Guía del profesor

bachillerato 1

Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales

Rodolfo Esteve
Maribel Deusa
Pascual Montesinos
Antonio J. Ramírez
Ernesto Veres

ECIR EDITORIAL

Guía Didáctica I

bachillerato 1

Matemáticas

aplicadas a las CC.SS.

Autores
Rodolfo Esteve
Maribel Deusa
Pascual Montesinos
Antonio J. Ramírez
Ernesto Veres

ECIR EDITORIAL

Matemáticas
aplicadas a las CC.SS.
1 bachillerato

Guía Didáctica I

Rodolfo Esteve
Maribel Deusa
Pascual Montesinos
Antonio J. Ramírez
Ernesto Veres
Editorial ECIR, S.A.

Diseño de interior: Diseño gráfico ECIR
Edición: Editorial ECIR
Impresión: Industrias gráficas Ecir (IGE)

Ilustraciones: Diseño Gráfico ECIR
Diseño e ilustración cubierta: Valverde e Iborra / Diseño gráfico ECIR

Depósito legal: V-4091-2008
I.S.B.N.: 978-84-9826-449-4

ECIR EDITORIAL
Villa de Madrid, 60 - 46988 - P. I. Fuente del Jarro - PATERNA (Valencia)
Tels: 96 132 36 25 - 96 132 36 55
Móvil: 677 431 115
Fax: 96 132 36 05
E-mail: ecir@ecir.com - http://www.ecir.com

Índice interactivo. Situar el cursor sobre el tema al que se desee ir y hacer clic.

Índice

Tema 1 LOS NÚMEROS REALES

1 **Dados los números $A = \frac{27}{17}$; $B = 2 + \sqrt{5}$; $C = \pi - \sqrt{3}$ se pide dar de cada uno un redondeo de orden:**

a) entero; b) a décimas; c) a centésimas; d) a milésimas.

a) $A \simeq 2$; $B \simeq 4$; $C \simeq 1$;

c) $A \simeq 1{,}59$; $B \simeq 4{,}24$; $C \simeq 1{,}41$;

b) $A \simeq 1{,}6$; $B \simeq 4{,}2$; $C \simeq 1{,}4$

d) $A \simeq 1{,}588$; $B \simeq 4{,}236$; $C \simeq 1{,}410$

2 **Da el error absoluto y el relativo que se comete al hacer los redondeos anteriores.**

a) $A \begin{cases} E = 0{,}4 \\ e = 26\% \end{cases}$ $B \begin{cases} E = 0{,}24 \\ e = 5{,}6\% \end{cases}$ $C \begin{cases} E = 0{,}4 \\ e = 29\% \end{cases}$

b) $A \begin{cases} E = 0{,}012 \\ e = 0{,}7\% \end{cases}$ $B \begin{cases} E = 0{,}04 \\ e = 0{,}9\% \end{cases}$ $C \begin{cases} E = 0{,}009 \\ e = 0{,}7\% \end{cases}$

c) $A \begin{cases} E = 0{,}0017 \\ e = 0{,}1\% \end{cases}$ $B \begin{cases} E = 0{,}004 \\ e = 0{,}09\% \end{cases}$ $C \begin{cases} E = 0{,}0005 \\ e = 0{,}0003\% \end{cases}$

d) $A \begin{cases} E = 0{,}00024 \\ e = 0{,}01\% \end{cases}$ $B \begin{cases} E = 0{,}00007 \\ e = 0{,}002\% \end{cases}$ $C \begin{cases} E = 0{,}0005 \\ e = 0{,}0003\% \end{cases}$

3 **Se ha medido una longitud de 500 m con un «metro» cuya longitud exacta es de 98 cm. Determina el error absoluto y el error relativo cometido.**

$E = 10{,}204$ m; $e \simeq 0{,}0204$

4 **Sabiendo que $\sqrt{2} \approx 1{,}414\ 213\ 562\ldots$ Indica cuál es la cota de error cometido al redondear $\sqrt{2}$ como:**

a) 1 **b) 1,41** **c) 1,414 21.**

a) $\varepsilon = 0{,}4$; **b)** $\varepsilon = 0{,}004$; **c)** $\varepsilon = 0{,}000004$

5 **Usa la descomposición factorial de los radicandos y calcula:**

a) $\sqrt[3]{2744}$ **b)** $\sqrt[4]{0{,}0016}$ **c)** $\sqrt{49^3}$ **d)** $\sqrt[3]{-512}$

a) 14 **b)** $\frac{1}{5}$ **c)** 343 **d)** -8

6 **Calcula:**

a) $2\sqrt[3]{9}\cdot\sqrt{27}$ b) $\sqrt[4]{2^3}\cdot\sqrt{12}\cdot\sqrt[3]{3^2\cdot 2^2}$ c) $\dfrac{\sqrt[3]{9a^2b}}{\sqrt[6]{27a}}$ d) $\dfrac{\sqrt{2x}\cdot\sqrt[5]{8x^3}}{\sqrt{16x^3}}$

a) $18\sqrt[6]{3}$ b) $12\sqrt[12]{288}$ c) $\sqrt[6]{3a^3b^2}$ d) $\dfrac{1}{\sqrt[10]{2^9x^4}}$

7 **Calcula:** a) $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{4}}}}}$ b) $\sqrt{27\sqrt{24\sqrt{36}}}$

c) $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{4}}}}}$ d) $\sqrt{\sqrt[4]{256}}$

a) 2; b) 18; c) 2; d) 2

8 **Extrae los factores posibles de los radicales**

a) $\sqrt[5]{256}$ b) $\sqrt[3]{3x^4y^6}$ c) $\sqrt{8x^3y^{12}}$ d) $\sqrt[6]{36a^8a^5}$

a) $2\sqrt[5]{8}$ b) $xy^2\sqrt[3]{3x}$ c) $2xy^6\sqrt{2x}$ d) $a^2\sqrt[6]{36a}$

9 **Escribe de la forma $\sqrt[n]{a}$ los radicales**

a) $3x^3y^4\sqrt{2y^2}$ b) $-3ab\sqrt[3]{4a}$ c) $(a-b)\sqrt{a+b}$ d) $\dfrac{3x}{2}\sqrt[3]{\dfrac{2x}{3}}$

a) $\sqrt{18x^6y^{10}}$; b) $\sqrt[3]{-108a^4b^3}$; c) $\sqrt{(a-b)^2(a+b)}$; d) $\sqrt[3]{\dfrac{9x^4}{4}}$

10 **Racionaliza los denominadores:**

a) $\dfrac{3}{\sqrt{6}}$ b) $\dfrac{3}{2\sqrt{12}}$ c) $\dfrac{2}{\sqrt[5]{4}}$ d) $\dfrac{5}{\sqrt{7}-\sqrt{2}}$ e) $\dfrac{22}{5+\sqrt{3}}$

a) $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ b) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ c) $\sqrt[5]{8}$ d) $\sqrt{7}+\sqrt{2}$ e) $5-\sqrt{3}$

11 **Opera las siguientes expresiones y da el resultado sin exponentes fraccionarios:**

a) $3\cdot 2^{5/2}$; b) $\dfrac{4}{6^{1/2}-2^{1/2}}$;

c) $3a^{1/2}b^{-1/2}c^{3/4}$; d) $(2a)^{1/3}(3a^2)^{1/4}$

a) $12\sqrt{2}$; b) $\sqrt{6}+\sqrt{2}$; c) $3\sqrt[4]{\dfrac{a^2c^3}{b^2}}$; d) $\sqrt[12]{432a^{10}}$

12 **¿Verdadero o falso?**

a) $[2, 3[\ \subset\ ]2, 3[$ **b)** $]2, 3[\ \subset\ [2, 3[$;

c) $[1, 3]\ \subset\ ]-\infty, 3]$ **d)** $[-3, 2]\ \subset\ [-4, 4]$

a) F; **b)** V; **c)** V; **d)** V

13 **Determina el conjunto** $A = \{[1, 4[\ \cup\ ]5, 8]\} \cap \{[-1, 2] \cup\ ]3, 6[\ \cup\ ]7, 9]\}$

$A = [1, 2] \cup\ ]3, 4[\ \cup\ ]5, 6[\ \cup\ ]7, 8]$

14 **Determina el conjunto** $B = \{]-1, 2[\ \cap [0, 3[\ \cap\ ]-5, 1[\} \cup\ ]1, 3]$.

$B = [0, 1[\ \cup\ ]1, 3]$

15 **Da el valor absoluto de los siguientes números:**

a) 4,6; **b)** $\pi + 3$; **c)** $5 - \sqrt{26}$; **d)** 5^{-2}; **e)** -3^2; **f)** 2800^0

a) 4,6; **b)** $\pi + 3$; **c)** $\sqrt{26} - 5$; **d)** 5^{-2}; **e)** 3^2; **f)** $2800° = 1$

16 **Calcula:** $||-2| - |-4| - |-3 \times 5|| - |2 \times (-5)|$

7

17 **Halla** x **en las ecuaciones siguientes:**

a) $|x| = 7$; **b)** $|x - 2| = 3$; **c)** $|2 - 3x| = 1$

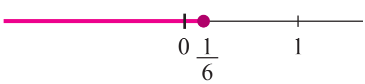
a) $x_1 = 7$; $x_2 = -7$; **b)** $x_1 = -1$; $x_2 = 5$; **c)** $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = 1$

18 **Resuelve las siguientes inecuaciones y expresa la solución gráficamente sobre la recta y como un intervalo:**

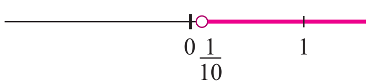
a) $2x - \frac{1}{3} \le 0$ **b)** $\frac{x}{100} - 10^{-3} > 0$

c) $\frac{5x - 9}{3} > \frac{7x + 5}{2}$ **d)** $x\sqrt{3} - 6 \le 3 - 4x$

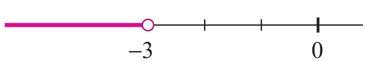
a) $x \in \left]-\infty, \frac{1}{6}\right]$



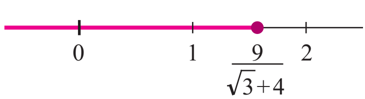
b) $x \in \left]\frac{1}{10}, \infty\right[$



c) $x \in\ ]-\infty, -3[$



d) $x \in \left]-\infty, \frac{9}{\sqrt{3} + 4}\right]$



19 **Mismo ejercicio:**

a) $\dfrac{6-5x}{3}-\dfrac{9-8x}{4}-\dfrac{11-10x}{12}<0;$

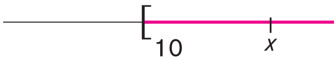
b) $3x + 2 - (5x + 1) \leq - (2x + 3) + x - 6;$

c) $\dfrac{x-2}{3}-\dfrac{x-1}{5}>\dfrac{x-6}{3}$

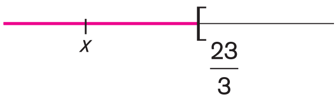
d) $2x-\dfrac{1+2x}{3}>2+\dfrac{x}{2}$

a) $x < 1; \; x \in]-\infty, 1[$

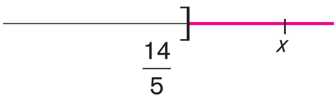
b) $x \geq 10; \; x \in [10, +\infty[$



c) $x < \dfrac{23}{3}; \; x \in \left]-\infty, \dfrac{23}{3}\right[$



d) $x > \dfrac{14}{5}; \; x \in \left]\dfrac{14}{5}, +\infty\right[$



20 **Dí qué números pertenecen a Q y cuáles a I.**

a) $\sqrt{10}$ b) $\sqrt{4}$ c) $\sqrt{0,04}$ d) 4,323232…

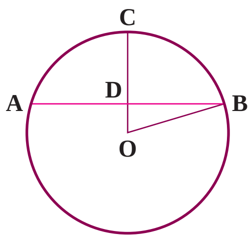
e) 2,010010001… f) $7,32\overset{\frown}{4}$ g) $\dfrac{2}{3}$ h) π^2

a) I; **b)** Q; **c)** Q; **d)** Q; **e)** I; **f)** Q; **g)** Q; **h)** I

21 **¿Es cierto que $\dfrac{355}{113} = \pi$? Razona la respuesta.**

No porque π es un número irracional.

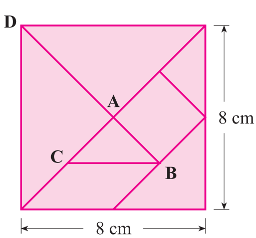
22 **En la figura siguiente es OB = 7 cm y CD = 5 cm.**



Da el valor exacto y un redondeo a milésimas de la medida del segmento AB.

$AB = 6\sqrt{5} \simeq 13,416$

23 **Da la medida exacta y un redondeo a centésimas de los segmentos AB, BC y BD del tangram siguiente:**



$AB = 2\sqrt{2}$ cm $\simeq 2,83$ cm

$BC = 4$ cm $= 4,00$ cm

$BD = 6\sqrt{2}$ cm $\simeq 8,49$ cm

24 **¿Cuál es el error absoluto y relativo que se comete al redondear**

a) 16,7528 a milésimas?

b) π a centésimas?

c) $\sqrt{2}$ a enteros?

d) 1,2345678… a diezmilésimas?

a) E = 0,0002 e = 0,001%
b) E = 0,0016 e = 0,05%
c) E = 0,41 e = 29%
d) E = 0,00003 e = 0,003%

25 **Expresa de la forma $a = a' \pm \varepsilon$ una medida de la que se sabe que su valor está entre:**

a) 24,96 y 25,12; b) 10,52 y 10,84; c) −6,4 y −6,28; d) 5 y 6

Indica en cada caso cuál es la cota del error absoluto cometido.

a) 25,04 ± 0,08 Cota de error absoluto 0,08.

b) 10,68 ± 0,16 Cota de error absoluto 0,16.

c) −6,34 ± 0,06 Cota de error absoluto 0,06.

d) 5,5 ± 0,5 Cota de error absoluto 0,5.

26 **En un reconocimiento médico se establece la estatura de un individuo en 183 cm cuando su estatura real es 181 cm. La longitud de una pista de atletismo es de 100,5 m cuando debería ser de 100 m. ¿Cuál de las dos medidas comete menor error absoluto? ¿Cuál tiene menor error relativo?**

La estatura del individuo comete menor error absoluto.

La longitud de la pista comete menor error relativo.

