A'(-5, 0)$;

$B(0, 4)$; $B'(0, -4)$; $e = \dfrac{3}{5}$

b) Eje focal $x = 0$; $F(0, \sqrt{11})$; $F'(0, -\sqrt{11})$; $A(0, 6)$; $A'(0, -6)$;

$B(5, 0)$; $B'(-5, 0)$; $e = \dfrac{\sqrt{11}}{6}$

c) Eje focal $x = 0$; $F(0, 2)$; $F'(0, -2)$; $A(0, \sqrt{8})$; $A'(0, -\sqrt{8})$;

$B(2, 0)$; $B'(-2, 0)$; $e = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

d) Eje focal $y = 0$; $F(2\sqrt{3}, 0)$; $F'(-2\sqrt{3}, 0)$; $A(4, 0)$; $A'(-4, 0)$;

$B(0, 2)$; $B'(0, -2)$; $e = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

e) Eje focal $y = 0$; $F(\sqrt{21}, 0)$; $F'(-\sqrt{21}, 0)$; $A(5, 0)$; $A'(-5, 0)$;

$B(0, 2)$; $B'(0, -2)$; $e = \dfrac{\sqrt{21}}{5}$

f) Eje focal $y = 0$; centro de la elipse $C(-3, 0)$; semiejes $a = 4$, $b = \sqrt{7}$ y $c = 3$; vértices $A(1, 0)$, $A'(-7, 0)$; $B(-3, \sqrt{7})$, $B'(-3, -\sqrt{7})$, $F(0, 0)$, $F'(-6, 0)$; $e = \frac{3}{4}$

6 **En las hipérbolas que se dan a continuación indica dónde está situado el eje focal, calcula las coordenadas de los focos, de los vértices y la excentricidad.**

a) $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{25} = 1$ **b)** $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$

c) $4x^2 - 6y^2 = 24$ **d)** $25x^2 - 4y^2 = -100$

a) Eje focal $y = 0$; $F(\sqrt{61}, 0)$, $F'(-\sqrt{61}, 0)$; $A(6, 0)$, $A'(-6, 0)$; $B(0, 5)$, $B'(0, -5)$; $e = \frac{\sqrt{61}}{6}$

b) Eje focal $y = 0$; $F(\sqrt{13}, 0)$, $F'(-\sqrt{13}, 0)$; $A(2, 0)$, $A'(-2, 0)$; $B(0, 3)$, $B'(0, -3)$; $e = \frac{\sqrt{13}}{2}$

c) Eje focal $y = 0$; $F(\sqrt{10}, 0)$, $F'(-\sqrt{10}, 0)$; $A(\sqrt{6}, 0)$, $A'(-\sqrt{6}, 0)$; $B(0, 2)$, $B'(0, -2)$; $e = \sqrt{\frac{5}{3}}$

d) Eje focal $x = 0$; $F(0, \sqrt{29})$, $F'(0, -\sqrt{29})$; $A(0, 5)$, $A'(0, -5)$; $B(2, 0)$, $B'(-2, 0)$; $e = \frac{\sqrt{29}}{5}$

7 **Ecuación general de la circunferencia de centro C(–1, –4) y radio 2.**

$x^2 + y^2 + 2x + 8y + 13 = 0$

8 **Ecuación general de la circunferencia de centro C(1, 3) y pasa por el punto *P*(5, 6).**

$x^2 + y^2 - 2x - 6y - 15 = 0$

9 **Determina el centro y el radio de la circunferencia $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 3 = 0$.**

C(3, –2); $r = 4$ç

10 **Mismo ejercicio para $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 9 = 0$.**

C(2, –3); $r = 2$

11 **Halla la ecuación de la circunferencia de radio $3\sqrt{2}$ que tiene su centro en la bisectriz del cuarto cuadrante y pasa por el origen de coordenadas.**

$x^2 + y^2 - 6x + 6y = 0$

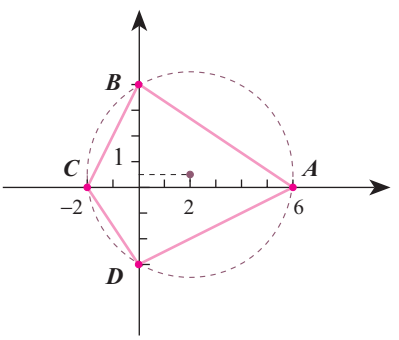
12 **Hallar la ecuación de la circunferencia que tiene centro en $C\left(-3, \frac{5}{2}\right)$ y radio 4.**

$4x^2 + 4y^2 + 24x - 20y - 3 = 0$

13 **Hallar las coordenadas del centro y el radio de la circunferencia $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 1 = 0$.**

C(–2, 1); $r = 2$

14 **Representar gráficamente la curva de ecuación $x^2 + y^2 - 4x - y - 12 = 0$ y hallar el área del cuadrilátero que tiene por vértices los puntos de intersección de la curva con los ejes coordenadas.**



A = 28 u.s.

15 **Halla la ecuación de la circunferencia que tiene su centro en el punto (2, 1) y es tangente a la recta $x - 2y + 5 = 0$.**

$x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$

16 **Hallar la ecuación de la circunferencia tangente a la bisectriz del segundo cuadrante y con centro en el punto (–5, 0).**

$2x^2 + 2y^2 + 20x + 25 = 0$

17 **Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos (–1, 0) y (3, –2) y tiene su centro en la recta $x + y - 3 = 0$.**

$x^2 + y^2 - 4x - 2y - 5 = 0$

18 **Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos A(3, –2) y B(1, 2) y tiene su centro sobre la recta $x + y + 4 = 0$.**

$x^2 + y^2 + 4x + 4y - 17 = 0$

19 **Deducir la ecuación de la cuerda común a la circunferencia de centro (1, 5) que pasa por el punto (–4, 5) y a la circunferencia $(x + 4)^2 + (y - 1)^2 = 16$.**

$5x + 4y = 0$

20 **Halla el punto que situado sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = 20$ esté a la mayor distancia de (1, 2).**

(–2, –4)

21 **Hallar las ecuaciones de las tangentes trazadas a la circunferencia $x^2 + y^2 - 12x - 6y = 0$ desde el punto P(11, 8).**

$2x + y - 30 = 0$; $x + 2y - 27 = 0$

22 **Hallar las tangentes a la circunferencia: $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 12 = 0$, que sean paralelas a la recta $4x - y + 2 = 0$.**

$4x - y + 23 = 0$; $4x - y - 11 = 0$

23 **Calcula el centro y el radio de la circunferencia circunscrita en el triángulo de vértices A(3, 3), B(–3, 3) y C(0, 0).**

C(0, 3); $r = 3$

24 **Determina la posición relativa de la circunferencia: $x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$ y la recta a) $y = x - 1$ b) $y = x$ c) $x + y = 5$**

a) Secante $P(1, 2)$, $Q(2, 1)$

b) Exterior

c) Exterior

25 **Mismo ejercicio para la circunferencia $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$ y la recta:**

a) $y = x$

b) $y = x - 2$

c) $y = x + 1$

a) Secante $P(0, 0)$, $Q(2, 2)$

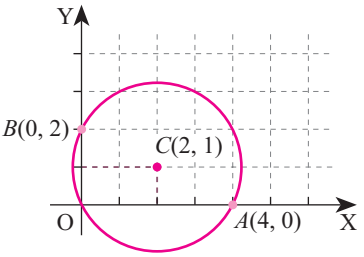
b) Tangente $P(2, 0)$

c) Secante $P\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}, \frac{3-\sqrt{3}}{2}\right)$, $Q\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}, \frac{3+\sqrt{3}}{2}\right)$

26 **Hallar el lugar geométrico de los puntos del plano tales que la suma de los cuadrados de sus distancias a $A(4, 0)$ y $B(0, 2)$ sea 20. Clasifica dicho lugar y haz su representación gráfica.**

$x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$.

Circunferencia C(2, 1), $r = \sqrt{5}$



27 **Una circunferencia de centro (5, 3) es tangente a la recta que pasa por el punto A(1, 3) y forma con el eje OX un ángulo de 45°. Se pide:**

a) coordenadas del punto de tangencia

b) ecuación de la circunferencia

a) (3, 5)

b) $x^2 + y^2 - 10x - 6y + 26 = 0$

28 **En una circunferencia trazamos dos cuerdas PQ y RS perpendiculares entre si, que se cortan en un punto A tal que AP = 4 cm, AQ = 8 cm y AR = 3 cm. Halla el radio de la circunferencia.**

$C\left(2, -\frac{23}{6}\right)$; $r = \frac{5\sqrt{73}}{6}$

29 **En la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$ se inscribe un triángulo equilátero, uno de cuyos vértices es el (2, 0). Hallar las coordenadas de los otros dos vértices.**

$P(-1, \sqrt{3})$; $Q(-1, -\sqrt{3})$

30 **Halla la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto *A*(–1, 5) y es tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 - 20x - 14y + 124 = 0$ en el punto *P*(6, 4)**

$x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$

31 **Determina para qué valor o valores de *a* la recta $ax - y + 10 = 0$ es tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = 20$.**

$a_1 = 2$; $a_2 = -2$

32 **Dada la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 + 8x - 6y - 1 = 0$, determina la ecuación de la circunferencia concéntrica con la dada y que pasa por el punto *P*(0, 1).**

$x^2 + y^2 + 8x - 6y + 5 = 0$

33 **Halla las ecuaciones de las circunferencias tangentes a las rectas $x + 2 = 0$; $y + 2 = 0$, y que pasan por el punto *P*(0, 7).**

$x^2 + y^2 - 6x - 6y - 7 = 0$; $x^2 + y^2 - 30x - 30y + 161 = 0$

Del 34 al 40. De las siguientes elipses determina dónde está situado el eje focal y calcula las coordenadas de los focos, de los vértices y su excentricidad. Haz la representación gráfica.

34 $9x^2 + 36y^2 = 324$

Eje focal $y = 0$; $F(3\sqrt{3}, 0)$, $F'(-3\sqrt{3}, 0)$; $A(6, 0)$,

$A'(-6, 0)$; $B(0, 3)$, $B'(0, -3)$; $e = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

35 $16x^2 + 9y^2 = 144S$

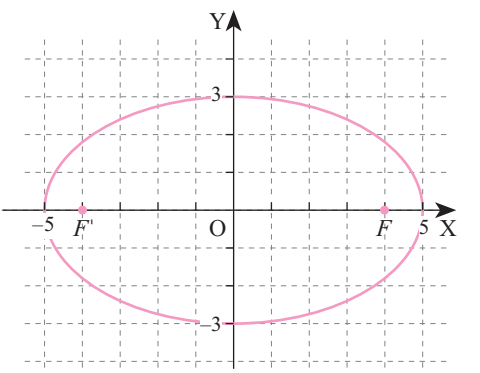
Eje focal $x = 0$; $F(0, \sqrt{7})$; $F'(0, -\sqrt{7})$; $A(0, 4)$; $A'(0, -4)$;

$B(3, 0)$; $B'(-3, 0)$; $e = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$

36 $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$

Eje focal $y = 0$; $F(4, 0)$, $F'(-4, 0)$, $A(5, 0)$, $A'(-5, 0)$,

$B(0, 3)$, $B'(0, -3)$; $e = \dfrac{4}{5}$



37 $2x^2 + 3y^2 = 12$

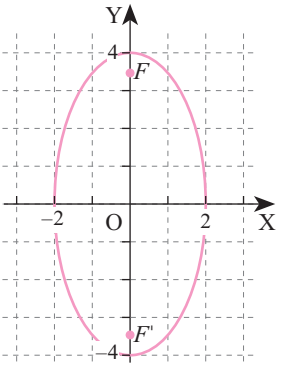
Eje focal $y = 0$; $F(\sqrt{2}, 0)$; $F'(-\sqrt{2}, 0)$; $A(\sqrt{6}, 0)$; $A'(-\sqrt{6}, 0)$;

$B(0, 2)$; $B'(0, -2)$; $e = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

38 $4x^2 + y^2 = 16$

Eje focal $x = 0$; $F(0, 2\sqrt{3})$, $F'(0, -2\sqrt{3})$, $A(0, 4)$,

$A'(0, -4)$, $B(2, 0)$, $B'(-2, 0)$, $e = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

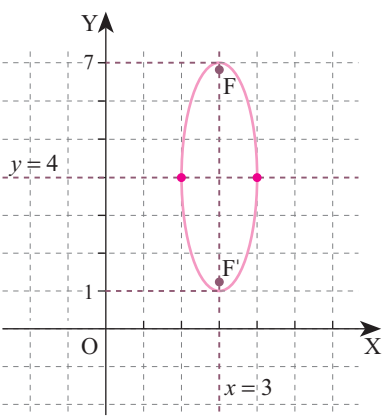


39 $\dfrac{(x-4)^2}{16}+\dfrac{(y+2)^2}{4}=1$

Eje focal $y=-2$; $F(4+2\sqrt{3},-2)$; $F'(4-2\sqrt{3},-2)$; $A(8,-2)$; $A'(0,-2)$; $B(4,0)$; $B'(4,-4)$; $e=\dfrac{2\sqrt{3}}{4}$

40 $9x^2+y^2-54x-8y+88=0$

Eje focal $x=3$; $F(3,\,4+2\sqrt{2})$, $F'(3,\,4-2\sqrt{2})$, $A(3,7)$, $A'(3,1)$, $B(2,4)$, $B'(4,4)$, $e=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$



41 **Escribe la ecuación reducida de la elipse cuya distancia focal es 6 y los radios vectores correspondientes a un punto tienen longitudes 3 y 7.**

$\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$

42 **Hallar la ecuación canónica de la elipse que pasa por el punto $\left(4, \frac{6}{5}\right)$ y su distancia focal es $2\sqrt{21}$.**

$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$

43 **Determina la ecuación de la elipse, referida a sus ejes, que pase por el punto (2, 3) y cuya excentricidad es $e = \frac{1}{2}$.**

$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$

44 **Halla la distancia focal y la excentricidad de la elipse $16x^2 + 25y^2 = 400$. Determina además la longitud de los radios vectores correspondientes al punto de abscisa 4.**

Distancia focal $2c = 6$; $e = \frac{3}{5}$; Punto P $\left(4, \frac{12}{5}\right)$, $PF = \frac{13}{5}$ y $PF' = \frac{37}{5}$

45 **Halla la intersección de la recta $y = 2x + 1$ y la elipse $x^2 + 4y^2 = 4$.**

$P(0, 1)$; $Q\left(-\frac{16}{17}, -\frac{15}{17}\right)$

46 **Mismo ejercicio para la recta $x + y - 5 = 0$ y la elipse $4x^2 + y^2 = 4$.**

Exteriores

47 **Mismo ejercicio para la recta $\sqrt{5}\,x + y - 18 = 0$ y la elipse $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{144} = 1$.**

$P(2\sqrt{5}, 8)$

48 **Hallar la ecuación de una elipse que tenga sus ejes sobre los ejes coordenados y pasa por los puntos C(2, 1) y D $(1, \sqrt{3})$.**

$2x^2 + 3y^2 = 11$

49 **Hallar la longitud de la cuerda interceptada por la elipse $x^2 + 2y^2 = 6$ sobre la recta $2x - y - 3 = 0$.**

$\frac{4\sqrt{5}}{3}$

50 **Hallar la excentricidad de una elipse sabiendo que la ordenada en el foco es 0,36 del semieje mayor.**

$e = 0{,}8$

51 **El meridiano terreste tiene aproximadamente la forma de una elipse. Hallar la excentricidad de la misma sabiendo que el radio polar mide 6 357 km y el radio ecuatorial 6 378 km.**

$$e = \frac{\sqrt{29715}}{2126} \simeq 0{,}081$$

52 **Hallar la ecuación de la elipse de semiejes 4 y 2, que tiene el centro en el punto (2, –3) y el efe focal paralelo al eje de abscisas.**

$$\frac{(x-2)^2}{16} + \frac{(y+3)^2}{4} = 1 \text{ ó } x^2 + 4y^2 - 4x + 24y + 24 = 0$$

53 **Halla la ecuación de la elipse de eje mayor 10 y distancia focal 8. Calcula también los radios vectores correspondientes al punto de la curva de abscisa $x = 3$.**

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1;\ PF' = \frac{37}{5};\ PF = \frac{13}{5}$$

54 **En una elipse se llama circunferencia directriz o focal a la que tiene centro en uno de los focos y radio el eje mayor. Una elipse tiene, por tanto, dos de estas circunferencias.**

Halla las ecuaciones de las circunferencias directrices de la elipse $5x^2 + 9y^2 = 180$ y haz su representación gráfica.

$x^2 + y^2 - 8x - 128 = 0;\quad x^2 + y^2 + 8x - 128 = 0$

55 **Encuentra la ecuación de la hipérbola referida a sus ejes que pasa por los puntos (3, 0) y (5, –3).**

$$\frac{x^2}{9} - \frac{16y^2}{81} = 1$$

56 **Los radios vectores de un punto de una hipérbola, referida a sus ejes, son 9 y 1 y su distancia focal 10. Halla su ecuación.**

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

57 **Encuentra la ecuación de una hipérbola de foco (10, 0) y excentricidad $e = \frac{5}{4}$.**

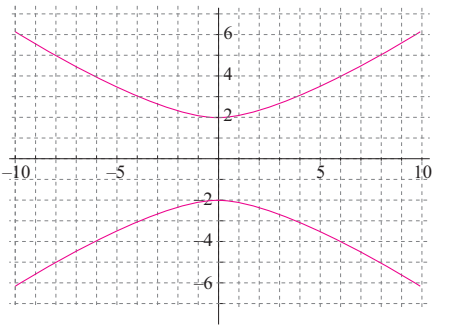
$$\frac{x^2}{100} - \frac{16y^2}{900} = 1$$

58 **Halla las coordenadas de los focos de la hipérbola $9x^2 - 16y^2 + 144 = 0$. ¿Cuál es su eje focal? Representación gráfica.**

Eje focal es $x = 0$; $F(0, 5)$, $F'(0, -5)$

59 **Hallar la distancia focal y la excentricidad de la hipérbola $x^2 - 3y^2 + 12 = 0$. Representar la curva.**

Distancia focal: 8; $e = 2$.



60 **Calcula las coordenadas del centro, de los focos y de los vértices y la excentricidad de las hipérbolas:**

a) $x^2 - 2y^2 - 2x + 4y - 5 = 0$

b) $9x^2 - 4y^2 - 16y + 20 = 0$

c) $x^2 - 9y^2 = 9$

d) $y^2 - x^2 = 9$

Haz la representación gráfica.

a) $C(1, 1)$; $F(1 + \sqrt{6}, 0)$, $F'(1 - \sqrt{6}, 0)$; $A(3, 0)$, $A'(-1, 0)$; $B(1, 1 + \sqrt{2})$, $B'(1, 1 - \sqrt{2})$; $e = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$

b) $C(0, -2)$; $F(0, \sqrt{13} - 2)$, $F'(0, -\sqrt{13} - 2)$; $A(0, 1)$, $A'(0, -5)$; $B(-2, -2)$ $B'(2, -2)$; $e = \dfrac{\sqrt{13}}{3}$

c) $C(0, 0)$; $F(4, 0)$ $F'(-4, 0)$; $A(2\sqrt{2}, 0)$; $B(0, 2\sqrt{2})$ $B'(0, -2\sqrt{2})$; $e = \sqrt{2}$

d) $C(0, 0)$; $F(0, 3\sqrt{2})$ $F'(0, -3\sqrt{2})$; $A(0, 3)$ $A'(0, -3)$; $B(3, 0)$ $B'(-3, 0)$; $e = \sqrt{2}$

61 **Hallar los puntos de intersección de la hipérbola $x^2 - 2y^2 = 7$ y la circunferencia $x^2 + y^2 - 12x + 26 = 0$.**

$P_1(5, -3)$; $P_2(3, -1)$; $P_3(3, 1)$; $P_4(5, 3)$

62 **Determina la ecuación de una hipérbola que tiene por asíntotas las rectas $y = \pm\frac{x}{2}$ y pasa por $P(5, 2)$.**

$x^2 - 4y^2 = 9$

63 **Hallar la ecuación de la hipérbola de ejes sobre los ejes coordenados y que pase por los puntos $P(2, 1)$ y $Q(4, 4)$. Halla también la distancia focal y la excentricidad.**

$\frac{5x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$; Distancia focal: $\frac{12\sqrt{5}}{5}$; $e = \frac{3}{2}$

64 **a) Justifica que la recta $2x - y - 1 = 0$ es tangente a la hipérbola $3x^2 - y^2 = 3$ y determina el punto de tangencia T.**

b) Halla los puntos de corte de dicha recta tangente con las asíntotas de la hipérbola. Sean estos P y Q.

c) Demuestra que el punto de tangencia T es el punto medio del segmento PQ.

a) $T(2, 3)$

b) $P\left(\frac{1}{2-\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}\right)$; $Q\left(\frac{1}{2+\sqrt{3}}, \frac{-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right)$

Las asíntotas son $y = \pm\sqrt{3}\,x$

65 **Halla la ecuación de la hipérbola equilátera de distancia focal 10.**

$\frac{2x^2}{25} - \frac{2y^2}{25} = 1$

66 **Encuentra la ecuación de una hipérbola, de ejes los ejes coordenados, sabiendo que pasa por el (8, 0) y que una asíntota es la recta $5x + 4y = 0$.**

$100x^2 - 64y^2 = 6400$

67 **Hallar la ecuación de la parábola que tiene por foco el punto (0, 4) y por directriz el eje OX. ¿Cuál es la tangente en el vértice?**

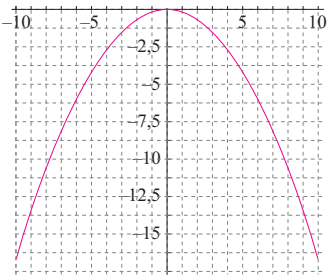
$\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{100} = 1$

68 **Halla la ecuación de la parábola, cuyo vértice coincide con el origen y cuyo eje con el de abscisas, que tiene por directriz la recta $x + 1 = 0$.**

$y^2 = 4x$

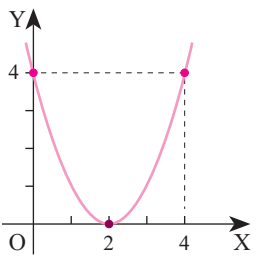
69 **Foco, directriz y gráfica de la parábola $x^2 = -6y$.**

$F\left(0, -\frac{3}{2}\right)$; directriz $y = \frac{3}{2}$



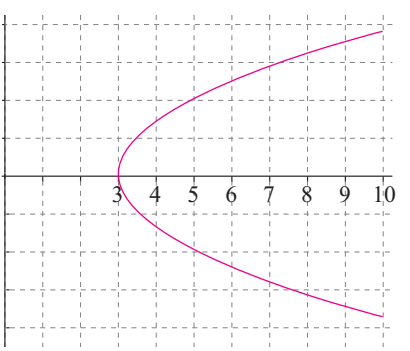
70 **Halla los elementos y representa gráficamente la parábola de ecuación $y = (x - 2)^2$.**

Eje de la parábola $x = 2$; $F\left(2, \frac{1}{4}\right)$; directriz $y = -\frac{1}{4}$; $V(2, 0)$



71 **Mismo ejercicio para la parábola $y^2 = 2x - 6$.**

$F\left(\frac{7}{2}, 0\right)$; directriz $y = \frac{5}{2}$



72 **Hallar la ecuación, el vértice y el foco de una parábola de eje paralelo a *OY* sabiendo que pasa por los puntos *M*(1, 5), *N*(4, 8) y *P*(6, 0).**

$y = -x^2 + 6x$; $V(3, 9)$; $F\left(3, \frac{35}{4}\right)$

73 **Hallar la ecuación de una parábola de eje paralelo a *OY* sabiendo que pasa por el punto (2, –2) y tiene el vértice en *V*(1, 1).**

$(y-1)^2 = 9(x-1)$ ó $y^2 - 9x + 2y + 10 = 0$

74 **Hallar vértice, foco, eje y directriz de las parábolas:**

a) $y = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 3$

b) $x^2 + 4x - 6y + 7 = 0$

c) $3x + 4y^2 + 4y - 2 = 0$

a) $V(4, -1)$; $F(4, 0)$; eje $x = 4$; directriz $y = -2$

b) $V\left(-2, \frac{1}{2}\right)$; $F(-2, 2)$; eje $x = -2$; directriz $y = -1$

c) $V\left(1, -\frac{1}{2}\right)$; $F\left(\frac{13}{16}, -\frac{1}{2}\right)$; eje $y = -\frac{1}{2}$; directriz $x = \frac{19}{16}$

75 **Hallar la longitud de la cuerda limitada por la parábola $y^2 = 8x$ sobre la recta $2x - y - 3 = 0$.**

$4\sqrt{5}$

76 **Calcula el valor de *n* para que la recta $y = 3x + n$ sea tangente a la parábola $y = 3x^2 + 4$.**

$n = \frac{13}{4}$ y el punto T

77 **Halla la ecuación de la parábola de vértice el punto (1, –1) sabiendo que es de eje paralelo al de ordenadas y que pasa por el punto (2, 2).**

$(y+1)^2 = 9(x-1)$ ó $y^2 - 9x + 2y + 10 = 0$

78 **Utiliza la definición para hallar la ecuación de la parábola que tiene por foco el punto (0, 2) y por directriz $x - 2y = 0$.**

$4x^4 + y^2 + 4xy - 20y + 20 = 0$

Tema 11 LAS FUNCIONES

1 **Determina el dominio de las siguientes funciones:**

a) $f(x) = \dfrac{3}{x-4}$; b) $g(x) = \sqrt{x^2+1}$; c) $h(x) = \dfrac{3x}{x^2-4}$;

d) $i(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}}{x}$; e) $j(x) = \sqrt{x^2-5x+6}$

a) D(f) = R – {4} =]–∞, 4[∪]4, +∞[

b) D(g) = R

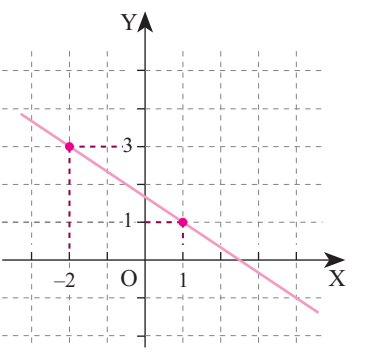
c) D(h) = R – {–2, 2} =]–∞, –2[∪]–2, 2[∪]2, +∞[

d) D(i) = R – {x / $x < -1$, $x = 0$} = [–1, 0[∪]0, + ∞[

e) D(j) = R – {x / $2 < x < 3$} =]–∞, 2] ∪ [3, +∞[

2 **Determina y representa la función afín de la que se sabe que $f(-2) = 3$ y $f(1) = 1$.**

$f(x) = -\dfrac{2}{3}x + \dfrac{5}{3}$



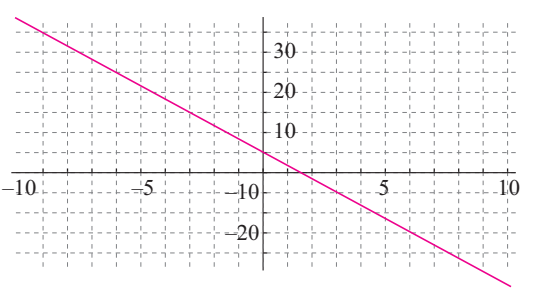
3 **Representa las funciones siguientes:**

a) $f(x) = -3x + 5$

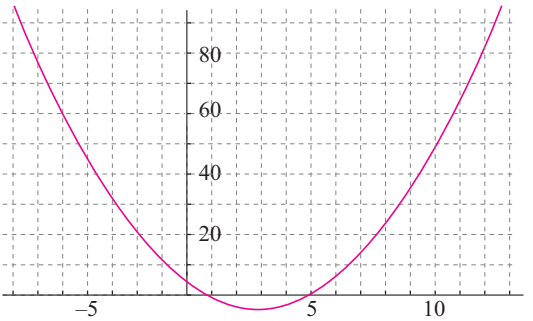
b) $g(x) = x^2 - 6x + 5$

c) $h(x) = -x^2 + 4x$

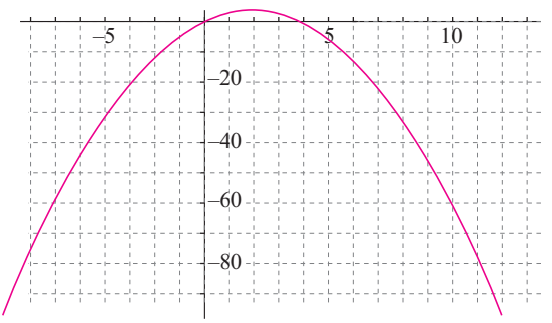
a)



b)



c)



4 **Representa gráficamente las funciones:**

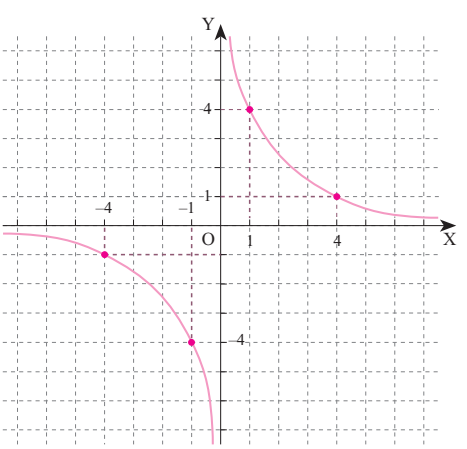
a) $f(x) = \dfrac{4}{x}$;

b) $g(x) = \dfrac{-1}{x}$

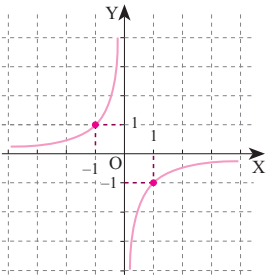
c) $h(x) = \dfrac{2x}{x-3}$

d) $j(x) = \dfrac{3x+2}{2x-4}$

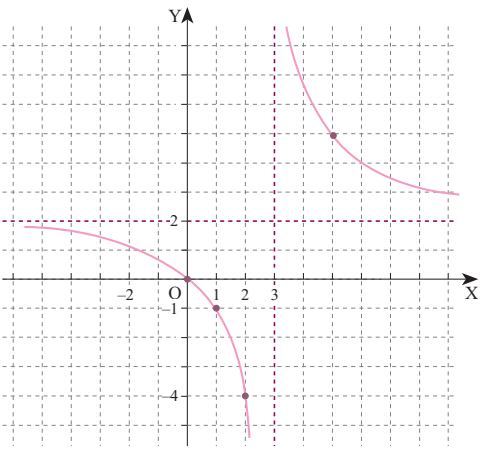
a)



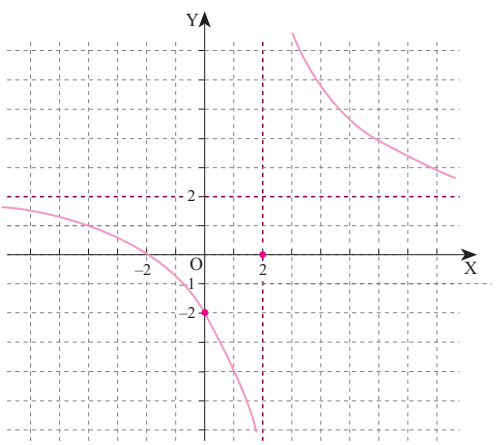
b)



c)



d)

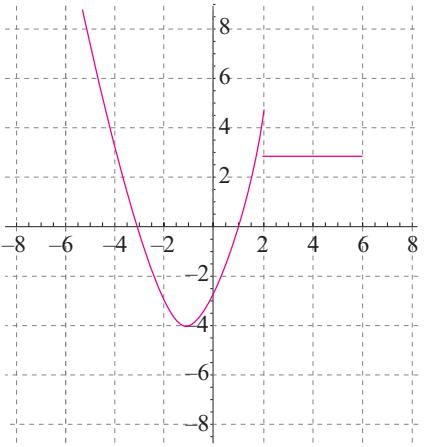


5 **Representa las funciones:**

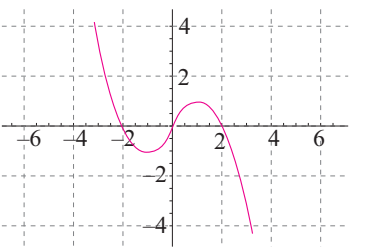
a) $f(x) = \begin{cases} -3x - 9 & \text{si} \quad x < -2 \\ x^2 + 2x - 3 & \text{si} \quad -2 \le x < 2 \\ 3 & \text{si} \quad x \ge 2 \end{cases}$;

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & \text{si } x < 0 \\ 2x - x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

a)



b)

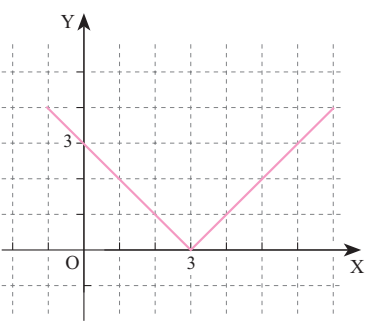


6 **Representa gráficamente las funciones:**

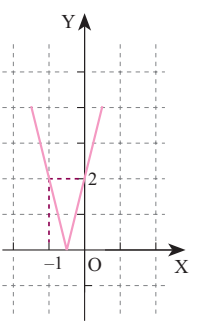
a) $f(x) = |x - 3|$ **b)** $g(x) = |4x + 2|$

c) $h(x) = |x^2 - 4|$ **d)** $j(x) = |3x - x^2|$

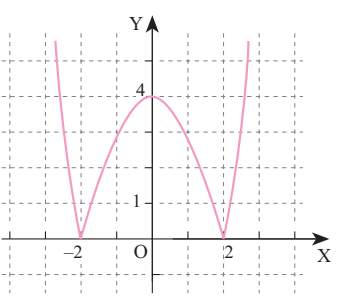
a)



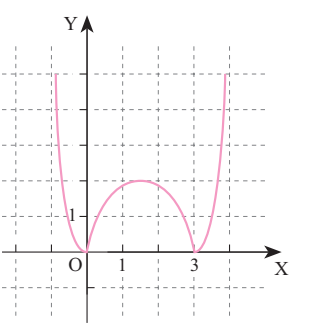
b)



c)



d)



7 **Dadas las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = \dfrac{1}{1-x}$, se pide hallar si es posible las funciones f o g y g o f y sus dominios.**

$(f \circ g)\ (x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$; $D(f \circ g) = \mathrm{R} - \{1\}$

$(g \circ f)\ (x) = \dfrac{1}{1-x^2}$; $D(g \circ f) = \mathrm{R} - \{-1, 1\}$

8 **Mismo ejercicio para las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = \dfrac{1}{x}$. ¿Se puede deducir que la composición de funciones es conmutativa?**

$(f \circ g)(x) = \dfrac{1}{x^2}$, $\quad D(f \circ g) = \mathrm{R} - \{0\}$

$(g \circ f)(x) = \dfrac{1}{x^2}$, $\quad D(g \circ f) = \mathrm{R} - \{0\}$

9 **Dadas las funciones $f(x) = 2 - 3x - x^2$ y $g(x) = \sqrt{x^2 - 7}$, halla si es posible $(f \circ g)(-1)$ y $(g \circ f)(-1)$.**

$(f \circ g)(-1)$ no existe

$(g \circ f)(-1) = 3$

10 **Halla el dominio de las funciones:**

a) $f(x) = 3x^2 + x - 2$ **b)** $f(x) = x^5 + 7x^4 - 1$ **c)** $f(x) = \dfrac{3}{x^2 + 1}$

d) $f(x) = \dfrac{3}{x^2 - 1}$ **e)** $f(x) = \sqrt{x + 4}$ **f)** $f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$

a) R **b)** R **c)** R

d) R – {1, –1} **e)** [–4, +∞[**f)** R

11 **Halla el dominio de las funciones:**

a) $f(x) = \sqrt{x^2 + x - 6}$ **b)** $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+2}{x-3}}$

c) $f(x) = \sqrt{x(x-2)}$ **d)** $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}}{x-1}$

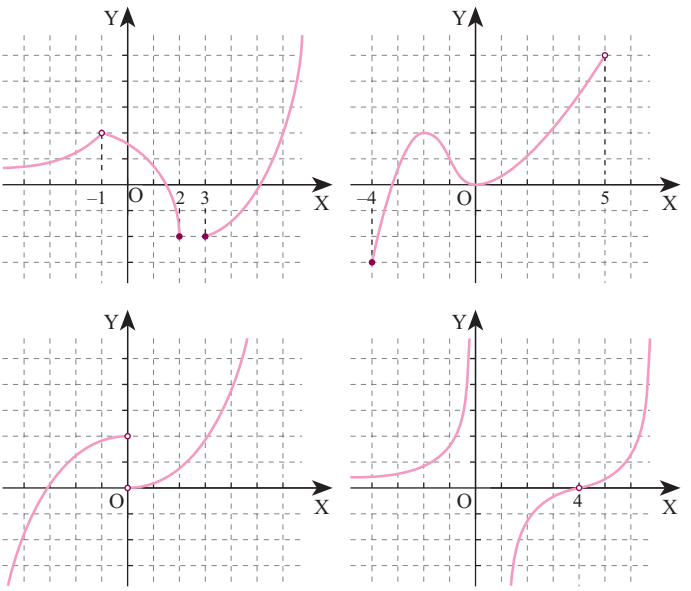
a) $D(f) = \mathrm{R} -]-3, 2[=]-\infty, -3] \cup [2, +\infty[$

b) $D(f) = \mathrm{R} -]-2, 3] =]-\infty, -2] \cup]3, +\infty[$

c) $D(f) = \mathrm{R} -]0, 2[=]-\infty, 0] \cup [2, +\infty[$

d) $D(f) = \mathrm{R} - \{]-\infty, -1[, 1\} = [-1, 1[\cup]1, +\infty[$

12 **Determina el dominio y el recorrido de las funciones representadas en las gráficas siguientes.**



a) D(f) =]–∞, –1[∪]–1, 2] ∪ [3, +∞[

b) D(f) = [–4, 5[

c) D(f) =]–∞, 0[∪]0, +∞[= R – {0}

d) D(f) =]–∞, 0[∪]1, +∞[

13 **Determina la ecuación de la función afín *f* determinada en cada uno de los siguientes casos:**

a) *f*(–1) = 4 y *f*(3) = 0.

b) Su gráfica pasa por los puntos *A*(–2, 2) y *B*(3, 1).

c) Su gráfica tiene pendiente 2 y pasa por *P*(–2, 0)

d) *f*(4) = –1 y su gráfica tiene ordenada en el origen 3.

a) $f(x) = -x + 3$

b) $f(x) = -\frac{1}{5}x + \frac{8}{5}$

c) $f(x) = 2x + 4$

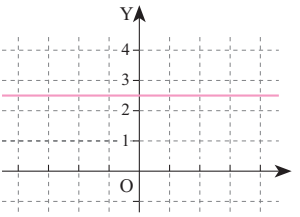
d) $f(x) = -x + 3$

14 **Representa gráficamente las funciones:**

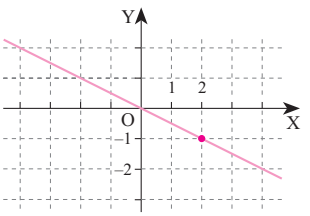
a) $f(x) = \frac{5}{2}$ **b)** $f(x) = \frac{-x}{2}$

c) $f(x) = \frac{2}{3} - \frac{x}{2}$ **d)** $f(x) = \frac{3}{5}x + 1$

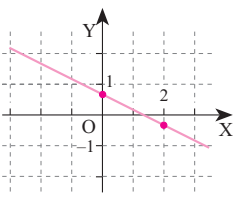
a)



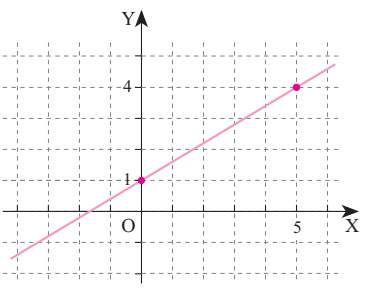
b)



c)



d)



15 **Mismo ejercicio:**

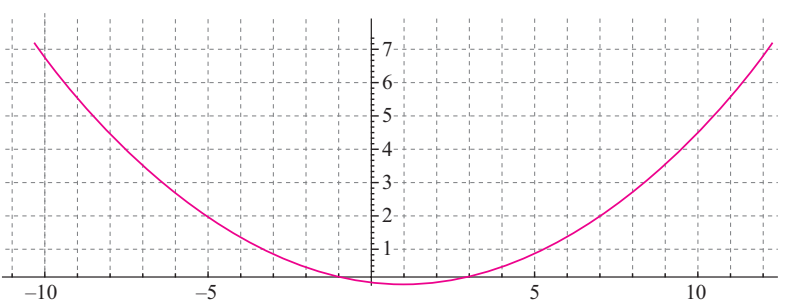
a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{16}$

b) $f(x) = -x^2 + 2x - 8$

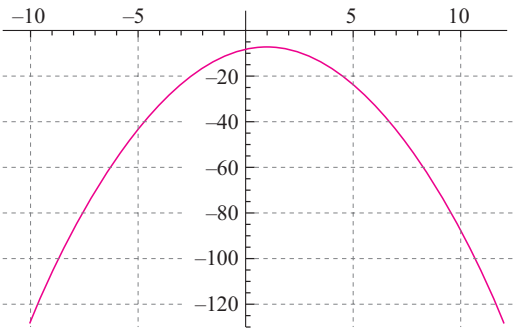
c) $f(x) = x^2 - 8x + 9$

d) $f(x) = 0{,}25x^2 + x - 2$

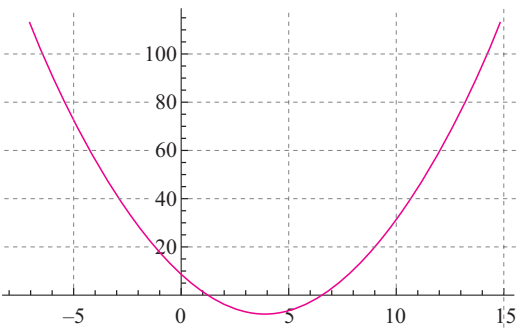
a)



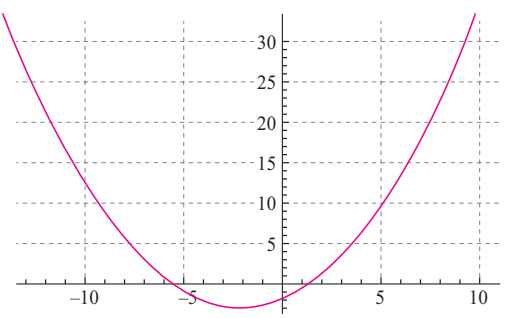
b)



c)



d)



16 **Mismo ejercicio:**

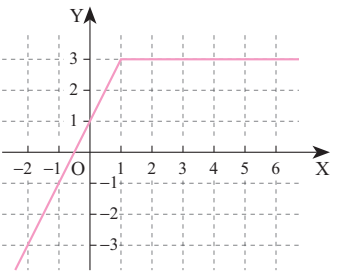
a) $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x \leq 1 \\ 3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} -2x + 5 & \text{si } x \in [-2, 2[\\ \dfrac{x^2}{8} & \text{si } x \in [2, 4[\end{cases}$

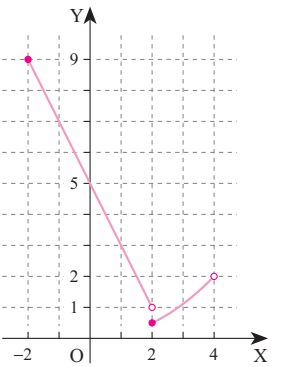
c) $f(x) = \begin{cases} -(x + 2)^2 + 4 & \text{si } x \in [-5, 0[\\ 3 & \text{si } x = 0 \\ (x - 2)^2 - 4 & \text{si } x \in]0, 5] \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [-5, -2] \\ \dfrac{3x+5}{2} & \text{si } x \in]-2, 1[\\ 5 - x & \text{si } x \in [1, 5] \end{cases}$

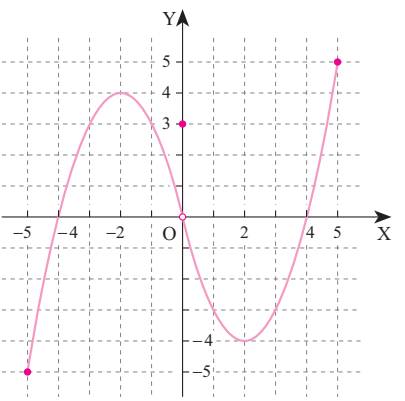
a)



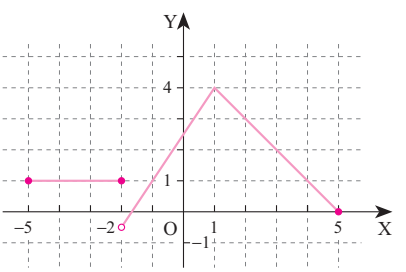
b)



c)



d)

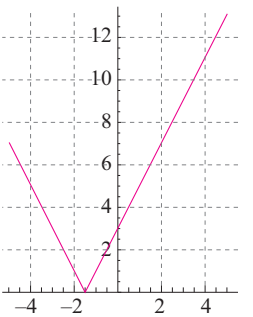


17 **Mismo ejercicio:**

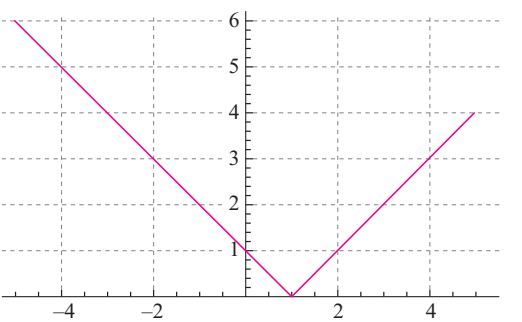
a) $f(x) = |2x + 3|$ **b)** $f(x) = |1 - x|$

c) $f(x) = |x^2 - 4|$ **d)** $f(x) = |x + 1| + 1$

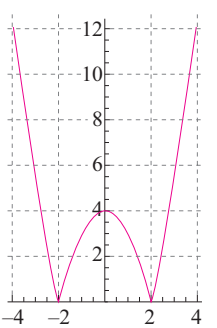
a)



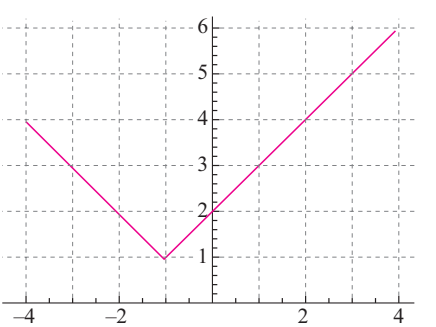
b)



c)



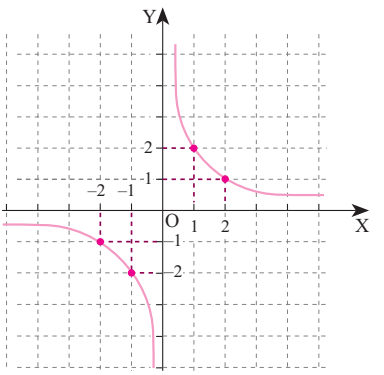
d)



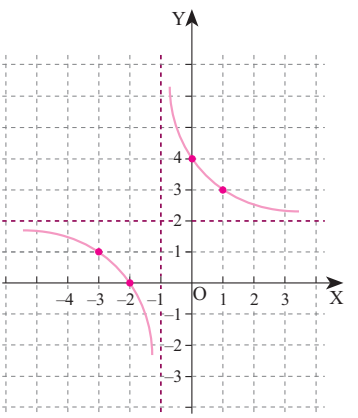
18 **Representa las funciones:**

a) $f(x) = \dfrac{2}{x}$ b) $f(x) = \dfrac{-4}{x}$ c) $f(x) = \dfrac{2x+4}{x+1}$ d) $f(x) = \dfrac{3x-2}{2x+4}$

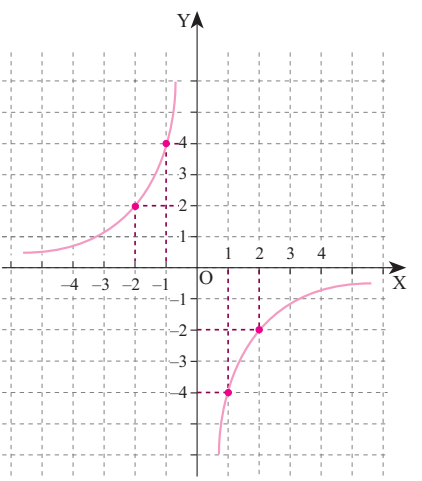
a)



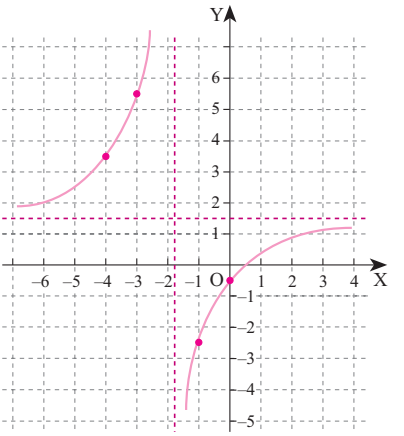
b)



c)



d)



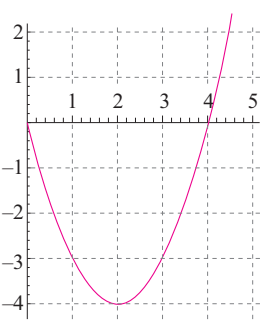
19 **Representa las siguientes funciones en el intervalo indicado:**

a) $f(x) = x^2 - 4x, \quad x \in [0, 5]$

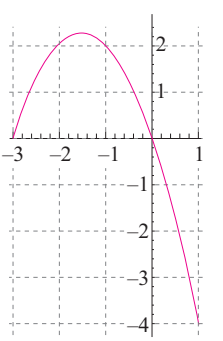
b) $f(x) = -3x - x^2, \quad x \in [-3, 1]$

c) $f(x) = \dfrac{2x + 1}{x - 3}, \quad x \in [0, 6] - \{3\}$

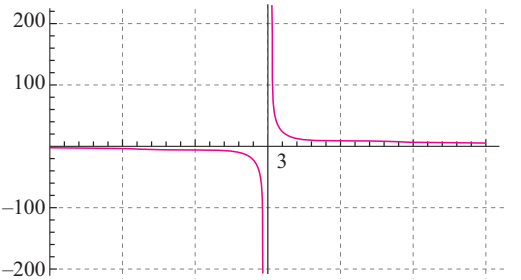
a)



b)



c)



20 **Siendo $f(x) = 5^{x+2}$ y $g(x) = (x + 2)^2$ halla:**

a) $(f \circ g)(-1)$ **b) $(f \circ g)(0)$**

c) $(g \circ f)(-3)$ **d) $(g \circ f)(-2)$**

a) $(f \circ g)\ (-1) = 125$ **b)** $(f \circ g)\ (0) = 15625$

c) $(g \circ f)\ (-3) = 125$ **d)** $(g \circ f)\ (-2) = 25$

21 **Halla $g \circ f$ y $D(g \circ f)$ para las funciones:**

a) $f(x) = x^2 + 3x$; $g(x) = 5x + 1$

b) $f(x) = 1 - 2x$; $g(x) = x^2 + x$

c) $f(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$; $g(x) = x^2$

d) $f(x) = \dfrac{1}{x}$; $g(x) = \sqrt{x^2 + 2}$

a) $(g \circ f)(x) = 5x^2 + 15x + 1$; $D(g \circ f) = \mathbb{R}$

b) $(g \circ f)(x) = 4x^2 - 6x + 2$; $D(g \circ f) = \mathbb{R}$

c) $(g \circ f)(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 2x + 1}$; $D(g \circ f) = \mathbb{R} - \{1\}$

d) $(g \circ f)(x) = \dfrac{\sqrt{2x^2 + 1}}{x}$; $D(g \circ f) = \mathbb{R} - \{0\}$

22 **Dadas las funciones $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$; $g(x) = \dfrac{1}{1-x}$, $x \in \mathbb{R} - \{1\}$.**

Hallar las funciones $f \circ g$ y $g \circ f$ y comprueba que $D(f \circ g) = \mathbb{R} - \{1\}$ y $D(g \circ f) = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

$(f \circ g)\ (x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$

$(g \circ f)\ (x) = \dfrac{1}{1-x^2}$

23 **Dadas las funciones $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in \mathbb{R}^+$; $g(x) = x^2 + 1$, $x \in \mathbb{R}^+$. Hallar las funciones $g \circ f$ y $f \circ g$ en $\mathbb{R}^+$ y comprobar que los resultados son distintos.**

$(g \circ f)(x) = x + 1$; $D(g \circ f) = \mathbb{R}^+$

$(f \circ g)(x) = \sqrt{x^2 + 1}$; $D(f \circ g) = \mathbb{R}$

24 **Indica cuáles de las siguientes funciones admiten función inversa respecto de la composición de funciones y halla su expresión cuando sea posible.**

a) $f(x) = 2 - 3x$ **b)** $f(x) = \sqrt{x}$

c) $f(x) = \dfrac{3}{x-2}$ **d)** $f(x) = x^2 - x$

e) $f(x) = \dfrac{x+2}{x+3}$ **f)** $f(x) = \dfrac{3-x}{5}$

a) $f^{-1}(x) = \dfrac{2-x}{3}$ **b)** $f^{-1}(x) = x^2$

c) $f^{-1}(x) = \dfrac{2x+3}{x}$ **d)** No tiene inversa

e) $f^{-1}(x) = \dfrac{2-3x}{x-1}$ **f)** $f^{-1}(x) = 3 - 5x$

25 **Si $f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$ y $g(x) = \dfrac{x-2}{x+1}$ ¿es $(g \circ f)(x) = \dfrac{5-x}{2x-1}$?**

a) Calcula $(g \circ f)(1/2)$. ¿qué ocurre al calcular $g(f(1/2))$?

b) ¿Qué restricciones de f y g se han de tomar para que exista $g \circ f$?

Si, $(g \circ f)(x) = \dfrac{5-x}{2x-1}$

a) $(g \circ f)\left(\dfrac{1}{2}\right)$ no existe. Se anula el denominador. Al calcular $g\left(f\left(\dfrac{1}{2}\right)\right)$ se tiene que $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = -1$ y $g(-1)$ no existe.

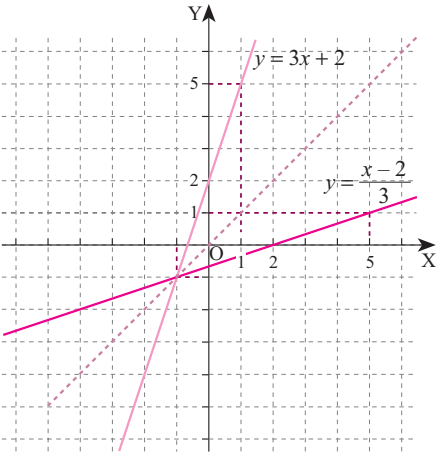
b) Para que exista f, $x \neq 2$. Para que exista g, $x \neq -1$. Para que exista $g \circ f$, $x \neq 2$ y $x \neq \dfrac{1}{2}$.

26 **Representa en un mismo sistema de referencia las funciones f y f^{-1} siendo:**

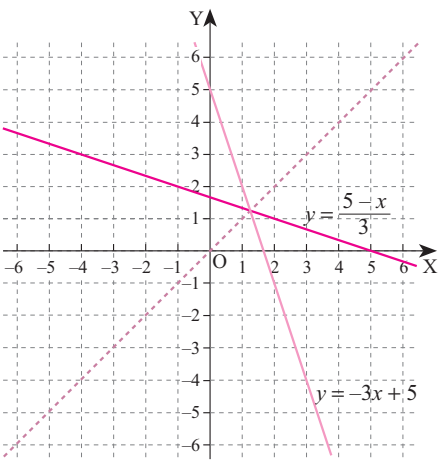
a) $f(x) = 3x + 2$ **b)** $f(x) = -3x + 5$

c) $f(x) = 3 - 4x$ **d)** $f(x) = \dfrac{x+3}{2}$

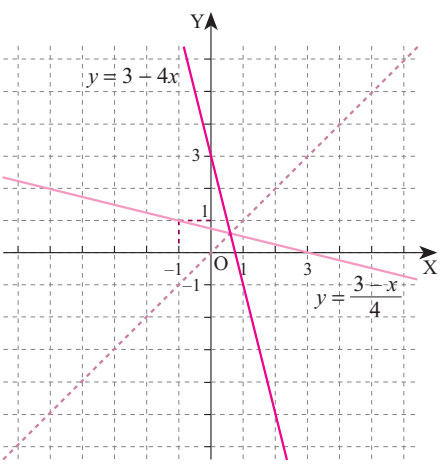
a)



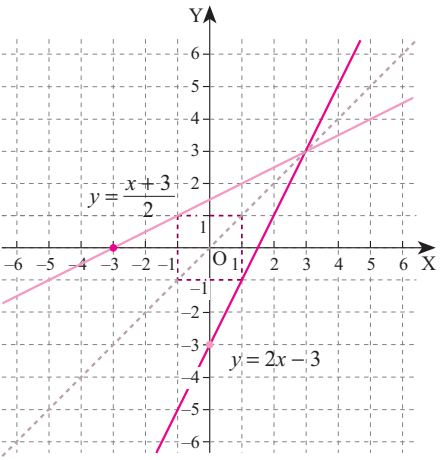
b)



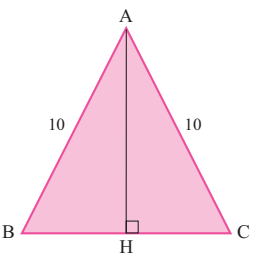
c)



d)



27 **Se considera un triángulo isósceles *ABC* con *AB* = *AC* = 10 cm y *BC* = *x* cm. Sea *S*(*x*) la superficie del triángulo *ABC* en función de la longitud del lado BC.**



a) Demuestra que el área del triángulo en función de la longitud *x* del lado *BC* es

$$S(x) = \frac{x}{4}\sqrt{400 - x^2}$$

b) Determina el dominio de la función *S*.

c) Completa una tabla de valores del intervalo [0, 20] y haz una gráfica aproximada de la función *S*.

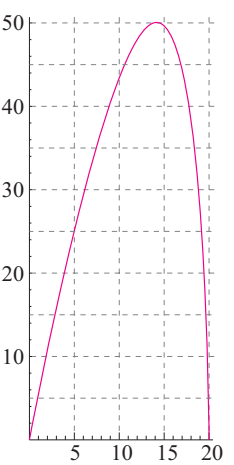
d) ¿Para qué valor de *x* piensas que el triángulo tendrá una superficie máxima?

a) Por Pitágoras $h = \frac{1}{2}\sqrt{400 - x^2} \Rightarrow S(x) = \frac{x}{4}\sqrt{400 - x^2}$

b) $D(S) = \{x / 0 \leq x \leq 20\} = [0, 20]$

c)

x	$S(x)$
0	0
2	9,95
4	19,60
6	28,62
8	36,66
10	43,30
12	48
14	49,99
16	48
18	39,23
20	0



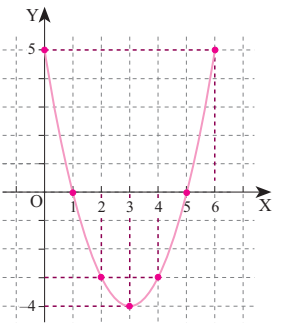
d) Para $x = 14$

28 **Sea la función $f(x) = x^2 - 6x + 5$ definida para $x \in [0, 6]$.**

a) Haz la representación gráfica.

b) Utiliza esta gráfica para resolver la inecuación $x^2 - 6x + 5 \leq -3$.

a)



b) $x \in [2, 4]$

29 **Las ventas V de un nuevo juego de ordenador se vende según la ley $V(t) = 7560 + 60t - 30t^2$ donde t es el tiempo medido en semanas.**

a) ¿En qué semana no se vende ningún juego de ordenador?

b) Representa la función en el intervalo [0, 4] e indica en qué momento crees que las ventas alcanzan un máximo.

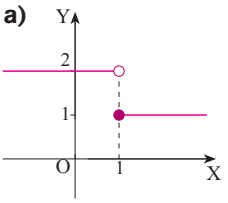
a) En la segunda semana.

b) Las ventas alcanzarán el máximo en la primera semana.

Tema 12 LÍMITES DE FUNCIONES. CONTINUIDAD

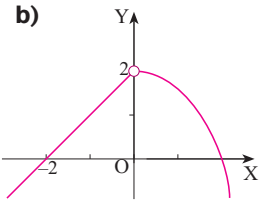
1 **Observa las siguientes gráficas y determina cuál es el límite de cada una de las funciones en los puntos que se indican:**

a)



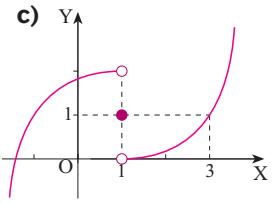
en $x = 0$ y $x = 1$

b)



en $x = -2$ y $x = 0$

c)



en $x = 1$ y $x = 3$

a) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 2$; $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 2$; $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 1$

$f(x)$ no tiene límite cuando $x \to 1$

b) $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 2$

c) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 2$; $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 0$; $f(x)$ no tiene límite cuando $x \to 1$; $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 1$

2 **Dadas**

$$f(x) = x^2 - 5x$$

$$g(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{si } x \leq -2 \\ 3 & \text{si } -2 < x < 2 \\ 5 - x^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

determina, si es posible el límite de cada una de ellas en los puntos de abscisa $x = -2$, $x = 0$ y $x = 2$.

$\lim\limits_{x \to -2} f(x) = 14$; $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = -6$;

$\lim\limits_{x \to -2} g(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$ no existe; $\lim\limits_{x \to 2} g(x) = 4$

$\lim\limits_{x \to -2} h(x) = 3$; $\lim\limits_{x \to 0} h(x) = 3$; $\lim\limits_{x \to 2} h(x)$ no existe

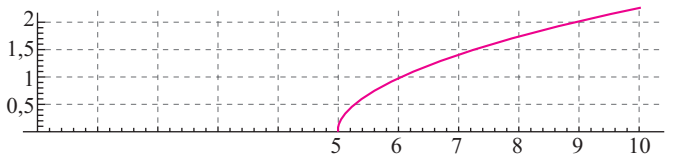
3 **Representa cada una de las funciones siguientes y halla los límites laterales en los puntos indicados.**

a) $f(x) = \sqrt{x - 5}$ **en $x = 5$**

b) $g(x) = \begin{cases} x \text{ si } x \neq 2 \\ 4 \text{ si } x = 2 \end{cases}$ **en $x = 2$**

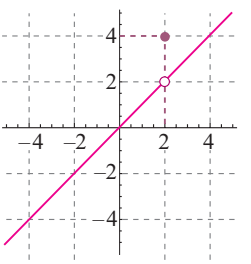
c) $h(x) = \begin{cases} x^2 - 1 \text{ si } x \leq 0 \\ x - 1 \text{ si } x > 0 \end{cases}$ en $x = 0$

a)



$\lim_{x \to 5^-} f(x)$ no existe; $\lim_{x \to 5^+} f(x) = 0$

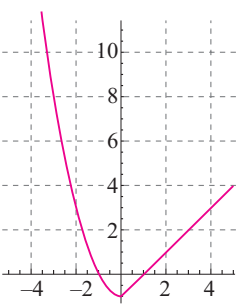
b)



$\lim_{x \to 2^-} g(x) = 2$

$\lim_{x \to 2^+} g(x) = 2$

c)



$\lim_{x \to 0^-} h(x) = -1$

$\lim_{x \to 0^+} h(x) = -1$

4 **Estudia si las gráficas de las funciones dadas poseen asíntotas verticales y ayúdate de una tabla de valores para dibujar la gráfica de la función en las proximidades de dicha asíntota.**

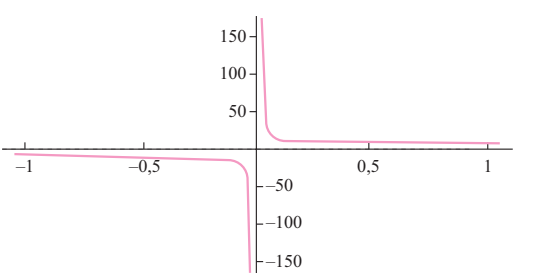
a) $f(x) = \dfrac{x+2}{x}$

b) $f(x) = \dfrac{1}{2(x^2 - x)}$

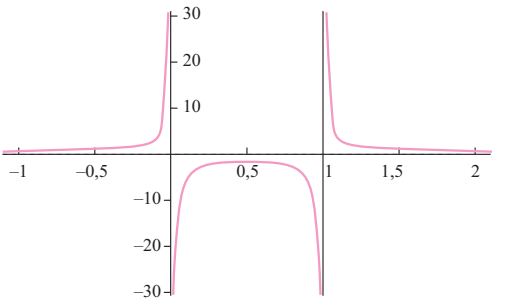
c) $f(x) = \dfrac{-2}{(1+x)^2}$

d) $f(x) = \dfrac{3-x}{x^2}$

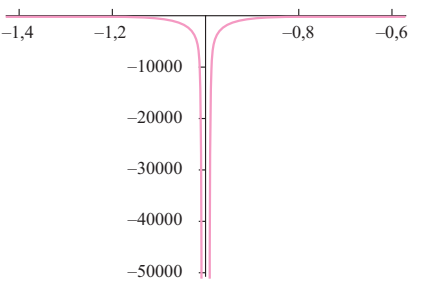
a) $x = 0$



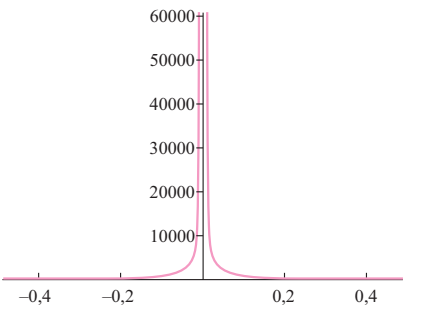
b) $x = 0$ y $x = 1$



c) $x = -1$



d) $x = 0$



5 **Calcula los siguientes límites:**

a) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2 + 4}{x - 2}$

b) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{2x + 6}{3}$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 + x}{x}$

d) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{2x + 4}{x - 4}$

e) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 2x}{x^2 + 3x - 10}$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} (2 - 3x^2)$

g) $\lim\limits_{x \to +\infty} (-3x^3 + 5x - 1)$

h) $\lim\limits_{x \to -\infty} (3x^2 - 5x^3)$

i) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{6x^2 - 3x + 1}{2x^2 + 5}$

j) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{5 - 4x^2}{(x + 3)^2}$

k) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{6x + x^2 - x^3}{3 + 2x^2}$

l) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3 + 3x - 5}{(2 + x)(2 - x)}$

a) -2; **b)** 0; **c)** 1; **d)** Por la izquierda $-\infty$. Por la derecha $+\infty$; **e)** $\frac{2}{7}$; **f)** $-\infty$; **g)** $-\infty$; **h)** $+\infty$; **i)** 3; **j)** -4; **k)** $-\infty$; **l)** $-\infty$

6 **Dada la función** $f(x) = \begin{cases} x+3 \text{ si } x \leq 1 \\ -x+1 \text{ si } x > 1 \end{cases}$ **. Completar la tabla:**

x	0,9	0,99	0,999	0,9999	$\ldots \to 1^-$
$f(x)$	3,9	3,99	3,999	3,9999	$\ldots \to 4$

x	1,1	1,01	1,001	1,0001	$\ldots \to 1^+$
$f(x)$	–0,1	–0,01	–0,001	–0,0001	$\ldots \to 0$

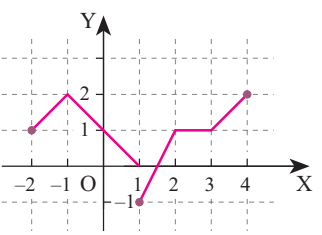
a) ¿Podemos decir que $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 4$ **y** $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 0$**?**

b) ¿Existe $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$**?**

a) si, si

b) no

7 **Observa la gráfica siguiente:**



Indicar, si existen, los límites siguientes:

a) $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x)$ **b)** $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$ **c)** $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$ **d)** $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$

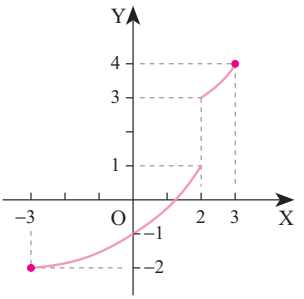
e) $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$ **f)** $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ **g)** $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x)$ **h)** $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x)$

a) 2; **b)** 2; **c)** 2; **d)** 0; **e)** -1; **f)** no existe; **g)** 1; **h)** 2

8 **Haz una gráfica posible de una función que cumpla las cuatro condiciones siguientes:**