27 **Indica qué porcentaje de error relativo se comete cuando se hace un redondeo a décimas del número 15,86352.**

100 e $\simeq$ 0,23 %

28 **Ordena en forma creciente los radicales: $\sqrt[3]{2}$; $\sqrt{3}$; $\sqrt[4]{6}$; $\sqrt[4]{3}$; $\sqrt[3]{4}$.**

$\sqrt[3]{2} < \sqrt[4]{3} < \sqrt[4]{6} < \sqrt[3]{4} < \sqrt{3}$

29 **Escribe de la forma $a\sqrt[n]{b}$ con b lo menor posible:**

a) $\sqrt{1200}$; **b)** $\sqrt[3]{2000}$; **c)** $\sqrt[5]{3^6 \cdot 2^4 \cdot 5^7 \cdot x^{11}}$;

d) $\sqrt{x^2 - y^2}$; **e)** $\sqrt[3]{x^3 - x^6}$; **f)** $\sqrt[4]{32xy}$

a) $20\sqrt{3}$; **b)** $10\sqrt[3]{2}$; **c)** $15x^2\sqrt[5]{3\cdot 2^4\cdot 5^2\cdot x}$

d) $\sqrt{x^2-y^2}$; **e)** $x\sqrt[3]{1-x^3}$; **f)** $2\sqrt[4]{2xy}$

30 **Justifica que:**

a) $\sqrt{(a^2-b^2)(a+b)}=(a+b)\sqrt{a-b}$ (con $a>b$)

b) $\sqrt{(a+b)^2-4ab}=a-b$ (con $a>b$)

c) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\sqrt{3}-1$

a) $\sqrt{(a^2-b^2)(a+b)}=\sqrt{(a+b)^2(a-b)}=(a+b)\sqrt{a-b}$

b) $\sqrt{(a+b)^2-4ab}=\sqrt{a^2+b^2-2ab}=\sqrt{(a-b)^2}=a-b$

c) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}-1}{2-1}+\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2}=\sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}=\sqrt{3}-1$

31 **Calcula:**

a) $\sqrt{\dfrac{1}{2}}+\sqrt{2}+\sqrt[4]{4}+\sqrt[6]{8}-\dfrac{7}{2}\sqrt[4]{64}$

b) $\sqrt[4]{324}-\dfrac{5}{2}\sqrt[6]{8}+\dfrac{1}{2}\sqrt{18}-\sqrt[4]{64}$

c) $\sqrt[6]{576}-\dfrac{1}{2}\sqrt[3]{81}+\dfrac{3}{5}\sqrt[4]{\sqrt[3]{81}}-\dfrac{1}{10}\sqrt[3]{3993}$

d) $5\sqrt[6]{8}-3\sqrt[10]{32}-8\sqrt[8]{16}+24\sqrt{\dfrac{1}{8}}$

a) $-\dfrac{7}{2}\sqrt{2}$; **b)** 0; **c)** 0; **d)** 0

32 **Calcula y da el resultado utilizando una sola raíz como máximo.**

a) $\sqrt{5}\cdot\sqrt[3]{15}\cdot\sqrt[4]{75}$

b) $\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{8}\cdot\sqrt[8]{32}$

c) $\sqrt[4]{2x}\cdot\sqrt[6]{8x^5}\cdot\sqrt[6]{64x^2}$

d) $\sqrt{30}\cdot\sqrt[5]{75a^4}\cdot\sqrt{180a}$

e) $\sqrt{3ab}\cdot\sqrt[4]{8a^3b}\cdot\sqrt[6]{24a^3b^5}$

f) $\sqrt{2xy}\cdot\sqrt{3z}\cdot\sqrt[4]{18z^3y^2}$

a) $5\sqrt[12]{3^7 5^4}=5\sqrt[12]{1366875}$

b) $2\sqrt[8]{2^7} = 2\sqrt[8]{128}$

c) $2\sqrt[12]{2^9\,x^5} = 2\sqrt[12]{512\,x^5}$

d) $30\,a\sqrt[10]{2^5\,3^7\,5^4\,a^3} = 30\,a\sqrt[10]{43740000\,a^3}$

e) $4\,a^2b^2\sqrt[12]{3^{11}a^6b^{10}} = 4\,a^2b^2\sqrt[12]{177147\,a^6b^{10}}$

f) $3yz\sqrt[4]{2^3x^2z} = 3yz\sqrt[4]{8x^2z}$

33 **Mismo ejercicio:**

a) $\dfrac{\sqrt[3]{200}}{\sqrt[3]{25}}$; b) $\dfrac{\sqrt[4]{8}}{\sqrt{2}}$; c) $\dfrac{\sqrt[3]{50}}{\sqrt[4]{50}}$; d) $\dfrac{3\sqrt[4]{24a}}{\sqrt[3]{12}}$; e) $\dfrac{\sqrt[4]{8a^6}}{\sqrt{2a}}$; f) $\dfrac{\sqrt{2ab}\cdot\sqrt[3]{a^2b}}{\sqrt[4]{32a^3b^3}}$

a) 2; **b)** $\sqrt[4]{2}$; **c)** $\sqrt[12]{50}$; **d)** $\dfrac{1}{2}\sqrt[4]{216a}$; **e)** $a\sqrt[4]{2}$; **f)** $\dfrac{1}{2}\sqrt[12]{8a^5b}$

34 **Calcula y simplifica:**

a) $(\sqrt{10}-\sqrt[3]{25})(\sqrt{10}+\sqrt[3]{25})$

b) $\sqrt[3]{(2a-3)^2}\cdot\sqrt{\dfrac{1}{2a-3}}$

c) $(5-\sqrt{3})(5+\sqrt[4]{9})$

d) $(5\sqrt{3}-3\sqrt{5})(5\sqrt{5}-3\sqrt{3})$

e) $\left(\sqrt{2}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$

f) $(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})$

a) $10-5\sqrt[3]{5}$

b) $\sqrt[6]{2a-3}$

c) 22

d) $34\sqrt{15}-120$

e) $\dfrac{9}{2}$

f) $a-b$

35 **Justifica que:** $\left(\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}}+\dfrac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\right)\sqrt{3+2\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}$

$$\left(\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}}+\frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\right)\sqrt{3+2\sqrt{2}}=\left(\sqrt{\frac{1}{2}}-\sqrt{\frac{1}{3}}+\sqrt{\frac{1}{3}}-\frac{1}{2}\right)\sqrt{3+2\sqrt{2}}=$$

$$=\frac{2-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\sqrt{3+2\sqrt{2}}=\sqrt{\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)^2\frac{3+2\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{\frac{3-2\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{3+2\sqrt{2}}{2}}=\frac{1}{2}$$

36 **Simplifica:**

$\mathbf{A}=\sqrt{\dfrac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2}}$

$\mathbf{B}=\sqrt{17-2\sqrt{30}}\cdot\sqrt{17+2\sqrt{30}}$

$\mathbf{C}=(2\sqrt{3}-3\sqrt{5})^2$

$\mathbf{D}=\left[(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)\right]^2$

A $= \sqrt{5} - 2$ **B** $= 13$

C $= 57 - 12\sqrt{15}$ **D** $= 1$

37 **Introduce en el radical todos los factores posibles:**

a) $4\sqrt{2}$ b) $3a\sqrt{2b}$

c) $2xy\sqrt[3]{3y^2}$ d) $(a+b)\sqrt{a-b}$

e) $(a-b)\sqrt{a}$ f) $3a^2b\sqrt[4]{2ab^3}$

a) $\sqrt{32}$ b) $\sqrt{18a^2b}$

c) $\sqrt[3]{24x^3y^5}$ d) $\sqrt{(a+b)^2(a-b)} = \sqrt{(a+b)(a^2-b^2)}$

e) $\sqrt{a(a-b)^2}$ f) $\sqrt[4]{162a^9b^7}$

38 **Calcula:** $\sqrt[3]{1,08} - \sqrt[3]{2,56} + \sqrt[3]{1,715} - \sqrt[3]{0,625}$

0

39 **Escribe las siguientes expresiones bajo un solo radical y simplifica el resultado:**

a) $\sqrt{\sqrt[3]{8}}$ b) $\sqrt{2\sqrt{2}}$ c) $\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{9}}}$ d) $\sqrt[3]{9\sqrt[3]{\frac{1}{9}}}$

e) $\sqrt{4\sqrt[3]{8}\sqrt[4]{256}}$ f) $(\sqrt[3]{4})^4$ g) $\left(\sqrt{a\sqrt[3]{b}}\right)^3$ h) $\left(\sqrt[3]{x^2y}\right)^5$

a) $\sqrt{2}$ b) $\sqrt[4]{8}$ c) $\sqrt{6}$ d) $\sqrt[9]{81}$

e) $4\sqrt{2}$ f) $4\sqrt[3]{4}$ g) $a\sqrt{ab}$ h) $x^3y\sqrt[3]{xy^2}$

40 **Racionaliza:**

a) $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ b) $\dfrac{25}{\sqrt{15}}$ c) $\dfrac{15}{\sqrt{3}}$ d) $\dfrac{6}{\sqrt{2}}$ e) $\sqrt{\dfrac{8}{5}}$

f) $\sqrt{\dfrac{2+x}{2-x}}$ g) $\dfrac{3}{\sqrt[3]{3}}$ h) $\dfrac{2a}{\sqrt[4]{3a^2}}$ i) $\dfrac{8xy}{\sqrt[5]{4x^3y^4}}$

a) $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ b) $\dfrac{2\sqrt{15}}{3}$ c) $5\sqrt{3}$ d) $3\sqrt{2}$ e) $\dfrac{2\sqrt{10}}{5}$

f) $\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{2-x}$ g) $\sqrt[3]{9}$ h) $\dfrac{2\sqrt[4]{27a^2}}{3}$ i) $4\sqrt[5]{8x^2y}$

41 **Escribe sin radicales las siguientes expresiones:**

a) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$; **b)** $\sqrt[3]{9}$; **c)** $\sqrt[4]{2+\dfrac{1}{4}}$; **d)** $\sqrt{\sqrt{8}}$; **e)** $\dfrac{5\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{3x}}{15\sqrt{3x}}$; **f)** $\sqrt[3]{8+\sqrt{8}}$

a) $3^{-\frac{1}{2}}$; **b)** $3^{\frac{2}{3}}$; **c)** $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$; **d)** $2^{\frac{3}{4}}$; **e)** $3^{-\frac{2}{3}}x^{-\frac{1}{6}}$; **f)** $\left(8+8^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}$

42 **Escribe las siguientes expresiones sin exponentes fraccionarios ni negativos:**

a) $5x^{\frac{1}{2}}$; **b)** $(4x^2)^{\frac{2}{3}}$; **c)** $4^{-\frac{1}{2}}$;

d) $5\cdot 3^{-\frac{1}{2}}$; **e)** $\dfrac{5}{2^{\frac{1}{2}}-1}$; **f)** $(1-x)^{-\frac{1}{2}}$

a) $5\sqrt{x}$ **b)** $2x\sqrt[3]{2x}$ **c)** $\dfrac{1}{2}$

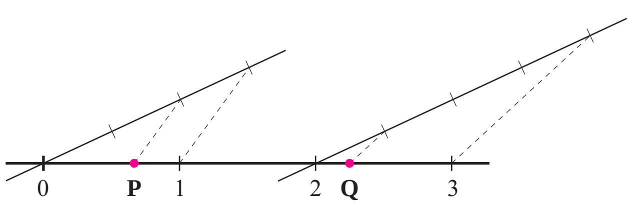
d) $\dfrac{5\sqrt{3}}{3}$ **e)** $5(\sqrt{2}+1)$ **f)** $\dfrac{\sqrt{1-x}}{1-x}$

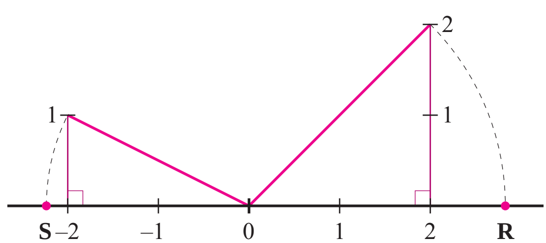
43 **¿Verdadero o falso?**

a) $4x^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{x}$; **b)** $\sqrt[3]{27a^2} = 3a^{2/3}$; **c)** $4^{-\frac{1}{2}} = 0{,}5$; **d)** $\dfrac{5}{3\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$

a) Falso; **b)** Verdadero; **c)** Verdadero; **d)** Verdadero.

44 **Indica qué números representan los puntos P, Q, R y S representados a continuación.**





$P = \dfrac{2}{3}$ $Q = \dfrac{9}{4}$ $S = -\sqrt{5}$ $R = \sqrt{8}$

Del 45 al 53. Determina los números reales que verifican la ecuación o inecuación propuesta.

45 a) $|x| = 5$ b) $|x| = \frac{3}{2}$ c) $|x - 2| = 5$

a) -5 y 5 b) $-\frac{3}{2}$ y $\frac{3}{2}$ c) -3 y 7

46 a) $|x - 1| = 0$ b) $|x + 5| = 3$

a) $x = 1$ b) $x = -2,\ x = -8$

47 a) $|x - 1| = 0$ b) $|x + 5| = 3$

a) No existe ninguno b) 1 y 2

48 a) $|x| \leq 5$ b) $|x| \geq 1$ c) $|x| < \frac{5}{4}$

a) $-5 \leq x \leq 5$ b) $x \geq 1,\ x \leq -1$ c) $-\frac{5}{4} < x < \frac{5}{4}$

49 a) $|x - 4| \leq 4$ b) $|2x - 1| < 3$

a) $x \in [0, 8]$ b) $x \in]-1, 2[$

50 a) $|3 - 2x| \leq 3$ b) $\left|x - \frac{1}{2}\right| \geq 2$

a) $0 \leq x \leq 3$ b) $x \geq \frac{5}{2},\ x \leq -\frac{3}{2}$

51 a) $|-x - 2| < 1$ b) $|-x + 1| > \frac{1}{2}$

a) $x \in]-3, -1[$ b) $x \in]-\infty, \frac{1}{2}[\cup]\frac{3}{2}, +\infty[$

52 $|x + 3| = |x - 1|$

$x = -1$

53 $\left|\frac{x-2}{2}\right| = |x+1|$

$x = 0$ y $x = -4$

54 **Calcula las intersecciones siguientes:**

A =]–2, 5[∩ [–1, 7] **B =]–∞, 6] ∩ [–3, 10]**

A = [–1, 5[B = [–3, 6]

55 **Calcula las uniones siguientes:**

C =]– 6, 8] ∪ [–3, 10[; **D =]–∞, 3[∪ [0, 12]**

C =]–6, 10[D =]–∞, 12]

56 **Expresa como un intervalo el conjunto de valores de *x* que verifican:**

a) $\begin{cases} x > 5 \\ x < 8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x \geq 3 \\ x < 4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x < 1 \\ x \geq -4 \end{cases}$ d) $\begin{cases} -2 < x \leq 10 \\ -8 < x < 5 \end{cases}$

a) $x \in\ ]5, 8[$ **b)** $x \in [3, 4[$ **c)** $x \in [-4, 1[$ **d)** $x \in\ ]-2, 5[$

57 **Expresa como intervalos:**

a) [–1, 3] – {0} **b) [2, 5[– {2}**

c) R – {–2, 3} **d) R – [–5, 0[**

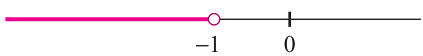
a) [–1, 0[∪]0, 3] **b)**]2, 5[;

c)]–∞, –2[∪]–2, 3[∪]3, +∞[**d)**]–∞, –5[∪ [0, +∞[

Del 58 al 62. Resuelve las siguientes inecuaciones y representa la solución sobre la recta real.

58 $4x - 2(x - 3) > 7 + 3x$

$x < -1$ ó $x \in\ ]-\infty, -1[$



59 $\dfrac{x+1}{2} - \dfrac{x+3}{5} \geq \dfrac{2x-3}{2}$

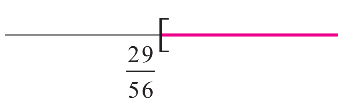
$x \leq 2$

60 $x - \dfrac{6-2x}{4} \leq 2x + 2 - \dfrac{3-x}{2}$

$x \in [-2, \infty[$

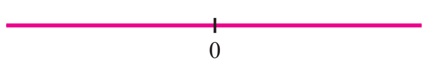
61 $2x - \dfrac{x+6}{5} \geq \dfrac{1}{4} - x$

$x \geq \dfrac{29}{56}$



62 $4\left(5 - \dfrac{x}{4}\right) > 2 - x$

$x \in\ ]-\infty, \infty[$



Tema 2 ECUACIONES Y SISTEMAS DE ECUACIONES

1 **Busca la solución general y tres soluciones particulares de las ecuaciones:**

a) $3x + 7y - 15 = 0$; **b)** $7x + 3y = 0$; **c)** $x - \frac{1}{3}y = 2$; **d)** $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$

a) Solución general: $\left(x, \frac{15-3x}{7}\right)$ ó $y = \frac{15-3x}{7}$

Soluciones particulares: $\left(0, \frac{15}{7}\right)$; $\left(1, \frac{12}{17}\right)$; $\left(2, \frac{9}{7}\right)$

b) Solución general: $\left(x, -\frac{7x}{3}\right)$ ó $y = -\frac{7x}{3}$

Soluciones particulares: $(0, 0)$; $\left(1, -\frac{7}{3}\right)$; $(3, -7)$

c) Solución general: $(x, 3x - 6)$ ó $y = 3x - 6$

Soluciones particulares: $(0, -6)$; $(1, -3)$; $(2, 0)$

d) Solución general: $\left(x, \frac{6-2x}{3}\right)$ ó $y = \frac{6-2x}{3}$

Soluciones particulares: $(0, 2)$; $\left(1, \frac{4}{3}\right)$; $(3, 0)$

2 **Descubre la afirmación falsa:**

a) La recta de ecuación $-x + 2y + 3 = 0$ pasa por el punto A(3, 0).

b) Una solución de la ecuación $4x - y + 1 = 0$ es el par (0, 1).

c) El par (–3, 1) es solución de la ecuación $2x + y + 1 = 0$.

d) El punto $\left(\frac{2}{3}, \frac{3}{5}\right)$ pertenece a la recta de ecuación $3x - 5y + 1 = 0$.