$D(f) = [-3, 3]$; $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 1$; $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 3$; $f(0) = -1$

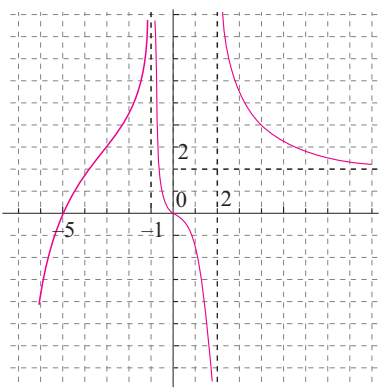
Por ejemplo:



9 **Haz una gráfica posible de una función que cumpla las siguientes condiciones:**

$\lim_{x\to-\infty} f = -\infty$; $f(-5) = 0$; $\lim_{x\to-1} f(x)$; $f(0) = 0$; $\lim_{x\to 2^-} f = -\infty$; $\lim_{x\to 2^+} f = +\infty$;

$\lim_{x\to+\infty} f = 2$

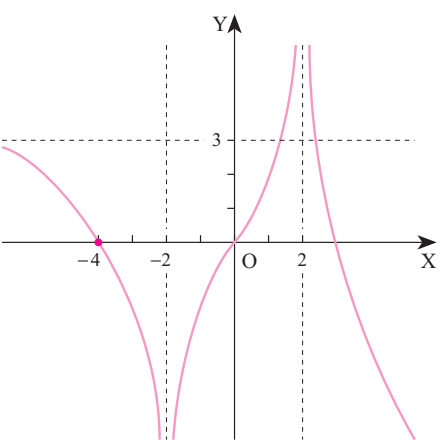


10 **Dibuja la gráfica de una función que cumpla las siguientes condiciones:**

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 3$; $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x\to-2} f(x) = -\infty$; $\lim_{x\to 2} f(x) = +\infty$

$f(-4) = 0$ y $f(0) = 0$

Por ejemplo:



11 **Dada la función** $f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x < -3 \\ x^2 - 6 & \text{si } -3 \le x \le 3 \\ 1 & \text{si } x > 3 \end{cases}$ **, indica si existe el límite de la función en** $x = -3$ **y en** $x = 1$**.**

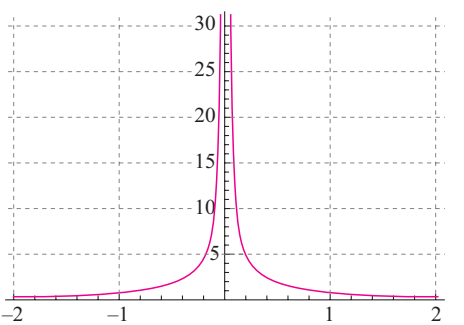
$\lim_{x \to -3} f(x) = 3$ **;** $\lim_{x \to 1} f(x) = 5$

12 **Dada la función** $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{si } x \neq 1 \\ 2 & \text{si } x = 1 \end{cases}$ **estudia su límite cuando** $x \to 1$**.**

2

13 **Sea la función** $f(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{x} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$ **. Ayúdate de su gráfica para decir cuáles son los siguientes límites:**

$\lim_{x \to 0^-} f(x)$; $\lim_{x \to 0^+} f(x)$; $\lim_{x \to 0} f(x)$

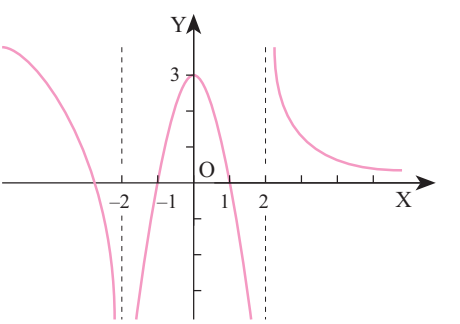


$\lim_{x \to 0^-} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$

14 **A la vista de la gráfica de la figura, contesta a las siguientes cuestiones:**



a) $\lim_{x\to-\infty} f(x) =$

b) $\lim_{x\to-2} f(x) =$

c) $\lim_{x\to-1} f(x) =$

d) $\lim_{x\to0} f(x) =$

e) $\lim_{x\to2^-} f(x) =$

f) $\lim_{x\to2^+} f(x) =$

g) $\lim_{x\to+\infty} f(x) =$

h) $f(0) =$

a) $+\infty$

b) $-\infty$

c) 0

d) 3

e) $-\infty$

f) $+\infty$

g) 0

h) 3

15 **a) Determina los límites laterales de la función $f(x) = \dfrac{3-4x}{(x+1)^2}$ en $x = 1$.**

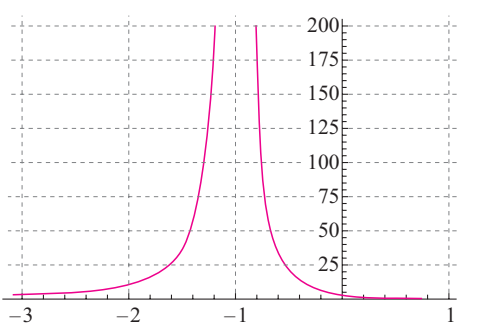
b) Justifica que la gráfica de la función tiene una asíntota vertical.

c) Dibuja la gráfica de la función en las proximidades de dicha asíntota.

a) $\lim_{x\to1} f(x) = -\dfrac{1}{4}$

b) Tiene asíntota vertical en la recta $x = -1$ porque los límites laterales en ese punto son mas infinito.

c)



16 **Determina las asíntotas de las funciones siguientes y representa gráficamente el comportamiento de la función en sus proximidades:**

a) $f(x) = \dfrac{x+5}{x+3}$

b) $f(x) = \dfrac{3x^2+1}{x^2-4}$

c) $f(x) = \dfrac{-3}{x+2}$

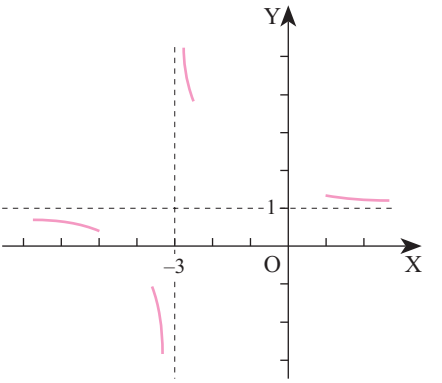
d) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-4x+3}$

e) $f(x) = \dfrac{4x}{x^2-x-2}$

f) $f(x) = \dfrac{2}{x^2+4}$

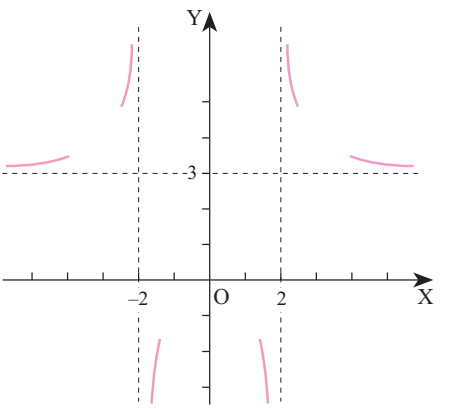
a) Horizontal $y = 1$

Vertical $x = -3$



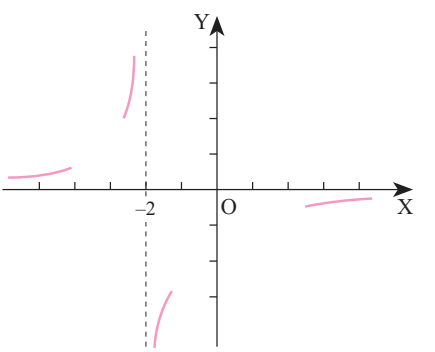
b) Horizontal $y = 3$

Vertical $x = 2,\ x = -2$



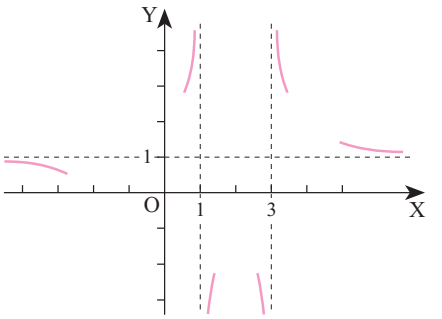
c) Horizontal $y = 0$

Vertical $x = -2$



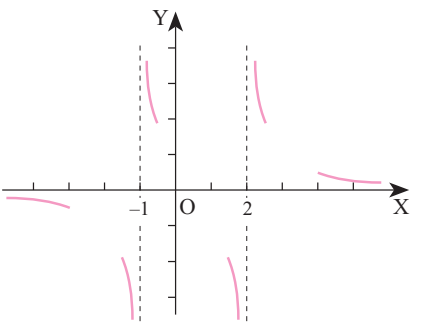
d) Horizontal $y = 1$

Vertical $x = 3,\ x = 1$



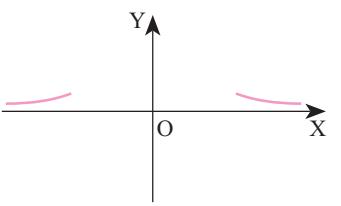
e) Horizontal $y = 0$

Vertical $x = 2,\ x = -1$



f) Horizontal $y = 0$

Vertical no tiene



Del 17 al 43. Calcula los siguientes límites:

17 **a)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{3x - 2}$ **b)** $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3}{x + 8}$

a) $\dfrac{1}{3}$; **b)** 0

18 $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x - 2}{x - 5}$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x - 2}{x - 5}$

a) 3; **b)** 3

19 a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2+x}{x^2}$ b) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x+1}{(x+3)^2}$

a) $+\infty$; **b)** $+\infty$

20 $\lim\limits_{x \to -5} \dfrac{1}{(x+5)^2}$ $\lim\limits_{x \to 0} \left(3 - \dfrac{x+2}{x^2-1}\right)$

a) $+\infty$; **b)** 5

21 a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x+1}{2x+3}$ b) $\lim\limits_{x \to 2} (\sqrt{x+3} + \sqrt{2x+1})$

a) $\dfrac{1}{3}$; **b)** $2\sqrt{5}$

22 a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{5}{x^2+3}$ b) $\lim\limits_{x \to +\infty} 3\sqrt{x}$

a) 0; **b)** $+\infty$

23 a) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\sqrt{x}\right)^{x-3}$ b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^2+1}{2x^2-3x}\right)^x$

a) 1; **b)** 0

24 a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{3x+1}{x-5}\right)^{2x-4}$ b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[x \cdot \sqrt{x+4}\right]$

a) 0; **b)** $+\infty$

25 a) $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{3x^2+5x-3}{5x-10}$ b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3-2x+1}{x^2+3}$

a) $+\infty$; **b)** 0

26 a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2+3x-2}{x^2-2x}$ b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x^3+3x}{5x^3-2x+1}$

a) 2; **b)** $\dfrac{3}{5}$

27 a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2}{5x+2}$ b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2+3x}{x^3-2}$

a) $+\infty$; **b)** 0

28 a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x^2 + 2}{2x^5 - 3}$ b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3 - 3x}{2x + 4}$

a) 0; **b)** $+\infty$

29 a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 + 1}}{x + 4}$ b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2 - 14x + 12}{x^2 - 10x + 4}$

a) 1; **b)** 2

30 a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x + 4}}{x - 2}$ b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$

a) 0; **b)** $\dfrac{3}{2}$

31 a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2}$ b) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 3x + 2}$

a) 4; **b)** -2

32 a) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{27 + x^3}{27 + 9x}$ b) $\lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{x^2 - 9}{(x - 3)^2}$

a) 3; **b)** $+\infty$

33 a) $\lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{x^2 - 9}{(x - 3)^2}$ b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^5 - 3x^3}{x^3 - 2x^2 + x}$

a) $-\infty$; **b)** 0

34 a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \dfrac{x^2 + 2}{x^2 - 1}\right)$ b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4 - \sqrt{16 + x}}{x}$

a) 0; **b)** $-\dfrac{1}{8}$

35 a) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{\sqrt{4 + x} - 3}{x - 5}$ b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 + x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

a) $\dfrac{1}{6}$; **b)** 1

36 a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{4 + x}}{\sqrt{x - 5}}$ b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{4 + x} - 2}{\sqrt{x + 1} - 1}$

a) 1; **b)** $\dfrac{1}{2}$

37 a) $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{4-2x}{3}-\frac{4x+5}{6}\right)$ b) $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{4-2x}{3}+\frac{4x+5}{6}\right)$

a) $+\infty$; **b)** $\frac{13}{6}$

38 a) $\lim_{x\to3^-}\left(\frac{4}{3-x}-\frac{4}{9-x^2}\right)$ b) $\lim_{x\to3^-}\left(\frac{4}{3-x}+\frac{4}{9-x^2}\right)$

a) $+\infty$; **b)** $+\infty$

39 a) $\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+3)^2-(x-4)^2}{3x+5}$ b) $\lim_{x\to+\infty}\frac{(x-3)^2+(x-4)^2}{3x+5}$

a) $\frac{14}{3}$; **b)** No existe. Por la izquierda $+\infty$ y por la derecha $-\infty$

40 a) $\lim_{x\to-\infty}\left(3-\frac{1-2x}{4x+2}\right)$ b) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4x-1}{2}+\frac{3}{2x}\right)$

a) $\frac{7}{2}$; **b)** $+\infty$

41 a) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x+1}-\sqrt{3x+2}\right)$ b) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$

a) $-\infty$; **b)** $\frac{1}{2}$

42 a) $\lim_{x\to+\infty}\left(2x-\sqrt{4x^2+x}\right)$ b) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)$

a) $-\frac{1}{4}$; **b)** 0

43 a) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}\right)$ b) $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{3-2x}-\sqrt{x^2-2}\right)$

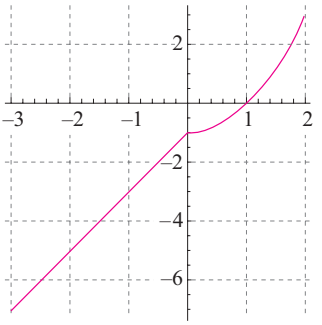
a) $+\infty$; **b)** $-\infty$

44 **Estudia la continuidad de la función:**

$$f(x)=\begin{cases}-6-2x & \text{si } x\in]-4,-2]\\ -x^2 & \text{si } x\in]-2,2[\\ -4 & \text{si } x\in]2,5]\end{cases}$$

Es discontinua en $x=-2$ y $x=2$.

45 **Representa gráficamente la función:** $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 \text{ si } x \in [-3, 0] \\ x^2 - 1 \text{ si } x \in]0, 2[\end{cases}$



46 **Dada la función:** $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 \text{ si } x \in]-4, -2[\\ 1 + 3x \text{ si } x \in [-2, 1] \\ x^2 \quad \text{si } x \in]1, 5] \end{cases}$

a) ¿Es continua e $x = -2$?

b) ¿Es continua a la izquierda en $x = 1$?

c) ¿Es continua a la derecha en $x = 1$?

a) Si

b) Si

c) Si

47 **La función $f(x) = \dfrac{2x + 2}{x^2 - 1}$, ¿es discontinua en $x = -1$? ¿La discontinuidad es evitable? ¿Cuál es el verdadero valor?**

Es discontinua en $x = -1$. La discontinuidad es evitable. El verdadero valor es -1.

48 **Dada la función** $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4x + 4}{x - 2} & \text{si } x \neq 2 \\ k & \text{si } x = 2 \end{cases}$

Determina el valor de k para que la función sea continua en $x = 2$.

$k = 0$

49 **Dada la función** $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 2x - 3} & \text{si } x \neq -1 \\ k & \text{si } x = -1 \end{cases}$ **. Determina el valor de k para que la función sea continua en $x = -1$.**

$-\dfrac{1}{4}$

50 **Estudia la continuidad de la función** $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+6x-7}{x^2+2x-3} & \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$

y clasifica, en su caso, la posible discontinuidad.

Es discontinua en $x = 1$. La discontinuidad es evitable.

51 **¿Puedes encontrar un valor de *k* para que la función**

$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ k & \text{si } x = 0 \end{cases}$ **sea continua en $x = 0$?**

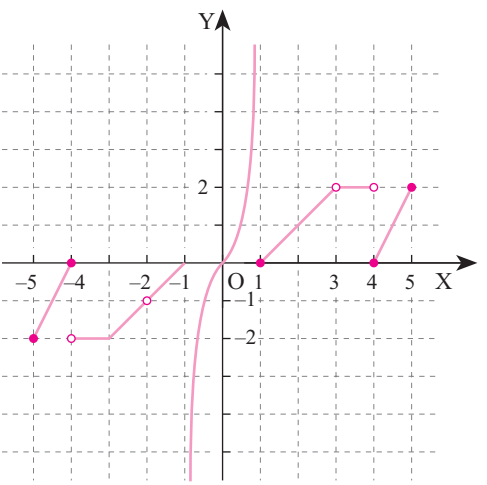
No

52 **Observa la gráfica de la función.**

a) Indica los intervalos donde es continua.

b) Indica los puntos de discontinuidad.

c) Calcula el verdadero valor o el salto cuando sea posible.



a) $]-5,-4[\cup]-4,-2[\cup]-2,-1[\cup]-1,1[\cup]1,3[\cup]3,4[\cup]4,5[$

b) $-4, -2, -1, 1, 3, 4$

c) En -4 el salto es 2; en -2 el verdadero valor es -1; en -1 el salto es ∞; en 1 es salto es ∞; en 3 el verdadero valor es 2; en 4 el salto es 2.

1 **Completa en tu cuaderno una tabla como la siguiente:**

Ángulo en grados	0°	75°	105°	15°	80°	165°	195°
Ángulo en radianes	0°	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{4\pi}{9}$	$\frac{11\pi}{12}$	$\frac{13\pi}{12}$

Ángulo en grados	255°	200°	$\frac{360°}{\pi} \simeq 114{,}59°$	285°	2040°	540°
Ángulo en radianes	$\frac{17\pi}{12}$	$\frac{10\pi}{9}$	2	$\frac{19\pi}{12}$	$\frac{34\pi}{3}$	3π

2 **a) Expresa en el sistema circular el ángulo de 25° 15' 30".**

b) Expresa en el sistema sexagesimal el ángulo de 1,25 radianes.

a) 0,44 rad

b) 71° 37' 11"

3 **Expresa en el sistema circular los ángulos:**

a) 27° **b) 55°**

c) 100° 30' **d) 140° 2' 15''**

e) 240° 10' **f) 315° 15' 15''**

a) $\frac{3\pi}{20} \simeq 0{,}47$ rad; **b)** $\frac{11\pi}{36} \simeq 0{,}96$ rad; **c)** $\frac{20{,}1\pi}{36} \simeq 1{,}75$ rad

d) $\frac{28{,}0075\pi}{36} \simeq 2{,}44$ rad; **e)** $\frac{240{,}16667\pi}{180} \simeq 4{,}19$ rad

f) $\frac{315{,}25417\pi}{180} \simeq 5{,}50$ rad

4 **Expresa en el sistema sexagesimal los ángulos:**

a) 0,5 rad. **b)** $\frac{\pi}{5}$ **rad.** **c)** $\frac{7\pi}{12}$ **rad.**

d) 2,5 rad. **e)** $\frac{3\pi}{10}$ **rad.** **f)** $\frac{7\pi}{9}$ **rad.**

a) 28° 38' 52" **b)** 36° **c)** 105°

d) 143° 14' **e)** 54° **f)** 140°

5 **En una circunferencia de 24 m de radio, un arco mide 6 m. Halla el ángulo central correspondiente expresado en radianes y en grados sexagesimales.**

0,25 rad $\simeq$ 14° 19' 26''

6 **¿Cuántos radianes y cuántos grados sexagesimales gira la Tierra en 3 horas y 20 minutos?**

0,87 rad ≈ 50°

7 **Expresa en grados sexagesimales y en radianes el ángulo que forman las agujas del reloj a las 2 h y 30 min.**

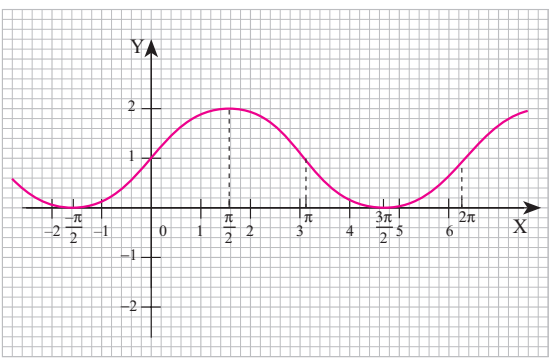
$\frac{7\pi}{12} \simeq 1{,}83 \text{ rad} = 105°$

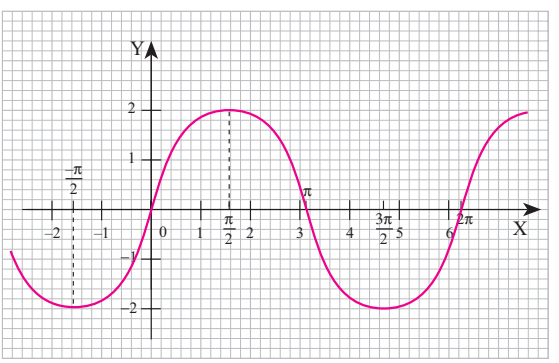
8 **¿A qué ángulo positivo menor de 2π radianes equivale el ángulo de $\frac{15\pi}{4}$ radianes? ¿y el de $\frac{20\pi}{3}$?**

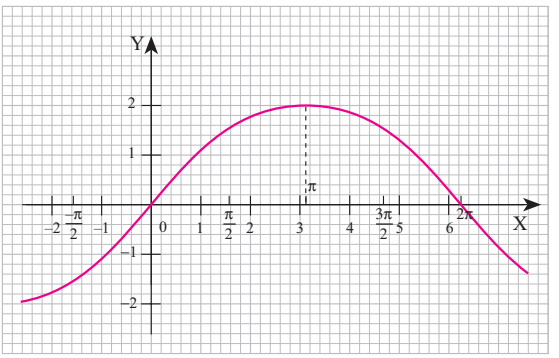
$\frac{7\pi}{4}$; $\frac{2\pi}{3}$

9 **Las gráficas siguientes corresponden a las funciones $g(x) = 2 \text{ sen } x$; $h(x) = 1 + \text{sen } x$ y $j(x) = \text{sen } \frac{x}{2}$.**

Comparándolas con la gráfica de la función $f(x) = \text{sen } x$ o con la tabla de valores construída en la unidad, identifica la función con su gráfica.







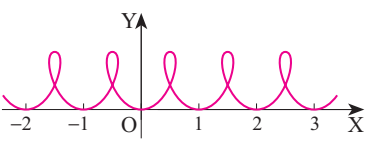
Para $g(x) = 2 \operatorname{sen} x$ se tiene que para un mismo valor de x el valor de la función $g(x)$ es el doble que el de $f(x)$. Las dos tienen el mismo periodo. Es la segunda gráfica.

Para $h(x) = 1 + \operatorname{sen} x$ se tiene que para un mismo valor de x el valor de la función $h(x)$ siempre vale una unidad más que la de $f(x)$. Las dos tienen el mismo periodo. Es la primera gráfica.

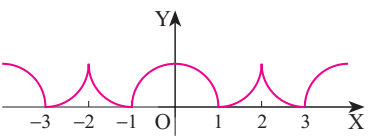
Para $j(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$, su periodo es el doble. Su gráfica no es ninguna de las tres.

10 **Indica si las gráficas siguientes corresponden a funciones periódicas y en caso afirmativo indica su periodo.**

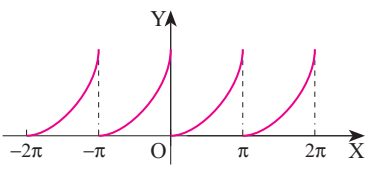
a)



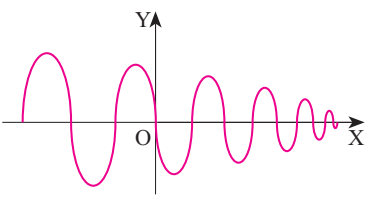
b)



c)



d)



a) Periódica P = 1; **b)** Periódica P = 4; **c)** Periódica P = π; **d)** No es periódica

11 **Indica cuáles de las siguientes funciones son periódicas y halla el periodo de las que lo sean.**

a) $f(x) = \cos^2 x$

b) $f(x) = x + \operatorname{tg} x$

c) $f(x) = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x$

d) $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$

e) $f(x) = \operatorname{sen} x \cdot \cos x$

a) Periódica de periodo π.

b) No es periódica.

c) Es la función constante $f(x) = 1$.

d) Periódica de periodo 2π.

e) Periódica de periodo π.

12 **Dibuja las gráficas de las siguientes funciones en los intervalos indicados.**

a) $f(x) = \cos 2x \quad x \in [-\pi, \pi]$

b) $f(x) = 2 \operatorname{sen} x \quad x \in [0, 2\pi]$

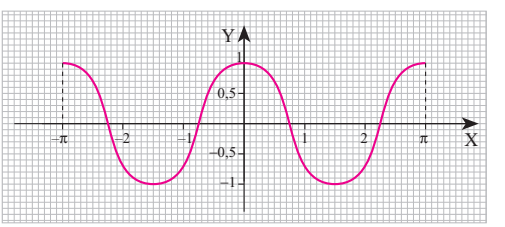
c) $f(x) = \operatorname{sen} |x| \quad x \in [0, 2\pi]$

d) $f(x) = |\operatorname{sen} x| \quad x \in [0, 2\pi]$

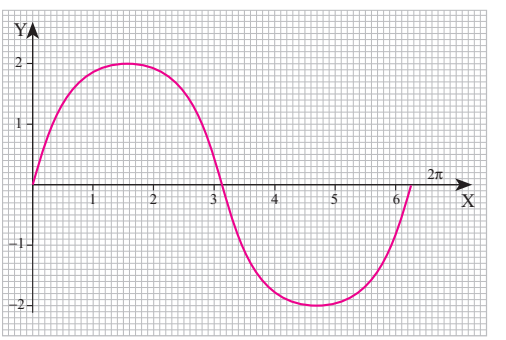
e) $f(x) = |\operatorname{tg} x| \quad x \in [-\pi, \pi]$

f) $f(x) = \cos 4x \quad x \in [0, 2\pi]$

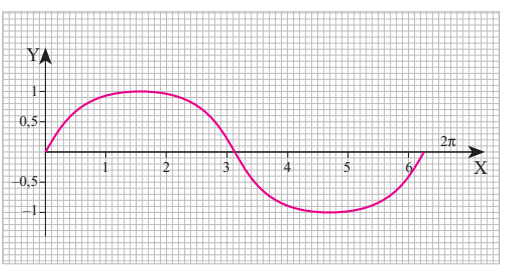
a)



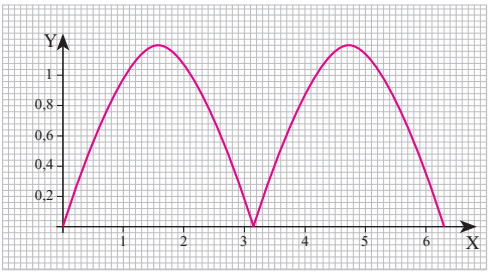
b)



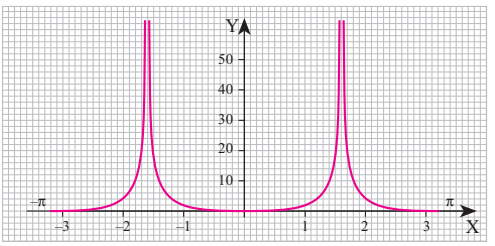
c)



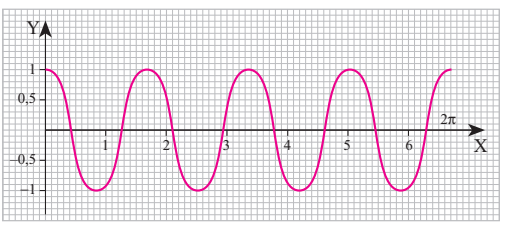
d)



e)

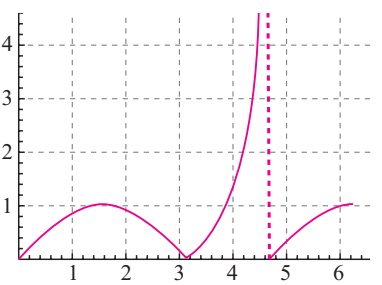


f)



13 **Representa la función siguiente y analiza su continuidad.**

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & x \in [0, \pi[\\ \operatorname{tg} x & x \in \left[\pi, \dfrac{3\pi}{2}\right[\\ \cos x & x \in \left[\dfrac{3\pi}{2}, 2\pi\right] \end{cases}$$



Es continua excepto en $x = \dfrac{3\pi}{2}$ que tiene una discontinuidad de salto infinito.

14 **Conocida la periodicidad de las funciones trigonométricas elementales, halla razonadamente y sin calculadora:**

a) $\operatorname{sen} \dfrac{41\pi}{4}$ **b)** $\operatorname{sen}\left(-\dfrac{23\pi}{2}\right)$ **c)** $\cos 11\pi$

d) $\cos\left(-\dfrac{85\pi}{6}\right)$ **e)** $\operatorname{tg} \dfrac{34\pi}{3}$ **f)** $\operatorname{tg}\left(-\dfrac{21\pi}{4}\right)$

a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **b)** 1 **c)** -1

d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **e)** $\sqrt{3}$ **f)** -1

15 **Calcula *x*:**

a) $x = \text{arc sen } \frac{\sqrt{3}}{2}$ **b)** $x = \text{arc cos } (-1)$

c) $x = \text{arc tg } \pi$ **d)** $x = \text{arc tg } 1$

a) $x = \frac{\pi}{3} \simeq 1{,}05$ rad **b)** $x = \pi \simeq 3{,}14$ rad

c) $x \simeq 1{,}26$ rad **d)** $x = \frac{\pi}{4} \simeq 0{,}79$ rad

16 **Calcula *x***

a) $x = \text{sen}\left(\text{arc sen}\frac{\pi}{6}\right)$ **b)** $x = \text{sen}\left(\text{arccos}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$

c) $x = \cos(\text{arcsen } 0)$ **d)** $x = \cos(\text{arctg } (-1))$

a) $\frac{\pi}{6}$; **b)** $\frac{1}{\sqrt{2}}$

c) 1 **d)** $\frac{1}{\sqrt{2}}$

17 **Utiliza las funciones trigonométricas inversas para despejar *x* en cada una de las igualdades siguientes:**

a) $\text{sen } x = 0{,}79$ **b)** $\cos x = -0{,}3$ **c)** $\text{sen } 2x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

d) $\cos 3x = \frac{1}{2}$ **e)** $\text{tg } \frac{x}{4} = 2$ **f)** $\text{tg } (x + 1) = 1{,}25$

a) $x \simeq 0{,}91$ rad; **b)** $x \simeq 1{,}88$ rad; **c)** $x = -\frac{\pi}{8} \simeq -0{,}39$ rad o $x = \frac{3\pi}{8} \simeq 1{,}18$ rad

d) $x \simeq 0{,}35$ rad; **e)** $x \simeq 4{,}43$ rad; **f)** $x \simeq -0{,}10$ rad

18 $\mathbf{N = \text{sen}\frac{\pi}{4} + \text{sen}\frac{\pi}{2} + \text{sen}\frac{3\pi}{4} + \text{sen}\,\pi}$

$1 + \sqrt{2}$

19 $\mathbf{N = \text{sen}\frac{2\pi}{3} + \text{sen}\frac{4\pi}{3} + \text{sen}\frac{6\pi}{3} + \text{sen}\frac{8\pi}{3}}$

$N = \frac{\sqrt{3}}{2}$

20 $\mathbf{N = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \cos\frac{2\pi}{3} + \cos\frac{2\pi}{3}}$

$-\frac{1}{2}$

21 $\mathbf{N = \cos\frac{\pi}{8} + \cos\frac{3\pi}{8} + \cos\frac{7\pi}{8} + \cos\frac{11\pi}{8}}$

$N = \sqrt{2}$

22 **Expresa F(x) en función de sen x y cos x.**

F(x) = sen($-x$) + sen($\pi - x$)

$F(x) = 0$

23 **Sea la función $f(x)$ = sen x + sen $2x$ + sen $3x$.**

Calcula $f(\pi - x)$ y $f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

$f(\pi - x) = \text{sen } x - 2 \text{ sen } x \cos x + 3 \text{ sen } x \cos^2 x - \text{sen}^3 x$

$f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x + 2 \text{ sen } x \cos x + 3 \text{ sen}^2 x \cos x - \cos^3 x$

24 **Sea la función $f(x)$ = cos x + cos $2x$ + cos $3x$.**

Calcula $f(\pi + x)$ y $f\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$.

$f(\pi + x) = -\cos x + \cos 2x - \cos 3x$

$f\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \text{sen } x + \cos 2x - \text{sen } 3x$

Tema 14 LAS FUNCIONES EXPONENCIAL Y LOGARÍTMICA

1 **Las amebas son seres unicelulares sin forma fija que se reproducen por bipartición. Un biólogo estudia la evolución de una cierta población de amebas y comprueba que su número de dobla todos los días. Si se dispone inicialmente de un millón de amebas:**

a) Da una expresión del número de amebas y en función del tiempo *x* (en días).

b) Determina el número de amebas en los instantes $x = 2$; $x = 5$; $x = -2$; $x = -3$.

c) ¿En qué instante piensas que había 7 millones de amebas?

a) $f(t) = 10^6 \times 2^t$

b) $f(2) = 4\,000\,000$; $f(5) = 32\,000\,000$; $f(-2) = 250\,000$; $f(-3) = 125\,000$

c) 2,8 días = 2 días 19 horas 12 min.

2 **Un isótopo radiactivo se descompone siguiendo una ley dada por la fórmula $y = K \cdot (2{,}7)^{-0{,}00025 \cdot t}$ siendo K la cantidad inicial (para $t = 0$) y t el tiempo en años. Si disponemos de 50 gramos inicialmente:**

a) ¿Qué cantidad quedará dentro de 10, 100 y 1000 años?

b) ¿Cuál es la vida media de este isótopo?

a) $t = 10$ $\quad y = 49{,}876$

$t = 100$ $\quad y = 48{,}774$

$t = 1000$ $\quad y = 39{,}006$

b) 1.000.000 de años

3 **Expresa en función de un solo logaritmo:**

a) $\log a + \log b - \log c$ **b)** $\ln 4 - 3 \ln x + \dfrac{\ln 5}{2}$

c) $2 \log m - 3 \log n$ **d)** $2 \log_a b + 3 \log_a c - 2 \log_a d$

a) $\log \dfrac{ab}{c}$; **b)** $\ln \dfrac{4\sqrt{5}}{x^3}$; **c)** $\log \dfrac{m^2}{n^3}$; **d)** $\log_a \dfrac{b^2c^3}{d^2}$

4 **Calcula:**

a) $\log_2 100$ **b)** $\log_{100} 25$

c) $\log_5 72$ **d)** $\log_{12} 24$

a) $\log_2 100 \simeq 6{,}644$ **b)** $\log_{100} 25 \simeq 0{,}699$

c) $\log_5 72 \simeq 2{,}657$ **d)** $\log_{12} 24 \simeq 1{,}279$

5 **Halla x en las expresiones siguientes:**

a) $4^x = 8$ **b)** $5^x = 14$ **c)** $3^{1-x} = 21$ **d)** $6^{2x+5} = 74$

a) $x = \frac{3}{2} = 1{,}5$; **b)** $x \simeq 1{,}64$; **c)** $x \simeq -1{,}77$; **d)** $x \simeq -1{,}30$

Del 6 al 9. Opera y obtén el resultado más simple posible de cada expresión.

6 **a)** $\frac{2}{3} \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{-2}{3}\right)^2 \times \left(\frac{3}{-4}\right)^2$ **b)** $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \times \left(\frac{1}{-2}\right)^{-3}$

a) $\frac{1}{8}$; **b)** -72

7 **a)** $(-2)^{-1} \times (-3)^{-1} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \times \left(\frac{-1}{2}\right)^{-1}$ **b)** $(-1)^3 \times \left(-\frac{7}{8}\right)^3 \times \left(-\frac{2}{7}\right)^2$

a) $\frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$; **b)** $-2^3 \times 3^2 = -72$

8 **a)** $\left(\frac{3}{5}\right)^2 \times \left(1 - \frac{2}{5}\right)^{-3} \times \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 \times \left(2 - \frac{1}{2}\right)^{-1} \times \frac{1}{5}$

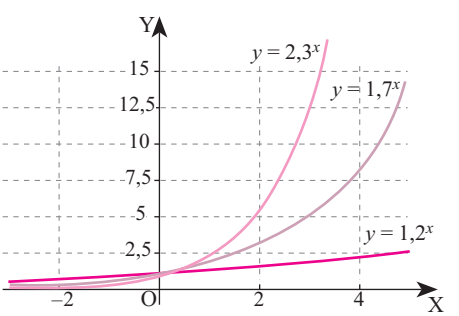
b) $(2^2)^{-1} \times \left(2 + \frac{1}{2}\right)^2 \times \left(1 + \frac{1}{4}\right)^{-2} \times \frac{3}{5}$

a) $\frac{1}{2}$; **b)** $\frac{3}{5}$

9 **a)** $\frac{3a^2b}{2c^3} : \left(\frac{4ab^2}{c^{-1}}\right)^{-2}$ **b)** $\frac{3m^{-2}n}{2n^3} : \frac{4n^2m^{-1}}{9n^{-1}m}$

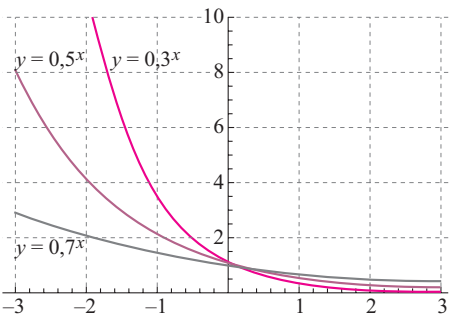
a) $\frac{3}{32\,b^3c^5}$; **b)** $\frac{27}{8n^5}$

10 **Representa en un mismo sistema de ejes las funciones $f(x) = 1{,}2^x$; $g(x) = 1{,}7^x$ y $h(x) = 2{,}3^x$. ¿Qué influencia tiene el valor de la base en la gráfica de estas funciones?**



Para valores de $x > 0$, cuanto mayor es la base, mas alta es la gráfica $1{,}2^x < 1{,}7^x < 2{,}3^x$ y al contrario para $x < 0$.

11 **Representa en un mismo sistema de ejes las funciones $f(x) = 0{,}3^x$; $g(x) = 0{,}5^x$ y $h(x) = 0{,}7^x$. ¿Qué influencia tiene el valor de la base en la gráfica de estas funciones?**



Para valores de $x > 0$, cuanto mayor es la base, mas alta es la gráfica, $0{,}3^x < 0{,}5^x < 0{,}7^x$ y al contrario para $x < 0$.

12 **Encuentra en cada caso una función exponencial del tipo $f(x) = K \cdot a^x$ tal que:**

a) $f(2) = 12$; $f(-1) = 1{,}5$

b) $f(3) = 25$; $f(4) = 125$

c) $f(3) = 4{,}5 \times 10^{-4}$; $f(-2) = 45$

d) $f(1) = 2$; $f(3) = 2\,048$

a) $f(x) = 3 \cdot 2^x$

b) $f(x) = \frac{1}{5} \cdot 5^x$

c) $f(x) = 0{,}45 \cdot 0{,}1^x$

d) $f(x) = \frac{1}{16} \cdot 32^x$

13 **Resuelve la inecuación:** $\sqrt[3]{2^{x-4}} < \sqrt{4^{1-2x}}$

$x < 1$

14 **Mismo ejercicio:** $\sqrt[6-x]{5^{x^2}} < 5$

$x \in \,]-3, 2[\cup]6, +\infty[$

15 **La población de una granja avícola crece de 1 000 a 1 300 individuos en un mes. Suponiendo que sigue una ley de crecimiento exponencial, hallar:**

a) Una expresión de la población dependiendo del tiempo en meses.

b) ¿Qué población habrá en esa granja al cabo de un año?

c) ¿Cuánto tardaría en triplicarse la población?

d) ¿Qué población había dos meses antes de iniciar el estudio?

a) $f(t) = 1000\left(\frac{13}{10}\right)^t$ **b)** 2,64 meses $\simeq$ 2 meses 19 días.

c) 4,19 meses $\simeq$ 4 meses 6 días. **d)** 592 aves.

16 **Se introduce en un pantano una cantidad desconocida de una nueva variedad de peces. Después de 3 años se estima que el número de individuos es 4 000, y después de 5 años 8 000.**

¿Cuántos peces se introdujeron originariamente suponiendo que su crecimiento es de tipo exponencial?

1 414 peces

17 **Un martillo pilón golpea cada 6 segundos una pieza metálica cuyo espesor inicial es 1 cm. En cada golpe, el grosor del metal disminuye un 1%. Sea $f(n)$ el grosor de la pieza después de n golpes.**

a) Calcula $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$.

b) Expresa $f(n)$ en función de n.

c) ¿Cuántos golpes serían necesarios para reducir al menos un 25% el grosor de la pieza?

d) Una pieza se considera terminada cuando su grosor no excede de 5 mm. ¿Cuánto tiempo es necesario, como mínimo, para terminar una pieza?

a) $f(0) = 1$; $f(1) = \frac{99}{100}$; $f(2) = \frac{9801}{10\,000}$; $f(2) = \frac{970\,299}{1000\,000}$

b) $f(n) = \left(\frac{99}{100}\right)^n$ **c)** 29 golpes.

d) 6 minutos 54 segundos.

18 **Se sabe que una determinada población tiene un crecimiento de un 2% anual. Si en el instante de iniciar el recuento se contabilizan 1000 ejemplares, se pide:**

a) Expresión de la población y en función del tiempo x.

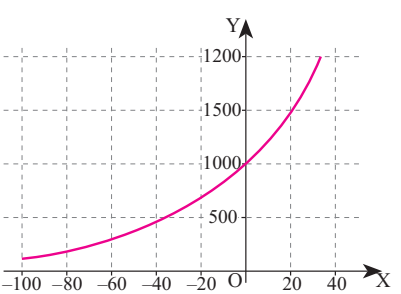
b) ¿Cuánto tardará en duplicarse la población?

c) ¿Qué población había hace 6 meses?

d) Representa gráficamente la función obtenida en a).

a) $f(x) = 1000 \cdot 1{,}02^x$ **b)** 35 años

c) 990 peces **d)**



19 **Un biólogo ha estudiado los paramecios, microbios que viven en aguas estancadas y que se reproducen por división transversal: en 24 horas cada paramecio se divide en tres.**

En el día 0 se ha contado un millón de paramecios y se estudia la evolución de esta población en función del tiempo.

a) ¿Cuál es el número de individuos de la población en la hora 2?, ¿en la hora 5?, ¿en la hora 12,5?

b) ¿Cuánto tiempo tardará en doblarse? ¿Y en multiplicarse por 10?

a) hora 2: $9 \cdot 10^6$ paramecios.

hora 5: $243 \cdot 10^6$ paramecios.

hora 12,5: $920\,482{,}81 \cdot 10^6$ paramecios.

b) Se duplican cada 0,631 días o cada 15 horas 9 min.

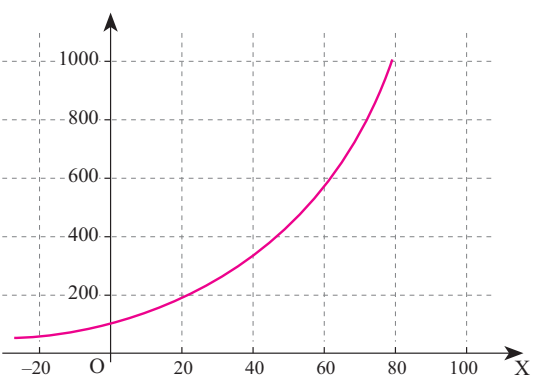
Se multiplican por 10 cada, 2,096 días o cada 2 días 2 horas 18 min.

20 **Un país tiene actualmente una población de 110 millones de habitantes y suponiendo un crecimiento exponencial se espera que ésta se duplique en 25 años.**

a) Estima su población dentro de 40 años y representa gráficamente la función crecimiento.

b) ¿Cuál era la población hace 10 años?

a) 333,46 millones



b) 83,36 millones

21 **Interés compuesto**

Cuando una inversión se realiza a *interés compuesto*, los intereses generados se acumulan al capital para generar nuevos intereses.

Se coloca una cantidad de 3 000 euros a una tasa de interés compuesto anual del 4,8%.

a) Calcula cuál es el capital acumulado al cabo de 5 años.

b) ¿Cuánto tiempo tarda en duplicarse el capital?

a) 3 792,52 €

b) 14,784 años $\simeq$ 14 años 9 meses 12 días

22 **El IPC es el índice de precios de consumo. Está elaborado por el Instituto Nacional de Estadística y es una medida estadística de la evolución de los precios de los bienes y servicios que consume la población residente en viviendas familiares en España.**

Suponiendo un IPC de un 0,25% mensual durante un año.

a) ¿Cuál es el precio al final de diciembre de un producto que el 1 de enero de ese mismo año era de 25 euros?

b) La afirmación "El 30 de junio el producto ha subido ya la mitad de lo que va a subir en todo el año" ¿es verdadera o falsa?

a) 363, 8 €

b) Es falsa

23 **Formando un capital**

Si cada año colocamos una cantidad *a*, llamada anualidad, a un interés compuesto anual *i* (en tanto por uno) resulta que al cabo de *t* años habremos reunido un capital C dado por la expresión

$$C = \frac{a(1+i)[(1+i)^t - 1]}{i}$$

a) Si invertimos anualmente 1 500 euros a un interés compuesto del 6%, ¿de qué capital dispondremos dentro de 10 años? (*i* = 0,06).

b) ¿Qué anualidad deberíamos aportar cada año para conseguir un capital de 20 000 euros en 8 años si el Banco nos ofrece un interés del 5%?

a) 20 957,46 €; **b)** 1994,70 €

24 **Amortizando un capital**

Si hemos contraído una deuda D y queremos amortizarla en *t* años, tendremos que devolver la cantidad adeudada más los intereses mediante pagos anuales de importe *a*. Dicha amortización anual *a* viene dada por la expresión:

$$a = \frac{D \cdot i \cdot (1+i)^t}{(1+i)^t - 1}$$

Siendo D el total de la deuda e *i* la tasa de interés (en tanto por uno), si el tiempo *t* se mide en meses entonces *i* = tasa de interés/12. En este caso, *a* sería la cuota mensual que amortiza la deuda.

a) Hemos pedido un préstamo de 72 000 euros a un interés anual del 8,75% y a devolver en 15 años. ¿Qué cuota mensual debe pagarse para amortizar dicha deuda?

b) Si se pagara una cuota mensual de 600 euros, ¿cuánto tiempo se tardará en amortizar la deuda?

a) 719, 6 €

b) 286,2 meses o 23,8 años

25 **El carbono 14, C_{14}, es un isótopo radiactivo que forma parte de los organismos vivos en los que se introduce junto con el dióxido de carbono (CO_2). Tras la muerte ya no se produce más absorción de C_{14} y la cantidad, M, que hay en cada organismo decrece de acuerdo con la ley $M = M_o\, e^{-0{,}000121\,t}$ siendo M_o la cantidad inicial (cuanto $t = 0$).**

Si en una excavación arqueológica se encuentran restos humanos que contienen la tercera parte de C_{14} de la que hay en una persona viva, determina la antigüedad aproximada de dichos restos.

9079,44 años ≃ 9079 años 5 meses 9 días

26 **Una cooperativa agrícola vende los productos cosechados por sus socios. El importe de cada venta aumenta el 10% sobre la venta precedente. La cooperativa acaba de realizar su sexta venta este año y el importe de esta sexta venta asciente a 18050 euros.**

a) ¿Cuál fue el importe de la primera venta?

b) ¿Cuál es el importe total de las ventas desde el principio?

a) 11207,6 €

b) 86473,5 €

27 **Una producción anual de pescado en un puerto pesquero aumenta un 3% anual. Se entiende por $P(0)$ la producción, en toneladas, de este puerto en 2008 y es $P(0) = 145000$ t. Se designa $P(n)$ la producción en toneladas de este puerto en 2008 + n.**

a) Calcula la producción de este puerto, en toneladas, en 2011.

b) Expresa $P(n)$ en función de n.

c) ¿A partir de qué año la producción de este puerto será por lo menos el doble de la de 2008?

a) 158445,42 t

b) $P(n) = 145000\ (1{,}03)^n$

c) A partir del vigésimocuarto año.

28 **Calcula los siguientes logaritmos:**

a) $\log_2 4$; $\log_2 \frac{1}{4}$; $\log_4 2$

b) $\log_3 \frac{1}{3}$; $\log_3 27$; $\log_{\frac{1}{3}} 9$

c) $\log_8 4$; $\log_8 16$; $\log_8 1$

d) $\log 0{,}1$; $\log 10\,000$; $\log 10^{-5}$

e) $\log_2 32$; $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{32}$; $\log_{\frac{2}{3}} \frac{81}{16}$

a) $\log_2 4 = 2$; $\log_2 \frac{1}{4} = -2$; $\log_4 2 = \frac{1}{2}$

b) $\log_3 \frac{1}{3} = -1$; $\log_3 27 = 3$; $\log_{\frac{1}{3}} 9 = -2$

c) $\log_8 4 = \frac{2}{3}$; $\log_8 16 = \frac{4}{3}$; $\log_8 1 = 0$

d) $\log 0{,}1 = -1$; $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{32} = 5$; $\log_{\frac{2}{3}} \frac{81}{16} = -4$

29 **La cantidad $q(t)$ que queda de una sustancia radiactiva al cabo de t días viene expresada por la fórmula $q(t) = Me^{-0{,}1t}$.**

a) ¿Al cabo de cuánto tiempo la masa M se ha reducido a la mitad?

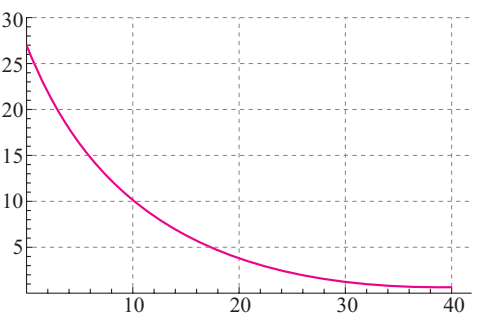
b) Si la masa inicial M es 27 mg. ¿cuánta sustancia quedará, aproximadamente, al cabo de 10 días?

c) Representa en este caso la gráfica aproximada de $q(t)$.

a) 7 días

b) 10 mg

c)



30 **Halla x en las siguientes expresiones:**

a) $\log_x 7 = -2$ **b)** $\log_4 2x = 2$ **c)** $\log_{\sqrt{2}} x = 6$ **d)** $\log_{\frac{1}{8}} x = \frac{1}{3}$

e) $\log_x 125 = 3$ **f)** $\log_{\frac{3}{4}} \frac{64}{27} = x$ **g)** $\log_{\frac{2}{3}} 1 = x$ **h)** $\log_3 x = -2$

a) $x = \frac{1}{\sqrt{7}}$ **b)** $x = 8$ **c)** $x = 8$ **d)** $x = \frac{1}{2}$

e) $x = 5$ **f)** $x = -3$ **g)** $x = 0$ **h)** $x = \frac{1}{9}$

31 **Desarrolla los logaritmos siguientes:**

a) $\log \dfrac{3m^2p}{2q}$; **b)** $\log_3 \dfrac{1}{2xy}$; **c)** $\log \dfrac{a+b}{c}$; **d)** $\log \sqrt{\dfrac{mn}{p}}$

a) $\log \dfrac{3m^2p}{2q} = \log 3 + 2\log m + \log p - \log 2 - \log q$

b) $\log_3 \dfrac{1}{2xy} = -\log_3 2 - \log_3 x - \log_3 y$

c) $\log \dfrac{a+b}{c} = \log (a+b) - \log c$

d) $\log \sqrt{\dfrac{mn}{p}} = \dfrac{1}{2}\ [\log m + \log n - \log p]$

32 **Mismo ejercicio:**

a) $\log \dfrac{x^4y^3}{2z}$ **b)** $\log \dfrac{x^2\sqrt{y}}{\sqrt[3]{z}}$ **c)** $\log_a a^3 \sqrt[4]{a^3}$ **d)** $\log_a \sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}$

a) $\log \dfrac{x^4y^3}{2z} = 4\log x + 3\log y - \log 2 - \log z$

b) $\log \dfrac{x^2\sqrt{y}}{\sqrt[3]{z}} = 2\log x + \dfrac{1}{2}\log y - \dfrac{1}{3}\log z$

c) $\log_a a^3 \sqrt[4]{a^3} = 3\log_a a + \dfrac{3}{4}\log_a a = \dfrac{15}{4}$

d) $\log_a \sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}} = \dfrac{7}{8}\log_a a = \dfrac{7}{8}$

33 **¿Verdadero o falso?**

a) $\log (m+n) + \log (m-n) = \log (m^2 - n^2)$

b) $\log 100x = 2 \log x$

c) $\log \sqrt{xy} = \dfrac{\log x + \log y}{2}$

d) $\log 0{,}001 = -3 \log_5 5$

a) Verdadero; **b)** Falso; **c)** Verdadero; **d)** Verdadero

34 **Expresa en función de un solo logaritmo.**

a) $\log x - \log y + 3 \log z$

b) $\dfrac{1}{2}\log(a-b) - \dfrac{1}{3}\log(a+b) + \dfrac{2}{3}\log p$

c) $\log 3 - \log 2 + \frac{5}{2} \log x - \log y$

d) $-2 \log m + 4 \log n - 2$

a) $\log \frac{x\, z^3}{y}$ **b)** $\log \frac{\sqrt{a-b} \cdot \sqrt[3]{p^2}}{\sqrt[3]{a+b}}$

c) $\log \frac{3 \cdot \sqrt{x^5}}{2y}$ **d)** $\log \frac{n^4}{(10\, m)^2}$

35 **Expresa en función de log 3 la expresión:** $\log \frac{(0{,}081)^2 \cdot 30}{\sqrt{243}}$

$\log \frac{(0{,}081)^2 \cdot 30}{\sqrt{243}} = \frac{13 - 10 \log_3 10}{2 \log_3 10}$

36 **Expresa en función de log 2 y log 3:** $\log \frac{54 \cdot \sqrt[4]{36}}{0{,}027^3 \cdot 810}$

$\frac{3}{2} \log 2 - \frac{19}{2} \log 3 + 8$

37 **Calcula los logaritmos siguientes:**

a) $\log_3 5$; $\log_7 2$ **c)** $\log_{0,1} 0{,}5$; $\log_2 1{,}73$

b) $\log_4 217$; $\log_2 17$ **d)** $\log_4 100$; $\log_{0,3} 0{,}02$

a) $\log_3 5 \simeq 1{,}46497$; $\log_7 2 \simeq 0{,}356207$

b) $\log_4 217 \simeq 3{,}88078$; $\log_2 17 \simeq 4{,}08746$

c) $\log_{0,1} 0{,}5 \simeq 0{,}30103$; $\log_2 1{,}73 \simeq 0{,}790772$

d) $\log_4 100 \simeq 3{,}32193$; $\log_{0,3} 0{,}02 \simeq 3{,}24926$

38 **Calcula *x* en las siguientes ecuaciones exponenciales:**

a) $8^x = 9$ **b)** $5^{2x-1} = 32$ **c)** $6^{1-x} = 51$ **d)** $3^{4x} = 23$

a) $x = 1{,}0566$ **b)** $x = 1{,}57669$ **c)** $x = -1{,}1944$ **d)** $x = 0{,}7135$

39 **Si se multiplica por 36 el número A, su logaritmo en cierta base aumenta en dos unidades. ¿Cuál es la base? ¿Y si su logaritmo disminuyera en dos unidades?**

Si aumenta en 2 unidades, $x = 6$.

Si disminuye en 2 unidades, $x = \frac{1}{9}$

40 **¿En qué base se cumple que $\log_a 12 + \log_a 3 = 2$?**

$a = 6$

41 **Calcula el menor entero *n* que verifique:**

a) $1{,}21^n > 9$ **b)** $3{,}48^n > 10^5$ **c)** $1{,}02^n > 10^6$ **d)** $10{,}01^n > 8{,}4 \times 10^6$

a) $n = 12$; **b)** $n = 10$; **c)** $n = 698$; **d)** $n = 7$

42 **Calcula el mayor valor real de *x* para que:**

a) $3{,}25^x < 2$ **b)** $5{,}68^x < 1$

c) $0{,}98^x < 10^{-6}$ **d)** $4{,}32^x < 10^{-5}$

a) $x = 0{,}588083$ **b)** $x = 0$

c) $x = 683{,}845$ **d)** $x = -7{,}86802$

43 **El nivel de intensidad, D, de un sonido de *intensidad* I, se obtiene por la expresión:**

$$D = 10 \cdot \log \frac{I}{I_0}$$

donde D se mide en *decibelios* e I en vatios/m^2. El nivel máximo de percepción o umbral es $I_0 = 10^{-12}$.

a) Calcula el nivel de intensidad de los siguientes sonidos cuya intensidad es (en w/m^2).

***Conversación normal*: $3{,}4 \cdot 10^{-6}$**

***Sonido trompeta*: $2 \cdot 10^{-3}$**

***Umbral doloroso*: 1**

***Fórmula 1*: $7 \cdot 10^2$**

b) Calcula la intensidad de los siguientes sonidos de los que se conoce su nivel en decibelios.

***Grito humano*: 80**

***Interior discoteca*: 115**

***Motocicleta*: 90**

a) Conversación normal: D $\simeq$ 65,31 decibelios.

Sonido trompeta: D $\simeq$ 93,01 decibelios.

Umbral doloroso: D $\simeq$ 120 decibelios.

Fórmula 1; D $\simeq$ 148,45 decibelios.

b) Grito humano: $I = 10^{-4}$ w/m^2

Interior discoteca: $I = \dfrac{\sqrt{10}}{10} \simeq 0{,}3162$ w/m^2

Motocicleta = 10^{-3} w/m^2

44 **La intensidad de los terremotos se expresa en la *escala Richter.* Esta es una escala logarítmica (en base 10) y por tanto un terremoto de grado 4 es 100 veces más intenso que uno de grado 2, pues log 10 000 = 4 mientras que log 100 = 2. El terremoto de San Francisco de 1906 tuvo una magnitud de 8,2 y en Octubre de 1992 se**

produjo un terremoto en la costa colombiana de una intensidad de 6,6. ¿Cuántas veces fué mayor la potencia del primero que la del segundo?

39,81 veces mayor

45 **El número de personas, P, afectadas por una epidemia al cabo de *t* semanas transcurridas desde el primer brote es:**

$$P = \frac{35\,000}{1 + 25\,e^{-0,4t}}$$

a) Calcula el número de personas que habrá contraído la enfermedad al cabo de 1, 2 y 3 semanas.

b) ¿Qué sucedería al cabo del tiempo si no se consiguiera frenar el desarrollo de la epidemia?

c) ¿Cuándo estará afectada la mitad de la población inicial, que es de 35 000 individuos?

a) $P(1) \simeq 1\,970,94$ personas

$P(2) \simeq 2\,861,06$ personas

$P(3) \simeq 4\,103,23$ personas

b) Que tendería a estabilizarse alrededor de 35 000 personas afectadas.

c) 8 semanas.

Del 46 al 71. Resuelve las ecuaciones siguientes:

46 $2^{-x} - 4 = 0$

$x = 1,31862$

47 $0,07^x = 0,03$

$x \simeq 1,31862$

48 $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} = 112$

$x = -7$

49 $\sqrt[x+15]{2^{x-5}} = \frac{1}{4}\sqrt[x-5]{8^{x+5}}$

$x = -7$

50 $2^{x^3} - 4^{x^2} = 0$

$x = 2$

51 $9^x - 6 \cdot 3^{x+1} = -81$

$x = 2$

52 $2^{4x} - 12 = 2^{2x}$

$x = 1$

53 $2^x \cdot 3^x \cdot 5^{2x} = 150$

$x = 1$

54 $\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2+2} = \left(\frac{4}{9}\right)^{-1-x}$

$x = -3$

55 $3^{x+3} + 3^{x+2} + 3^{x+1} + 3^x = \frac{40}{27}$

$x = -3$

57 $3^x + 3^{1-x} = 4$

$x = 0$ y $x = 1$

58 $5^{x+1} - 30 \cdot 5^x + 5^3 = 0$

$x = -2$

56 $5^{2x+1} - 5^{x+2} = 2500$

$x = 0$, $x = 1$

59 $4^{x+3} = \frac{1}{2^x}$

$x = -2$

60 $2^{x-1} + 2^{x-2} + 2^{x-3} + 2^{x-4} = 960$

$x = 1$, $x = 9$

61 $2 \log x = 1 + \log (x - 0{,}9)$

$x = 1$ y $x = 9$

62 $\log 1250 - 2 = 2 - \log (2^{2-x})^{2+x}$

$x = \frac{1}{9}$

63 $\log (x + 1) - 1 = \log x$

$x = \frac{1}{9}$

64 $\log 2 + \log (x - 3) = \log \sqrt{2x}$

$x = 5 + \sqrt{85}$

65 $2 \log x - \log (x + 6) = 1$

$x = 5 + \sqrt{85}$

66 $\log (x - 16) + \log (x + 5) = 2$

$x = \frac{3}{2}$

67 $\log (x + 1) + 2 \log 2 = \log (4x - 1) - \log (x - 1)$

$x = \frac{3}{2}$

68 $2 (\log x)^2 - 9 \log x + 10 = 0$

$x = 11$

69 $\log (x - 1) - \log (x - 10) = 1$

$x = 11$

70 $\log (x - 1) - \log \sqrt{x + 5} = \log \sqrt{5 - x}$

$x = 1, \ x = 2$

71 $3 \log x - \log (2x^2 + x - 2) = 0$

$x = 2$

Del 72 al 79. Resuelve los sistemas:

72 $\left.\begin{array}{r} \log x + \log y = 2 \\ x - y = 20 \end{array}\right\}$

$x = 10^{7/4}, \ y = 10^{5/4}$

73 $\left.\begin{array}{r} \log x + \log y = 3 \\ 2 \log x - 2 \log y = 1 \end{array}\right\}$

$x = \sqrt[4]{10^7}, \ y = \sqrt[4]{10^5}$

74 $\left.\begin{array}{r} x + y = 133 \\ \log x + \log y = 3 \end{array}\right\}$

$x = -100,\ y = -\dfrac{1}{1000}$; $\quad x = 100,\ y = \dfrac{1}{1000}$

75 $\left.\begin{array}{r} \log x - \log y = 5 \\ x \cdot y = \dfrac{1}{10} \end{array}\right\}$

$x = 100,\ y = \dfrac{1}{1000}$

76 $\left.\begin{array}{r} \log_2 y - 5 = \log_2 x \\ x \cdot y = 32 \end{array}\right\}$

$x = 3,\ y = 1$

77 $\left.\begin{array}{r} 2^x + 2^y = 10 \\ 2^{x-y} = 4 \end{array}\right\}$

$x = 3,\ y = 1$

78 $\left.\begin{array}{r} 2\log x - 3\log y = 5 \\ 3\log x + \log y = 2 \end{array}\right\}$

$x = -49,\ y = -\dfrac{1}{49}$; $\ x = 49,\ y = \dfrac{1}{49}$

79 $\left.\begin{array}{r} \log_7 x - \log_7 y = 4 \\ x \cdot y = 1 \end{array}\right\}$

$x = 49,\ y = \dfrac{1}{49}$

80 **Resuelve el sistema:** $\left.\begin{array}{r} x^3 - y^2 = 0 \\ y\log x - x\log y = 0 \end{array}\right\}$

$x = \dfrac{9}{4}, y = \dfrac{27}{8}$

81 **Resuelve la ecuación:** $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \ldots + 2^x = 4095$

$x = 11$

Tema 15 DERIVADA DE UNA FUNCIÓN

1 **Halla la tasa de variación media de las siguientes funciones en el intervalo que se indica:**

a) $f(x) = 4 + 3x^2$ **en** $[2, 5]$ **b)** $g(x) = 3 - (1 + x^2)$ **en** $[-1, 1]$

a) 21; **b)** 0

2 **Mismo ejercicio:**

a) $h(x) = \dfrac{3x+1}{x+5}$ **en** $[-1, 2]$ **b)** $j(x) = \dfrac{1}{x}$ **en** $[1, 3]$

a) t.v.m. $[-1, 2] = \dfrac{1}{2}$ **b)** t.v.m. $[1, 3] = -\dfrac{1}{3}$

3 **Se lanza un proyectil y el espacio recorrido s en metros en función del tiempo t en segundos es $s(t) = 500t - t^2$. Halla la velocidad media entre $t = 0$ y $t = 8$ seg.**

$V_m = 492$ m/seg.

4 **Utiliza la definición [1] para calcular la derivada de las funciones dadas en el punto que se indica.**

a) $f(x) = 2x^2 - 3x$ **en** $x = 0$

b) $f(x) = 1 + x - x^2$ **en** $x = -2$

c) $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ **en** $x = 1$.

a) $f'(0) = -3$ **b)** $f'(-2) = 5$ **c)** $f'(1) = -\dfrac{1}{4}$

5 **Utiliza la definición [2] para calcular la derivada de las funciones dadas en el punto que se indica.**

a) $f(x) = 3 - 2x$ **en** $x = 2$

b) $f(x) = x^2 - 2x$ **en** $x = -2$

c) $f(x) = 2x^2 + 3x - 1$ **en** $x = -3$

a) $f'(2) = -2$

b) $f'(-2) = -6$

c) $f'(-3) = -9$

6 **El espacio recorrido por un móvil viene dado por $e = 2t^2 - 12t$, e en metros y t en segundos. Halla la velocidad en los instantes $t = 3$ y $t = 10$ segundos.**

$v(3) = 0$ m/s; $v(10) = 28$ m/s

7 **Encuentra la función derivada de cada una de las siguientes funciones.**

a) $f(x) = x + 7$

b) $f(x) = 3 - 2x$

c) $f(x) = 2x^2$

d) $f(x) = (x + 3)^2$

e) $f(x) = \dfrac{3}{x}$

f) $f(x) = x^2 - 4$

g) $f(x) = x^2 + x$

h) $f(x) = \dfrac{x + 3}{4}$

a) $f'(x) = 1$; **b)** $f'(x) = -2$; **c)** $f'(x) = 4x$; **d)** $f'(x) = 2x + 6$

e) $f'(x) = -\dfrac{3}{x^2}$; **f)** $f'(x) = 2x$; **g)** $f'(x) = 2x + 1$; **h)** $f'(x) = \dfrac{1}{4}$

8 **Halla la derivada de las siguientes funciones:**

a) $f(x) = 3x + 5$

b) $f(x) = x + \sqrt{x}$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x} + x^3$

d) $f(x) = x^5 + 5^x$

e) $f(x) = x^e + e^x$

f) $f(x) = ln\ x + \lg_3 x$

g) $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$

h) $f(x) = \cos x + \operatorname{tg} x$

i) $f(x) = \operatorname{sen} x \cdot \cos x$

j) $f(x) = \dfrac{3x^2 + 5}{x + 1}$

k) $f(x) = (1 - 3x) \cdot \operatorname{tg} x$

l) $f(x) = 5 + \operatorname{arc\,sen} x$

m) $f(x) = \dfrac{\operatorname{arc\,sen} x}{\operatorname{sen} x}$

n) $f(x) = 3 \operatorname{arc\,tg} x$

ñ) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x + x}{\sqrt{x}}$

o) $f(x) = \dfrac{\operatorname{arc\,sen} x}{\operatorname{arc\,cos} x}$

p) $f(x) = \sqrt{x} \cdot \sqrt[4]{x}$

q) $f(x) = 2x \operatorname{arctg} x$

a) $f'(x) = 3$

b) $f'(x) = 1 + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

c) $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} + 3x^2$

d) $f'(x) = 5x^4 + 5^x \ln 5$

e) $f'(x) = ex^{e-1} + e^x$

f) $f'(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x \ln 3}$

g) $f'(x) = \cos x - \operatorname{sen} x$

h) $f'(x) = -\operatorname{sen} x + \dfrac{1}{\cos^2 x} = -\operatorname{sen} x + 1 + \operatorname{tg}^2 x$

i) $f'(x) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$

j) $f'(x) = \dfrac{3x^2 + 6x - 5}{(1+x)^2}$

k) $f'(x) = -3 \operatorname{tg} x + (1 - 3x)(1 + \operatorname{tg}^2 x)$

l) $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

m) $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}\operatorname{sen} x} - \dfrac{\operatorname{arc\,sen} x \cos x}{\operatorname{sen}^2 x}$

n) $f'(x) = \dfrac{3}{1+x^2}$

ñ) $f'(x) = \dfrac{x + 2x\cos x - \operatorname{sen} x}{2x\sqrt{x}}$

o) $f'(x) = \dfrac{\operatorname{arc}\cos x + \operatorname{arc\,sen} x}{\sqrt{1-x^2}\operatorname{arc}\cos^2 x}$

p) $f'(x) = \dfrac{3}{4\sqrt[4]{x}}$

q) $f'(x) = 2\operatorname{arctg} x + \dfrac{2x}{1+x^2}$

9 **Utiliza la regla de la cadena para hallar la derivada de las siguientes funciones.**

a) $f(x) = (3 - x)^3$ **b)** $f(x) = \sqrt{2x + 3}$ **c)** $f(x) = 3 \cos 5x$

d) $f(x) = ln\ \operatorname{sen} x$ **e)** $f(x) = \cos^2 x$ **f)** $f(x) = e^{8x^2+5}$

a) $f'(x) = -3(3 - x)^2$; **b)** $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x+3}}$; **c)** $f'(x) = -15 \operatorname{sen} 5x$

d) $f'(x) = \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \operatorname{ctg} x$; **e)** $f'(x) = -2 \operatorname{sen} x \cos x = -\operatorname{sen} 2x$

f) $f'(x) = 16x\, e^{8x^2+5}$

10 **Halla la tasa de variación media de las siguientes funciones en los intervalos que se indican.**

a) $f(x) = 3 - 2x$ **en** $[-1, 4]$ **b)** $f(x) = x^2 - 2x$ **en** $[-2, 2]$

c) $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ **en** $[1, 3]$ **d)** $f(x) = \operatorname{sen} x$ **en** $[0, \pi]$

e) $f(x) = ln\ x$ **en** $[1, e]$ **f)** $f(x) = \cos x$ **en** $[-\pi, \pi]$

a) t.v.m. $[-1, 4] = -2$ **b)** t.v.m. $[-2, 2] = -2$

c) t.v.m. $[1, 3] = -\dfrac{1}{8}$ **d)** t.v.m. $[0, \pi] = 0$

e) t.v.m. $[1, e] = \dfrac{1}{e-1}$ **f)** t.v.m. $[-\pi, \pi] = 0$

11 **Sea la función $f(x) = 2x^2 - x$. Halla la pendiente de la recta secante a la gráfica de f que pasa por los puntos de abscisas 0 y 2 respectivamente.**

$m = 3$

12 **Un móvil se desplaza según la ecuación**

$$e(t) = 5t^2 - 2t + 1$$

e en metros y t en segundos. Halla la velocidad media entre los instantes $t = 2$ y $t = 10$ segundos.