La c.

3 **Resuelve por el método de sustitución:**

a) $\left.\begin{aligned} 2x + y &= 13 \\ x - y &= 2 \end{aligned}\right\}$ **b)** $\left.\begin{aligned} 4x - 3y &= 29 \\ 5x + 3y &= 16 \end{aligned}\right\}$ **c)** $\left.\begin{aligned} -2x + y &= -4 \\ 3x + 5y &= -7 \end{aligned}\right\}$

a) $x = 5,\ y = 3$ **b)** $x = 5,\ y = -3$ **c)** $x = 1,\ y = -2$

4 **Resuelve por el método de reducción:**

a) $\left.\begin{aligned} 9x - 4y &= 1 \\ 3x + 6y &= 4 \end{aligned}\right\}$ **b)** $\left.\begin{aligned} 10x + 3y &= 8 \\ 15x + 12y &= 22 \end{aligned}\right\}$ **c)** $\left.\begin{aligned} 7x + 8y &= -77 \\ -2x - 9y &= 22 \end{aligned}\right\}$

a) $x = \frac{1}{3}$; $y = \frac{1}{2}$ **b)** $x = \frac{2}{5}$; $y = \frac{4}{3}$ **c)** $x = -11$; $y = 0$

5 **Resuelve por el método de igualación:**

a) $\left.\begin{aligned} 10x + 11y &= -15 \\ 9x + 10y &= 30 \end{aligned}\right\}$ b) $\left.\begin{aligned} -3x + 2y &= 4 \\ 4x - 5y &= 1 \end{aligned}\right\}$ c) $\left.\begin{aligned} 0{,}8x - 0{,}9y &= 2 \\ 6x + 3y &= 2{,}5 \end{aligned}\right\}$

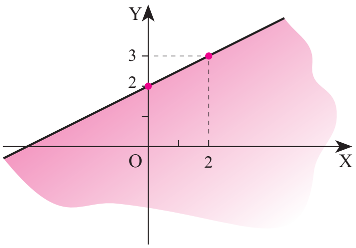
a) $x = -480, \; y = 435$ **b)** $x = -\dfrac{22}{7}, \; y = -\dfrac{19}{7}$ **c)** $x = \dfrac{55}{22}, \; y = -\dfrac{50}{39}$

6 **Resuelve gráficamente las inecuaciones siguientes:**

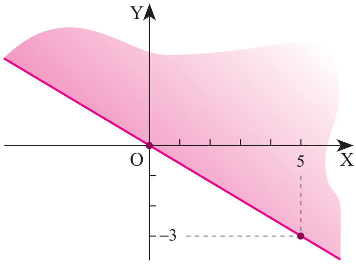
a) $x - 2y + 4 > 0$ b) $3x + 5y \geq 0$

c) $x \leq 2$ d) $y > -3$

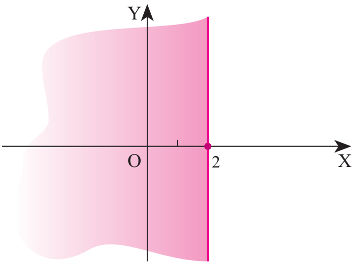
a)



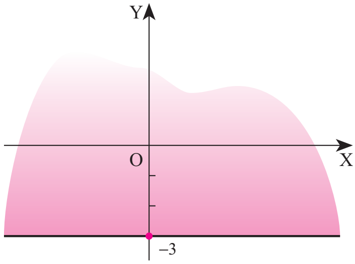
b)



c)

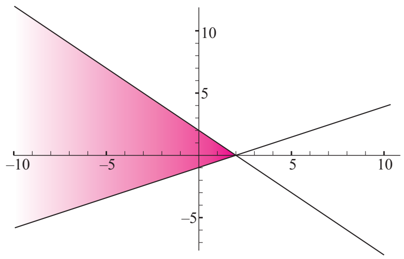


d)

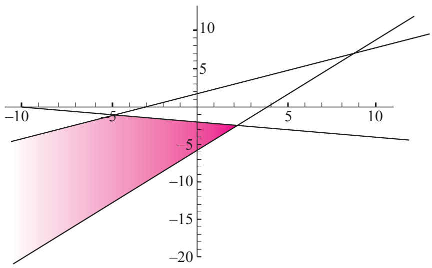


7 **Resuelve gráficamente los sistemas:**

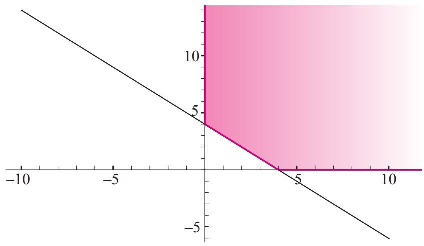
a) $\left.\begin{array}{l} x - 2y < 2 \\ x + \ \ y < 2 \end{array}\right\}$



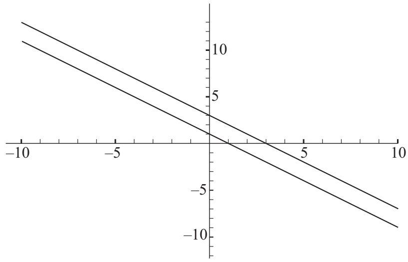
b) $\left.\begin{array}{l} 4x - \ \ 7y > -13 \\ 3x - \ \ 2y < 12 \\ 2x + 11y < -21 \end{array}\right\}$



c) $\left.\begin{array}{r} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \geq 4 \end{array}\right\}$



d) $\left.\begin{array}{l} x + y > \ \ 3 \\ x + y < -2 \end{array}\right\}$



8 **Resolver las ecuaciones:**

a) $x^2 - 7x + 12 = 0$ **b)** $4x^2 + 7x - 2 = 0$

c) $9x^2 - 9x + 2 = 0$ **d)** $-x^2 + 3x - 1 = 0$

a) $x_1 = 4; \quad x_2 = 3$ **b)** $x_1 = -2; \quad x_2 = \dfrac{1}{4}$

c) $x_1 = \dfrac{2}{3}; \quad x_2 = \dfrac{1}{3}$ **d)** $x_1 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}; \quad x_2 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$

9 **Sin resolver, indica cuántas soluciones tiene cada una de las ecuaciones siguientes:**

a) $x^2 + 7x - 12 = 0$ **b)** $8x^2 - 2x = 0$

c) $x^2 - 10x - 4 = 0$ **d)** $x^2 + 5x + 8 = 0$

a) 2 **b)** 2

c) 2 **d)** 0

10 **Resolver las ecuaciones:**

a) $t^2 + 2t + 3 = 0$ **b)** $a^2 - 3a = 0$

c) $3(a^2 - 5) = 0;$ **d)** $8y^2 + 20y = 0$

a) no tiene soluciones reales **b)** $a_1 = 0; \quad a_2 = 3$

c) $a_1 = \sqrt{5} \quad ; \quad a_2 = -\sqrt{5}$ **d)** $y = 0; \quad y = -\frac{5}{2}$

11 **Halla el valor de m para que la ecuación $25x^2 - 19x + m - 3 = 0$ tenga una raíz doble.**

$\frac{661}{100}$

12 **Escribe una ecuación de segundo grado cuyas raíces sean:**

a) 11 y 3 **b)** –11 y 3

c) $\frac{1}{10}$ y $-\frac{2}{5}$ **d)** $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ y $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$

a) $x^2 - 14x + 33 = 0$ **b)** $x^2 + 8x - 33 = 0$

c) $50x^2 + 15x - 2 = 0$ **d)** $4x^2 - 4x - 2 = 0$

13 **En la ecuación $ax^2 + bx + 5 = 0$, determina a y b para que sus raíces sean 2 y 5.**

$a = \frac{1}{2}, \quad b = -\frac{7}{2}$

14 **La suma de la raíces de la ecuación $x^2 - (a + 2)x + b = 0$ vale –5 y su diferencia 7. Calcula a, b y las raíces de la ecuación.**

$a = -7$; $b = -6$ y las raices $x_1 = 1; \quad x_2 = -6$

15 **Resuelve las ecuaciones:**

a) $4x^4 + 7x^2 - 2 = 0;$ **b)** $x^4 + 5x^2 + 4 = 0;$

c) $x^4 - 11x^2 + 18 = 0;$ **d)** $4x^4 - 39x^2 + 27 = 0.$

a) $x_1 = -\frac{1}{2}, \quad x_2 = \frac{1}{2}$ y las otras dos no son reales.

b) No tiene soluciones reales.

c) $x_1 = -3, \quad x_2 = 3, \quad x_3 = -\sqrt{2}, \quad x_4 = \sqrt{2}$

d) $x_1 = -3,\ x_2 = 3,\ x_3 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ x_4 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

16 **Mismo ejercicio:**

a) $(x^2 - 25)(x^2 + 1) = 0$ **b)** $x^2(4x^2 - 9) + 8 = 0$

c) $x^4 - 1 = 0$ **d)** $9x^4 - 31x^2 + 12 = 0$

a) $x_1 = 5;\ x_2 = -5$ **b)** no tiene soluciones reales

c) $x_1 = 1;\ x_2 = -1$ **d)** $x_1 = \sqrt{3};\ x_2 = -\sqrt{3};\ x_3 = \dfrac{2}{3};\ x_4 = -\dfrac{2}{3}$

17 **Resuelve las siguientes ecuaciones:**

a) $\sqrt{2x+6} + 1 = x + 4$ **b)** $\sqrt{2x+3} - 3 = 3x - \dfrac{5}{2}$

c) $\sqrt{3-x} = x - 1$ **d)** $\sqrt{8+x} + 3 = \sqrt{1-6x}$

a) $x_1 = -3,\ x_2 = -1$ **b)** $x = \dfrac{1}{2}$

c) $x = 2$ **d)** $x = -8$

18 **Resuelve los siguientes sistemas:**

a) $\left.\begin{array}{r} x + 2y + 2z = 19 \\ 2x + y + 2z = 20 \\ 2x + 2y + z = 21 \end{array}\right\}$ **b)** $\left.\begin{array}{r} 2x + 3y - 9z = 17 \\ 4x - 3y - 2z = 10 \\ 6x - 4y - 5z = 13 \end{array}\right\}$

a) $x = 5;\ y = 4;\ z = 3$ **b)** $x = 10;\ y = 8;\ z = 3$

19 **Resuelve e interpreta geométricamente la solución de los sistemas:**

a) $\left.\begin{array}{r} x + 2y = 3 \\ x - 4y = -3 \\ 5x - 2y = 3 \end{array}\right\}$ **b)** $\left.\begin{array}{r} 3x - 2y = 1 \\ x + y = 2 \\ 6x - 4y = -2 \end{array}\right\}$

a) $x = 1,\ y = 1$ **b)** No tiene solución (incompatible).

20 **Resuelve los sistemas:**

a) $\left.\begin{array}{r} x^2 + y^2 = 9 \\ 2x + y = 3 \end{array}\right\}$ **b)** $\left.\begin{array}{r} 4x^2 - xy = 2(x+y) \\ y - x = 1 \end{array}\right\}$

a) $x_1 = 0,\ y_1 = 3;\quad x_2 = \dfrac{12}{5},\ y_2 = -\dfrac{9}{5}$

b) $x_1 = 2,\ y_1 = 3;\quad x_2 = -\dfrac{1}{3},\ y_2 = \dfrac{2}{3}$

21 **La edad de un hijo es la quinta parte de la edad de su padre, y dentro de 7 años el padre tendrá el triple de la edad de su hijo. Calcula las edades de cada uno.**

La edad del hijo es 7 años y la edad del padre 35 años.

22 **Un hijo tiene 30 años menos que su padre y éste tiene 4 veces la de su hijo. ¿Qué edad tiene cada uno?**

Padre 40 años; hijo 10 años.

Del 23 al 26. Resuelve los siguientes sistemas:

23 a) $\left.\begin{aligned} 6x+3y &= \frac{7}{2} \\ 5x-2y &= \frac{2}{3} \end{aligned}\right\}$ b) $\left.\begin{aligned} \frac{x}{5}-\frac{y}{2} &= 1{,}3 \\ 2x-y &= 1 \end{aligned}\right\}$

a) $x=\frac{1}{3},\ y=\frac{1}{2}$ **b)** $x=-1,\ y=-3$

24 a) $\left.\begin{aligned} \frac{x+1}{3}+\frac{y+1}{2} &= 2 \\ x+2y &= 4 \end{aligned}\right\}$ b) $\left.\begin{aligned} \frac{11-2x}{7}-\frac{2y-5}{5} &= 0 \\ \frac{x+2}{4}-\frac{y-2}{3} &= 0 \end{aligned}\right\}$

a) $x=2;\quad y=1$ **b)** $x=2;\quad y=5$

25 a) $\left.\begin{aligned} 4x+3y &= 7 \\ \frac{x}{3}+\frac{y}{4} &= \frac{7}{5} \end{aligned}\right\}$

b) $(x-5)(y-5)=(x-7)(y-4)$
$(x-11)(y-2)=(x-10)(y-4)$

a) Sistema incompatible (no tiene solución).

b) $x=13,\ y=8$

26 a) $\left.\begin{aligned} \frac{x-1}{2}+\frac{y}{3} &= 1 \\ x-\frac{y+1}{2} &= 3 \end{aligned}\right\}$ b) $\left.\begin{aligned} 2x-4y &= 5 \\ 6y-3x &= 2 \end{aligned}\right\}$

a) $x=\frac{23}{7};\quad y=-\frac{3}{7}$ **b)** Incompatible

Del 27 al 30. Estudia la posición relativa de las rectas *r* y *s*.

27 r: $2x-3y+7=0$ s: $2x-y+\frac{5}{2}=0$

Secantes.

28 **r: $8x + 3y = 7$** **s: $24x = 3(7 - 3y)$**

Coincidentes

29 **r: $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$** **$s$: $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} - 1 = 0$**

Secantes.

30 **r: $2x + y - 1 = 0$** **s: $3 - 4x - 2y = 0$**

Paralelas

31 **Pedro y Pepa son hermanos. Pedro tiene el mismo número de hermanas que de hermanos, pero Pepa tiene doble número de hermanos que de hermanas. ¿Cuántos hermanos y hermanas son?**

4 hermanos y 3 hermanas.

32 **Un observador ha cronometrado el paso de un tren por un túnel y sabe que desde que la máquina entra en el túnel hasta que sale el último vagón transcurren 49 segundos, mientras que desde que entra el último vagón hasta que aparece la máquina por el otro extremo transcurren 37 segundos. Halla la longitud del túnel y del tren sabiendo que la velocidad del tren es de 72 km/h.**

860 m y 120 m

33 **Halla dos números sabiendo que suman 108 y que si se dividen el cociente es 2 y el resto 12.**

76 y 32.

34 **El área de un rectángulo crece 5 661 m^2 cuando se doblan simultáneamente sus dos dimensiones y crece 2 664 m^2 cuandos se disminuye la longitud en 10 m y se triplica su anchura. Determinar las dimensiones del rectángulo y su área.**

Ancho 37 m; largo 51 m; área = 1887 m^2

35 **En un viejo libro de Matemáticas de 1930 se lee: «Dos obreros trabajan juntos, uno gana al día los 3/4 de lo que gana el otro. El primero ha trabajado 16 días y el segundo 20 dias, y han ganado entre los dos 1 408 pta.» ¿Cuál era en 1930 el salario diario de cada obrero?**

45,4 ptas. y 34,1 ptas.

36 **La bodega de un petrolero contiene 20 000 Tm de petróleo. Una bomba A la puede vaciar en 40 h; otra B la puede vaciar en 60 h. ¿En cuánto tiempo vaciarán la bodega las dos bombas trabajando simultáneamente?**

24 horas

37 **Un ciclista recorre el trayecto AB en el que hay partes llanas, subidas y bajadas. Las velocidades respectivas son: 12 km/h en las par-**

tes llanas, 8 km/h en las subidas, 15 km/h en las bajadas. De A a B el ciclista tarda 5 h y de B a A 4 h 39 minutos. Sabiendo que las partes llanas tienen una longitud total de 28 km, se pide la longitud total de las subidas (sentido A a B) así como de las bajadas.

16 km de subida y 10 km de bajada.

38 **Halla un número de dos cifras sabiendo que su valor es igual al cuádruplo de las sumas de sus cifras, y que si se invierte el orden de las cifras aumenta en 36 unidades.**

48

39 **La suma de las dos cifras de un número es 11. Si se invierte el orden de las cifras se obtiene un número que se diferencia del anterior en 45. ¿Cuál es el número?**

83 o 38.

40 **Resuelve los sistemas:**

a) $\left.\begin{array}{l} x+y+z=24 \\ 2x=y+6z \\ 5x+5y=11z-3y \end{array}\right\}$ **b)** $\left.\begin{array}{r} x+y-z=\dfrac{2}{3} \\ x-y+z=\dfrac{1}{3} \\ -x+y+z=0 \end{array}\right\}$

a) $x=\dfrac{59}{13};\quad y=-\dfrac{8}{3};\quad z=7$ **b)** $x=\dfrac{1}{2};\quad y=\dfrac{1}{3};\quad z=\dfrac{1}{6}$

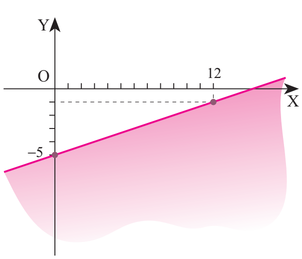
41 **Mismo ejercicio:** **a)** $\left.\begin{array}{l} x+y-z=26 \\ \dfrac{3x}{4}=\dfrac{2y}{3}=\dfrac{4z}{7} \end{array}\right\}$ **b)** $\left.\begin{array}{r} x-2y=5 \\ 2x+3y=-4 \\ 3x-2y=7 \end{array}\right\}$

$x=32,\ y=36,\ z=42$

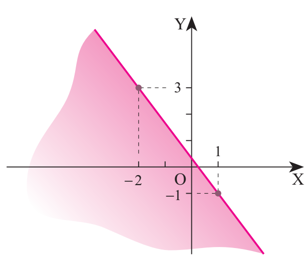
Del 42 al 46. Resuelve gráficamente las inecuaciones o sistemas propuestos.

42 **a)** $x-3y-15>0$ **b)** $\dfrac{x+2}{3}\le\dfrac{3-y}{4}$

a)

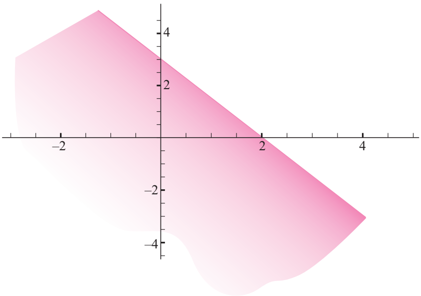


b)

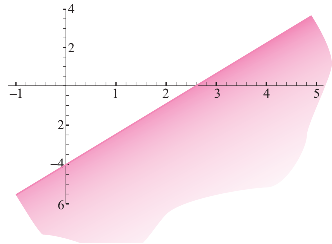


43 a) $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} < 1$ b) $y \leq \dfrac{3}{2}x - 4$

a)

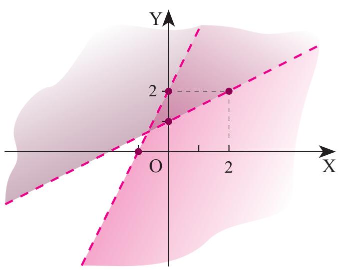


b)

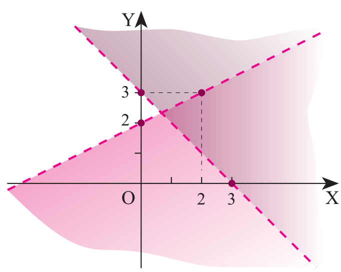


44 a) $\left.\begin{array}{l} 2x - y + 2 > 0 \\ x - 2y + 2 < 0 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{l} x - 2y > -4 \\ x + \ \ y > 3 \end{array}\right\}$

a)

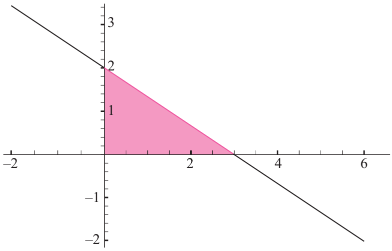


b)

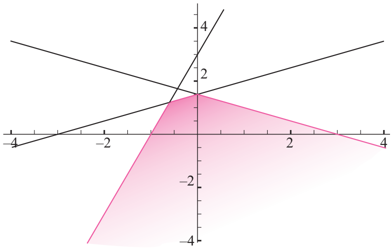


45 a) $\left.\begin{array}{l} x > 0 \\ y > 0 \\ 2x + 3y \leq 6 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{l} x - 2y + 3 \geq 0 \\ x + 2y - 3 \leq 0 \\ -3x + y - 3 \leq 0 \end{array}\right\}$

a)

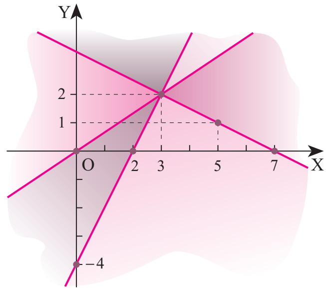


b)

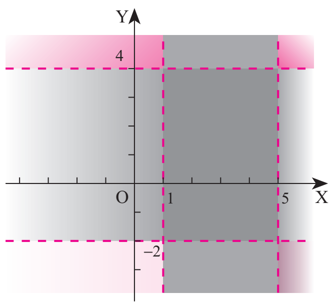


46 a) $\left.\begin{array}{l} x + 2y - 7 \geq 0 \\ 2x - 3y \geq 0 \\ 2x - y - 4 \leq 0 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{l} x > 1 \\ y > -2 \\ x < 5 \\ y < 4 \end{array}\right\}$

a) no tiene solución



b)



Del 47 al 54. Resuelve las ecuaciones siguientes:

47 a) $x^2 + 3x - 28 = 0$; b) $2x^2 - 5x - 3 = 0$

a) $x_1 = -7,\ x_2 = 4$; **b)** $x_1 = -\frac{1}{2},\ x_2 = 3$

48 a) $x^2 - 2x - 1 = 0$ b) $x^2 - 3x + \frac{5}{4} = 0$

a) $x_1 = 1 + \sqrt{2}$; $x_2 = 1 - \sqrt{2}$ **b)** $x_1 = \frac{5}{2}$; $x_2 = \frac{1}{2}$

49 a) $4x^2 - 12x + 9 = 0$; b) $x^2 - 4x + 6 = 0$

a) $x = \frac{3}{2}$ (raíz doble); **b)** No tiene solución real.

50 a) $\frac{4}{x} - \frac{2x - 1}{5} = 1$ b) $\frac{3 - x}{5} = \frac{2}{x} - \frac{4}{5}$

a) $x_1 = -1 + \sqrt{11}$; $x_2 = -1 - \sqrt{11}$ **b)** $x_1 = 5$; $x_2 = 2$

51 a) $\dfrac{3x-4}{5x-16}=\dfrac{3x+11}{6x-11}$; b) $2x-\dfrac{12}{1-x}=5+\dfrac{11}{9}(x+2)$

a) $x_1=\dfrac{32-2\sqrt{91}}{3}$, $x_2=\dfrac{32+2\sqrt{91}}{3}$ b) $x_1=\dfrac{25}{7}$, $x_2=7$

52 a) $\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{2}{x-1}=\dfrac{2}{3}$ b) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{x+5}-\dfrac{1}{2}$

a) $x_1=-1$; $x_2=\dfrac{5}{2}$ b) $x_1=-2$; $x_2=-3$

53 a) $\dfrac{12}{9-x}+\dfrac{8}{5-x}=6$; b) $\dfrac{x^2-x+1}{x+2}=2x+3$

a) $x_1=3$, $x_2=\dfrac{23}{3}$ b) $x_1=-4-\sqrt{11}$, $x_2=-4+\sqrt{11}$

54 **Formar ecuaciones de segundo grado de raíces:**

a) 1/2 y –1/3

b) 3 y – 4

c) $\sqrt{2}-1$ y $\sqrt{2}+1$

d) 2/5 y 3/5

e) 0 y –3

f) 1/2 (solución doble)

g) 4 y 1/4

h) –2 y –3

a) $6x^2-x-1=0$ b) $x^2+x-12=0$

c) $x^2-2\sqrt{2}\,x+1=0$ d) $25x^2-25x+6=0$

e) $x^2+3x=0$ f) $4x^2-4x+1=0$

g) $4x^2-17x+4=0$ h) $x^2+5x+6=0$

Del 55 al 60 Resuelve las ecuaciones:

55 a) $x^4-10x^2+9=0$; b) $x^4-13x^2+36=0$;

c) $x^4-16x^2-225=0$ d) $x^4-81=0$

a) $x_1=-3$, $x_2=3$, $x_3=-1$, $x_4=1$

b) $x_1=-3$, $x_2=3$, $x_3=-2$, $x_4=2$

c) $x_1=-5$, $x_2=5$, las otras dos no son reales

d) $x_1=-3$, $x_2=3$, las otras dos no son reales

56 a) $4x^4-x^2=0$ b) $3x^4+2x^2=0$

c) $16x^4+16x^2+3=0$ d) $x^6+19x^3-216=0$ (hacer $x^3=t$)

a) $x_1=x_2=0$; $x_3=\dfrac{1}{2}$; $x_4=-\dfrac{1}{2}$ b) $x_1=x_2=0$

c) no tiene soluciones reales d) $x_1=2$; $x_2=-3$

57 a) $\sqrt{10+x}-\sqrt{10-x}=2$; b) $\sqrt{4x+7}-\sqrt{8x-7}=1$

a) $x = 6$ b) $x = \dfrac{17-2\sqrt{23}}{4}$

58 a) $\sqrt{3-x}=4-\sqrt{3x+7}$ b) $5-\sqrt{1+2x}=\sqrt{x}$

a) $x_1 = 3;\quad x_2 = -1$ b) $x = 4$

59 a) $2x+1+\sqrt{x^2-x-3}=0$ b) $3\sqrt{9+x}=2x+16$

a) No tiene soluciones reales. b) $x = -5$

60 a) $\sqrt{x+1}+4=2x$ b) $\sqrt{2x+14}-\sqrt{x-7}=\sqrt{x+5}$

a) $x = 3$ b) $x = 11$

61 **Dada la ecuación $12x^2 - 17x + 6 = 0$, formar otra ecuación cuyas raíces sean:**

a) opuestas a las de la ecuación dada

b) inversas a las de la ecuación dada

c) cuadrado de las mismas

a) $12x^2 + 17x + 6 = 0$

b) $6x^2 - 17x + 12 = 0$

c) $144x^2 - 145x + 36 = 0$

62 **Las raíces de la ecuación $x^2 + mx + n = 0$ son 1 y –6. Halla m y n.**

$m = 5;\quad n = -6$

63 **En la ecuación $8x^2 - (m-1)x + m - 7 = 0$, determina el valor de m para que sus raíces sean:**

a) iguales

b) opuestas

a) $m_1 = 9,\ m_2 = 25$

b) $m = 1$

64 **Halla m para que la ecuación $3x^2 - 8x - 3m = 0$ tenga dos raíces iguales.**

$m = -\dfrac{16}{9}$

65 **Determina k en la ecuación $x^2 + kx + 24 = 0$ teniendo en cuenta que la diferencia de sus raíces es 5.**

$k_1 = -11$, $k_2 = 11$

66 **Determina el valor de m en la ecuación $9x^2 - 18(m-1)x - 8m + 24 = 0$ para que una raíz sea doble que la otra.**

$m = 2$; $m = -1$

67 **En la ecuación $12x^2 + bx + 15 = 0$, determina b para que la diferencia de sus raíces sea $\frac{11}{12}$.**

$b_1 = -29$, $b_2 = 29$

68 **Halla dos números consecutivos cuyo producto sea 182.**

13 y 14 ó −14 y −13

69 **Un rectángulo tiene 34 cm de perímetro y sus diagonales miden 13 cm. Calcula las longitudes de sus lados.**

5 cm y 12 cm

70 **La mitad de un número más su raíz cuadrada es igual a 24. ¿Cuál es el número?**

36

71 y 72. Resuelve los sistemas de ecuaciones siguientes:

71 a) $\left.\begin{aligned} x + y &= 4 \\ x^2 + y^2 &= 10 \end{aligned}\right\}$ b) $\left.\begin{aligned} x - y &= 2 \\ xy &= 35 \end{aligned}\right\}$

a) $x_1 = 1, y_1 = 3$; $x_2 = 3, y_2 = 1$

b) $x_1 = -5, y_1 = -7$; $x_2 = 7, y_2 = 5$

72 a) $\left.\begin{aligned} x - 2y &= 5 \\ x^2 + y^2 &= 85 \end{aligned}\right\}$ b) $\left.\begin{aligned} 2x - 5y &= 3 \\ x^2 + xy &= 20 \end{aligned}\right\}$

a) $x_1 = -7, \quad y_1 = -6 \quad ; \quad x_2 = 9, \quad y_2 = 2$

b) $x_1 = 4, \quad y_1 = 1 \quad ; \quad x_2 = -\frac{25}{7}, \quad y_2 = -\frac{71}{35}$

Tema 3 PROGRESIONES. MATEMÁTICA FINANCIERA

1 **Justifica que la sucesión de números impares 1, 3, 5, 7, ... es una sucesión aritmética y halla la expresión de su término general.**

La diferencia entre dos consecutivos es constante e igual a 2.

$a_n = 2n - 1$

2 **Los datos de los ejercicios siguientes corresponden a progresiones aritméticas.**

a) $a_1 = 14$ **y** $d = \frac{7}{2}$ **. Halla** a_{20} **b)** $a_1 = 1$ **y** $a_{22} = -18$**. Halla** d

c) $a_1 = -4$, $a_n = 26$ **y** $d = 3$**. Halla** n **d)** $a_{33} = 48$, $a_{45} = -2$**. Halla** d

a) $a_{20} = \frac{161}{2}$; **b)** $d = -\frac{19}{21}$; **c)** $n = 11$; **d)** $d = -\frac{25}{6}$

3 **Calcula la suma de los 20 primeros términos de la progresión:**

3, 7, 11, 15, 19, ...