$v_m = 58$ m/s

Del 13 al 22. Utiliza la definición de derivada para hallar la derivada de las funciones siguientes en los puntos que se indican.

13 $f(x) = 1 - 3x^2$ en $x = 0$

$f'(0) = 0$

14 $f(x) = 3x - 5$ en $x = -2$

$f'(-2) = 3$

15 $f(x) = x^3$ en $x = 1$

$f'(1) = 3$

16 $f(x) = \dfrac{2}{3 + x}$ en $x = -1$

$f'(-1) = -\dfrac{1}{2}$

17 $f(x) = x^3 - x^2$ en $x = \dfrac{2}{3}$

$f'\left(\dfrac{2}{3}\right) = 0$

18 $f(x) = x^2 - 5x + 7$ en $x = 2$

$f'(2) = -1$

19 $f(x) = \dfrac{x}{x + 1}$ en $x = 0$

$f'(0) = 1$

20 $f(x) = x(x - 2)$ en $x = 1$

$f'(1) = 0$

21 $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$ **en** $x = 3$

$f'(3) = -\dfrac{1}{25}$

22 $f(x) = x^3$ **en** $x = 1$

$f'(1) = 3$

Del 23 al 31. Utilizando la definición, encuentra en cada caso la función derivada f' de la función f dada e indica el conjunto donde f es derivable.

23 $f(x) = 3x^2 - 5$

$f'(x) = 6x$, f es derivable en R.

24 $f(x) = x - x^2$

$f'(x) = 1 - 2x$, f es derivable en R

25 $f(x) = 2x + 3$

$f'(x) = 2$, f es derivable en R.

26 $f(x) = 3(1 + x^2)$

$f'(x) = 6x$, f es derivable en R

27 $f(x) = \dfrac{5}{2x}$

$f'(x) = -\dfrac{5}{2x^2}$, f es derivable en R – {0}

28 $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

$f'(x) = -\dfrac{2}{x^3}$, f es derivable en R – {0}

29 $f(x) = 2 + x + x^2$

$f'(x) = 1 + 2x$, f es derivable en R.

30 $f(x) = (2 + x)(2 - x)$

$f'(x) = -2x$, f es derivable en R

31 $f(x) = \sqrt{x+1}$

$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$, f es derivable en $]-1, +\infty[= R -]-\infty, -1]$

Del 32 al 41. Utiliza las reglas de derivación para encontrar la función derivada de la función *f* dada e indica el conjunto de derivabilidad de *f*.

32 $f(x) = x^5 + x^4 - 3x^2 + 1$

$f'(x) = 5x^4 + 4x^3 - 6x$, f es derivable en R

33 $f(x) = \dfrac{4}{3x}$

$f'(x) = -\dfrac{4}{3x^2}$, f es derivable en R – {0}.

34 $f(x) = 2\sqrt{x} + 6 + \dfrac{5}{x}$

$f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{5}{x^2}$, f es derivable en R – {0}

35 $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$

$f'(x) = \dfrac{-2}{(x-1)^2}$, f es derivable en R – {1}.

36 $f(x) = 4x^2 (1 + x)^5$

$f'(x) = 8x(1 + x)^5 + 20x^2(1 + x)^4$, f es derivable en R

37 $f(x) = (1 + x^2) \sqrt{x}$

$f'(x) = \dfrac{5x^2 + 1}{2\sqrt{x}}$, f es derivable en $]0, +\infty[= R -]-\infty, 0]$

38 $f(x) = 3 - (1 + x)^2$

$f'(x) = -2(1 + x)$, f es derivable en R

39 $f(x) = \dfrac{x}{1 - x^2}$

$f'(x) = \dfrac{x^2 + 1}{(1 - x^2)^2}$, f es derivable en R – {–1, 1}

40 $f(x) = \dfrac{1}{3x^2 - 1}$

$f'(x) = \dfrac{-6x}{(3x^2 - 1)^2}$, f es derivable en $R - \left\{-\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right\}$

41 $f(x) = -\frac{2}{3}x^4 + 3x^2 - 7$

$f'(x) = 6x - \frac{8}{3}x^3$, f es derivable en R.

Del 42 al 49. Encuentra una ecuación de la recta tangente a cada una de las siguientes curvas en el punto cuya abscisa se indica.

42 $y = \frac{1}{2x^2}$ en $x = 1$

$2x - 2y - 1 = 0$

43 $y = 4x^2 - 3x$ en $x = \frac{1}{2}$

$y = x - 1$

44 $y = \frac{x^2 + 2}{x - 1}$ en $x = -2$

$2x - 3y - 2 = 0$

45 $y = \sqrt{x}$ en $x = 4$

$y = \frac{1}{4}x + 1$

46 $y = \sqrt{1 - x}$ en $x = \frac{3}{4}$

$4x + 4y - 5 = 0$

47 $y = \frac{x^2}{x + 1}$ en $x = 0$

$y = 0$

48 $y = 2x - 3x^2$ en $x = 1$ y $x = 3$

$4x + y - 3 = 0$ y $16x + y - 27 = 0$

49 $y = 3x - x^2$ en $x = \frac{3}{2}$

$y = \frac{9}{4}$

50 **Calcula las coordenadas del punto de la gráfica de la función $f(x) = 2\sqrt{5x}$ en el que la recta tangente forme con OX^+ un ángulo de 45°. Determina la ecuación de dicha recta.**

$x - y + 5 = 0$

51 **Determina las coordenadas de los puntos de la gráfica de $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$ en los que la recta tangente es paralela al eje OX.**

$P(-1, -1)$ y $Q(1, 1)$.

52 **La ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función f en el punto de abcisa $x = -2$ es $y = -x + 2$. Determina el valor de $f'(-2)$ y las coordenadas del punto de tangencia.**

$f'(-2) = -1$; $P(-2, 4)$

53 **¿En qué puntos la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = 2x^3 - 4x$ tiene pendiente 2? ¿Hay algún punto de la gráfica en el que la recta tangente sea horizontal?**

Tiene pendiente 2 en $P(-1, 2)$ y $Q(1, -2)$.

Es horizontal en $P\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{8}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ y $Q\left(\sqrt{\frac{2}{3}}, -\frac{8}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$.

54 **Halla la derivada de las siguientes funciones:**

a) $f(x) = (x^2 - 1)^3$

b) $f(x) = \dfrac{2x-3}{x-2}$

c) $f(x) = (2x - 3)^3 (2x + 4)$

d) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$

e) $f(x) = x \cdot \operatorname{sen} x$

f) $f(x) = \sqrt{\operatorname{sen} x}$

g) $f(x) = \cos 3x$

h) $f(x) = \operatorname{tg}^2 x$

i) $f(x) = 3x + \operatorname{sen} 3x$

j) $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$

k) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x}$

l) $f(x) = \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$

m) $f(x) = e^{3x^2 - 2x}$

n) $f(x) = \operatorname{sen} 2x \cdot \operatorname{tg} 3x$

ñ) $f(x) = \operatorname{tg} \sqrt{x}$

o) $f(x) = \operatorname{arc\,sen}(x - 2)$

p) $f(x) = 3 \operatorname{arc\,cos} x^2$

q) $f(x) = \sqrt{\operatorname{arc\,tg} x}$

r) $f(x) = \sec x$

s) $f(x) = \operatorname{cosec} x$

t) $f(x) = \operatorname{cotg} x$

u) $f(x) = \sqrt[4]{2x + 3}$

v) $f(x) = \operatorname{sen}^2 x^2$

w) $f(x) = \log_3 (5x + 4)$

x) $f(x) = ln(\cos x)$

y) $f(x) = \operatorname{sen}^2 x + \cos 2 x$

z) $f(x) = ln \dfrac{x+1}{x-1}$

a) $f'(x) = 6x(x^2 - 1)^2$

b) $f'(x) = \dfrac{-1}{(x-2)^2}$

c) $f'(x) = 2(2x - 3)^2\,(8x + 9)$

d) $f'(x) = \dfrac{x\cos x - \operatorname{sen} x}{x^2}$

e) $f'(x) = \operatorname{sen} x + x\cos x$

f) $f'(x) = \dfrac{\cos x}{2\sqrt{\operatorname{sen} x}}$

g) $f'(x) = -3\operatorname{sen} 3x$

h) $f'(x) = 2\operatorname{tg} x\,(1 + \operatorname{tg}^2 x) = \dfrac{2\operatorname{tg} x}{\cos^2 x}$

i) $f'(x) = 3 + 3\cos 3x$

j) $f'(x) = \dfrac{e^x(x-1)}{x^2}$

k) $f'(x) = \dfrac{-\sqrt{x}}{2x^2}$

l) $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}\cos\dfrac{1}{x}$

m) $f'(x) = (6x - 2)\,e^{3x_2 - 2x}$

n) $f'(x) = 2\cos 2x\operatorname{tg} 3x + 3\operatorname{sen} 2x\,(1 + \operatorname{tg}^2 3x)$

ñ) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\,(1 + \operatorname{tg}^2\sqrt{x})$

o) $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - (x-2)^2}}$

p) $f'(x) = \dfrac{-6x}{\sqrt{1 - x^4}}$

q) $f'(x) = \dfrac{1}{2\,(1 + x^2)\sqrt{\operatorname{arc\,tg} x}}$

r) $f'(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = \sec x\operatorname{tg} x$

s) $f'(x) = \dfrac{-\cos x}{\operatorname{sen}^2 x} = -\operatorname{cosec} x\operatorname{ctg} x$

t) $f'(x) = -1 - \operatorname{ctg}^2 x = \dfrac{-1}{\operatorname{sen}^2 x}$

u) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt[4]{(2x + 3)^3}}$

v) $f'(x) = 4x\operatorname{sen} x^2\cos x^2$

w) $f'(x) = \dfrac{5}{(5x + 4)\ln 3}$

x) $f'(x) = -\operatorname{tg} x$

y) $f'(x) = 2\operatorname{sen} x\cos x - 2\operatorname{sen} 2x$

z) $f'(x) = \dfrac{-2}{x^2 - 1}$

55 **Halla los puntos de la gráfica de la función $f(x) = x^3 - 5x^2 + 8x$ en los que la recta tangente tiene pendiente 8.**
Demuestra que hay dos puntos de la gráfica de f en los que la recta tangente es horizontal.

Tiene pendiente 8 en $P(0, 0)$ y $Q\left(\dfrac{10}{3}, \dfrac{220}{27}\right)$.

Es horizontal en $P\left(\dfrac{4}{3}, \dfrac{112}{27}\right)$ y $Q(2, 4)$.

56 **Estudia el crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = 2x^3 + 6x^2 - 8x + 5$ en los puntos de abscisa:**

a) $x = 0$

b) $x = 2$

c) $x = -\frac{1}{2}$

a) En $x = 0$ es decreciente

b) En $x = 2$ es creciente

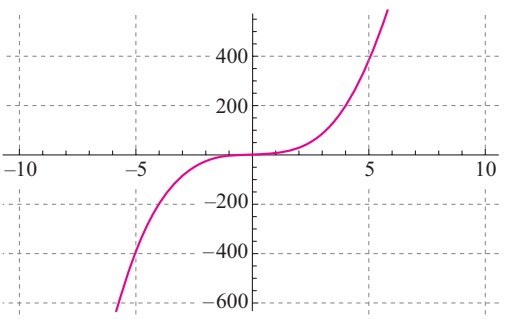
c) En $x = -\frac{1}{2}$ es decreciente

57 **Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento así como los posibles extremos relativos de las funciones siguientes. Esboza también una gráfica de dichas funciones.**

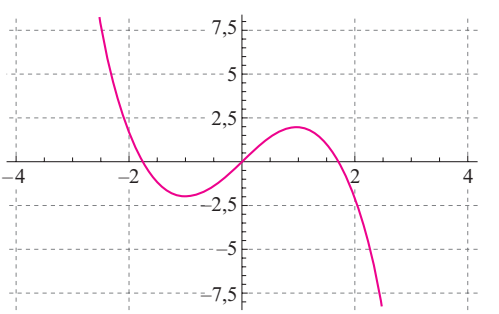
a) $f(x) = 3x^3 + 2x$ **b)** $f(x) = 3x - x^3$ **c)** $f(x) = 2x - x^2$

d) $f(x) = x^4 - 2x^2$ **e)** $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ **f)** $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 9}$

a) Creciente en R.
Decreciente nunca.
Máximos y mínimos no tiene.



b) Creciente en $]-1, 1[$
Decreciente en $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty$
Máximo en $(1, 2)$
Mínimo en $(-1, -2)$

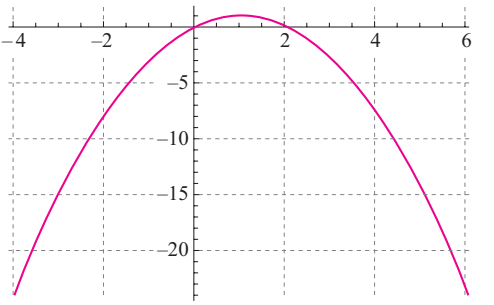


c) Creciente en $]-\infty, 1[$

Decreciente en $]1, +\infty[$

Máximo en $(1, 1)$

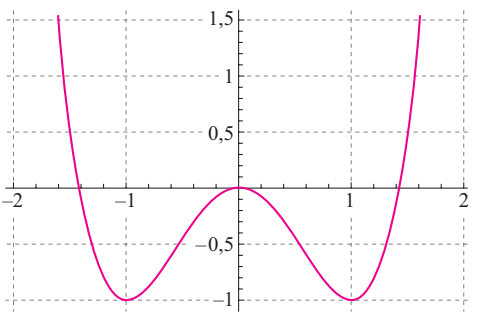
Mínimo no tiene



d) Creciente en $]-1, 0[\cup]1, +\infty[$

Decreciente en $]-\infty, -1[\cup]0, 1[$

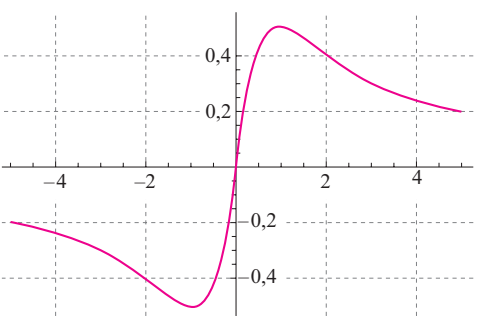
Máximo en $(0, 0)$ Mínimos en $(-1, -1)$ y $(1, -1)$



e) Creciente en $]-1, 1[$

Decreciente en $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$

Máximo en $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ Mínimo $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$

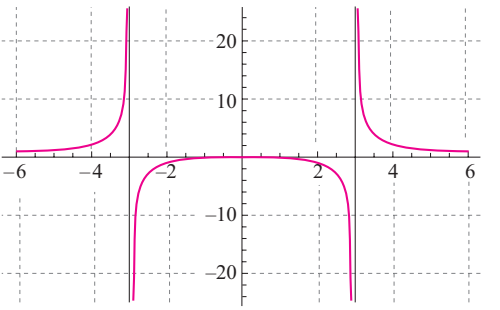


f) Creciente en $]-\infty, -3[\cup]-3, 0[$

Decreciente en $]0, 3[\cup]3, +\infty[$

Máximo en (0, 0)

Mínimo no tiene



58 **Halla *a*, *b* y *c* sabiendo que la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ pasa por (–1, 0) y tiene un máximo en (0, 4).**

$a = -3,\ b = 0,\ c = 4$

59 **Una población de 100 millones de bacterias está siendo tratada para su eliminación y se sabe que la población *p* en millones en el instante *t* (en días) es $p(t) = 100 - t^2$.**

a) Halla su tasa de variación entre los días $t = 1$ y $t = 2$.

b) ¿Cuál es la velocidad de decrecimiento de la población en $t = 3$?

a) –3 millones/día

b) 6 millones día

60 **Se ha trazado la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^3$ y se sabe que su pendiente es 3 y que pasa por el punto (0, –2). Halla el punto de tangencia.**

$P(1, 1)$

61 **Encuentra las funciones polinómicas**

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

cuya segunda derivada sea $x - 1$. ¿Cuál o cuáles de ellas tienen un mínimo relativo en el punto $\left(4, -\frac{1}{3}\right)$.

$$f(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + cx + d$$

$$f(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 13$$

62 **Supongamos que el rendimiento *r* de un alumno en un examen de una hora viene dado por $r = 300\ t(1 - t)$, donde $0 \leq t \leq 1$ es el tiempo en horas. Se pide:**

a) ¿En qué momentos aumenta o disminuye el rendimiento?

b) ¿En qué momentos el rendimiento es nulo?

c) ¿Cuándo se obtiene el mayor rendimiento y cuál es?

a) aumenta en $\left[0, \frac{1}{2}\right[$ y disminuye en $\left]\frac{1}{2}, 1\right]$

b) El rendimiento es nulo en $t = 0$ y $t = 1$.

c) Se obtiene el mayor rendimiento en $t = \frac{1}{2}$ y es $r = 75$.

63 **Un trabajador experimentado de una fábrica de juguetes puede montar un máximo de 100 juguetes diariamente. Si un trabajador sin experiencia ocupa su lugar, se estima que el número de juguetes que diariamente puede producir al cabo de *x* días es**

$$P(x)=100(1 - e^{-kx})$$

siendo *k* una constante que depende de cada individuo.

a) Obtén el valor de la constante *k* para un trabajador novato que es capaz de montar 50 juguetes con sólo un día de entrenamiento.

b) ¿Cuántos juguetes montará el cuarto día de entrenamiento?

c) Obtén el valor de la derivada de $P(x)$ en $x = 1$ y en $x = 2$. Comenta los valores obtenidos en relación a la velocidad de aprendizaje de este trabajador sin experiencia.

a) $k = \ln 2$

b) 93

c) $P'(1) = 50 \ln 2$; $P'(2) = 25 \ln 2$. Al aumentar el tiempo la velocidad de aprendizaje disminuye.

64 **Sea la función $f(x) = \frac{16}{x^2(x - 4)}$**

a) Determina su dominio de existencia y sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

b) Calcula sus asíntotas y extremos.

c) Representa gráficamente la función.

a) $D =]-\infty, 0[\cup]0, 4[\cup]4, \infty[$

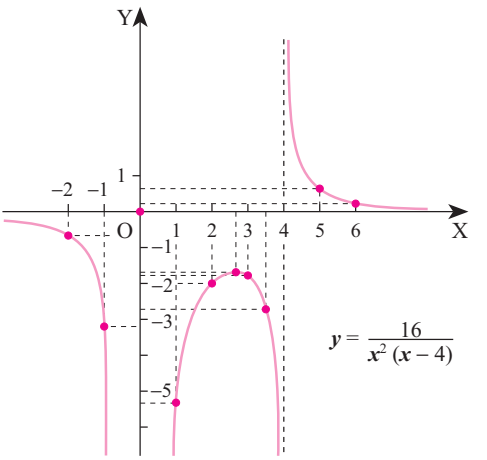
crecimiento $x \in \left]0, \frac{8}{3}\right[$

decrecimiento $x \in]-\infty, 0[\cup \left]\frac{8}{3}, \infty\right[$

b) Asíntotas verticales $x = 0$ y $x = 4$

Asíntota horizontal $y = 0$ y $x = \frac{8}{3}$ máximo

c)



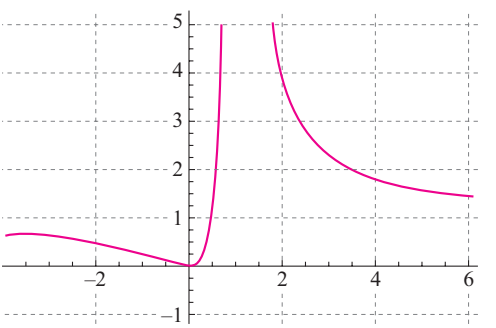
65 **Sea la función $f(x) = \frac{x^2}{(x-1)^2}$. Estudia su crecimiento y decrecimiento así como sus extremos relativos. Dibuja su gráfica.**

Creciente en $]0, 1[$

Decreciente en $]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$

Máximo no tiene

Mínimo en (0, 0)



66 **Calcula la derivada de $y = \frac{1}{x}$ y justifica si esa función es creciente o decreciente en el intervalo [1, 7].**

$y' = -\frac{1}{x^2}$. Es decreciente porque y' es negativa en dicho intervalo.

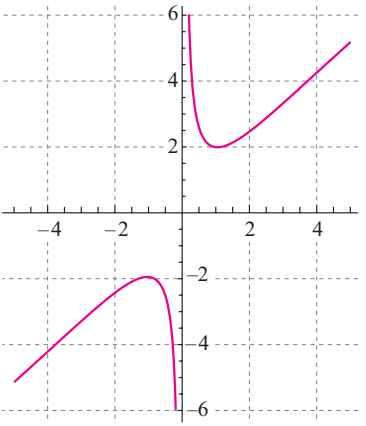
67 **Se define la función $f(x) = x - \frac{k}{x}$. Se pide:**

a) Determinar k para que dicha función tenga un máximo para $x = -1$.

b) Dibuja la gráfica de la función f para el valor de k hallado en el apartado anterior.

a) $k = -1$

b)



68 **El número de miembros de una peña deportiva fundada en 1993 es *x* años después de su fundación:**

$$f(x) = -\frac{1}{3}(x^3 - 9x^2 + 24x - 48)$$

a) ¿En qué año tuvo el máximo número de miembros entre 1993 y 1998?

b) ¿Cuál es la tendencia actual en 1998, creciente o decreciente?

c) ¿Llegará a quedarse sin socios?

a) En 1997.

b) Decreciente.

c) Si.

69 **Halla una función polinómica de segundo grado sabiendo que pasa por el punto *P*(1, 0) y que la pendiente de la recta tangente en el punto de abcisas *x* = 2 es 7.**

Todas las de la forma $f(x) = ax^2 + (7 - 4a)x + 3a - 7$, en particular $f(x) = x^2 + 3x - 4$.

70 **Halla el punto de la gráfica de la función $f(x) = 4x^2 - 3x + 5$ en el que la recta tangente es paralela a la bisectriz del segundo cuadrante.**

$P\left(\frac{1}{4}, \frac{9}{2}\right)$

71 **Encuentra una ecuación polinómica de segundo grado sabiendo que pasa por el punto *P*(–1, 6) y que tiene un mínimo en *Q*(2, –3).**

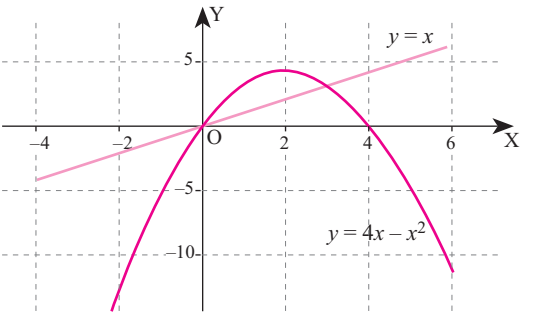
$f(x) = x^2 - 4x + 1$

72 **Sean las funciones $f(x) = 4x - x^2$ y $g(x) = x$.**

a) Represéntalas gráficamente.

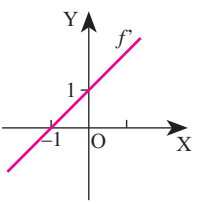
b) Encuentra un punto de la gráfica de la función *f* en el que la recta tangente sea paralela a la gráfica de la función *g*.

a)

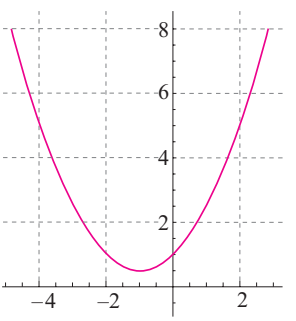


b) $P(2, 4)$

73 **La figura siguiente es la derivada de una función *f* continua en R. Esboza una posible gráfica de función *f*.**



Una posible gráfica es:



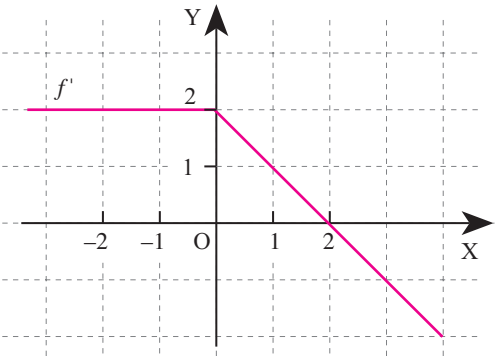
74 **Calcula los valores de *a, b* y *c* sabiendo que la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ pasa por los puntos (1, 0) y (0, –2) y presenta un máximo relativo cuando $x = \frac{3}{2}$.**

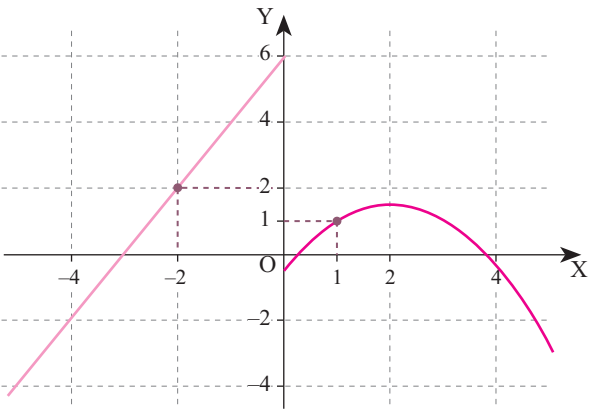
$a = -1,\ b = 3,\ c = -2$

75 **Sea la función $f(x) = x^2 - 6x + 5$. Calcula en qué punto de la gráfica la recta tangente tiene de pendiente 2.**

$P(4, -3)$

76 **La figura siguiente representa la gráfica de la derivada de una función *f* continua en R. Deduce a partir de ella su gráfica sabiendo que pasa por los puntos *A*(–2, 2) y *B*(1, 1).**





77 **Al vender un producto a un precio *x* entre 40 y 65 euros, el beneficio es $y = -x^2 + 100x - 2100$ euros. Obtén razonadamente el precio de *x* que hace máximo el valor de *y*.**

78 **Con un alambre de 4 metros se quiere construir el borde de un rectángulo de área máxima. ¿Qué dimensiones hay que dar al rectángulo?**

Los dos lados iguales a 2 m.

$x = 50$

79 **Descomponer el número 18 como suma de dos números positivos, de manera que el producto de uno de ellos por el cuadrado del otro sea máximo.**

6 y 12

80 **Halla el área del triángulo rectángulo de área máxima que tenga 10 m de hipotenusa.**

25 m^2

81 **Se desea comprar un terreno rectangular de 400 m^2 de superficie. ¿Cuáles serán las dimensiones más convenientes para que la construcción de la cerca resulte lo más económica posible?**

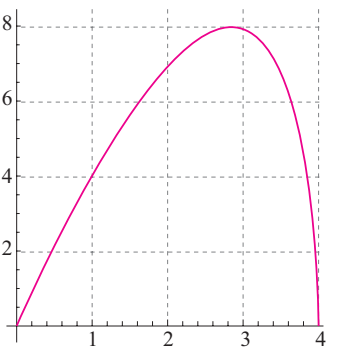
Un cuadrado de lado 20 m.

82 **De todos los pares *x* e *y* de números reales positivos cuya suma sea 30, determina el par (*x*, *y*) cuyo producto $P = x \cdot y$ es máximo.**

(15, 15)

83 **Obtén el área de un rectángulo inscrito en una circunferencia de radio 2 en función de la base *x* del rectángulo. Representa la función área obtenida y deduce de su derivada dónde es creciente o decreciente, así como cuál es el rectángulo de área máxima inscrito en dicha circunferencia.**

$A(x) = x\sqrt{16 - x^2}$



Creciente en $]0,\ 2\sqrt{2}\ [$

Decreciente en $[2\sqrt{2}\ ,\ 4[$

El rectángulo de área máxima es un cuadrado de lado $2\sqrt{2}$.

Tema 16 DISTRIBUCIONES BIDIMENSIONALES. REGRESIÓN Y CORRELACIÓN

1 **Calcula las medias, las varianzas, las desviaciones típicas y la covarianza de las dos distribuciones siguientes:**

a)

x_i	1	2	3	4	5
y_i	3	5	7	9	11

b)

x_i	–2	–1	0	1	3	5
y_i	4	2	1	1	3	6

a) $\bar{x} = 3$; $s_x = 1{,}41$; $s_x^2 = 2$ $\quad \bar{y} = 7$; $s_y = 2{,}83$; $s_y^2 = 8$ $\quad s_{xy} = 4$

b) $\bar{x} = 1$; $s_x = 2{,}38$; $s_x^2 = 5{,}67$ $\quad \bar{y} = 2{,}83$; $s_y = 1{,}77$; $s_y^2 = 3{,}14$ $\quad s_{xy} = 2{,}17$

2 **Calcula e interpreta el coeficiente de correlación de las tablas del ejercicio 1.**

a) $r = 1$. La dependencia es funcional, es la recta $y = 2x + 1$.

b) $r = 0{,}52$. La correlación es directa y débil.