820

4 **Halla la suma** $S = -5 - 3 - 1 + 1 + ... + 69$**.**

$S = 1\,184$

5 **Los datos siguientes corresponden a progresiones geométricas. Calcula lo indicado en cada caso:**

a) $a_1 = \frac{1}{64}$, $r = 4$**. Halla** a_6; **b)** $a_5 = 108$, $r = \frac{1}{3}$ **. Halla** a_1;

c) $a_1 = \sqrt{2}$; $r = \sqrt{2}$ **. Halla** a_7**.**

a) $a_6 = 16$; **b)** $a_1 = 8748$; **c)** $a_7 = 8\sqrt{2}$

6 **Halla la suma de los 10 primeros términos de la progresión geométrica:** $\frac{16}{81}, \frac{8}{27}, \frac{4}{9}, ...$

$S = \frac{58\,025}{2\,595}$

7 **Calcular la suma de los infinitos términos de la progresión geométrica: 2, $\frac{-4}{7}$, $\frac{8}{49}$, ...**

$\frac{14}{9}$

8 **Calcula el interés simple producido por 750 000 euros al 12,4% durante 4 años.**

$I = 372\,000$ €

9 **¿Cuánto tiempo tardará en duplicarse un capital al 7,5% de interés simple?**

13,3 años $\Rightarrow$ 14 años

10 **¿A qué rédito hay que prestar 100 000 euros a interés compuesto para recibir 160 000 en 4 años?**

$r \simeq 12{,}47$ %

11 **Se colocaron 300000 euros a interés compuesto durante 2 años, resultando un montante de 349920 euros. ¿A qué rédito se colocaron?**

8%

12 **¿Qué anualidad deberemos pagar para formar 1000 euros en 10 años al 8%?**

$a \simeq 64$ €

13 **Al nacer su primer hijo, un hombre le abre una cartilla de ahorros al 7% en la que ingresa 300 euros al año. ¿De cuánto dispone al cumplir los dieciocho años?**

10913,7 euros

14 **Mediante 10 anualidades de 800 euros se ha extinguido una deuda al 11%. ¿Cuál era la deuda?**

$D \simeq 4711{,}4$ €

15 **Hallar un término general de la sucesión: 0, 2, 4, 6, ... y la suma de los *n* primeros términos.**

$a_n = 2n - 2$; $S_n = n\,(n - 1)$

16 **a) Escribir todos los números naturales menores que 60 que divididos por 8 den de resto 2.**

b) Comprobar que forman una sucesión aritmética.

c) Hallar la expresión del término general y su suma.

a) 10, 18, 26, 34, 42, 50, 58

b) $a_n - a_{n-1} = 8$

c) $a_n = 8n + 2$; $S = 238$

17 **Si $a_1 = 15$; $a_2 = 14{,}3$, hallar la diferencia de esta sucesión, el primer término que sea entero y negativo y la suma de todos los términos positivos.**

$d = -0{,}7$; $a_{23} = -0{,}4$; $S_{22} = 168{,}3$

18 **Conocida una sucesión aritmética por sus términos $a_5 = 17$ y $a_{11} = 35$, se pide:**

a) Calcular si el número 72 pertenece a la sucesión.

b) Si pertenece a la sucesión, calcular el lugar que ocupa.

c) Si no pertenece a la sucesión calcular entre qué dos términos se encuentra su valor.

a) No; **c)** 71 y 74.

Del 19 al 27. Los datos siguientes están referidos a sucesiones aritméticas.

19 **$a_1 = 17$; $d = 11/2$; $n = 79$. Hallar a_n y S_n.**

$a_{79} = 446$; $S_{79} = \dfrac{36577}{2} = 18288{,}5$

20 **$a_1 = -6$; $d = 3/4$; $S_n = 146{,}25$. Hallar n y a_n.**

$n = 407$; $a_{407} = 298{,}5$

21 **$a_n = 24$; $d = 5/7$; $n = 22$. Hallar a_1 y S_n.**

$a_1 = 9$; $S_n = 363$

22 **$a_1 = 3{,}6$; $n = 41$; $S_n = 2.427'2$. Hallar d y a_n.**

$d = 2{,}78$; $a_{41} = 114{,}8$

23 **$a_1 = -3/4$; $d = -7/8$; $a_n = -21{,}75$. Hallar n y S_n.**

$n = 25$; $S_{25} = -\dfrac{2250}{8} = -281{,}25$

24 **$n = 24$; $d = 1{,}25$; $S = 405$. Hallar a_1 y a_n.**

$a_1 = 2{,}5$; $a_{24} = 31{,}25$

25 **$a_n = 45$; $d = 2$; $S = 520$. Hallar a_1 y n.**

$a_1 = 7$; $n = 20$

26 **$a_1 = 5$; $a_n = 23$; $S = 392$. Hallar n y d.**

$n = 28$; $d = \frac{2}{3}$

27 **Halla la suma de todos los múltiplos de 3 comprendidos entre 701 y 1 541.**

$S = 313740$

28 **Halla tres números naturales en sucesión aritmética sabiendo que su suma es 12 y su producto 28.**

1, 4, 7 o 7, 4, 1

29 **La suma de un cierto número de términos de una sucesión aritmética es 117 y su término central es 13. Calcula el número de términos que se han sumado.**

9

30 **¿Cuántos términos hay que sumar de la sucesión aritmética 3, 7, 11, ..., para que su suma sea 210?**

10

31 **En una sucesión aritmética, la suma de los términos segundo y tercero es 32, y la suma de los términos quinto y séptimo es 46. Calcula el décimo término.**

$a_{10} = 31$

32 **Descomponer la unidad en tres partes, que formen sucesión aritmética y tales que la suma de sus cuadrados valga 7/18.**

$\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$

33 **La suma de los seis términos de una sucesión aritmética es 36, y el producto de los términos extremos, 11. Halla a_1, a_6 y d.**

$a_1 = 1$; $a_6 = 11$; $d = 2$ ó $a_1 = 11$; $a_6 = 1$; $d = -2$

34 **La suma de tres términos consecutivos de una sucesión aritmética es 12 y la suma de sus cuadrados es 66. Calcula dichos números.**

1, 4, 7

35 **Hallar los lados de un triángulo rectángulo sabiendo que están en sucesión aritmética de diferencia 7 m.**

21, 28, 35

36 **La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 30 dm., halla el perímetro y el área si los lados están en sucesión aritmética.**

$P = 72$ dm; $A = 216$ dm^2

37 **Entre dos postes que distan 225 m. hay que reponer los 4 que ha tirado la tormenta. ¿A qué distancia entre ellos habrán de ponerse?**

A 45 m.

38 **La suma de 3 números en sucesión aritmética es 3 y la de sus cubos, 99. Hallar esos 3 números.**

–3, 1, 5

39 **Hallar la suma de los múltiplos de 7 comprendidos entre 100 y 1 000.**

S = 70336

40 **En un cine, la quinta fila dista de la pantalla 12 m. y la décimosegunda 18 m. ¿A qué distancia de la pantalla se encuentra la primera fila? ¿Y la vigésimoquinta?**

La primera es $\frac{60}{7} \simeq 8{,}6$ m y la vigesimoquinta a $\frac{204}{7} \simeq 29{,}1$ m.

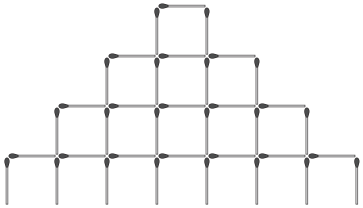
41 **Un jardinero desea plantar 861 árboles formando con ellos un triángulo de modo que la primera fila tenga un solo árbol, la segunda dos árboles, la tercera tres árboles, etc. ¿Cuántas filas habrá?**

41 filas

42 **Un jardinero tiene que echar un cubo de agua a cada uno de los 21 árboles que hay a lo largo de un camino. Calcula el camino que tiene que recorrer para regar todos los árboles y devolver el cubo al pozo, si el pozo dista del primer árbol 50 m. y la distancia entre dos árboles es 12 m.**

7 140 m.

43 **Colocando cerillas de igual longitud en una mesa se realiza una figura plana como la siguiente:**



¿Cuántas «filas» se pueden construir con 10 440 cerillas?

72 filas.

44 **El primer término de una sucesión geométrica es 0,2 y el segundo 0,6. Escribe sus 6 primeros términos. ¿Cuál es la razón?**

0,2; 0,6; 1,8; 5,4; 16,2; 48,6; $r = 3$

Del 45 al 49. Los datos siguientes están referidos a sucesiones geométricas.

45 **Dados $a_1 = 1/9$, $r = 3$, halla a_8 y S_8.**

$a_8 = 243; \quad S_8 = \dfrac{3280}{9}$

46 **Dados $a_2 = \dfrac{1}{4}$ y $a_5 = \dfrac{1}{256}$, hallar r y S_5.**

$r = \dfrac{1}{4}; \quad S_5 = \dfrac{4\,092}{3\,072} \simeq 1{,}33$

47 **Dados $a_{10} = 64$ y $r = 2$, halla a_1 y a_4.**

$a_1 = \dfrac{1}{8}; \quad a_4 = 1$

48 **Dados $a_4 = 125$ y $a_6 = 3125$, halla a_1, r y S_6.**

$a_1 = 1; \quad r = 5; \quad S_6 = 3906$

49 **Halla a_{15} conociendo $r = 2$ y $S_{15} = 98\,301$.**

$a_{15} = 49152$

50 **En una sucesión geométrica, $a_1 = 3$ y $a_2 = 1$. Halla S_5.**

$S_5 = \dfrac{121}{27}$

51 **En una sucesión geométrica, la suma de sus tres primeros términos es 28 y la diferencia entre el tercero y el primero, 12. Halla la razón y el primer término.**

$a_1 = 4$; $r = 2$ ó $a_1 = \dfrac{64}{3}$; $r = -\dfrac{5}{4}$

52 **En un Centro Escolar con 1 000 alumnos, el Director comunica al Delegado que no habrá clase por la tarde. Este lo comunica a dos compañeros diferentes, cada uno a otros dos y así sucesivamente. Si cada transmisión tarda 10 sg. ¿En cuánto tiempo se habrán enterado todos?**

90 seg.

53 **Los tres términos de lugar impar de una sucesión geométrica suman 84 y los tres de lugar par, 168. Halla *r* y a_1.**

$a_1 = 4$; $r = 2$

54 **Tres números están en sucesión geométrica. Si al segundo se le suma 2, resulta una sucesión aritmética. Si en esta aritmética se añaden 9 al tercer término, se convierte de nuevo en geométrica. ¿Cuáles son dichos números?**

4, 8, 16 o $\frac{4}{25}, -\frac{16}{25}, \frac{64}{25}$

55 **Halla tres números en sucesión geométrica, si su suma es 19 y su producto 216.**

4, 6, 9 ó 9, 6, 4

56 **De tres números reales distintos *x*, *y*, *z* ($x \neq 0$), se sabe que escritos en orden *x*, *y*, *z* son tres términos consecutivos de una sucesión geométrica de razón *r* y que 3*x*, 2*y*, *z* son tres términos consecutivos de una sucesión aritmética. Calcular *r*.**

$r = 1$ y $r = 3$

57 **Calcula el interés producido por 75 000 € al 8% durante 10 años: a) a interés simple; b) a interés compuesto.**

a) 60 000 € **b)** 86 919,38 €

58 **¿Qué capital produce 8 000 € de interés al 9% durante 80 días, a interés simple?**

400 000 €

59 **600 euros al 6% han producido 108 euros de interés. ¿Cuántos años han estado prestados a interés simple?**

3 años

60 **¿Cuánto tiempo tardará en duplicarse un capital prestado al 20% de interés simple? ¿Y de interés compuesto?**

5 años.

3,8 años $\Rightarrow$ 4 años

61

¿En qué se convierte un capital de 500 euros al 4% de interés compuesto durante 5 años?

608,33 €

62 **¿A qué porcentaje anual debe colocarse un capital para que se duplique en 6 años, capitalizando semestralmente?**

11,9%

63 **Un fumador decide dejar de fumar. Ahorra así 2 euros diarios que ingresa anualmente al 3% de interés compuesto. ¿De cuánto dispondrá al cabo de 10 años?**

981 €

64 **Dividir 10 000 € en dos partes tales que colocando la primera al 4% de interés compuesto durante 6 años dé el mismo montante que la segunda colocada al mismo tanto por ciento durante 9 años.**

5294 € y 4706 €

65 **¿Qué anualidad debe pagarse durante 8 años para cancelar una deuda de un millón de euros, al 4%?**

148527,83 €

66 **Mediante 10 anualidades de 480 euros se ha extinguido una deuda al 6%. ¿Cuál era la deuda?**

D = 3532,84 €

67 **Para amortizar una deuda de diez millones de euros se han pagado dos anualidades de 5301950 euros. Halla el % de la operación.**

4%

68 **Se compra un ordenador por 1800 euros a pagar en 6 meses al 0,6% mensual. Halla la mensualidad de amortización.**

379,97 €

69 **Compara los montantes de un mismo capital al *r* por uno anual durante 2 años, si se capitaliza:**

a) en años;

b) en semestres;

c) en cuatrimestres.

Se paga más en cuatrimestres, luegos en semestres y luego en años.

70 **Se coloca una cantidad de 300 euros a una tasa de interés compuesto anual del 4,8%.**

a) Calcula cuál es el capital acumulado al cabo de 5 años.

b) ¿Cuánto tiempo tarda en duplicarse el capital?

a) 3792,5 € **b)** 162 años

71 **Si invertimos anualmente 1500 euros a un interés compuesto del 6%, ¿de qué capital dispondremos dentro de 10 años?**

20957,46 €

72 **¿Qué anualidad deberíamos aportar cada año para conseguir un capital 20000 euros en 8 años si el Banco nos ofrece un interés del 5%?**

a = 1994,7 €

73 **Hemos pedido un préstamo de 72000 euros a un interés anual del 8,75% y a devolver en 15 años. ¿Qué cuota mensual debe pagarse para amortizar dicha deuda?**

719,6 €

Tema 4 COMBINATORIA

1 **En una carrera ciclista internacional participan los equipos de Alemania, Bélgica, Croacia, Dinamarca y España. ¿De cuántas formas puede resultar la clasificación general?**

120

2 **Con tu calculadora (mejor si tiene la función factorial x!), halla el mayor valor de *n* cuyo *n*! puedas calcular con ella, calculando los sucesivos valores de *n*! hasta que te dé error.**

69

3 **Calcula: a) $V_{9,3}$; b) $V_{11,4}$; c) $V_{6,6}$; d) $V_{7,1}$.**

a) 504; **b)** 7 920; **c)** 720; **d)** 7

4 **Con los dígitos 1, 2, 3, 4 y 5 se pide: a) forma todos los números de dos cifras distintas; b) forma todos los números de tres cifras distintas o, si lo prefieres, di cuántos hay sin escribirlos.**

a) 12; 13; 14; 15; 21; 23; 24; 25; 31; 32; 34; 35; 41; 42; 43; 45; 51; 52; 53; 54 $\Rightarrow$ 20

b) 60

5 **Una línea de autobuses consta de 15 puntos de parada, ¿cuántos billetes tendrán que imprimir si en cada uno figuran las estaciones de origen y llegada?**

210

6 ***Samuel Morse* (USA, 1791-1872) inventó un alfabeto para ser utilizado en el telégrafo eléctrico (también de su invención) basado en dos caracteres (punto y raya), de tal forma que las letras y los signos vienen expresados por sucesiones de puntos y rayas.**

Así, por ejemplo, A = {· –}; B = {– ···}; C = {– · – ·}; 1 = {· – – – –}; 2 = {· · – – –}.

¿Cuántas letras y símbolos se pueden expresar si se emplean desde 1 hasta 5 puntos o rayas?

62

7 **Para obtener un artículo que vale 8,5 € de una máquina automática de importe justo hay que introducir 3 monedas de 2 €, 2 de 1 € y 1 de 0,5 €. ¿De cuántas maneras pueden introducirse las monedas?**

60

8 **Se sabe que al lanzar una moneda 7 veces se han obtenido 3 caras y 4 cruces. ¿Cuántos han sido los órdenes posibles?**

35

9 **Una heladería dispone de 12 clases de helados. ¿Cuántas copas con 3 helados diferentes puede formar?**

220

10 **En una bolsa hay 9 bolas numeradas del 1 al 9.**

a) Se forma un número extrayendo, una a una, 6 bolas sin devolver. ¿Cuántos números pueden formarse?

b) Se apuesta a que salen seis dígitos determinados. ¿Cuántas apuestas diferentes pueden hacerse?

a) 60480; **b)** 84

11 **Calcula:**

a) $\binom{52}{50}$ b) $\binom{1\,000}{999}$

a) 1326 **b)** 1000

12 **Comprueba que:**

a) $\binom{11}{4}+\binom{11}{5}=\binom{12}{5}$ b) $\binom{n}{1}+\binom{n}{2}=\binom{n+1}{2}$

a) 330 + 462 = 792 **b)** $n+\frac{n-1}{2}=\frac{n^2+n}{2}=\frac{(n+1)\,n}{2}$

13 **Resuelve la ecuación:** $\binom{7}{x}+\binom{7}{4}=\binom{8}{4}$

$x = 3$

14 **Desarrolla las siguientes potencias y simplifica los resultados:**

a) $\left(\frac{x}{2}+2\right)^6$ b) $\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^4$

a) $\frac{x^6}{64}+\frac{3x^5}{8}+\frac{15x^4}{4}+20x^3+60x^2+96x+64$

b) $x^2+4x\sqrt{xy}+6xy+4y\sqrt{xy}+y^2$

15 **Halla:**

a) El término central del desarrollo de $(x-3)^8$.

b) Los términos tercero y décimo del desarrollo de $(a+b)^{11}$.

a) $5670x^4$

b) El tercero es $55a^9b^2$ y el décimo es $55a^2b^9$

16 **En el desarrollo de $(2a + b)^n$ hay un término cuya parte literal es a^6b^8. Halla su coeficiente y el valor de n.**

Coeficiente 192192, $n = 14$

17 **En el desarrollo de $\left(\frac{x^2}{2} - \frac{3}{x}\right)^8$ hay un término cuya parte literal es x^7.**

¿Cuál es su coeficiente?