3 **Con la tabla b) del ejercicio 1 calcula y dibuja la recta de regresión de *y* sobre *x*. Para un valor de $x = 5{,}5$, obtén el valor estimado de *y*.**

$y = 2{,}45098 + 0{,}38235x$

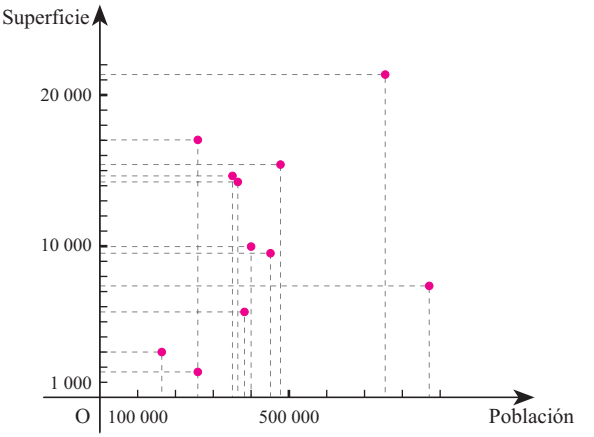
$y(5{,}5) = 4{,}5539$

4 **En el cuadro siguiente tienes la superficie en km² y la población de 10 provincias españolas. Estudia su posible correlación.**

Provincia	Población	Superficie
Alava	179 869	3 047
Albacete	341 812	14 858
Badajoz	754 454	21 657
Burgos	362 787	14 269
Cádiz	878 518	7 385
Cuenca	266 590	17 061
Girona	394 786	5 886
Huelva	401 549	10 085
Lugo	458 197	9 803
Toledo	488 599	15 368

$r = 0{,}228$ la correlación es escasa

Observando la nube de puntos obtendríamos la misma conclusión



5 **Vamos a buscar la relación entre la densidad de algunas sustancias expresada en (g/cm^3) y su calor específico expresado en cal/g. °C. Calcula el coeficiente de correlación lineal.**

Sustancia	Densidad	Calor específico
Agua	1	1
Hielo	0,92	0,5
Aluminio	2,69	0,217
Hierro	7,85	0,113
Plata	10,42	0,057
Oro	19,3	0,032
Plomo	11,005	0,031
Níquel	8,8	0,106
Cinc	7,1	0,093
Cobre	8,9	0,092
Estaño	7,29	0,054
Hidrógeno	0,07	3,4

$r = -0{,}57$ débil y negativa

6 **Considerar la serie estadística bidimensional**

x	–2	–1	0	1	23
y	–7	–4	–1	2	58

Calcular:

a) Las rectas de regresión.

b) El coeficiente de correlación.

c) Interpretar el resultado.

a) recta de regresión de y sobre x

$y = 2{,}58x - 1{,}24$

recta de regresión de x sobre y

$x = 0{,}39y + 0{,}48$

b) $r = 0{,}99$. El coeficiente nos indica que la correlación es muy fuerte y positiva

7 **Idem, para la serie:**

$$(x_i\,,\,y_j) \;=\; \{(1,\,4),\;\;(2,\,5),\;\;(4,\,3),\;(2,\,0),\;\;(5,\,4)\}$$

a) $y = 0{,}11x + 2{,}89$

$x = 0{,}08y + 2{,}54$

b) $r = 0{,}09$ la correlación es escasa o nula

8 **Dada la distribución bidimensional:**

x	1	2	3	4	5
y	4	7	10	13	16

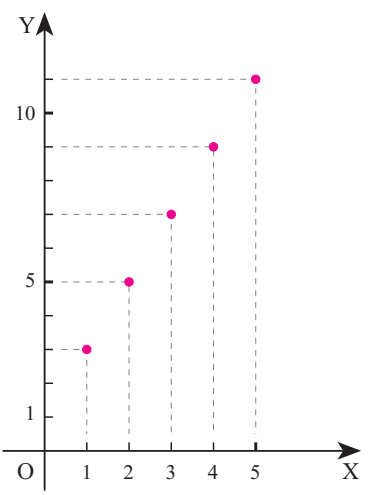
a) Dibujar la nube de puntos.

b) Comprobar que $S_x^2 = 2;\; S_y^2 = 18;\; S_{xy} = 6.$

c) Comprobar que las dos rectas de regresión coinciden.

d) ¿Puede hablarse de una relación funcional?

a)



b) $\bar{x} = 3;\quad s_x^2 = 2;\quad \bar{y} = 7;\quad s_y^2 = 8;\quad s_{xy} = 25 - 21 = 4$

c) $y = 2x + 1;\;\; 2x - y + 1 = 0$ recta de regresión de y sobre x

$x = \dfrac{y-1}{2};\;\; 2x - y + 1 = 0$ recta de regresión de x sobre y

d) Si, la recta es $y = 2x + 1$

9 **Dada la distribución:**

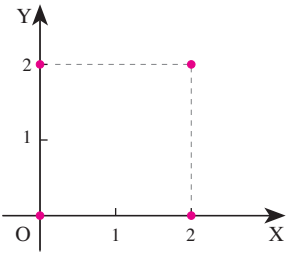
x	0	0	2	2
y	0	2	0	2

a) Dibujar la nube de puntos.

b) Comprobar que $S_x^2 = S_y^2 = 1$ **y que** $S_{xy} = 0.$

c) Comprobar la perpendicularidad de las rectas de regresión.

a)



b) $s_x^2 = s_y^2 = 1$; $s_{xy} = 0$

c) recta de regresión de y sobre x, $y = 1$
recta de regresión de x sobre y, $x = 1$

10 **La distribución de edades y presión arterial de 10 personas es:**

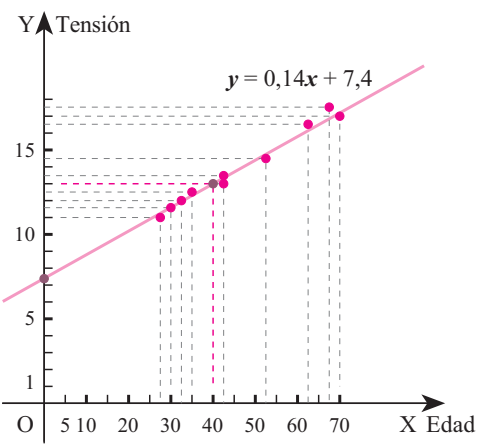
Edad (X)	30	28	35	42	51	42	63	32	70	67
Tensión (Y)	11,5	11,3	12,5	13,5	14,6	13	16,6	12	16,9	17

a) Representar la nube de puntos. ¿Se puede proceder a un ajuste lineal?

b) Calcular el coeficiente de correlación lineal.

c) Prever la tensión de una persona de sesenta años.

a)



Si se puede proceder a un ajuste lineal

b) $r = 0{,}99$

c) Con 60 años la tensión será 15,8

En las series estadísticas de los ejercicios 11 y 12 se pide:

a) Dibujar la nube de puntos.

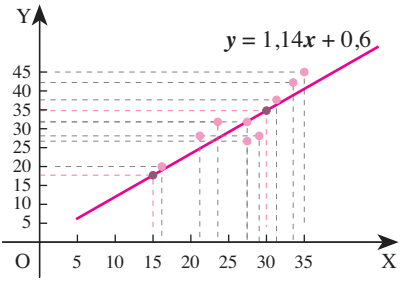
b) Calcular la recta de regresión de *Y* sobre *X* y representarla en la nube de puntos.

c) Calcular el coeficiente de correlación y comentar el resultado.

11

16	28	23	24	28	29	31	34	35
20	26	28	32	32	28	36	41	45

a)



Si se puede proceder a un ajuste lineal

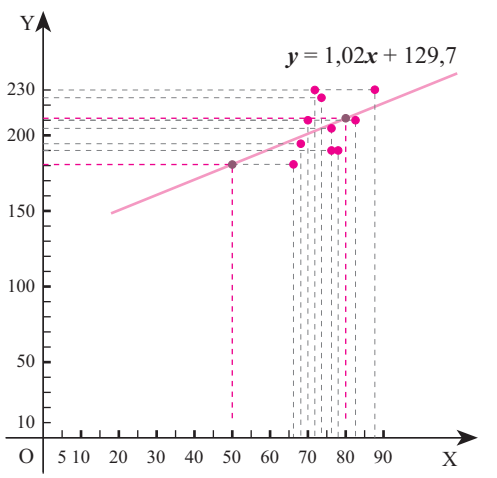
b) $y = 1{,}14x + 0{,}6$

c) $r = 0{,}87$ es fuerte y positiva

12

68	76	78	70	74	72	78	66	86	82
195	205	190	210	225	230	190	180	230	205

a)



b) $y = 1{,}02x + 129{,}7$

c) $r = 0{,}36$ muy débil la correlación existente

13 **La tabla adjunta proporciona las tasas de variación interanual del Índice de Precios al Consumo y los miles de parados registrados en las oficinas del INEM, de los doce meses del año 2006:**

	Tasa IPC	Parados		Tasa IPC	Parados
Enero	4,2	2171,5	Julio	4	1955,0
Febrero	4	2169,3	Agosto	3,7	1983,7
Marzo	3,9	2148,5	Septiembre	2,9	1966,2
Abril	3,9	2075,7	Octubre	2,5	1992,8
Mayo	4	2004,5	Noviembre	2,6	2023,2
Junio	3,9	1959,8	Diciembre	2,7	2022,9

Valora, con el coeficiente de correlación lineal, el grado de dependencia lineal entre la tasa del IPC y el número de parados.

$r = 0{,}399 \Rightarrow$ la relación es débil y en sentido creciente.

14 **Las tasas de variación mensual e interanual del Índice de Precios al Consumo correspondientes a los seis primeros meses del año 2007 se recogen en la tabla siguiente:**

	Variación mensual	Variación anual
Enero	–0,7	2,4
Febrero	0,1	2,4
Marzo	0,8	2,5
Abril	1,4	2,4
Mayo	0,3	2,3
Junio	0,2	2,4

Se pide:

a) Las medidas aritméticas y las desviaciones típicas de ambas variaciones.

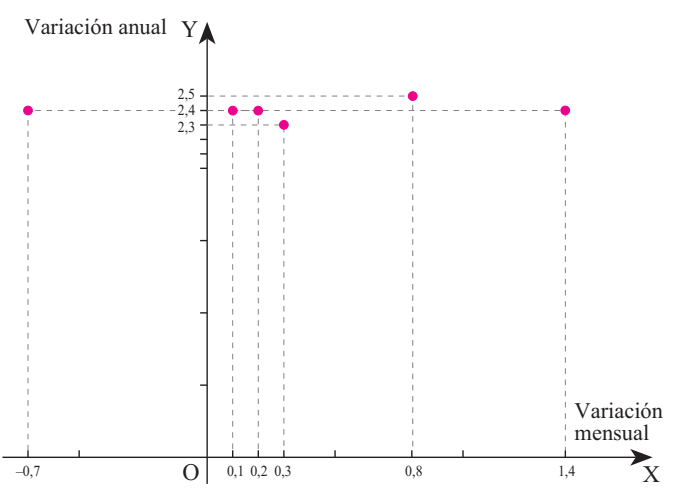
b) El coeficiente de correlación lineal entre las dos variaciones.

c) Relacionar el coeficiente de correlación anterior con la nube de puntos.

a) 0,35 y 0,645; 2,4 y 0,058

b) $r = 0{,}223$ relación débil y positiva

c)



La nube de puntos puede representarse por una recta paralela al eje de abcisas, y se confirma la débil relación lineal de las variaciones mensuales y anuales del IPC en el primer semestre del año 2007.

15 **La nota media del expediente (x) y la nota obtenida de pruebas de acceso a la Universidad (y) de ocho alumnos elegidos al azar fueron:**

x	6,24	7,91	7,04	6,13	6,38	6,48	6,44	5,99
y	4,20	4,65	6,51	6,73	5,20	4,60	5,69	3,42

Se pide:

a) Obtener el coeficiente de correlación entre ambas variables e interpretar el resultado.

b) Calcular la recta de regresión de y sobre x.

c) Según el ajuste que ofrece la recta de regresión, ¿qué nota sería esperable que sacara en las pruebas de acceso un alumno con nota media de expediente 8,31?

a) $r = 0{,}1$ escasa correlación

b) $y = 0{,}2x + 3{,}8$

c) $y = 5{,}46$

16 **Considera la serie estadística bidimensional**

x	2	4	5	5	8	9
y	3	3	1	3	6	4
n	2	1	3	4	2	3

a) Representa la nube de puntos.

b) Calcula el coeficiente de correlación e indica qué significa el valor obtenido.

c) Calcula las rectas de regresión y represéntalas en la nube de puntos.

$r = 0{,}557$; $y = 1{,}13 + 0{,}36x$; $x = 3 + 0{,}858y$

17 **Una empresa dispone de los datos de la tabla**

número de vendedores	3	4	5	8	10
número de pedidos	90	110	140	190	235

Estimar el número de pedidos que obtendrían 9 vendedores. Indica el método utilizado en el cálculo de la estimación y la fiabilidad de esta estimación.

9 vendedores tendrían un número de pedidos estimado de 214. Se ha utilizado la recta de regresión $y = 20{,}26x + 31{,}45$.

Con un coeficiente $r = 0{,}9$, dependencia muy fuerte.

18 **Una empresa tiene los datos de la tabla**

mill. en publicidad	1	2	3	4	5	6	7	8
ventas	15	16	14	18	21	19	19	21

Estima las ventas esperadas al invertir 10 millones en publicidad.

Explica la fiabilidad de la estimación realizada. Los datos de ventas de la tabla son también en millones.

Ventas esperadas con 10 millones de publicidad serán 22,77 millones

$r = 0{,}83$, es una correlación fuerte

19 **Construye, razonadamente, dos distribuciones bidimensionales que tengan coeficientes de correlación cercanos a 0 y a 1.**

x	2	3	5	6
y	5	8	15	19

$r \Rightarrow 0{,}99$

x	2	3	5	6
y	1	8	1	2

$r \Rightarrow -0{,}27$

20 **Se ha realizado un estudio sobre las preferencias de las ratas con respecto a la temperatura del agua. Un grupo de 10 ratas fue sometido a dos temperaturas del agua diferentes y se midió el tiempo de permanencia en este medio. Estos fueron los resultados.**

26°C	6	7	8	5	9	3	6	4	7	2
30°C	1	8	3	10	4	7	9	2	4	6

Calcular la covarianza y el coeficiente de correlación. Analizar qué tipo de dependencia existe entre las variables.

$s_{xy} = -1{,}28$; $r = -0{,}21$

Existe una dependencia escasa

21 **La media de los pesos de una población es de 65 kg y la de las estaturas 170 cm, mientras que las desviaciones típicas son de 5 kg y 10 cm respectivamente y la covarianza de ambas variables es 40. Calcular la recta de regresión de los pesos respecto de las estaturas. ¿Cuánto estima que pesará un individuo de 180 cm de estatura?**

$x = 0{,}4y - 3$; x = peso en kg; y = estatura en cm;

$y = 180$ cm $\rightarrow$ peso = 69 kg

22 **La siguiente tabla ofrece los resultados de 6 pares de observaciones realizadas para analizar el grado de relación existente entre dos variables X e Y.**

X	2	2	3	3	3	4
Y	0	1	1	2	4	3

Obtener:

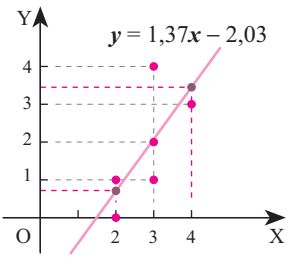
a) Recta de regresión de Y sobre X.

b) Representación gráfica de la misma, así como de los pares de observaciones anteriores.

c) ¿Qué grado de relación lineal existe entre ambas variables?

a) $y = 1{,}37x - 2{,}03$

b)



c) El coeficiente de correlación $r = 0{,}71$ positiva y media.

23 **Calcula la recta de regresión correspondiente a la distribución siguiente**

Altura sobre el nivel del mar	0	184	231	481	730	911	1550
Presión atmosférica	760	745	740	720	700	685	650

¿Qué presión atmosférica habría sobre Peña Vieja (2.600 metros de altitud aproximadamente)?

$y = -0{,}07x + 756{,}40$.

Presión atmosférica sobre Peña Vieja

$x = 2.600$; $y = 574{,}4$

24 **¿Qué significa que en una distribución bidimensional el coeficiente de correlación sea 0? ¿Y que sea –1?**

$r = 0 \rightarrow$ las variables son linealmente independientes y no están correlacionadas

$r = -1 \rightarrow$ la dependencia lineal es funcional, pero inversa

25 **En una muestra fiable de una determinada región se han obtenidos los siguientes datos:**

AÑO	1994	1995	1996	1997	1998	1999
X	13	20	23	25	27	31
Y	80	80	90	100	110	110

AÑO	2000	2001	2002	2003	2004	2005
X	36	46	55	63	70	76
Y	120	160	180	190	200	210

(*X* = nº de telespectadores en miles. *Y* = nº de enfermos mentales).

Calcular el coeficiente de correlación.

¿Se puede inferir de este resultado que la televisión altera la salud mental de los telespectadores? ¿Se puede deducir que en esa región compran televisiones una vez que se han vuelto locos?

$r = 0{,}99$. Son dos variables que aunque su correlación sea alta no tienen ningún tipo de dependencia.

26 **Una compañía desea hacer predicciones del valor anual de sus ventas totales en cierto país a partir de la relación entre éstas y la renta nacional. Para investigar la relación cuenta con los siguientes datos:**

X	189	190	208	227	239	252	257	274	293	308	316
Y	402	404	412	425	429	436	440	447	458	469	469

donde X representa la renta nacional en millones de dólares e Y representa las ventas de la compañía en miles de dólares en el periodo desde 1995 hasta 2005 (ambos inclusive).

Se pide:

a) Obtener la recta de regresión de Y sobre X. Brevemente: ¿qué representa esta recta?

b) Calcular el coeficiente de correlación lineal entre X e Y e interpretarlo.

c) En 2006 se espera que la renta nacional del país sea 325 millones de dólares. ¿Cuál será la predicción para las ventas de la compañía en este año?

a) $y = 0{,}53x + 301{,}67$

b) $r = 0{,}998$ es una correlación muy fuerte y positiva

c) $y = 473{,}92$ millones de dólares, siendo $x = 325$ millones de dólares

27 **Se han medidos los pesos y tallas de 5 personas, obteniéndose los siguientes datos:**

Peso (x) kg	50	55	55	60	60
Talla (y) cm	150	160	170	180	190

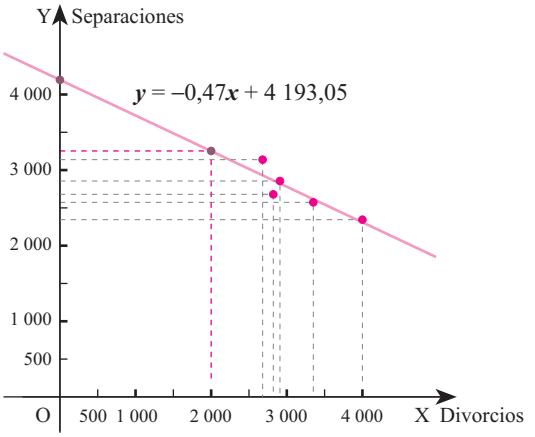
Calcular la recta de regresión de *y* (talla) sobre *x* (peso). ¿Cuál es la talla esperada para una persona que pese 62 kg?

$y = 3{,}57\ x - 30{,}18$ si $x = 62$kg; $y = 191{,}16$ cm

28 **Durante cinco años, los Juzgados de Madrid tramitaron los siguientes casos de separaciones y divorcios:**

Separaciones	2 357	2 586	2 689	3 073	2 821
Divorcios	4 000	3 428	2 903	2 711	2 910

Representar la nube de puntos de esta tabla y calcular el coeficiente de correlación lineal de las dos variables (número de separaciones y número de divorcios). Interpretar el resultado. Ajustando una recta de regresión lineal, ¿cuántas separaciones se prevé que se produzcan en un determinado año, sabiendo que hubo 3.600 divorcios? Dibujar la recta ajustada.



$r = -0{,}92$ es una correlación fuerte y negativa

$y = -0{,}47x + 4193{,}05$ recta de regresión

$x = 3600$ divorcios; $y = 2501$ separaciones

29 **Una asociación dedicada a la protección de la infancia desea estudiar la relación entre la mortalidad infantil en cada país y el número de camas de hospital por cada mil habitantes. Para ello, posee los siguientes datos sobre diez países concretos que pueden considerarse representativos del resto:**

X	50	100	70	60	120	180	200	250	30	90
Y	5	2	2,5	3,75	4	1	1,25	0,75	7	3

donde X representa el número de camas por cada mil habitantes e Y el tanto por ciento de mortalidad infantil en el país correspondiente. Se pide:

a) Calcular razonadamente la media y la desviación típica de X.

b) Calcular razonadamente la media y la desviación típica de Y.

c) ¿Qué distribución está más dispersa? Razona la respuesta.

d) Calcular el coeficiente de correlación lineal e interpretarlo.

a) $\bar{x} = 115 \quad s_x = 68{,}59$

b) $\bar{y} = 3{,}03 \quad s_y = 1{,}87$

c) Está más dispersa «y», calculando los coeficientes de variación de ambos $CV(x) = 60\%$, $CV(y) = 62\%$

d) $r = -0{,}82$ es una correlación fuerte y negativa, luego al aumentar el nº de camas, disminuye el índice de mortalidad

30 **La creciente inclinación de la torre de Pisa ha generado numerosos estudios sobre su futura estabilidad. En la tabla siguiente se presentan las medidas de su inclinación durante los años 1978 a 1987. Los años se han codificado a las dos últimas cifras y los de la inclinación como décimas de mm por exceso de 2,9000 m, de forma que la inclinación en el año 1978, que fue de 2,9667 aparece en la tabla como 667.**

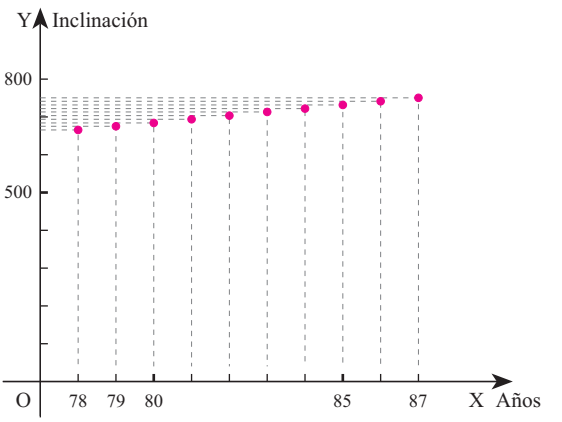
Año	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87
Incl.	667	673	688	696	698	713	717	725	742	757

a) Representa gráficamente estos datos. ¿Crees que la inclinación de la torre tiene una tendencia lineal que crece con el tiempo?

b) Calcula la recta de mínimos cuadrados de la inclinación sobre el tiempo.

c) En 1918 la inclinación de la torre era de 2,9071 m. ¿Cuál sería el valor ajustado según la recta que has obtenido en el aparatado b)? ¿Cuál crees que es la causa de la diferencia entre ambos valores?

a)



b) $y = 9{,}45x - 71{,}64$

c) en 1918; $x = 18$, $y = 98{,}46$ luego la inclinación sería 2,9098 según la recta de mínimos cuadrados. La diferencia se debe a que la recta de mínimos cuadrados proporciona un valor esperado.

31 **Se han hecho dos pruebas de Historia a un grupo de 10 alumnos de 2º de ESO para valorar sus conocimientos. Los resultados obtenidos son:**

Alumno	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	14	12	15	12	13	12	17	7	9	14
B	14	13	17	15	16	12	22	10	14	20

Calcular la covarianza y el coeficiente de correlación. ¿Existe dependencia entre ambas pruebas?

$s_{xy} = 7{,}65$; $r = 0{,}81$

Existe una dependencia fuerte y positiva

32 **Cinco niñas, de 2, 3, 5, 7 y 8 años, pesan respectivamente, 11, 13, 21, 25y 30 kg.**

a) Hallar la ecuación de la recta de regresión del peso sobre las edades.

b) ¿Cuál sería el peso estimado para una niña de 6 años?

a) $y = 5{,}16x + 4{,}22$

b) $x = 6$ años; $y = 35{,}18$ kg

33 **Dada la distribución bidimensional (X, Y):**

X	5	6,5	8	4	3
Y	4,5	7	7,5	5	3,5

a) Calcular el coeficiente de correlación lineal, interpretando el resultado.

b) Determinar la recta de regresión de Y sobre X.

c) Hallar el punto donde se cortan las dos rectas de regresión.

a) $r = 0{,}94$ es una correlación fuerte y positiva

b) $y = 0{,}8x + 1{,}23$

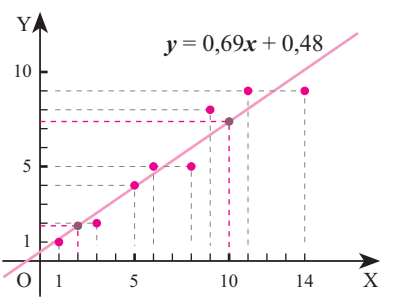
c) (4,82; 5,08)

34 **Calcular la ecuación de la recta de regresión correspondiente a la distribución:**

(1, 1), (3, 2), (5, 4), (6, 5), (8, 5), (9, 8), (11, 9), (14, 9)

Dibujar posteriormente la nube de puntos y la recta de regresión.

$y = 0{,}69x + 0{,}48$



35 **La tabla siguiente muestra el número de gérmenes patógenos (en miles por centímetro cúbico) de un determinado cultivo, según el tiempo transcurrido. Calcula una recta de regresión para predecir el número de gérmenes por centímetro cúbico en función del tiempo. ¿Qué cantidad de gérmenes por centímetro cúbico es predecible encontrar cuando hayan transcurrido seis horas? ¿Es buena esa predicción?**

Nº horas	0	1	2	3	4	5
Nº gérmenes	20	26	33	41	47	53

$y = 6{,}72x + 19{,}86$ recta de regresión

$x = 6$ horas, $y = 60{,}18$ gérmenes por cm^3

Es muy buena la predicción porque $r = 0{,}99$

36 **Se observaron las edades de 5 niños y sus pesos respectivos, obteniéndose los siguientes resultados:**

Edad, en años (x)	2	4,5	6	7,2	8
Peso, en Kg (y)	15	19	25	33	34

a) Hallar el coeficiente de correlación y las rectas de regresión de Y sobre X y de X sobre Y.

b) ¿Qué peso corresponderá a un niño de 5 años? ¿Qué edad corresponderá a un peso de 36 Kg?

a) $r = 0{,}97$

$y = 3{,}4x + 6{,}36$

$x = 0{,}27y - 1{,}38$

b) $x = 5$ años, $y = 23{,}36$ kg

$y = 36$ kg, $x = 8{,}34$ años

37 **Una Compañía Telefónica está interesada en efectuar previsiones sobre sus ingresos en los próximos años, para lo que toma como referencia la información disponible en una determinada zona sobre el número X de líneas en servicio y el total de ingresos en miles Y por operaciones, para los últimos 9 años:**

$\sum_i x_i = 8055$ $\qquad S_x = 110$

$\sum_i y_i = 336600$ $\qquad S_y = 1120$

$\sum_i x_i y_i = 302335110$

Obtener, a partir de esos datos, el coeficiente de correlación lineal e interpretar el resultado.

Calculando la recta de regresión de Y sobre X, ¿cuáles serán los ingresos esperados por la Compañía el próximo año, si el número de líneas en servicio va a ser de 1 200?

$r = 0{,}97$ la correlación es fuerte

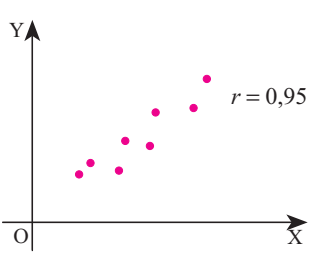
recta de regresión $y = 9{,}9x + 28539{,}5$

$x = 1200 \Rightarrow y = 40419{,}5$ ingresos

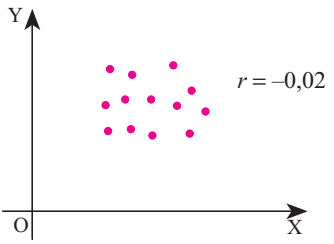
38 **Representa de forma aproximada una nube de puntos que corresponde a una distribución bidimensional según los siguientes valores del coeficiente de correlación lineal:**

a) r = 0,95; b) r = –0,02; c) r = –0,93

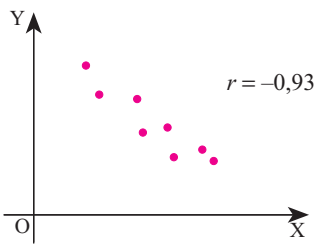
a)



b)



c)



39 **Justifica si es posible que las rectas de regresión de *y sobre x* y de *x sobre y* en una distribución bidimensional sean $2x + 3y = 7$; $2y - 3x = 22$.**

No son posibles, pues una de las rectas es creciente y la otra decreciente, mientras que las pendientes de las dos rectas de regresión deben tener el mismo signo.

40 **Calcula las pendientes de las dos rectas de regresión en una distribución bidimensional, sabiendo que $S_{xy} = -20$; $S_x^2 = 10$; $S_y^2 = 40$.**

Regresión Y sobre X: pendiente = –2

Regresión X sobre Y: pendiente = –0,5

Tema 17 PROBABILIDAD

1 **a) ¿Cuál es el espacio muestral en el experimento de lanzar dos dados?**

b) En el experimento de lanzar un dado y una moneda, escribe el espacio muestral E.

a) E = {(1, 1) (1, 2) … (1, 6) (2, 1) … (2, 6) … (6, 1) … (6, 6)}. Consta de 36 elementos o sucesos elementales

b) E = {(1, +) (2, +) … (6, +) (1, c) (2, c) … (6, c)} consta de 12 elementos o sucesos elementales

2 **Al lanzar un dado, indica cuáles son los sucesos contrarios de:**

a) obtener número par

b) obtener más de 3

c) obtener 2

d) obtener número primo

e) obtener 4 ó 6

f) obtener menos de 7

a) obtener un número impar

b) obtener menos o igual que 3

c) no obtener 2

d) obtener número compuesto

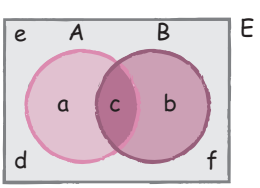
e) no obtener 4 ni 6

f) el contrario es obtener una puntuación mayor o igual que 7 que es el suceso imposible

3 **Sean los sucesos: A = «ser varón», B = «tener los ojos marrones», C = «ser mujer» y D = «tener los ojos azules». ¿Qué parejas de sucesos son incompatibles?**

Son incompatibles: A y C ; B y D

4 **Observa la figura y escribe los elementos de E, $\bar{\emptyset}$, $\bar{B}$ y de $\overline{A - B}$.**



E = {a, b, c, d, e, f}

$\bar{\emptyset}$ = E

$\bar{B}$ = {a, d, e, f}

$\overline{A - B}$ = {b, c, d, e, f}

5 **Un alumno fabrica un dado y parece que no está muy bien construido, para comprobarlo lo lanza 25 veces y obtiene los resultados siguientes:**

6, 4, 4, 1, 3, 2, 5, 5, 1, 3, 5, 4, 5, 1, 3, 5, 3, 5, 2, 5, 1, 3, 4, 4, 3

a) Calcula la frecuencia de cada puntuación.

b) Si con el mismo dado tuvieras que apostar, ¿a qué número o números lo harías?

a)

Puntuación	Frecuencia
1	4
2	2
3	6
4	5
5	7
6	1

b) se debería apostar por el 5

6 **En el lanzamiento de tres monedas, halla la probabilidad de los sucesos siguientes:**

a) A = {obtener tres caras}

b) B = {obtener al menos una cruz}

c) C = {obtener más caras que cruces}

d) D = {obtener tantas caras como cruces}

e) E = {obtener al menos dos caras}

Como E = {ccc, cc+, c+c, +cc, c++, +c+, ++c, +++}

a) $P(A) = \frac{1}{8}$ **b)** $P(B) = \frac{7}{8}$ **c)** $P(C) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ **d)** $P(D) = 0$ **e)** $P(E) = \frac{1}{2}$

7 **Se pide a dos niños que escriban, por separado, una de las cinco vocales. ¿Cuál es la probabilidad de que escriban la misma?**

$P = \frac{1}{5}$

8 **Hállese la probabilidad de que al lanzar dos dados ordinarios se obtenga: a) suma 3; b) suma 10; c) suma mayor que 5; d) diferencia (en valor absoluto) 3; e) diferencia 0; f) diferencia 6.**

a) $P = \frac{1}{18}$ **b)** $P = \frac{1}{12}$ **c)** $P = \frac{3}{4}$ **d)** $P = \frac{1}{6}$ **e)** $P = \frac{1}{6}$ **f)** $P = 0$

9 **En una clase de 21 chicas y 19 chicos se rifan dos entradas para un concierto. Halla la probabilidad de que correspondan a: a) dos chicas; b) dos chicos; c) una chica y un chico.**

a) $P = \frac{21}{40} \cdot \frac{20}{39} = \frac{7}{26}$

b) $P = \frac{19}{40} \cdot \frac{18}{39} = \frac{57}{260}$

c) $P = \frac{21}{40} \cdot \frac{19}{39} + \frac{19}{40} \cdot \frac{21}{39} = \frac{133}{260}$

10 **Calcula la probabilidad de que una matrícula de coche de cuatro dígitos: a) conste sólo de cifras impares; b) termine en 23; c) sea múltiplo de 4; d) tenga sus cuatro cifras iguales.**

a) $P = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 0{,}0625$ **b)** $P = \frac{1}{100} = 0{,}01$

c) $P = \frac{1}{250} = 0{,}004$ **d)** $P = \frac{1}{1000} = 0{,}001$

11 **Sea el experimento de extraer una carta de una baraja de 40 y los sucesos S = {extraer un 7}; B = {extraer un basto}; F = {extraer una figura}. Calcular P(S), P(F), P(S ∪ F), P(S ∪ B).**

$P(S) = \frac{1}{10}$; $P(F) = \frac{3}{10}$; $P(SUF) = \frac{2}{5}$; $P(SUB) = \frac{13}{40}$

12 **¿Cuál es la probabilidad de elegir una ficha del dominó que sea múltiplo de 3 o mayor que 8?**

$P = \frac{7}{28} + \frac{6}{28} - \frac{1}{28} = \frac{3}{7}$

13 **En una ruleta de 36 números, sin el cero, halla la probabilidad de: M = {obtener múltiplo de 2 o de 7}; V = {obtener más de 20 o más de 25}; R = {obtener rojo o negro}**

$P(M) = \frac{7}{12}$; $P(V) = \frac{4}{9}$; $P(R) = 1$

14 **Deduce la fórmula correspondiente a la probabilidad de la unión de 3 sucesos, tanto en el caso de sucesos compatibles como en el de incompatibles.**

Caso de sucesos compatibles:

$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

Caso de sucesos incompatibles:

$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$

15 **Sea el suceso S = {obtener al menos una cara}, en el experimento de lanzar dos monedas. Obtén P(S) a través de la probabilidad del suceso complementario y compruébalo después directamente sobre el espacio muestral.**

El espacio muestral es E = {(c, c) (c, +) (+, c) (+, +)}

$P(S) = 1 - P(\text{no obtener ninguna cara}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

16 **Halla la probabilidad de que al extraer una carta de una baraja española de 40, resulte ser un as y calcula cómo se modifica si antes de verla te dicen que:**

a) salió sota **b) no salió una sota**

c) salió copa **d) no salió copa**

a) $P = 0$ **b)** $P = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$

c) $P = \frac{1}{10}$ **d)** $P = \frac{3}{10}$

17 **En el experimento de sacar dos cartas de una baraja de 40, sean los sucesos 2C = {extraer las dos cartas del palo de copas}; 2NC = {extraer dos cartas que no sean de copas}.**

Halla la probabilidad de ambos:

a) sin devolución;

b) con devolución.

c) ¿Es razonable que la suma en cada apartado no sea 1? Busca el suceso que falta, halla su probabilidad y calcula la suma de las tres.

a) $P(2C) = \frac{10}{40} \cdot \frac{9}{39} = \frac{3}{52}$; $P(2NC) = \frac{30}{40} \cdot \frac{29}{39} = \frac{29}{52}$

b) $P(2C) = \frac{10}{40} \cdot \frac{10}{40} = \frac{1}{16}$; $P(2NC) = \frac{30}{40} \cdot \frac{30}{40} = \frac{9}{16}$

En ambos casos falta el suceso «Extraer una carta que sea copa y la otra no» cuya probabilidad es:

En a) $P = \frac{5}{13}$; en b) $P = \frac{3}{8}$

18 **En una clase de Bachillerato hay 19 chicos y 16 chicas, de ellos 4 chicos y 3 chicas son zurdos y el resto diestros. Construye la tabla de contingencia y calcula las probabilidades siguientes:**

Seleccionado un alumno al azar.

a) Probabilidad de que sea chico.

b) Probabilidad de que sea chica y zurda.

c) Probabilidad de que sea zurdo.

d) Sabemos que es chico, ¿cuál es la probabilidad de que sea diestro?

	chicos	chicas	total
zurdos	4	3	7
diestros	15	13	28
total	19	16	35

a) $P = \frac{19}{35}$

b) $P = \frac{3}{35}$

c) $P = \frac{7}{35} = \frac{1}{5}$

d) $P(D/Chico) = \frac{P(D \cap chico)}{P(chico)} = \frac{\frac{15}{35}}{\frac{19}{35}} = \frac{15}{19}$

19 **En una ciudad el 55% de la población en edad laboral son hombres; de ellos, un 12% está en paro. Entre las mujeres el porcentaje de paro es del 23%. Si en esta ciudad se elige al azar una persona en edad laboral. ¿Cuál es la probabilidad de que esté en paro?**

$P = 0{,}55 \cdot 0{,}12 + 0{,}45 \cdot 0{,}23 = 0{,}1695$

20 **Una caja A contiene 3 bolas blancas y 2 negras y otra B, 2 bolas blancas y 8 negras. Se lanza al aire una moneda. Si sale cara se saca una bola de la caja A y si sale cruz de la caja B. Hallar la probabilidad de sacar una bola negra.**

$P = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{10} = \frac{3}{5}$

21 **Una caja A contiene tres bolas blancas y 2 negras y otra B, 2 bolas blancas y 8 negras. Se lanza al aire una moneda. Si sale cara se saca una bola de la caja A y si sale cruz de la caja B. Calcular la probabilidad de que haya salido cara, sabiendo que la bola ha sido blanca.**

$$P = \frac{\frac{3}{5} \times \frac{1}{2}}{\frac{3}{5} \times \frac{1}{2} + \frac{2}{10} \times \frac{1}{2}} = \frac{3}{4}$$

22 **Se tienen las urnas U y M. La urna U contiene 6 bolas blancas, 4 negras y 2 rojas.**

La urna M contiene 3 bolas blancas y 7 negras.