$\frac{189}{4}$

18 **Simplifica:** a) $\frac{14! \times 4!}{16!}$ b) $\frac{8!}{4! \times 2!}$

a) $\frac{1}{10}$; b) 840

19 **Simplifica:** a) $\frac{6! + 7!}{6! - 5!}$; b) $\frac{10! + 7!}{8! + 10!}$

a) $\frac{48}{5}$; b) $\frac{721}{728}$

20 **Escribe como cociente de factoriales:**

a) $12 \cdot 13 \cdot 14$ **b) $20 \cdot 19$** **c) $(x + 2)(x + 1)x$** **d) 15**

a) $\frac{14!}{11!}$ b) $\frac{20!}{18!}$ c) $\frac{(x+2)!}{(x-1)!}$ d) $\frac{15!}{14!}$

21 **Simplifica:** a) $\frac{5! + 6! - 7!}{5!}$ b) $\frac{(n+1)!}{(n-2)!}$

a) –35; b) $n + 1$

22 **Saca factor común en las siguientes expresiones:**

a) $5! + 6! + 7!$ **b) $9! - 8! + 6!$**

a) $5!(1 + 6 + 42) = 5! \cdot 49$ b) $6!(504 - 56 + 1) = 6! \cdot 449$

23 **Una cadena de televisión dispone para sus telediarios de 4 presentadores para la sección de nacional, 3 para internacional, 2 para deportes y 2 hombres del tiempo. ¿De cuántas formas puede desarrollarse el telediario si en cada sección actúa un solo presentador?**

48

24 **De una colección de 10 novelas diferentes me regalan 3. ¿De cuántas formas puedo elegirlas? ¿Y si tengo predilección por una determinada?**

120; 36

25 **Tan mala suerte tuvo Lucrecia Pérez en el hipódromo que de los 9 caballos participantes, apostó por Estrella Azul y llegó el último. ¿De cuántas formas pudo ocurrir esto?**

40320

26 **Cinco amigos van al cine, ¿de cuántas formas pueden sentarse en sus butacas?**

Después van a cenar y ocupan una mesa redonda, ¿de cuántas formas pueden ahora sentarse?

120; 24

27 **Del conjunto {Ana, Inés, Juan, Pepe, Rosa} forma y cuenta:**

a) Todas las parejas.

b) Todos los tríos.

c) ¿Por qué hay tantas parejas como tríos?

a) 10; **b)** 10; **c)** Por la propiedad 1 de los números combinatorios.

$$\binom{m}{n} = \binom{m}{m-n}$$

28 **Se rifan 3 bolígrafos iguales en un grupo de 35 alumnos de manera que nadie puede obtener dos, ¿de cuántas formas puede hacerse? ¿y si los bolígrafos son de tres modelos diferentes?**

6545; 39270

29 **Se tienen 3 monedas de 1 €. ¿De cuántas maneras se pueden distribuir entre 7 personas de forma que no corresponda más de una moneda a cada persona? ¿Y si las monedas son una de 10, otra de 20 y otra de 50 céntimos?**

35; 210

30 **Una marca de cerraduras construye llaves con 11 dientes, los cuales puede mellarlos un poco, mellarlos más o no mellarlos. ¿Cuántas llaves diferentes puede construir?**

177147

31 **Un examen consta de 8 preguntas y se deben contestar solamente 5. ¿Cuántas elecciones pueden hacerse?**

56

32 **Resuelve las siguientes ecuaciones:**

a) $P_x = 132P_{x-2}$ **b)** $V_{x,4} = 20V_{x,2}$

c) $3C_{m,4} = 5C_{m,2}$ **d)** $P_n = 6V_{n,3}$

e) $V_{x,5} = 120C_{x,3}$ **f)** $V_{x+2,\,3} = 5V_{x+1,\,2}$

g) $P_n = 42P_{n-2}$ **h)** $P_n = 24V_{n,2}$

a) 12; **b)** 7; **c)** 7; **d)** 6; **e)** 8; **f)** 3; **g)** 7; **h)** 6

33 **En una competición deportiva participan 7 equipos de tal forma que cada uno debe enfrentarse a todos los demás una sola vez. ¿Cuántos encuentros se disputarán?**

21

34 **Ocho atletas corren la final de los «cien metros». ¿Cuántos podiums posibles hay?**

336

35 **La autoevaluación final de cada unidad consta de 10 preguntas y cada una tiene cuatro respuestas posibles. ¿Cuántas maneras hay de responder?**

1 048 576

36 **Se tienen 9 puntos en el plano de forma que 3 cualesquiera de ellos no están alineados. ¿Cuántos segmentos determinan?**

36

37 **¿De cuántas formas se pueden colocar en una estantería 3 libros de Matemáticas, 4 de Filosofía y 5 de Historia, todos ellos distintos, con la condición de que los de la misma materia deben estar juntos?**

103 680

38 **Debo telefonear a un amigo y no recuerdo exactamente su número. Sé que tiene nueve cifras y que comienza por 96340, también recuerdo que luego hay un 0, dos 5 y un 7, pero no sé en qué orden.**

Si decido llamar y ensayar todas las posibilidades, ¿cuántas tentativas deberé hacer como máximo?

6

39 **En la Liga de Fútbol Profesional intervienen 20 equipos en la primera división. Cada uno juega contra todos los demás en campo propio y en campo ajeno. ¿De cuántos partidos consta el campeonato? ¿Y si fueran 18 los equipos?**

38; 34

40 **En una clase de 30 alumnos se debe formar una comisión de 4. ¿De cuántas maneras debe formarse? ¿Y si en ella debe figurar el delegado?**

27405; 3654

41 **Un equipo de fútbol tiene en plantilla 3 porteros, 7 defensas, 6 centrocampistas y 5 delanteros.**

Si cada jugador juega en su demarcación, determina cuántas alineaciones distintas de pueden hacer si utiliza la táctica:

a) 4 – 4 – 2; b) 4 – 3 – 3; c) 5 – 3 – 2

a) 15 750; **b)** 21 000; **c)** 12 600

42 **Calcula la suma de los números representados por las permutaciones sin repetición de las cifras 1, 3, 5 y 7.**

106656

43 **Calcula el número y la suma de todos los números de cuatro cifras diferentes que se pueden escribir con los dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7.**

Hay 840 y suman 3732960.

44 **Se consideran las seis cifras 1, 2, 3, 4, 5, y 9 se pide:**

a) ¿Cuántos números de seis cifras diferentes se pueden formar que sean múltiplos de 11?

b) ¿Cuáles son el menor y el mayor?

c) ¿Cuánto vale la suma de todos ellos?

a) 72; **b)** 132495, 952413; **c)** 27999972

45 **Halla la suma de todos los números de 3 cifras que puedes formar con los dígitos 2, 3, 4 y 5.**

24864

46 **Con seis pesas de 1, 2, 5, 10, 20 y 50, ¿cuántas pesadas diferentes puedes efectuar?**

63

47 **Se suponen ordenadas de menor a mayor todas las permutaciones ordinarias que se pueden formar con las cifras 1, 2, 3, 4 y 5. ¿Qué lugar corresponde a la 43125?**

El 85°

48 **Determina el número de diagonales de un hexágono y de un dodecágono.**

El hexágono tiene 9 diagonales y el dodecágono tiene 54

49 **Una línea de autobuses consta de 15 puntos de parada. ¿Cuántos billetes se deberán imprimir, si cada uno lleva las estaciones de origen y llegada sabiendo que cada billete sirve para un sentido o para el contrario?**

105

50 **En una clase de 12 chicos y 10 chicas se eligen delegado y subdelegado. Si se establece como condición que deben ser de diferente sexo, ¿cuántos resultados diferentes se pueden dar?**

240

51 **En una reunión hay 8 personas y cada una estrecha la mano de todos los demás. ¿Cuántos apretones de mano se dan en total?**

28

52 **En un plano hay rectas que no son paralelas ni concurren tres en un punto. Sabiendo que el número de intersecciones es de 190, halla el número de rectas.**

20

53 **¿Cuántos grupos de letras se pueden formar con las de la palabra ISABEL, con tal que no vayan ni dos vocales ni dos consonantes juntas? ¿Cuántos grupos comenzarán por vocal?**

Se pueden formar 72 grupos. Empiezan por vocal 36.

54 **Una finca tiene distribuidas por el monte una serie de casetas de forma que siempre hay un camino que une dos cualesquiera de ellas. Si el número de caminos es 28, ¿cuántas casetas hay?**

8

55 **¿Cuántos números hay entre 5000 y 6000 que tengan todas sus cifras diferentes?**

504

56 **¿Cuántos números capicuas hay entre 5000 y 6000?**

10

57 y 58. Calcula los siguientes números combinatorios.

57 a) $\binom{8}{3}$ b) $\binom{9}{6}$ c) $\binom{12}{10}$

a) 56 **b)** 84 **c)** 66

58 a) $\binom{11}{4}$ b) $\binom{20}{0}$ c) $\binom{6}{1}$

a) 330 **b)** 1 **c)** 6

Del 59 al 66. Resuelve las ecuaciones siguientes:

59 a) $\binom{x}{5} = 2\binom{x}{4}$ b) $\binom{x}{4} = 20\binom{x}{2}$

a) $x = 14$ **b)** $x = 18$

60 a) $\binom{x}{3} = 5(x-1)(x-2)$ b) $\binom{x}{3} = 35(x-2)$

a) 30 **b)** 15

61 a) $V_{x,2} = 190 + \binom{x}{2}$ b) $2\binom{x}{2} + 3\binom{x}{3} = 21x$

a) $x = 20$ **b)** $x = 7$

62 a) $\binom{x}{2} + \binom{x}{3} = \binom{7}{3}$ b) $\binom{23}{x} = \binom{23}{3x-1}$

a) 6 **b)** 6

63 a) $\binom{11}{5} + \binom{11}{x} = \binom{12}{x}$ b) $\binom{26}{19} - \binom{25}{19} = \binom{25}{x}$

a) $x = 6$ **b)** $x = 18$

64 a) $\binom{x}{2} = 55$ b) $\binom{x}{6} = 7\binom{x}{4}$

a) 11 **b)** 19

65 a) $2\binom{x}{4} = 7\binom{x-2}{3}$ b) $4\binom{19}{x} = 19\binom{17}{x}$

a) $x = 8,\ x = 7$ **b)** $x = 10$

66 a) $2\binom{17}{x} = 17\binom{16}{x}$ b) $\binom{9}{x} = \binom{9}{2x-6}$

a) 15 **b)** 5

Del 67 al 71. Desarrollar:

67 a) $(x + 2)^6$

b) $(x + m)^8$

a) $(x + 2)^6 = x^6 + 12x^5 + 60x^4 + 160x^3 + 240x^2 + 192x + 64$

b) $(x + m)^8 = x^8 + 8mx^7 + 28m^2x^6 + 56m^3x^5 + 70m^4x^4 + 56m^5x^3 +$
$+ 28m^6x^2 + 8m^7x + m^8$

68 a) $(a - 3b)^5$

b) $(2x - 3y)^3$

a) $a^5 - 15a^4b + 90a^3b^2 - 270a^2b^3 + 405ab^4 - 243b^5$

b) $8x^3 - 36x^2y + 54xy^2 - 27y^3$

69 a) $\left(x - \frac{2}{x}\right)^6$ b) $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^4$

a) $\left(x - \frac{2}{x}\right)^6 = x^6 - 12x^4 + 60x^2 - 160 + \frac{240}{x^2} - \frac{192}{x^4} + \frac{64}{x^6}$

b) $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^4 = x^2 + 4x + 6 + \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}$

70 a) $(-2 + b)^5$

b) $\left(3x + \frac{1}{3}\right)^5$

a) $-32 + 80b - 80b^2 + 40b^3 - 10b^4 + b^5$

b) $243x^5 + 135x^4 + 30x^3 + \frac{10}{3}x^2 + \frac{5}{27}x + \frac{1}{243}$

71 a) $(\sqrt{x} + 1)^6$ b) $(\sqrt{x} - 1)^6$

a) $(\sqrt{x} + 1)^6 = x^3 + 6x^2\sqrt{x} + 15x^2 + 20x\sqrt{x} + 15x + 6\sqrt{x} + 1$

b) $(\sqrt{x} - 1)^6 = x^3 - 6x^2\sqrt{x} + 15x^2 - 20x\sqrt{x} + 15x - 6\sqrt{x} + 1$

72 **Halla el quinto término del desarrollo de $(2a - 8)^7$.**

$1\,146\,880\ a^3$

73 **Halla el término de lugar 14 en el desarrollo de $(x + 1)^{25}$.**

$5\,200\,300\ x^{12}$

74 **Halla el término sexto del desarrollo de $(a^2 - 2ab^3)^{20}$.**

$-496\,128\ a^{35}b^{15}$

75 **Halla el término central del desarrollo de $(2a + b)^{16}$.**

$1\,464\,320\ a^7b^9$

76 **a^6b^8 es la parte literal de un término del desarrollo de una potencia de $a + b$. Halla el coeficiente que le corresponde.**

3003

77 **Halla el término que no contiene x en el desarrollo de $\left(\frac{2x^2}{3} - \frac{1}{3x}\right)^9$.**

$\frac{224}{6561}$

78 **Halla el lugar que ocupa el término del desarrollo $(a^4 - x^2)^{24}$ en el que a tiene exponente 20.**

El vigésimo

79 **En el desarrollo de $\left(x^2 + \dfrac{1}{x}\right)^{13}$ ¿Cuál es el término de segundo grado?, ¿hay algún término en el cual no figure x?**

$1287x^2$; en todos los términos figura x

80 **¿Cuál es el coeficiente de x^4 en el desarrollo de $(1 + x)^3 \cdot (2 + x)^4$?**

128

81 **Demuestra que $\dbinom{m}{n} = \dfrac{m}{n}\dbinom{m-1}{n-1}$**

$$\frac{m}{n}\binom{m-1}{n-1} = \frac{m}{n}\,\frac{(m-1)!}{(n-1)!\,(m-n)!} = \frac{m!}{n!\,(m-n)!} = \binom{m}{n}$$

82 **Sea n un entero tal que $n \geq 1$. Demuestra, utilizando el binomio de Newton, que el número**

$$\mathbf{N} = \left(2 + \sqrt{3}\right)^n + \left(2 - \sqrt{3}\right)^n$$

es un número natural.

$$(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n = \binom{n}{0}2^n + \binom{n}{1}2^{n-1}\cdot\sqrt{3} + \binom{n}{2}2^{n-2}\cdot\sqrt{3^2} + \ldots +$$

$$+\binom{n}{n-1}2\cdot\sqrt{3^{n-1}} + \binom{n}{n}\sqrt{3^n} + \binom{n}{0}2^n - \binom{n}{1}2^{n-1}\cdot\sqrt{3} + \binom{n}{2}2^{n-2}\cdot\sqrt{3^2} + \ldots +$$

$$+(-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}2\cdot\sqrt{3^{n-1}} + (-1)^n\binom{n}{n}(\sqrt{3})^n = 2\binom{n}{0}2^n + 2\binom{n}{2}2^{n-2}\left(\sqrt{3}\right)^2 +$$

$$+\ldots+2\binom{n}{n}\left(\sqrt{3}\right)^n \text{ si } n \text{ es par} \Rightarrow \text{Natural}$$

$$\binom{n}{0}2^n + 2\binom{n}{2}2^{n-2}\left(\sqrt{3}\right)^2 + \ldots + 2\binom{n}{n-1}\cdot 2\left(\sqrt{3}\right)^{n-1}$$

si n es impar $\Rightarrow$ Natural

83 **La suma de los términos extremos del desarrollo de $(x + y)^4$ es 4112 y el término central vale 1536. Calcula x e y.**

$x = 2,\ y = 8$; $x = -2,\ y = -8$; $x = 8,\ y = 2$; $x = -8,\ y = -2$

Tema 5 LAS FUNCIONES

1 **Determina el dominio de las siguientes funciones:**

a) $f(x) = \dfrac{3}{x-4}$; b) $g(x) = \sqrt{x^2+1}$; c) $h(x) = \dfrac{3x}{x^2-4}$;

d) $i(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}}{x}$; e) $j(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$

a) $D(f) = R - \{4\} =]-\infty, 4[\cup]4, +\infty[$

b) $D(g) = R$

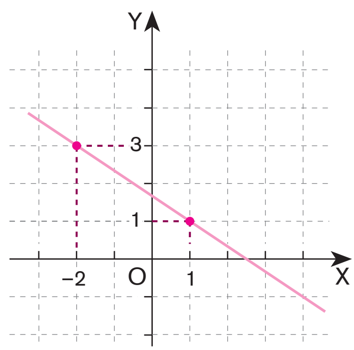
c) $D(h) = R - \{-2, 2\} =]-\infty, -2[\cup]-2, 2[\cup]2, +\infty[$

d) $D(i) = R - \{x \,/\, x < -1,\ x = 0\} = [-1, 0[\cup]0, +\infty[$

e) $D(j) = R - \{x \,/\, 2 < x < 3\} =]-\infty, 2] \cup [3, +\infty[$

2 **Determina y representa la función afín de la que se sabe que $f(-2) = 3$ y $f(1) = 1$.**

$f(x) = -\dfrac{2}{3}x + \dfrac{5}{3}$



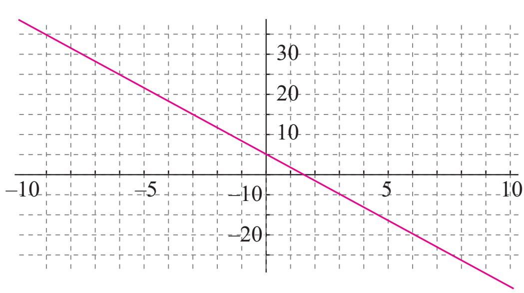
3 **Representa las funciones siguientes:**

a) $f(x) = -3x + 5$

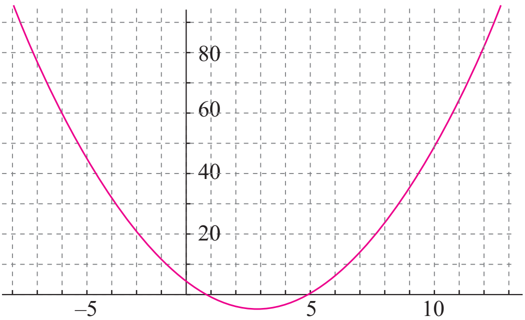
b) $g(x) = x^2 - 6x + 5$

c) $h(x) = -x^2 + 4x$

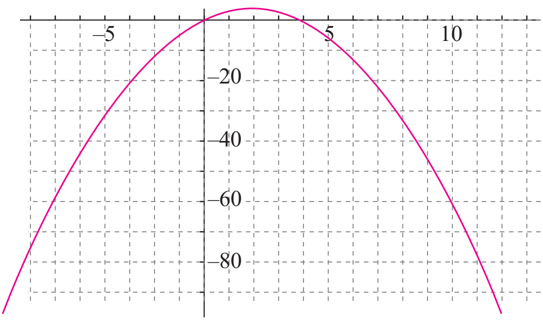
a)



b)



c)



4 **Representa gráficamente las funciones:**

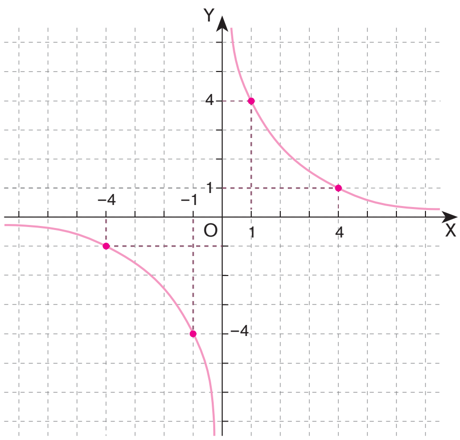
a) $f(x) = \dfrac{4}{x}$;

b) $g(x) = \dfrac{-1}{x}$

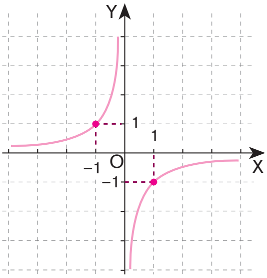
c) $h(x) = \dfrac{2x}{x-3}$

d) $j(x) = \dfrac{3x+2}{2x-4}$

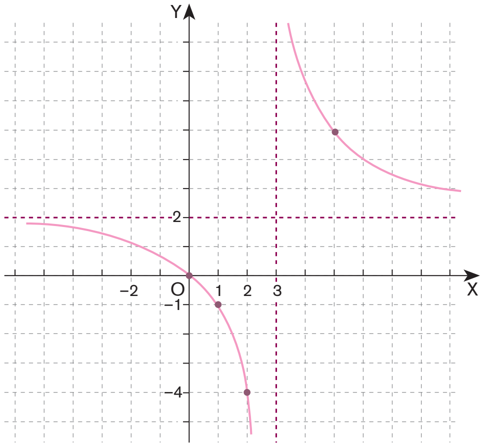
a)



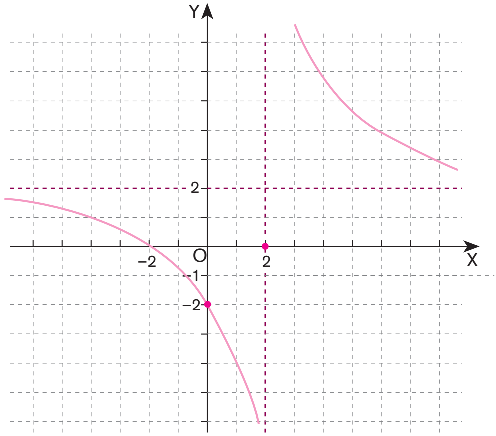
b)



c)



d)



5 **En el archivo de cierto municipio se han encontrado los datos de dos censos de población, que son:**

Año	1825	1835
Población	648	686

Procediendo a una interpolación lineal estima cuál sería la población en 1830.

667

6 **Mismo ejercicio para el año 1838 pero con una interpolación cuadrática para los datos:**

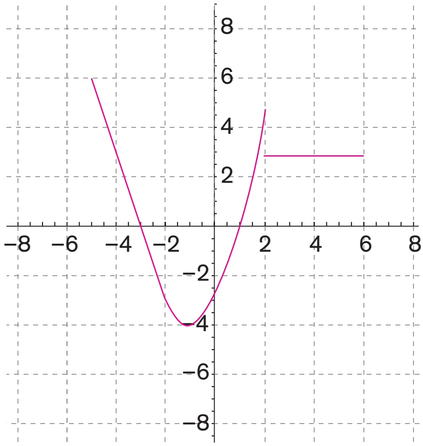
Año	1825	1835	1840
Población	648	686	702

695,84

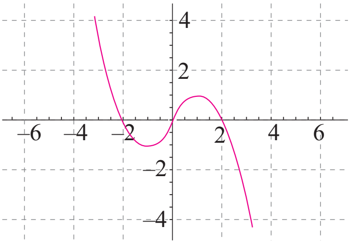
7 **Representa las funciones:**

a) $f(x) = \begin{cases} -3x - 9 & \text{si} \quad x < -2 \\ x^2 + 2x - 3 & \text{si} \ -2 \leq x < 2 \\ 3 & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$; b) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x \ \text{si} \ x < 0 \\ 2x - x^2 \ \text{si} \ x > 0 \end{cases}$

a)



b)

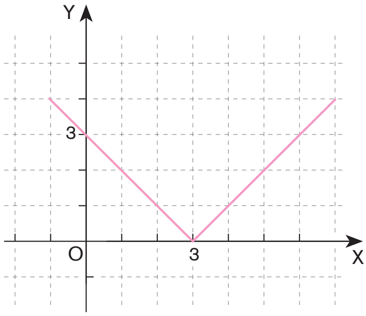


8 **Representa gráficamente las funciones:**

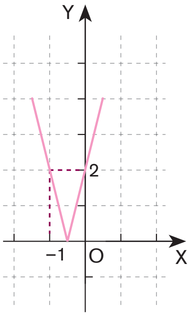
a) $f(x) = |x - 3|$ **b)** $g(x) = |4x + 2|$

c) $h(x) = |x^2 - 4|$ **d)** $j(x) = |3x - x^2|$

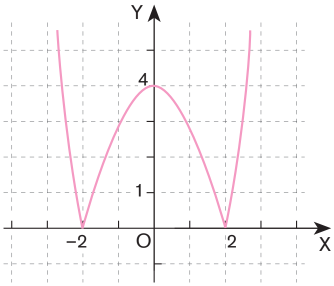
a)



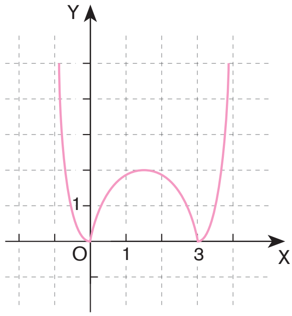
b)



c)



d)



9 **Dadas las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = \dfrac{1}{1-x}$, se pide hallar si es posible las funciones $f \circ g$ y $g \circ f$ y sus dominios.**

$(f \circ g)\ (x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$; $D(f \circ g) = \mathrm{R} - \{1\}$

$(g \circ f)\ (x) = \dfrac{1}{1-x^2}$; $D(g \circ f) = \mathrm{R} - \{-1,\ 1\}$

10 **Mismo ejercicio para las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = \dfrac{1}{x}$. ¿Se puede deducir que la composición de funciones es conmutativa?**

$(f \circ g)(x) = \dfrac{1}{x^2}$, $\quad$ $D(f \circ g) = \mathrm{R} - \{0\}$

$(g \circ f)(x) = \dfrac{1}{x^2}$, $\quad$ $D(g \circ f) = \mathrm{R} - \{0\}$

11 **Dadas las funciones $f(x) = 2 - 3x - x^2$ y $g(x) = \sqrt{x^2 - 7}$, halla si es posible $(f \circ g)(-1)$ y $(g \circ f)(-1)$.**

$(f \circ g)(-1)$ no existe

$(g \circ f)(-1) = 3$

12 **Halla el dominio de las funciones:**

a) $f(x) = 3x^2 + x - 2$ **b)** $f(x) = x^5 + 7x^4 - 1$ **c)** $f(x) = \dfrac{3}{x^2+1}$

d) $f(x) = \dfrac{3}{x^2-1}$ **e)** $f(x) = \sqrt{x+4}$ **f)** $f(x) = \sqrt{x^2+4}$

a) R **b)** R **c)** R

d) R – {1, –1} **e)** [–4, +∞[**f)** R

13 **Halla el dominio de las funciones:**

a) $f(x) = \sqrt{x^2 + x - 6}$ **b)** $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+2}{x-3}}$

c) $f(x) = \sqrt{x(x-2)}$ **d)** $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}}{x-1}$

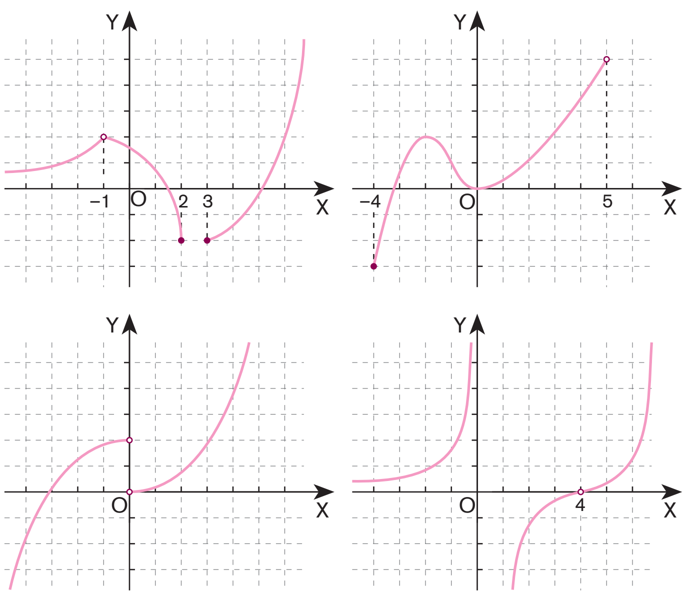
a) $D(f)$ = R –]–3, 2[=]–∞, –3] ∪ [2, +∞[

b) $D(f)$ = R –]–2, 3] =]–∞, –2] ∪]3, +∞[

c) $D(f)$ = R –]0, 2[=]–∞, 0] ∪ [2, +∞[

d) $D(f)$ = R – {]–∞, –1[, 1} = [–1, 1[∪]1, +∞[

14 **Determina el dominio y el recorrido de las funciones representadas en las gráficas siguientes.**



a) D(f) =]–∞, –1[∪]–1, 2] ∪ [3, +∞[

b) D(f) = [–4, 5[

c) D(f) =]–∞, 0[∪]0, +∞[= R – {0}

d) D(f) =]–∞, 0[∪]1, +∞[

15 **Determina la ecuación de la función afín *f* determinada en cada uno de los siguientes casos:**

a) $f(-1) = 4$ y $f(3) = 0$.

b) Su gráfica pasa por los puntos $A(-2, 2)$ y $B(3, 1)$.

c) Su gráfica tiene pendiente 2 y pasa por $P(-2, 0)$

d) $f(4) = -1$ y su gráfica tiene ordenada en el origen 3.

a) $f(x) = -x + 3$

b) $f(x) = -\frac{1}{5}x + \frac{8}{5}$

c) $f(x) = 2x + 4$

d) $f(x) = -x + 3$

16 **La relación entre la temperatura del aire T (en °C) y la altitud *h* (en metros sobre el nivel del mar) es lineal para $0 \leq h \leq 20000$. Si la temperatura a nivel del mar es 15 °C y por cada 5000 m de altitud que se sube, la temperatura del aire baja 8 °C, se pide:**

a) Expresar T en función de *h*.

b) Calcular de forma razonada la temperatura del aire a una altitud de 15000 m.

c) Calcular de forma razonada la altitud a la que la temperatura es 0 °C.

a) $T(h) = 15 - \frac{h}{625}$

b) $T(15000) = -9$°C

c) 9375 m

17 **Representa gráficamente las funciones:**

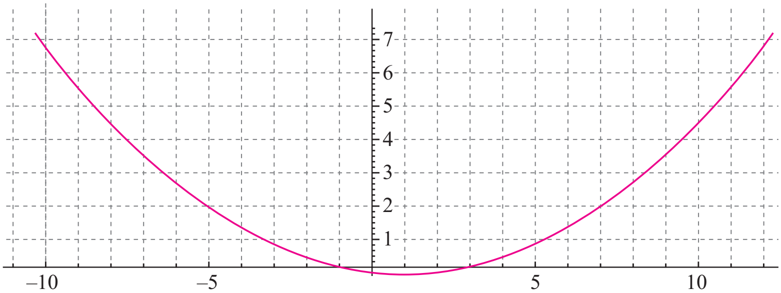
a) $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{16}$

b) $f(x) = -x^2 + 2x - 8$

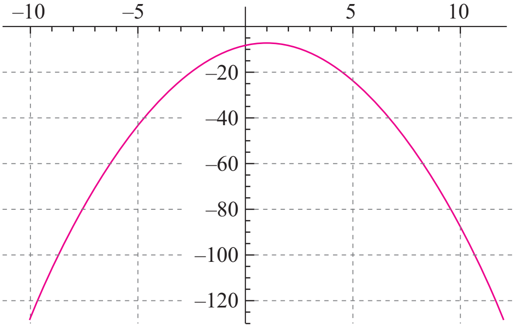
c) $f(x) = x^2 - 8x + 9$

d) $f(x) = 0,25x^2 + x - 2$

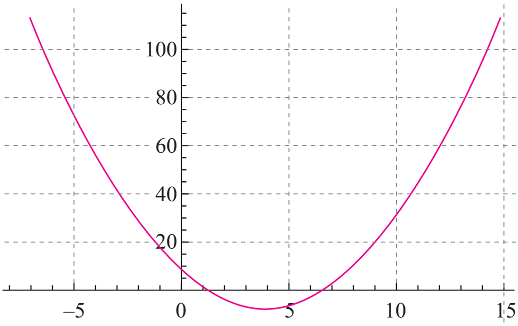
a)