Se lanza un dado al aire, y si aparece un número múltiplo de 3 se saca una bola de la urna U, en caso contrario, se saca la bola de la urna M. Hallar las probabilidades siguientes:

a) Que salga una bola blanca.

b) Que salga una bola negra.

c) Que salga una bola roja.

a) $P(Blanca) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{10} = \frac{11}{30}$

b) $P(Negra) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{10} = \frac{26}{45}$

c) $P(Roja) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{18}$

23 **Cada cara de un dado está marcada con una de las letras de la palabra COMICO. Si se lanza 4 veces, halla la probabilidad de que se forme la palabra:**

a) COCO **b) MICO** **c) COMO**

a) $\frac{1}{81}$ **b)** $\frac{1}{324}$ **c)** $\frac{1}{162}$

26 **En una bolsa hay 10 caramelos de menta, 13 de fresa y 12 de limón. Se extrae uno al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que: a) sea de fresa; b) sea de limón; c) no sea de menta.**

Si se extrae uno y, sin devolverlo, se extrae otro, ¿cuál es la probabilidad de obtener:

d) el primero de menta y el segundo de fresa

e) los dos de limón

f) ninguno de limón

a) $\frac{13}{35}$ **b)** $\frac{12}{35}$ **c)** $\frac{5}{7}$ **d)** $\frac{13}{119}$ **e)** $\frac{66}{595}$ **f)** $\frac{253}{595}$

27 **De una baraja española de 40 cartas se extraen 4 sin devolver. ¿Cuál es la probabilidad de que:**

a) sean los cuatro ases?

b) los tres primeros sean ases y el cuarto no?

c) sean los cuatro del palo de oros?

d) los dos primeros sean oros y los otros dos no?

a) $\frac{1}{91390}$ **b)** $\frac{37}{66\,690}$ **c)** $\frac{21}{9139}$ **d)** $\frac{1305}{36\,556}$

28 **Se lanzan dos dados, pero a uno de ellos se le ha puesto un punto más en la cara del 2, transformándolo en otro 3. ¿Cómo varían las probabilidades de obtener cada una de las 11 sumas posibles?**

$P(2) = \frac{1}{36}$; $P(3) = \frac{1}{36}$; $P(4) = \frac{2}{36}$; $P(5) = \frac{5}{36}$; $P(6) = \frac{5}{36}$;

$P(7) = \frac{6}{36}$; $P(8) = \frac{5}{36}$; $P(9) = \frac{5}{36}$; $P(10) = \frac{3}{36}$; $P(11) = \frac{2}{36}$;

$P(12) = \frac{1}{36}$

29 **Después de lanzar muchas veces dos dados octaédricos con sus caras numeradas del 1 al 8, se observa que la frecuencia de la suma 16 es 0,14. ¿Deben tomarse los dados como correctos?**

No, pues cabe esperar suma 16 con probabilidad $\frac{1}{64} \simeq 0{,}016$.

30 **Entre los 1 000 televisores que ha vendido una fábrica, ha tenido que reparar después 32 por avería de audio y 48 por avería de vídeo, mientras que 923 no han pasado por el taller. Seleccionado un televisor al azar ¿cuál es la probabilidad de que haya sido reparado de ambas averías?**

Si A = {el TV tiene problemas de audio} y V = {el TV tiene problemas de video}

	A	$\bar{A}$	Total
V	3	45	48
$\bar{V}$	29	923	952
Total	32	968	1000

La probabilidad pedida es:

$$P(A \cap V) = \frac{3}{1000} = 0{,}003$$

31 **Según el Servicio Meteorológico, en Valdemorillo hay una probabilidad 0,4 de que haga frío; 0,6 de que llueva o haga frío y 0,1 de que llueva y haga frío. ¿Cuál es la probabilidad de que si estoy en Valdemorillo me moje si salgo a la calle sin paraguas?**

Sea F = {hace frío} y LL = {llueve}

	F	$\bar{F}$	Total
LL	0,1	0,2	0,3
$\overline{LL}$	0,3	0,4	0,7
Total	0,4	0,6	1

Puesto que $P(LL \cup F) = P(LL) + P(F) - P(LL \cap F)$ es decir,
$0{,}6 = P(LL) + 0{,}4 - 0{,}1 \Rightarrow P(LL) = 0{,}3$

32 **Se lanza una moneda hasta que salga cara. Halla la probabilidad de que esto suceda en el primer lanzamiento, en el segundo y en el tercero. ¿Y en el lanzamiento *n*-ésimo?**

$$P(1^o) = \frac{1}{2};\ P(2^o) = \left(\frac{1}{2}\right)^2;\ P(3^o) = \left(\frac{1}{2}\right)^3;\ \ldots;\ P(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

33 **Halla la probabilidad de que al lanzar tres dados se obtenga una suma inferior a 17.**

Los casos posibles son $PR_{6,3} = 6^3 = 216$

$P(\text{suma} < 17) = 1 - P(s \geq 17) = 1 - \frac{4}{216} = \frac{53}{54}$ pues los casos de suma mayor o igual que 17 son 4 (6, 6, 5; 6, 5, 6; 5, 6, 6; 6, 6, 6)

34 **Nueve personas se sientan al azar alrededor de una mesa. ¿Cuál es la probabilidad de que dos determinadas se sienten juntas?**

casos posibles: $PC_7 = 6! = 720$

casos favorables: 2 (derecha-izquierda, izquierda-derecha)

$$P = \frac{2}{720} = \frac{1}{360}$$

35 **En una bolsa hay 7 bolas numeradas del 1 al 7. Se extraen dos simultáneamente. Halla la probabilidad de que la suma de los puntos sea par.**

$P = \frac{9}{21} = \frac{3}{7}$ pues los casos posibles son $C_{7,2} = 21$

36 **De 2 barajas de 40 cartas se extrae una de cada una. ¿Cuál es la probabilidad de que sean dos oros? ¿Y si las dos barajas están mezcladas y se extraen 2 a la vez?**

De dos barajas separadas: $P = \frac{10}{40} \cdot \frac{10}{40} = \frac{1}{16}$

De dos barajas mezcladas: $P = \frac{C_{20,2}}{C_{80,2}} = \frac{19}{316}$

37 **Una secretaria muy despistada escribe 5 cartas diferentes a 5 personas, pero mete cada carta en un sobre sin fijarse. ¿Cuál es la probabilidad de que todas reciban la suya?**

Casos posibles: $P_5 = 120$; casos favorables: 1; $P = \frac{1}{120}$

38 **En ocho tarjetas iguales se escribe cada una de las letras de la palabra CASANOVA. Se sacan al azar 4 tarjetas sin reponer. ¿Cuál es la probabilidad de que se forme la palabra SANO?**

$$P = \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{840}$$

39 **¿Cuál es la probabilidad de que al extraer la primera bola de un bingo, resulte múltiplo de 3 ó de 5?**

Múltiplos de 3: 30

Múltiplos de 5: 18

Múltiplos de 3 y de 5: 6 (son los múltiplos de 15)

$$P(\dot{3} \cup \dot{5}) = P(\dot{3}) + P(\dot{5}) - P(\dot{3} \cap \dot{5}) = \frac{30}{90} + \frac{18}{90} - \frac{6}{90} = \frac{42}{90} = \frac{7}{15}$$

40 **80 de los 100 asistentes a un congreso hablan inglés y 40 francés. Elegidos dos al azar, ¿cuál es la probabilidad de que necesiten intérprete para entenderse?**

Es evidente que 20 congresistas hablan ambos idiomas.

Si F = {ambos hablan francés} e I = {ambos hablan inglés}

$$\text{es } P(F \cup I) = P(F) + P(I) - P(F \cap I) = \frac{C_{80,2}}{C_{100,2}} + \frac{C_{40,2}}{C_{100,2}} - \frac{C_{20,2}}{C_{100,2}} = \frac{25}{33}$$

41 **Para elegir a un muchacho entre tres se prepara una bolsa con dos bolas negras y una blanca. Los tres van sacando, por orden, una bola que no devuelven. Quien saque la blanca, gana. ¿Quién lleva más ventaja, el primero, el segundo o el tercero?**

Todos tienen la misma probabilidad = $\frac{1}{3}$

42 **Se lanzan cuatro monedas y se sabe que han salido por lo menos dos caras. ¿Cuál es la probabilidad de que en total haya exactamente: a) 3 caras; b) 4 caras?**

Los casos posibles son 11: {cc+c, c+c+, c++c, +c+c, ++cc, +cc+, ccc+, cc+c, c+cc, +ccc, cccc}

a) P(3 caras) = $\frac{4}{11}$ **b)** P(4 caras) = $\frac{1}{11}$

43 **¿Cuál es la probabilidad de que una quiniela de fútbol de 14 resultados tenga 14 unos?**

a) Si el 1 tienen probabilidad 0,5 en cada partido;

b) Si los tres resultados 1, X, 2 son equiprobables.

a) $P = \left(\frac{1}{2}\right)^{14}$ **b)** $P = \left(\frac{1}{3}\right)^{14}$

44 **¿Verdadero o falso?**

a) Un suceso posible es siempre compatible consigo mismo.

b) El suceso seguro es compatible con cualquier suceso posible.

c) La unión de dos sucesos imposibles es un suceso posible.

d) Si dos sucesos son incompatibles, su unión es el suceso imposible.

a) verdadero **b)** verdadero **c)** falso **d)** falso

45 **En el lanzamiento de dos dados, averigua cuáles de las siguientes parejas de sucesos son dependientes y cuáles independientes:**

a) (obtener suma 8); (obtener diferencia 0).

b) (obtener suma mayor que 10); (obtener 6 en el primero).

c) (obtener suma par); (obtener diferencia par).

d) (obtener par en el primero); (obtener impar en el segundo).

a) Si A = {obtener suma 8} es $P(A) = \frac{5}{36}$ y B = {obtener diferencia cero} es $P(B) = \frac{6}{36}$

El suceso $A \cap B$ tiene $P(A \cap B) = \frac{1}{36}$ (obtener 4 y 4) como $P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$, entonces A y B son dependientes

b) A = {obtener suma mayor que 10} es $P(A) = \frac{3}{36}$ y B = {obtener 6 en el primero es $P(B) = \frac{6}{36}$

$A \cap B$ = {suma mayor que 1° y 6 en el primero}, $P(A \cap B) = \frac{2}{36}$

Como $P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$, A y B son dependientes

46 **Suponiendo todos los meses de 30 días, hállese la probabilidad de que los cumpleaños de tres hermanos sean:**

a) el mismo día del año,

b) los tres en fecha diferentes,

c) los tres en el mismo mes,

d) cada uno en un mes diferente,

e) los tres en marzo

f) ninguno en mayo

g) dos en la misma fecha y el otro, otro día.

a) $P = \left(\frac{1}{360}\right)^2$

b) $P = \frac{359}{360} \cdot \frac{358}{360} \simeq 0{,}99$

c) $P = \left(\frac{1}{12}\right)^2$

d) $P = \frac{11}{12} \cdot \frac{10}{12} = \frac{55}{72}$

e) $P = \left(\frac{1}{12}\right)^3$

f) $P = \left(\frac{11}{12}\right)^3$

g) $P = \frac{1}{360} \cdot \frac{359}{360} \simeq 0{,}0028$

47 **Una batería antiaérea está compuesta por tres cañones, cuya probabilidad de acertar en el blanco es de 0,4 cada uno por separado. ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar cada uno un disparo:**

a) la batería alcance el blanco?

b) la batería falle?

c) los tres den en el blanco?

d) acierten primero y segundo, pero falle el otro?

e) acierte uno de ellos y fallen los otros dos?

a) $P = 0{,}4 + 0{,}6 \cdot 0{,}4 + 0{,}6 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4 = 0{,}784$

b) $P = 1 - 0{,}784 = 0{,}216$

c) $P = (0{,}4)^3 = 0{,}064$

d) $P = 0{,}4 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6 = 0{,}096$

e) $P = 0{,}4 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}6 + 0{,}6 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6 + 0{,}6 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4 = 0{,}003$

48 **Un examen consta de tres partes: teoría, cuestiones y problemas. La preparación de un alumno es tal que tiene una probabilidad 0,8 de aprobar cada parte. ¿Qué probabilidad tiene de aprobar si:**

a) las partes son eliminatorias?

b) bastan dos partes para aprobar?

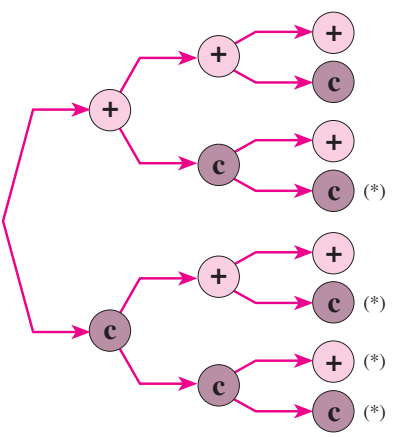
c) basta una parte para aprobar?

a) $P = (0{,}2)^3 = 0{,}008$

b) $P = (0{,}2)^2 + (0{,}2)^2 \cdot 0{,}8 + (0{,}2)^2 \cdot 0{,}8 = 0{,}104$

c) $P = 0{,}2 + 0{,}8 \cdot 0{,}2 + 0{,}8 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2 = 0{,}488$

49 **Utilizando un diagrama de árbol, hállese la probabilidad de obtener más de una cara al lanzar tres veces una moneda.**



Los caminos indicados con (*) contienen más de una cara. Al ser cuatro, la probabilidad es $P = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

50 **Calcula la probabilidad de que al levantar una ficha de un dominó se obtenga un múltiplo natural de 4 o una suma de puntos mayor de 9.**

A = {múltiplo de 4}. $P(A) = \frac{7}{28} = \frac{1}{4}$

B = {suma mayor de 9}. $P(B) = \frac{4}{28} = \frac{1}{7}$

$A \cap B$ = {sumar 12}. $P(A \cap B) = \frac{1}{28}$

$$P(A \cup B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \frac{1}{28} = \frac{10}{28} = \frac{5}{14}$$

51 ***Juego A*: Se lanza un dado ordinario, si sale un seis se gana y si no, se pierde.**

***Juego B*: Se sacan simultáneamente dos bolas de una bolsa que contiene 4 bolas marcadas con los números 1, 2, 3 y 4; si la suma de ambos números es menor que 4, se gana y si no, se pierde. ¿Cuál de los dos juegos es más ventajoso?**

Ambos juegos tienen probabilidad $\frac{1}{6}$ de ganar.

52 **Seis cajas contienen cada una una bola blanca; además, la caja *n* contiene *n* bolas negras, *n* = 1, 2, ..., 6. Se elige la caja *n* con probabilidad proporcional a *n* y se extrae una bola. ¿Cuál es la probabilidad de que sea blanca?**

Puesto que la probabilidad de elegir una caja es proporcional al número de bolas negras es:

$$K + 2K + 3K + 4K + 5K + 6K = 1 \Rightarrow K = \frac{1}{21}$$

Llamando P(nB) a la probabilidad de elegir la caja *n* y extraer una bola blanca, será:

P(obtener blanca) = P(1B) + P(2B) + ... + P(6B) =

$$\frac{1}{21}\cdot\frac{1}{2} + \frac{2}{21}\cdot\frac{1}{3} + \frac{3}{21}\cdot\frac{1}{4} + \frac{4}{21}\cdot\frac{1}{5} + \frac{5}{21}\cdot\frac{1}{6} + \frac{6}{21}\cdot\frac{1}{7} = 0{,}21$$

53 **En el juego de dardos, el tirador A puede dar en el blanco 4 veces de cada 5; el B acierta 2 veces de cada 3, y el C, 3 veces de cada 4. Hállese la probabilidad de que, al lanzar un dardo cada uno:**

a) los 3 acierten

b) ninguno acierte

c) al menos dos acierten

d) acierten A y B, pero no C

e) acierten 2 y el otro no

f) sólo acierte B

a) $P = \frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4} = \frac{2}{5}$

b) $P = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{60}$

c) $P = \frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4} + \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4} + \frac{1}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4} = \frac{5}{6}$

d) $P = \frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4} = \frac{2}{15}$

e) $P = \frac{13}{30}$

f) $P = \frac{1}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{30}$

54 **Si entre la población de un determinado país se estima que el 55% padece obesidad, el 20% es hipertensa y el 15% es obesa e hipertensa, calcular las probabilidades de «ser obeso condicionado a ser hipertenso» y «ser hipertenso condicionado a ser obeso». Justifica si son o no independientes los sucesos «ser obeso» y «ser hipertenso».**

O = {ser obeso}; H = {ser hipertenso}

$$P(O/H) = \frac{P(O \cap H)}{P(H)} = \frac{0{,}15}{0{,}20} = \frac{3}{4}$$

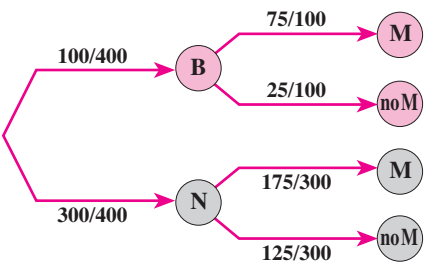
$$P(H/O) = \frac{P(O \cap H)}{P(O)} = \frac{0{,}15}{0{,}55} = \frac{3}{11}$$

$P(O \cap H) = 0{,}15 \neq P(O) \cdot P(H)$ luego O y H son dependientes

55 **Una urna contiene 25 bolas blancas sin marcar, 75 bolas blancas marcadas, 125 bolas negras sin marcar y 175 bolas negras marcadas. Se extrae al azar una bola.**

a) Calcula la probabilidad de que sea blanca.

b) Se extrae al azar una bola y está marcada. ¿Cuál es la probabilidad de que sea blanca?



a) $P(\text{Blanca}) = \frac{100}{400} = \frac{1}{4}$

b) $P(B/M) = \frac{P(B \cap M)}{P(M)} = \frac{\frac{100}{400} \cdot \frac{75}{100}}{\frac{100}{400} \cdot \frac{75}{100} + \frac{300}{400} \cdot \frac{175}{300}} = 0{,}3$

56 **El 70% de empresas tienen errores en sus activos financieros, el 60% tienen errores en sus pasivos financieros y el 40% tienen errores en sus activos y en sus pasivos financieros.**

a) Obtén razonadamente el porcentaje de empresas con errores en sus activos, en sus pasivos o en ambos.

b) De una muestra de 500 empresas, ¿cuántas se espera que no tengan errores ni en sus activos ni en sus pasivos financieros?

A = {tener errores en activos}

P = {tener errores en pasivos}

a) $P(A \cap P) = P(A) + P(P) - P(A \cap P) = 0{,}70 + 0{,}60 - 0{,}40 = 0{,}90 \Rightarrow 90\%$

b) Como $0{,}90 \cdot 500 = 450$ resulta que $500 - 450 = 50$ empresas no tendrán errores ni en sus activos ni en sus pasivos

57 **La probabilidad de que un hombre viva 10 años más es $\frac{1}{4}$ y la probabilidad de que su mujer viva 10 años más es $\frac{1}{3}$. Suponiendo que ambos sucesos son independientes, calcular la probabilidad de que al menos uno de ellos siga vivo después de los 10 años.**

H = {el hombre vive 10 años más}; M = {la mujer vive 10 años más}

$$P(H \cup M) = P(H) + P(M) - P(H \cap M) = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$

58 **Disponemos de un dado que tiene pintadas las caras de la siguiente forma:**

Caras 1, 2, 3, 4 de color verde.

Cara 5 de color rojo.

Cara 6 de color blanco.

y de dos urnas con la siguiente composición:

Urna I: 6 bolas con brillo, 4 sin brillo.

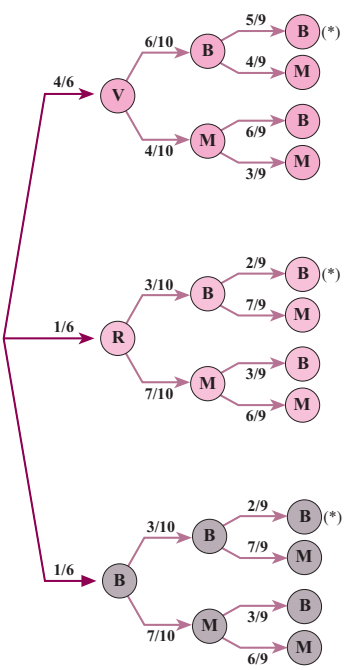
Urna II: 3 bolas con brillo, 7 sin brillo.

Lanzamos el dado y nos fijamos en el color de la cara: si sale verde vamos a la urna I, si sale rojo a la urna II y si sale blanco también a la urna II. A continuación extraemos dos bolas una a una sin remplazamiento. Se pide:

i) Probabilidad de que las dos bolas tengan brillo y que sean de la urna I.

ii) Probabilidad de que las dos bolas tengan brillo.

El esquema en árbol puede ser:



a) $P = \frac{4}{6} \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} = \frac{2}{9}$

b) $P = \frac{4}{6} \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} + \left(\frac{1}{6} \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9}\right) \cdot 2 = \frac{11}{45}$

59 **Una comisión delegada de un pleno de cierto ayuntamiento está formada por 10 concejales de los cuales 5 pertenecen al partido A, 4 al partido B y 1 al partido C. Se eligen al azar y de forma sucesiva 3 personas de dicha comisión. Calcula la probabilidad de que las 3 personas pertenezcan a:**

a) Partidos distintos **b) Al partido A** **c) Al partido C**

a) $P = \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{8} \cdot 6 = \frac{1}{6}$ **b)** $P = \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{12}$ **c)** $P = 0$

60 **Se propone a Juan y a Pedro la resolución de un problema. Se estima, en función de sus evaluaciones, que la probabilidad de que lo resuelva Juan es de 1/3 y la de que lo resuelva Pedro 1/4. ¿Cuál es la probabilidad de que el problema sea resuelto? ¿Y de que no sea resuelto?**

J = {lo resuelve Juan}

P = {lo resuelve Pedro}

a) $P(J \cup P) = P(J) + P(P) - P(J \cap P) = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

pues J y P son independientes y $P(J \cap P) = P(J) \cdot P(P)$

b) $P = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

61 **Sean A y B dos sucesos independientes de un cierto experimento aleatorio, tales que la probabilidad de que ocurran ambos simultáneamente es 1/3 y la de que no ocurra ninguno de los dos es 1/6. Calcúlese P(A) y P(B).**

$P(A \cap B) = \frac{1}{3} = P(A) \cdot P(B)$ (*)

$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = \frac{1}{6} = P(\overline{A \cup B}) = 1 - [P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)] \Rightarrow$

$\Rightarrow P(A) + P(B) = \frac{7}{6}$ (**) de (*) y (**) se obtiene $P(A) = \frac{2}{3}$ y $P(B) = \frac{1}{2}$

62 **En una clase, el 40% aprueba Filosofía y el 50% Matemáticas. Además, la probabilidad de aprobar la Filosofía habiendo aprobado las Matemáticas es 0,8. Probar que la mitad de la clase suspende ambas asignaturas y calcular el porcentaje de alumnos que, teniendo aprobada la Filosofía, aprueba también las Matemáticas.**

Sea F = {aprueba Filosofía} y M = {aprueba Matemáticas}

Como $P(F/M) = \dfrac{P(F \cap M)}{P(M)} = \dfrac{P(F \cap M)}{0{,}5} = 0{,}8 \Rightarrow P(F \cap M) = 0{,}4$ y se puede construir la tabla de contingencia:

	M	no M	Total
F	0,4	0	0,4
no F	0,1	0,5	0,6
Total	0,5	0,5	1

se ve que $P(\text{noF} \cap \text{noM}) = 0{,}5$

$$P(M/F) = \frac{P(M \cap F)}{P(F)} = \frac{0{,}4}{0{,}4} = 1$$

El 100%

63 **Tiramos una moneda tres veces. Hallar el espacio muestral. ¿Cuál es la probabilidad de sacar al menos dos caras?**

Sean los sucesos:

E = un alumno ha estudiado

A = un alumno aprueba

E = {ccc, cc+, c+c, +cc, c++, +c+, ++c, +++}

$$P = (\text{al menos dos caras}) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

64 **Utilizar la fórmula**

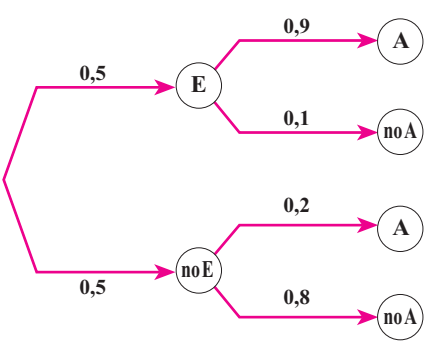
$$P(A) = P(E) \cdot P(A/E) + P(\text{no } E) \cdot P(A/\text{no } E)$$

para calcular la probabilidad de que cierto alumno apruebe un examen si sabemos que, habiendo estudiado, puede aprobar con probabilidad 0,9; que si no ha estudiado, puede aprobar con probabilidad 0,2; y que estudia para la mitad de sus exámenes.

Sea E = {el alumeno ha estudiado}

A = {aprueba el examen}

El árbol puede ser:



$$P(A) = P(E) \cdot P(A/E) + P(\text{no } E) \cdot P(A/\text{no } E) = 0{,}5 \cdot 0{,}9 + 0{,}5 \cdot 0{,}2 = 0{,}55$$

65 **Una compañía de seguros hace una investigación sobre la cantidad de partes de siniestros fraudulentos presentados por sus asegurados. Clasificados los seguros en tres clases: incendio, automóviles y «otros», se obtiene la siguiente relación de datos:**

El 6% son partes por incendio fraudulentos; el 1% son partes de automóvil fraudulentos; el 3% son «otros» partes fraudulentos; el 14% son partes por incendio no fraudulentos; el 29% son partes de automóvil no fraudulentos y el 47% son «otros» partes no fraudulentos.

a) Hacer una tabla ordenando los datos anteriores y hallando el porcentaje total de partes fraudulentos y no fraudulentos.

b) Calcular qué porcentaje total de partes corresponde a la rama de incendios, cuál a la de automóviles y cuál a «otros». Añadir estos datos a la tabla.

c) Calcular la probabilidad de que un parte escogido al azar sea fraudulento. ¿Cuál será, en cambio, la probabilidad de que sea fraudulento si se sabe que es de la rama de incendios?

a) y **b)**

	Incendio	Automóvil	Otros	Total
Fraudulento	6 %	1 %	3 %	10 %
no Fraudulento	14 %	29 %	47 %	90 %
Total	20 %	30 %	50 %	100 %

c) $P(\text{Fraudulento}) = 0{,}1$; $P(F/I) = \dfrac{P(F \cap I)}{P(I)} = \dfrac{0{,}06}{0{,}20} = 0{,}3$

66 **Extraemos una carta de la baraja española, si sale figura, extraemos una bola de la urna I; en caso contrario, la extraemos de la urna II. Las urnas tienen la siguiente composición:**

Urna I: 6 bolas blancas; 8 bolas verdes.

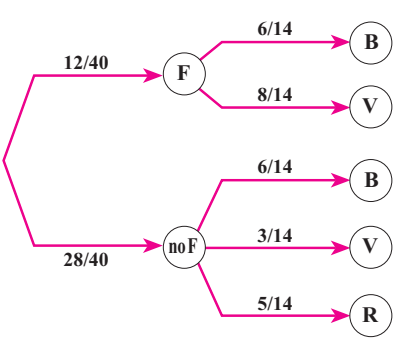
Urna II: 6 bolas blancas; 3 bolas verdes; 5 bolas rojas.

Calcular las probabilidades de los siguientes sucesos:

a) La bola es verde y de la urna II.

b) La bola es blanca.

El posible árbol es:



a) $P = \frac{28}{40} \cdot \frac{3}{14} = \frac{3}{20}$

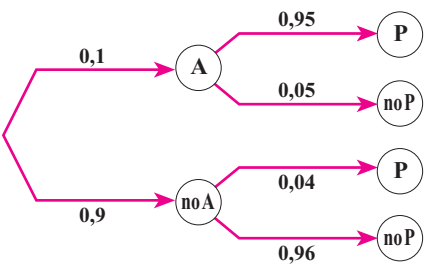
b) $P = \frac{12}{40} \cdot \frac{6}{14} + \frac{28}{40} \cdot \frac{6}{14} = \frac{3}{7}$

67 **En una empresa de transporte, la probabilidad de que se accidente un camión es de 0,1. Si éste se produce, la probabilidad de perder la carga es 0,95. Por otra parte, la probabilidad de perder la carga sin que haya accidente es de 0,04. Calcular las probabilidades de los siguientes sucesos:**

a) Que habiéndose perdido la carga, no haya habido accidente.

b) Que no habiéndose perdido la carga, haya habido accidente.

Sea A = {hay accidente} y P = {se pierde la carga}



a) $P(\text{no A}/P) = \frac{P(\text{no A} \cap P)}{P(P)} = \frac{0{,}9 \cdot 0{,}04}{0{,}1 \cdot 0{,}95 + 0{,}9 \cdot 0{,}04} \simeq 0{,}275$

b) $P(A/\text{no P}) = \frac{P(A \cap \text{no P})}{P(\text{no P})} = \frac{0{,}1 \cdot 0{,}05}{0{,}1 \cdot 0{,}05 + 0{,}9 \cdot 0{,}96} \simeq 0{,}005$

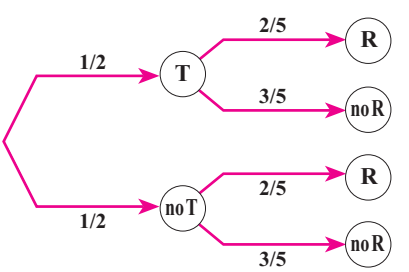
68 **Un experimento consiste en lanzar un dado y extraer una bola de una urna que contiene una bola blanca, dos rojas, una verde y una azul.**

a) Construye un espacio muestral apropiado a dicha experiencia para calcular la probabilidad de obtener un número mayor que tres y una bola roja.

b) Obtén dicha probabilidad.

Sea T = {obtener más de 3} y R = {obtener bola roja}

El árbol que genera el espacio muestral es:



$P(T \cap R) = P(T) \cdot P(R/T) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{5}$

69 **El 6% de los coches de una determinada fábrica tiene defecto en el motor, el 8% tiene defecto en la carrocería y el 2% tienen defecto en ambos.**

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un coche tenga al menos un defecto?

b) ¿Y la probabilidad de que un coche no sea defectuoso?

a) $P = 0{,}06 + 0{,}08 - 0{,}02 = 0{,}12$

b) $P = 1 - 0{,}12 = 0{,}88$

70 **En una Universidad en la que sólo hay estudiantes de Arquitectura, Ciencias y Letras, terminan la carrera el 5% de Arquitectura, el 10% de Ciencias y el 20% de Letras.**

Se sabe que el 20% estudia Arquitectura, el 30% Ciencias y el 50% Letras. Eligiendo un estudiante al azar, se pide:

a) Probabilidad de que sea de Arquitectura y haya terminado la carrera.

b) Nos dice que ha terminado la carrera. Probabilidad de que sea Arquitectura.

a) $P(A \cap T) = 0{,}2 \cdot 0{,}05 = 0{,}01$

b) $P(A/T) = \dfrac{P(A \cap T)}{P(T)} = \dfrac{0{,}2 \cdot 0{,}05}{0{,}2 \cdot 0{,}05 + 0{,}3 \cdot 0{,}1 + 0{,}5 \cdot 0{,}2} \simeq 0{,}07$

71 **Un joyero compra los relojes a dos casas proveedoras. La primera le sirve el 60% de los relojes, de los cuales el 0,4% son defectuosos. La segunda le proporciona el resto, siendo defectuosos el 1,5%. Un día, el joyero, al vender un reloj, obsera que éste no funciona. Hallar la probabilidad de que el reloj proceda de la primera casa proveedora.**

$$P = \frac{0{,}6 \cdot 0{,}04}{0{,}6 \cdot 0{,}04 + 0{,}4 \cdot 0{,}015} = 0{,}8$$

72 **Álvaro, Belén y Carmen juegan un torneo de frontenis en el que cada uno de ellos juega una partida contra cada uno de sus dos amigos. Las distintas partidas son independientes y la probabilidad de que Belén gane a Álvaro es 0,6 y de 0,8 si juega contra Carmen. La probabilidad de que Álvaro gane la partida contra Carmen es 0,9. Calcula las probabilidades de los siguentes sucesos:**

a) Belén gana el torneo (las dos partidas).

b) Carmen sólo gana una partida.

c) Álvaro gana por lo menos una de las dos partidas que juega.

a) $P = 0{,}6 \cdot 0{,}8 = 0{,}48$

b) $P = 0{,}1 \cdot 0{,}8 + 0{,}2 \cdot 0{,}9 = 0{,}26$

c) $P = P(\text{no ganar ninguna}) = 0{,}6 \cdot 0{,}1 = 0{,}06$, luego la probabilidad de ganar al menos una es $P = 1 - 0{,}06 = 0{,}94$

73 **Se tienen 5 bolas numeradas del 1 al 5. Si se escogen al azar dos de ellas, ¿cuál es la probabilidad de que el número mayor sea 3?**

Casos favorables = 2; casos posibles = $C_{5,2} = 10$; $P = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$

74 **En un instituto hay 60 alumnos de COU. De ellos 40 estudian Inglés, 24 estudian Francés y 12 los dos idiomas. Se elige al azar un alumno de COU, calcular la probabilidad:**

a) Que estudie al menos uno de ellos.

b) Que estudie Inglés, sabiendo que ya estudia Francés.

c) Que no estudie ni Francés ni Inglés.

a) $P(I \cup F) = \frac{2}{3} + \frac{2}{5} - \frac{1}{5} = \frac{13}{15}$

b) $P(I/F) = \frac{1/5}{2/5} = \frac{1}{2}$

c) $P(\overline{I} \cap \overline{F}) = P(\overline{I \cup F}) = 1 - P(I \cup F) = 1 - \frac{13}{15} = \frac{2}{15}$

75 **Se lanzan dos dados. Si la suma de los puntos de las caras superiores es 5, hallar la probabilidad que en alguno de los dados salga un 2.**

$E = \{(1, 4)\ (4, 1)\ (2, 3)\ (3, 2)\}$; $P = \frac{2}{4} = 0{,}5$

76 **En un taller el 25% de los trabajadores son mecánicos y el 15% son electricistas y el 10% tienen las dos especialidades. Se selecciona un trabajador del taller al azar.**

a) ¿Cuál es la probabilidad que el trabajador seleccionado sea mecánico o electricista?

b) Si se sabe que el trabajador seleccionado es electricista. ¿Cuál es la probabilidad de que sea mecánico?

c) Si se sabe que el seleccionado es mecánico. ¿Cuál es la probabilidad que sea electricista?

	Mec	no Mec	Total
Elect.	0,10	0,05	0,15
no Elect.	0,15	0,70	0,85
Total	0,25	0,75	1

a) $P(M \cup E) = 0{,}25 + 0{,}15 - 0{,}10 = 0{,}30$

b) $P(M/E) = \frac{P(M \cap E)}{P(E)} = \frac{0{,}10}{0{,}15} = \frac{2}{3}$

c) $P(E/M) = \frac{P(M \cap E)}{P(M)} = \frac{0{,}10}{0{,}25} = \frac{2}{5}$

77 **De una baraja de 40 cartas se sacan sucesivamente dos al azar. Hallar la probabilidad de que la primera sea caballo y la segunda rey.**

$P(1^a \text{ caballo y } 2^a \text{ Rey}) = P(1C \cap 2R) = P(1C) \cdot P(2R/1C) = \frac{4}{40} \cdot \frac{4}{39} = \frac{2}{195}$

78 **¿Cuál es la probabilidad de torpedear un barco sabiendo que sólo pueden lanzarse tres torpedos y que la probabilidad de hacer blanco con un torpedo es 0,2?**

$P = 0{,}2 + 0{,}8 \cdot 0{,}2 + 0{,}8 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2 = 0{,}488$

79 **En un colegio se imparten sólo los idiomas inglés y francés. El 80% de los alumnos estudian inglés y el resto francés. El 30% de los alumnos que estudian inglés son socios del club musical del colegio y de los que estudian francés son socios de dicho club el 40%.**

a) Se elige un alumno del colegio al azar. Hallar la probabilidad de que pertenezca al club musical.

b) Habiendo elegido un alumno al azar y habiendo resultado que es socio del club musical, hallar la probabilidad de que sea estudiantes de francés.

c) Habiendo elegido un alumno al azar y habiendo resultado que no es socio del club musical, hallar la probabilidad de que no sea estudiante de inglés.

	Inglés	Francés	Total
Socios	0,24	0,08	0,32
no Socios	0,56	0,12	0,68
Total	0,80	0,20	1

a) 0,32 **b)** 0,25 **c)** $\frac{3}{17}$

Tema 18 LA DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

1 **En el experimento de lanzar dos dados se considera la variable aleatoria *«mínimo de los puntos de las caras superiores»*. Se pide:**

a) Obtener el espacio muestral del experimento aleatorio.

b) Definir los valores que toma la variable aleatoria.

c) Determinar su función de probabilidad.

d) Determinar su función de distribución.

a) {(1, 1), (1, 2), …, (1, 6), (2, 1), (2, 2), … (6, 6)}

b) {1, 2, 3, 4, 5, 6}

c)

χ	1	2	3	4	5	6
$P(\chi = x)$	$\frac{11}{36}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{36}$

d) $$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \frac{11}{36} & \text{si } 1 \le x < 2 \\ \frac{5}{9} & \text{si } 2 \le x < 3 \\ \frac{27}{36} & \text{si } 3 \le x < 4 \\ \frac{8}{9} & \text{si } 4 \le x < 5 \\ \frac{35}{36} & \text{si } 5 \le x < 6 \\ 1 & \text{si } 6 \le x \end{cases}$$

2 **En el experimento de lanzar dos dados tetraédricos se define la variable aleatoria *«suma de los puntos de las caras ocultas»*. Se pide:**

a) Obtener el espacio muestral del experimento aleatorio.

b) Definir los valores que toma la variable aleatoria.

c) Determinar su función de probabilidad.

d) Determinar su función de distribución.

a) {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3) … (4, 4)}

b) {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}

c)

χ	2	3	4	5	6	7	8
$P(\chi = x)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$

d) $F(x)\begin{cases} 0 & \text{si } x < 2 \\ \frac{1}{16} & \text{si } 2 \le x < 3 \\ \frac{3}{16} & \text{si } 3 \le x < 4 \\ \frac{3}{8} & \text{si } 4 \le x < 5 \\ \frac{5}{8} & \text{si } 5 \le x < 6 \\ \frac{13}{16} & \text{si } 6 \le x < 7 \\ \frac{15}{16} & \text{si } 7 \le x < 8 \\ 1 & \text{si } 8 \le x \end{cases}$

3 **En una urna hay 3 bolas blancas y 2 negras. Se extrae una bola se mira su color y se devuelve a la urna. Se hacen tres extracciones consecutivas y se define la variable aleatoria *«número de bolas blancas que han salido»*.**

a) Obtén el espacio muestral del experimento aleatorio.

b) Determina los valores que toma la variable aleatoria.

c) Determina su función de probabilidad.

d) Determina su función de distribución.

a) {(n, n, n), (n, n, b), (n, b, n), (b, n, n), (n, b, b), (b, n, b), (b, b, n), (b, b, b)}

b) {0, 1, 2, 3}

c)

χ	0	1	2	3
$P(\chi = x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

d) $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{8} & \text{si } 0 \le x < 1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } 1 \le x < 2 \\ \frac{7}{8} & \text{si } 2 \le x < 3 \\ 1 & \text{si } 3 \le x \end{cases}$

4 **Se lanzan simultáneamente una moneda y un dado y se define la variable aleatoria del modo siguiente:**

Si en el lanzamiento la moneda sale cara, se asigna al resultado el valor de la puntuación del dado más uno.

Si en el lanzamiento la moneda sale cruz, se asigna al resultado el valor de la puntuación del dado.

a) Obtén el espacio muestral del experimento aleatorio.

b) Determina los valores que toma la variable aleatoria.

c) Determina su función de probabilidad.

d) Determina su función de distribución.

a) {(c, 1), (c, 2), … (c, 6), (+, 1), (+, 2), … (+, 6)}

b) {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}

c)

χ	1	2	3	4	5	6	7
$P(\chi = x)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$

d) $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \frac{1}{12} & \text{si } 1 \le x < 2 \\ \frac{1}{4} & \text{si } 2 \le x < 3 \\ \frac{5}{12} & \text{si } 3 \le x < 4 \\ \frac{7}{12} & \text{si } 4 \le x < 5 \\ \frac{3}{4} & \text{si } 5 \le x < 6 \\ \frac{11}{12} & \text{si } 6 \le x < 7 \\ 1 & \text{si } 7 \le x \end{cases}$

5 **Calcula la media, la varianza y la desviación típica de la variable aleatoria definida en el ejercicio 1.**

$\mu = \frac{91}{36} = 2{,}53; \quad \sigma^2 = 1{,}97 = \frac{2\,555}{1\,296}; \quad \sigma = 1{,}40$

6 **Calcula la media y la varianza de la variable aleatoria definida en el ejercicio 3.**

$\mu = 1{,}5; \quad \sigma^2 = 0{,}75$

7 **Hallar la función de probabilidad y de distribución de la variable aleatoria «*número de cruces*» en el experimento de lanzar 6 monedas simultáneamente.**

χ	0	1	2	3	4	5	6
$P(\chi = x)$	$\frac{1}{64}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{15}{64}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{15}{64}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{1}{64}$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 1 \\ \frac{1}{64} & \text{si} \quad 0 \le x < 1 \\ \frac{7}{64} & \text{si} \quad 1 \le x < 2 \\ \frac{11}{32} & \text{si} \quad 2 \le x < 3 \\ \frac{21}{32} & \text{si} \quad 3 \le x < 4 \\ \frac{57}{64} & \text{si} \quad 4 \le x < 5 \\ \frac{63}{64} & \text{si} \quad 5 \le x < 6 \\ 1 & \text{si} \quad 6 \le x \end{cases}$$

8 **En una urna hay 4 bolas blancas y 6 negras. Si el experimento consiste en hacer cinco extracciones con devolución, calcular la función de probabilidad y de distribución de la variable «*número de bolas blancas*».**

χ	0	1	2	3	4	5
$P(\chi = x)$	0,07776	0,2592	0,3456	0,2304	0,0768	0,01024

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ 0{,}07776 & \text{si} \quad 0 \le x < 1 \\ 0{,}33696 & \text{si} \quad 1 \le x < 2 \\ 0{,}68256 & \text{si} \quad 2 \le x < 3 \\ 0{,}91296 & \text{si} \quad 3 \le x < 4 \\ 0{,}98976 & \text{si} \quad 4 \le x < 5 \\ 1 & \text{si} \quad 5 \le x \end{cases}$$

9 **Hallar la media, la varianza y la desviación típica de la distribución de la variable aleatoria «*número de caras*» en el experimento de lanzar 10 monedas simultáneamente.**

$\mu = 5$; $\sigma^2 = 2{,}5$; $\sigma = 1{,}58$

10 **En una urna hay una bola blanca y 5 negras. Si el experimento consiste en hacer doce extracciones con devolución, calcular la media y la varianza de la distribución de la variable «*número de bolas blancas*».**

$\mu = 10$; $\sigma^2 = 1{,}67$

11 **Se tiene un dado correctamente equilibrado pero tres de sus caras llevan el número 1, dos caras el número 2 y una cara el número 3. Se lanza el dado y se considera la variable aleatoria que asigna a cada**

lanzamiento el número obtenido. Halla la función de probabilidad y la función de distribución de esta variable.

χ	1	2	3
$P(\chi = x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 1 \\ \frac{1}{2} & \text{si} \quad 1 \leq x < 2 \\ \frac{5}{6} & \text{si} \quad 2 \leq x < 3 \\ 1 & \text{si} \quad 3 \leq x \end{cases}$$

12 **Una urna contiene dos bolas blancas, tres rojas y cuatro verdes. Una variable aleatoria χ asigna un 1 si la bola extraída es blanca, un 2 si es roja y un 3 si es verde. Halla:**

a) la función de probabilidad y de distribución de esta variable;

b) la media y la desviación típica.

χ	1	2	3
$P(\chi = x)$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{9}$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 1 \\ \frac{2}{9} & \text{si} \quad 1 \leq x < 2 \\ \frac{5}{9} & \text{si} \quad 2 \leq x < 3 \\ 1 & \text{si} \quad 3 \leq x \end{cases}$$

$$\mu = \frac{20}{9} = 2{,}22; \quad \sigma = \sqrt{\frac{50}{81}} = 0{,}79$$

13 **En una caja hay tres bolas marcadas con un 1 y cinco con un 4. Se sacan al azar dos bolas simultáneamente y se suman los puntos. Hallar la media y la desviación típica de esta variable.**

$$\mu = \frac{161}{28} \simeq 5{,}75; \quad \sigma = \sqrt{\frac{405}{112}} \simeq 1{,}90$$

14 **Como en el ejercicio anterior pero suponiendo que las bolas se sacan sucesivamente y reponiendo cada vez la bola sacada.**

$$\mu = \frac{23}{4} = 5{,}75; \quad \sigma = \sqrt{\frac{135}{32}} \simeq 2{,}05$$

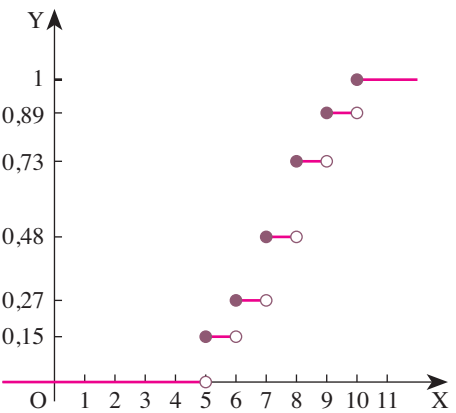
15 **La variable aleatoria χ puede tomar los valores 5, 6, 7, 8, 9 y 10 con probabilidades:**

$P(\chi = 5) = 0{,}15$ $P(\chi = 6) = 0{,}12$ $P(\chi = 7) = 0{,}21$

$P(\chi = 8) = 0{,}25$ $P(\chi = 9) = 0{,}16$ $P(\chi = 10) = 0{,}11$

Halla: a) La función de distribución y su gráfica. b) La media, c) la varianza y la desviación típica.

a) $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 5 \\ 0{,}15 & \text{si } 5 \le x < 6 \\ 0{,}27 & \text{si } 6 \le x < 7 \\ 0{,}48 & \text{si } 7 \le x < 8 \\ 0{,}73 & \text{si } 8 \le x < 9 \\ 0{,}89 & \text{si } 9 \le x < 10 \\ 1 & \text{si } 10 \le x \end{cases}$



b) $\mu = 7{,}48$

c) $\sigma^2 = 2{,}3696$; $\sigma = 1{,}5394$

16 **La función de probabilidad de una variable aleatoria es la de la tabla:**

x_i	4	5	6	7	8	9	10
p_i	0,2	0,15	0,1	0,3	0,1	0,05	

Calcula

a) *p*(10)

b) media y desviación típica.

a) P(10) = 0,1

b) $\mu = 6{,}5$; $\sigma^2 = 3{,}45$; $\sigma = 1{,}86$

17 **Si el 5% de los cerrojos producidos por una máquina son defectuosos, determina la probabilidad de que de 5 cerrojos elegidos al azar:**

a) uno sea defectuoso;

b) como máximo haya dos defectuosos.

a) 0,2036 **b)** 0,9988

χ sigue una B(5, 0,05) y con la tabla de la f. de probabilidad es:

a) 0,204 **b)** 0,999

18 **Una familia tiene 6 hijos. Si la distribución por sexos es igualmente probable, halla la probabilidad de que haya:**

a) dos niños como máximo;

b) al menos una niña;

c) al menos tres niños;

d) al menos una niña y un niño.

a) 0,34375 **b)** 0,984375

c) 0,65625 **d)** 0,96875

χ sigue una B(6, 0,5) y con la tabla se tiene:

a) 0,344 **b)** 0,984

c) 0,656 **d)** 0,968

19 **A una reunión han sido convocadas 8 personas. Cada persona puede acudir o no con independencia de lo que hagan las demás. Si la probabilidad de que acuda cada una de las personas es 0,85, se pide:**

a) probabilidad de que asistan todas;

b) probabilidad de que asistan más de 6 personas;

c) probabilidad de que al menos asista la mitad.

a) 0,2725 **b)** 0,6572 **c)** $\simeq 1$

20 **Un jugador de baloncesto tiene acreditado un 62% de acierto en sus lanzamientos de dos puntos. Si en un partido lanza 15 veces a canasta, ¿cuál es la probabilidad de que logre, a) 10 puntos? (5 canastas); b) al menos 5 canastas?; c) más de 25 puntos? (más de 12 canastas).**

a) 0,0173 **b)** 0,9941 **c)** 0,0382

21 **Un equipo de fútbol tiene 3/5 de probabilidad de ganar cada vez que juega. Si se juegan 6 partidos halla la probabilidad de que gane más de la mitad de los partidos.**

0,54432 χ sigue una B(6, 0,6) y con la tabla es: 0,545

22 **Una encuesta revela que el 20% de la población es favorable a un político y el resto es desfavorable. Elegidas 6 personas al azar se desea saber:**

a) La probabilidad de que las seis personas sean desfavorables.

b) La probabilidad de que las seis personas sean favorables.

c) La probabilidad de que sean favorables a ese líder menos de tres de las personas encuestadas.

a) 0,262144 **b)** 0,000064 **c)** 0,90112

23 **¿Cuál es la fórmula que da la probabilidad de que al lanzar 3 monedas bien construidas se obtengan x caras? Supongamos ahora que se han lanzado 3 monedas bien construidas. Se pide:**

a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener 1 cara?

b) ¿Cuál es la probabilidad de obtener 3 caras?

$$P(\chi = x) = \binom{3}{x} 0{,}5^x \cdot 0{,}5^{3-x} = \binom{3}{x} 0{,}5^3$$

a) 0,375 **b)** 0,125

24 **El 85% de los alumnos que se presentan a las Pruebas de Acceso en la convocatoria de Junio las aprueba. En relación a un centro que presenta 15 alumnos, se pide:**

a) Determinar el número de alumnos que por término medio aprobará.

b) ¿Cuál es su desviación típica?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que aprueben los 15 alumnos?

a) 12,75 **b)** 1,3829 **c)** 0,0874

25 **Se lanzan cuatro monedas simétricas. ¿Cuál es la probabilidad de obtener al menos dos caras?**

0,6875

26 **El 20% de los españoles lee ensayos. Al elegir 3 al azar y representar por x el número de los que leen ensayos es evidente que x puede tomar los valores 0, 1, 2 o 3.**

Calcular las probabilidades de que $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$ y $x = 3$.

Calcular la media y la varianza de x.

$P(x = 0) = 0{,}512$

$P(x = 1) = 0{,}384$

$P(x = 2) = 0{,}096$

$P(x = 3) = 0{,}008$

$\mu = 0{,}6$; $\sigma^2 = 0{,}48$

27 **Juan encesta el 70% de sus tiros a canasta. En dos partidos lanzó 10 tiros en cada uno. ¿Cuál es la probabilidad de que en cada partido enceste más de 7 canastas? Razona si esta probabilidad es mayor, menor o igual que la probabilidad de que entre los dos partidos enceste más de 15 canastas.**

0,1465; 0,2375

Es mayor la probabilidad de encestar más de 15 canastas entre los dos partidos.

28 **Si se contesta al azar un test de 8 preguntas con respuestas SI/NO, ¿cuál es la probabilidad de acertar más de 5?, ¿y la probabilidad de acertar 3 o 4?**

0,1445; 0,4922

29 **ELISA es el nombre de uno de los primeros test que se utilizaron para detectar la presencia de anticuerpos del virus del SIDA en la sangre. Con muestras de sangre contaminada con anticuerpos del SIDA, ELISA da un resultado positivo (señala la presencia de anticuerpos) en el 99% de los casos. Si consideramos $n = 10$ unidades de sangre contaminada.**

a) ¿Cuál es la probabilidad de que ELISA detecte todos los casos?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que escapen a la detección dos unidades de sangre?

a) 0,9044 **b)** 0,0042

30 **Se considera un hexágono regular H.**

1. Se eligen al azar tres vértices distintos de H.

a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener un triángulo equilátero?

b) ¿Cuál es la probabilidad de obtener un triángulo isósceles no equilátero?

c) ¿Cuál es la probabilidad de obtener un triángulo rectángulo?

2. Se repite cinco veces la experiencia del apartado 1.

Sea χ la variable aleatoria que toma por valor el número de triángulos rectángulos obtenidos.

a) ¿Cuál es el conjunto de valores tomados por χ?

b) Determinar la función de probabilidad de χ, su esperanza matemática y su varianza.

1. a) $\frac{1}{10}$ **b)** $\frac{3}{10}$ **c)** $\frac{3}{5}$

2. a) {0, 1, 2, 3, 4, 5}

b)

χ	0	1	2	3	4	5
$P(\chi = x)$	0,01024	0,0768	0,2304	0,3456	0,2592	0,07776

$\mu = 3$; $\sigma^2 = 1{,}2$

31 **Se pintan las seis caras de un cubo de madera de arista 3 cm. Se divide, con cortes paralelos a las caras de los cubos, en 27 cubos pequeños de arista 1 cm. Se meten los 27 cubos en un saco.**

Se escogen al azar, sin devolución, dos cubos del saco. Sea χ la variable aleatoria igual al número total de caras pintadas que presentan los dos cubos escogidos.

a) ¿Qué valores toma χ?

b) Hallar la función de probabilidad de χ.

c) Hallar μ y σ.

a) {1, 2, 3, 4, 5, 6}

b)

χ	1	2	3	4	5	6
$P(\chi = x)$	$\frac{12}{702}$	$\frac{54}{702}$	$\frac{160}{702}$	$\frac{228}{702}$	$\frac{192}{702}$	$\frac{56}{702}$

c) $\mu = 4; \quad \sigma = \sqrt{\frac{50}{39}} \simeq 1{,}28$

32 **En el experimento de extraer una carta de una baraja de 40 cartas se define la variable aleatoria que asigna el número de la carta si éste es menor que 5 y el 0 a las demás. Determina:**

a) Los valores que toma la variable aleatoria.

b) Su función de probabilidad.

c) Su función de distribución.

a) 0, 1, 2, 3, 4

b)

χ	0	1	2	3	4
$P(\chi = x_i)$	6/10	1/10	1/10	1/10	1/10

c) $F(x) = P(\chi \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ 6/10 & \text{si} \quad 0 \leq x < 1 \\ 7/10 & \text{si} \quad 1 \leq x < 2 \\ 8/10 & \text{si} \quad 2 \leq x < 3 \\ 9/10 & \text{si} \quad 3 \leq x < 4 \\ 1 & \text{si} \quad x \geq 4 \end{cases}$

Tema 19 LA DISTRIBUCIÓN NORMAL

1 **Utilizando la tabla de valores de la distribución normal, calcular:**

a) $P(\chi \leq 1{,}2)$ **b)** $P(0 \leq \chi \leq 0{,}75)$

c) $P(\chi \leq -0{,}72)$ **d)** $P(0{,}35 \leq \chi \leq 0{,}9)$

a) 0,8849 **b)** 0,2734

c) 0,7642 **d)** 0,1791

2 **Idem:**

a) $P(\chi \leq 2{,}06)$ **b)** $P(\chi \geq -0{,}23)$

c) $P(-2{,}3 \leq \chi \leq -0{,}38)$ **d)** $P(-1{,}54 \leq \chi \leq 0{,}46)$

a) 0,9803 **b)** 0,5910

c) 0,3413 **d)** 0,6154

3 **Hallar x_0 si:**

a) $P(\chi \leq x_0) = 0{,}9884$ **b)** $P(\chi \leq x_0) = 0{,}3707$

c) $P(\chi \leq x_0) = 0{,}2266$ **d)** $P(-1{,}24 \leq \chi \leq x_0) = 0{,}7084$

a) 2,27 **b)** –0,33

c) –0,75 **d)** 0,9

4 **Idem:**

a) $P(\chi \leq x_0) = 0{,}9738$ **b)** $P(\chi \geq x_0) = 0{,}1469$

c) $P(\chi \geq x_0) = 0{,}9207$ **d)** $P(x_0 \leq \chi \leq 0{,}3) = 0{,}098$

a) 1,94 **b)** 1,05

c) –1,41 **d)** 0,05

5 **En una distribución N(7, 4) calcula:**

a) $P(\chi \leq 4)$ **b)** $P(\chi \geq 5{,}4)$

c) $P(3 \leq \chi \leq 7{,}6)$ **d)** $P(6 \leq \chi \leq 10)$

a) 0,2266 **b)** 0,6554

c) 0,4009 **d)** 0,1747

6 **Si χ sigue una distribución N(15, 5) calcula a en los siguientes casos:**

a) $P(\chi \leq a) = 0{,}975$ **b)** $P(\chi \geq a) = 0{,}2514$

c) $P(10 \leq \chi \leq a) = 0{,}5113$ **d** $P(a \leq \chi \leq 19) = 0{,}3674$

a) 24,8 **b)** 18,35

c) 17,2 **d)** 14

7 **Suponiendo que la probabilidad de nacer niño o niña es la misma, halla la probabilidad de que en los 650 nacimientos habidos en un hospital, nacieran:**

a) más de 350 niños

b) menos de 200 niños

c) entre 300 y 400 niños

N(325, 12,75) **a)** 0,025 **b)** 0 **c)** 0,975

8 **Por el historial turístico de una región se sabe que el 45% de los turistas que la visitan son franceses. Éste año se espera que la visiten 2000 turistas. Se pide:**

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la visiten más de 1000 franceses?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la visiten menos de 850 franceses?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que la visiten entre 870 y 920 franceses?

d) ¿Qué número de franceses se espera que la visiten éste año?

N(90,0, 22,25) **a)** 0 **b)** 0,0122 **c)** 0,7274 **d)** 900

9 **La media y la desviación típica de un test pasado a un grupo de estudiantes son 96 y 10 respectivamente. Hallar los resultados reducidos (tipificados) de los estudiantes que obtuvieron los puntos: a) 85; b) 104; c) 100.**

a) –1,1 **b)** 0,8 **c)** 0,4

10 **En una distribución N(0, 1) hallar:**

a) $P(0 \leq \chi \leq 1{,}24)$ **b) $P(-0{,}37 \geq \chi \leq 0)$**

c) $P(0{,}56 \leq \chi \leq 1{,}62)$ **d) $P(|\chi| \leq 0{,}25)$**

a) 0,3925 **b)** 0,1443

c) 0,2351 **d)** 0,1974

11 **Sea χ una variable aleatoria que sigue una distribución N(0, 1). Determinar el valor de *x* si:**

a) $P(0 \leq \chi \leq x) = 0{,}4236$; **b) $P(\chi \leq x) = 0{,}3669$;** **c) $P(x \leq \chi \leq 2{,}5) = 0{,}123$**

a) 1,43 **b)** –0,34 **c)** 1,13

12 **Un equipo de fútbol ha conseguido en las últimas temporadas unos resultados que se han distribuido normalmente con una media de 23 victorias y una desviación típica de 6. Suponiendo que mantenga esta tónica, hallar:**

a) La probabilidad de que gane entre 22 y 27 partidos en la próxima temporada. $\chi \in [22{,}5,\ 26{,}5]$.

b) La probabilidad de que gane más de 30 partidos. $\chi \leq 30{,}5$

Por ser el número de partidos ganados una variable aleatoria discreta, se introduce el factor de corrección, resultando ser:

a) 0,2509; **b)** 0,1056

13 **La temperatura T durante el mes de mayo está distribuida normalmente con media 21° y desviación típica 4. Hallar el número de días en que se espera haya una temperatura entre 19° y 23°.**

0,383

14 **Una moneda corriente se lanza 30 veces. Hallar la probabilidad de obtener entre 17 y 22 caras usando:**

a) La distribución binomial.

b) La aproximación de la normal a la binomial. Considera que $\chi \in [17{,}5,\ 21{,}5]$.

a) 0,1727 **b)** 0,1795

15 **El promedio de aciertos en el tiro a canasta de un jugador de baloncesto es del 73 por 100. Si lanza 200 veces, ¿cuál es la probabilidad de que enceste más de 160 lanzamientos? Considera que $\chi \geq 160{,}5$.**

N(146, 6,28); 0,0129

16 **La duración media de una clase se estima que es de 55 minutos, con una desviación típica de 4 minutos. Calcula:**

a) La probabilidad de que una clase dure más de 1 hora.

b) La probabilidad de que dure entre 52 y 59 minutos.

c) La probabilidad de que dure menos de 49 minutos.

a) 0,1056 **b)** 0,6147 **c)** 0,0668

17 **A partir de la tabla de la distribución N(0, 1) obténganse, aproximadamente, intervalos con extremo inferior 0; 0,2; 0,4 y 1 que contengan el 10 por 100 del área total.**

a) ¿Cómo varía la amplitud del intervalo conforme su extremo inferior se va alejando de la media?

b) Hállese el intervalo de amplitud mínima que contenga el 10% del área total.

Sin interpolar. [0, 0,25]; [0,2, 0,47]; [0,4, 0,69]; [1, 1,56]

a) Aumenta la amplitud del intervalo

b) [–0,13, 0,13]

18 **Los resultados de una prueba objetiva de selección pasada a 200 personas indicaron que la distribución de puntuaciones era normal, con media de 60 puntos y desviación típica de 6 puntos. Calcular cuántos examinados han obtenido una puntuación entre 50 y 57 puntos, y cuál es la mínima puntuación por debajo de la cuál están el 75% de los examinados.**

$P(50 \leq \chi \leq 57) \cdot 200 = 52{,}2 \Rightarrow$ 52 examinandos; 64,02 puntos

19 **Una empresa instala en una ciudad 20 000 bombillas para su iluminación. La duración de una bombilla sigue una distribución normal con media 302 días y desviación típica 40 días.**

a) ¿Cuántas bombillas es de esperar que se fundan antes de 365 días?

b) ¿Cuántas durarán más de 400 días?

a) $P(\chi \leq 365) \simeq 0{,}9429 \Rightarrow$ 18.858 bombillas;

b) $P(\chi \leq 400) = 0{,}0071 \Rightarrow$ 142 bombillas

20 **Suponiendo que las tallas de los adultos de un país A siguen una distribución normal, con media 180 cm y desviación típica 5 cm y que las tallas de los adultos de un país B siguen una distribución también normal, pero con media 180 cm y desviación típica 15 cm, contestar razonadamente en cuál de los dos países es más probable encontrar adultos con talla superior a 195 cm, y donde es más probable encontrar adultos con talla comprendida entre 175 y 185 cm.**

Es más probable encontrarlos en B porque $P(\chi \geq 1) > P(\chi \geq 3)$

Es más probable encontrarlos en A porque $P(-1 \leq \chi \leq 1) > P\left(-\frac{1}{3} \leq \chi \leq \frac{1}{3}\right)$

21 **El peso de los adultos de una población numerosa se distribuye normalmente con media 65 kg y desviación típica 3 kg. Se eligen dos individuos al azar. Calculando las correspondientes probabilidades, justifica que es más probable:**

a) Que cada uno de los individuos tenga un peso comprendido entre 63,5 y 66,5 kg.

b) Que uno de ellos tenga un peso comprendido entre 62 y 68 kg y el otro tenga un peso no comprendido entre 62 y 68 kg.

La probabilidad de a) es 0,146689. La probabilidad de b) es 0,4333144. Es más probable b)

22 **La estatura de una población se distribuye normalmente con media 170 cm y desviación típica 6 cm.**

Calcular la probabilidad de que elegido un individuo al azar tenga media comprendida entre 158 y 182 cm.

0,9544

23 **Los ingresos diarios de una empresa tienen una distribución normal, con media 35 560 € y desviación típica 2 530 €. Justifica si es o no razonable el esperar obtener un día unas ventas superiores a 55 000 €. Calcular cuántos días en un año se espera obtener unas ventas superiores a 40 620 €.**

$P(\chi \geq 55.000) \simeq 0 \Rightarrow$ no es razonable esperar un día con unas ventas superiores a 55000 €.

$P(\chi \geq 40.620) \cdot 365 = 8{,}322 \Rightarrow$ se espera que 8 días tengan unas ventas superiores a 40620 €.

24 **Se sabe que las puntuaciones obtenidas al pasar un test siguen una distribución normal con media 210 puntos y desviación típica 0,6 puntos. Si se pasa ese test a 100 personas, ¿cuántas de esas 100 personas deberemos esperar que obtengan una puntuación entre 209 y 211 puntos?**

$P(209 \leq \chi \leq 211) \cdot 100 = 90{,}5 \Rightarrow$ se espera que 90 personas obtengan esa puntuación.

25 **Juan encesta el 30% de sus tiros a canasta. En dos partidos lanzó 20 tiros en cada uno. Utilizando la distribución normal: ¿cuál es la probabilidad de que en cada partido enceste más de 7 canastas? Razona si esta probabilidad es mayor, menor o igual que la probabilidad de que entre los dos partidos enceste más de 15 canastas.**

La probabilidad de que en cada partido enceste más de 7 canastas es 0,0542.

La probabilidad de encestar más de 15 canastas entre los dos partidos es 0,1131.

Es mayor la probabilidad de encestar más de 15 canastas entre los dos partidos.

26 **Se tienen muchos datos que siguen una distribución normal de media 20 y desviación típica 2. Calcula el porcentaje de datos que superan el valor 23, y justifica que ese porcentaje es idéntico al porcentaje de datos inferiores a 17.**

6,68%

$P(\chi \geq 23) = P(Z \geq 1{,}5) = 1 - P(Z \leq 1{,}5)$

$P(\chi \leq 17) = P(Z \leq -1{,}5) = 1 - P(Z \leq 1{,}5)$

27 **El 10% de los artículos fabricados en una empresa de material cerámico tiene algún defecto. Obtén (utilizando la distribución normal) la probabilidad de que en un lote de 100 artículos hayan:**

a) 10 defectuosos **b) al menos 10 defecutosos**

a) 0,135 **b)** 0,5675

28 **La distribución de la duración de un embarazo en mujeres es aproximadamente normal con media 266 días y desviación típica 16 días. Calcula:**

a) La proporción de embarazos con una duración mínima de 242 días.

b) El número de días para que la duración del embarazo en el 20% de las mujeres sea inferior a él.

c) El número de días para que su duración en el 50% de las mujeres sea inferior a él.

a) 0,9332 **b)** 252,56 días **c)** 266 días

29 **El grosor de la cáscara de los huevos que ponen las gallinas de la *Granja Ous Integrals* es una variable aleatoria con distribución normal de media 0,38 mm y desviación típica 0,03 mm.**

a) Si se selecciona un huevo de dicha granja al azar, ¿cuál es la probabilidad de que su grosor se encuentre entre 0,35 mm y 0,39 mm?

b) ¿Qué valor de grosor será superado sólo por el 10% de los huevos de la granja?

a) 0,4706 **b)** 0,4184 mm.

30 **Las peticiones de compra de la revista «El Cuore» en un kiosco tienen de media 190 y una desviación típica de 25. ¿Cuántos ejemplares de la revista debe encargar el dueño para satisfacer el 80% de la demanda?**

$\simeq$ 211 revistas

31 **Las oposiciones a cierto Ayuntamiento constan de dos ejercicios. El primero de ellos es un test de inteligencia, que consiste en 200 preguntas. La distribución de aciertos sigue un comportamiento normal, con media 125 y desviación típica 15. El Tribunal decide dar paso al segundo ejercicio a los opositores que hayan superado 140 aciertos en el test. ¿Cuántos opositores pasarán al siguiente ejercicio, sabiendo que se han presentado 1500 opositores?**

238 opositores

Notas

Notas

Notas

Notas

Notas

Notas

Notas

ECIR EDITORIAL

Guía del profesor
Matemáticas

ISBN 978-84-9826-428-9