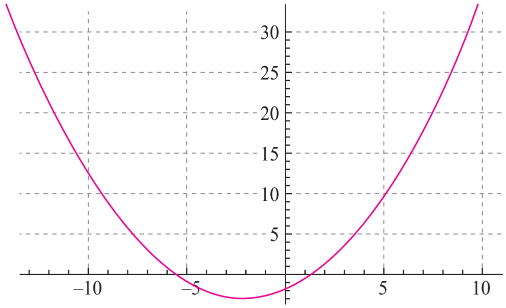
b)



c)



d)



18 **Mismo ejercicio:**

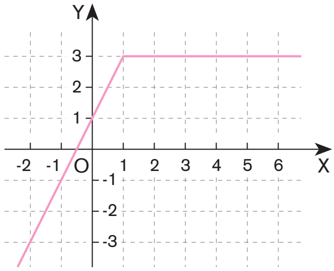
a) $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x \le 1 \\ 3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} -2x+5 & \text{si } x \in [-2, 2[\\ \dfrac{x^2}{8} & \text{si } x \in [2, 4[\end{cases}$

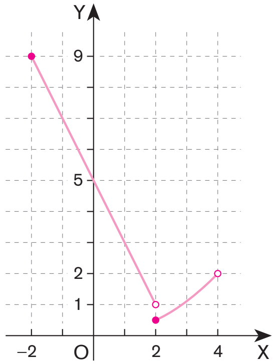
c) $f(x) = \begin{cases} -(x+2)^2+4 & \text{si } x \in [-5, 0[\\ 3 & \text{si } x = 0 \\ (x-2)^2-4 & \text{si } x \in]0, 5] \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [-5, -2] \\ \dfrac{3x+5}{2} & \text{si } x \in]-2, 1[\\ 5 - x & \text{si } x \in [1, 5] \end{cases}$

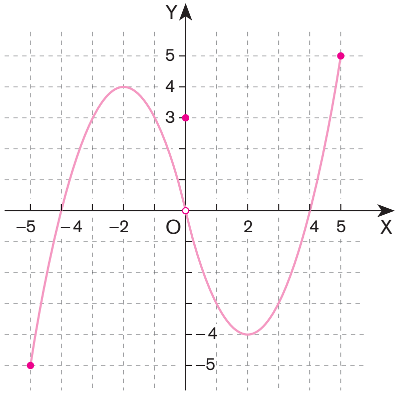
a)



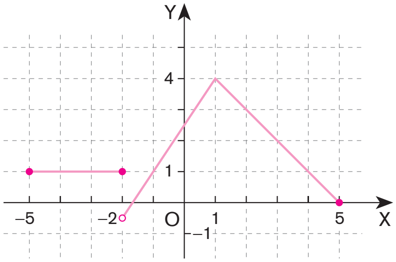
b)



c)



d)

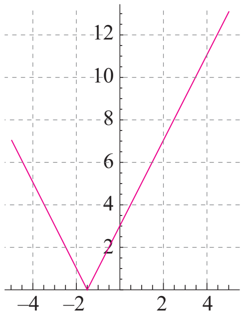


19 **Mismo ejercicio:**

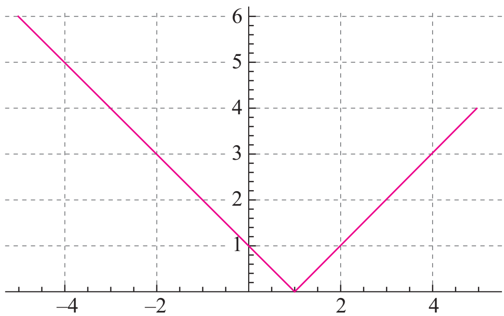
a) $f(x) = |2x + 3|$ b) $f(x) = |1 - x|$

c) $f(x) = |x^2 - 4|$ d) $f(x) = |x + 1| + 1$

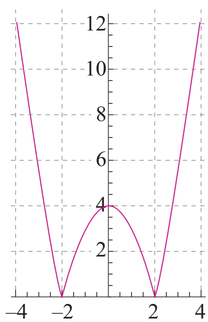
a)



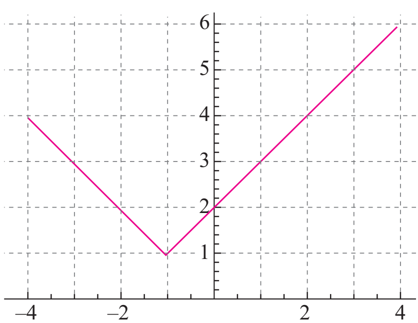
b)



c)



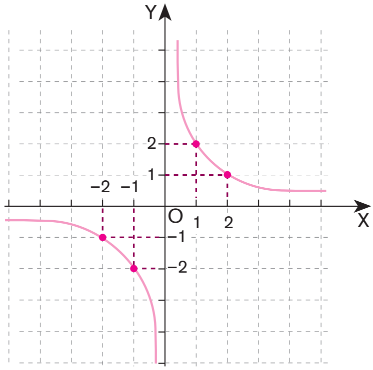
d)



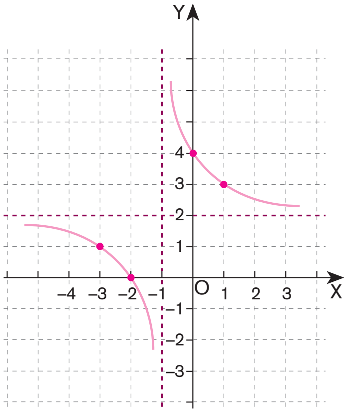
20 **Representa las funciones:**

a) $f(x) = \dfrac{2}{x}$ b) $f(x) = \dfrac{-4}{x}$ c) $f(x) = \dfrac{2x+4}{x+1}$ d) $f(x) = \dfrac{3x-2}{2x+4}$

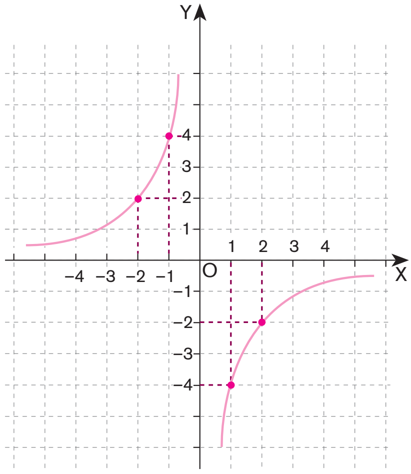
a)



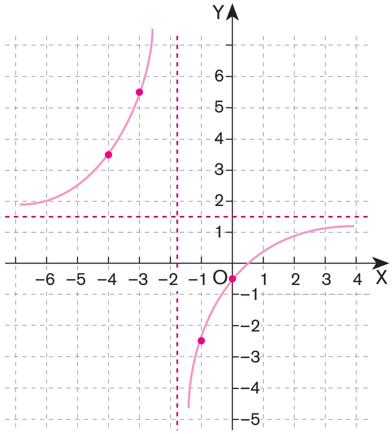
b)



c)



d)



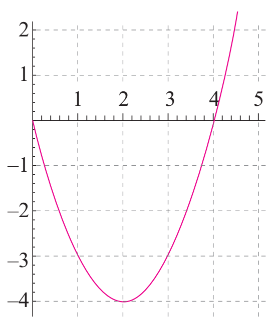
21 **Representa las siguientes funciones en el intervalo indicado:**

a) $f(x) = x^2 - 4x, \quad x \in [0, 5]$

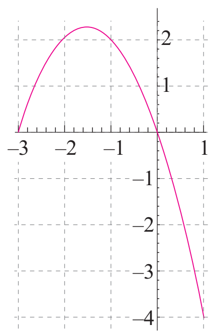
b) $f(x) = -3x - x^2, \quad x \in [-3, 1]$

c) $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-3}, \quad x \in [0, 6] - \{3\}$

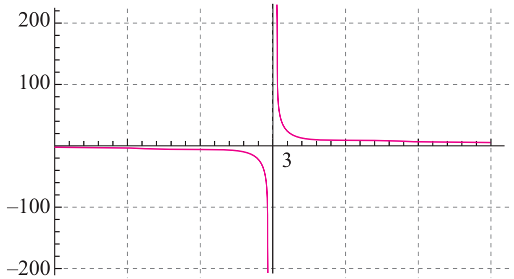
a)



b)



c)



22 **Siendo $f(x) = 5^{x+2}$ y $g(x) = (x + 2)^2$ halla:**

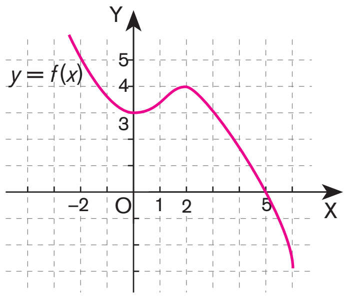
a) $(f \circ g)(-1)$ **b) $(f \circ g)(0)$** **c) $(g \circ f)(-3)$**

a) $(f \circ g)(-1) = 125$ **b)** $(f \circ g)(0) = 15625$ **c)** $(g \circ f)(-3) = 125$

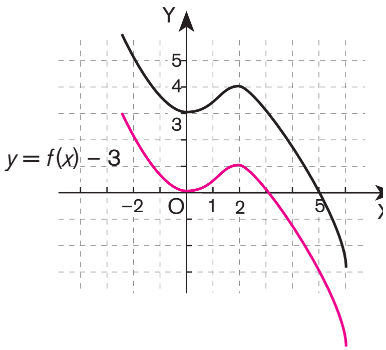
23 **A partir de la gráfica de la función de la figura obtén la gráfica de la función:**

a) $y = f(x) - 3$ **b) $y = f(x - 3)$**

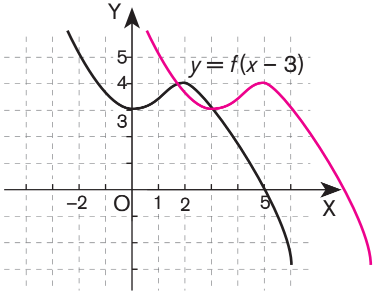
c) $y = -f(x)$ **d) $y = f(-x)$**



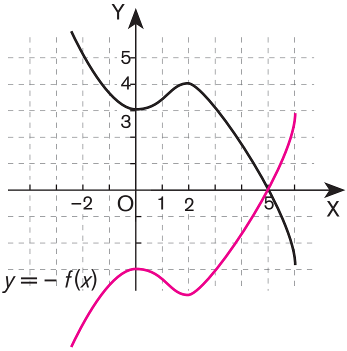
a)



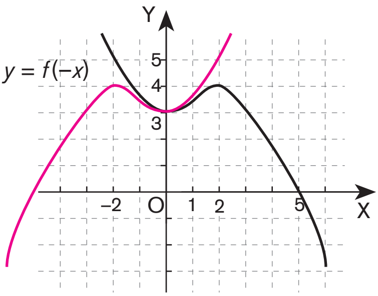
b)



c)



d)



24 **Dadas las funciones $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$; $g(x) = \dfrac{1}{1-x}$, $x \in \mathbb{R} - \{1\}$.**

Hallar las funciones $f \circ g$ y $g \circ f$ y comprueba que $D(f \circ g) = \mathbb{R} - \{1\}$ y $D(g \circ f) = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

$$(f \circ g)\,(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$(g \circ f)\,(x) = \frac{1}{1-x^2}$$

25 **Dadas las funciones $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in$ R⁺; $g(x) = x^2 + 1$, $x \in$ R⁺. Hallar las funciones $g \circ f$ y $f \circ g$ en R⁺ y comprobar que los resultados son distintos.**

$(g \circ f)(x) = x + 1$; $D(g \circ f) = \mathbb{R}^+$

$(f \circ g)(x) = \sqrt{x^2 + 1}$; $D(f \circ g) = \mathbb{R}$

26 **Indica cuáles de las siguientes funciones admiten función inversa respecto de la composición de funciones y halla su expresión cuando sea posible.**

a) $f(x) = 2 - 3x$

b) $f(x) = \sqrt{x}$

c) $f(x) = \dfrac{3}{x - 2}$

d) $f(x) = x^2 - x$

e) $f(x) = \dfrac{x + 2}{x + 3}$

f) $f(x) = \dfrac{3 - x}{5}$

a) $f^{-1}(x) = \dfrac{2 - x}{3}$

b) $f^{-1}(x) = x^2$

c) $f^{-1}(x) = \dfrac{2x + 3}{x}$

d) No tiene inversa

e) $f^{-1}(x) = \dfrac{2 - 3x}{x - 1}$

f) $f^{-1}(x) = 3 - 5x$

27 **Si $f(x) = \dfrac{x + 1}{x - 2}$ y $g(x) = \dfrac{x - 2}{x + 1}$ ¿es $(g \circ f)(x) = \dfrac{5 - x}{2x - 1}$?**

a) Calcula $(g \circ f)(1/2)$. ¿qué ocurre al calcular $g(f(1/2))$?

b) ¿Qué restricciones de f y g se han de tomar para que exista $g \circ f$?

Si, $(g \circ f)(x) = \dfrac{5 - x}{2x - 1}$

a) $(g \circ f)\left(\dfrac{1}{2}\right)$ no existe. Se anula el denominador. Al calcular $g\left(f\left(\dfrac{1}{2}\right)\right)$ se tiene que $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = -1$ y $g(-1)$ no existe.

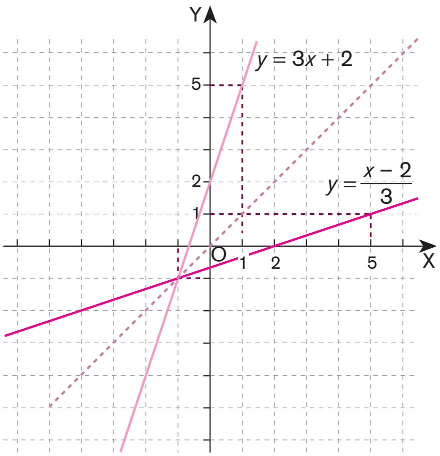
b) Para que exista f, $x \neq 2$. Para que exista g, $x \neq -1$. Para que exista $g \circ f$, $x \neq 2$ y $x \neq \dfrac{1}{2}$.

28 **Representa en un mismo sistema de referencia las funciones f y f^{-1} siendo:**

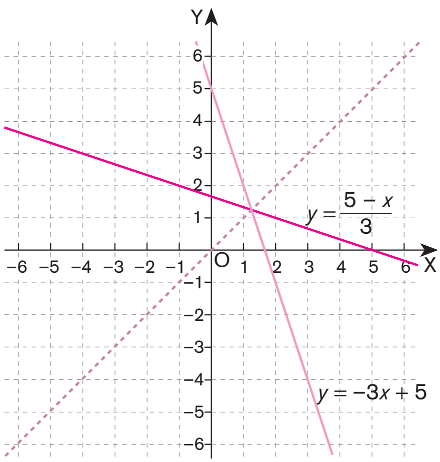
a) $f(x) = 3x + 2$ **b)** $f(x) = -3x + 5$

c) $f(x) = 3 - 4x$ **d)** $f(x) = \dfrac{x+3}{2}$

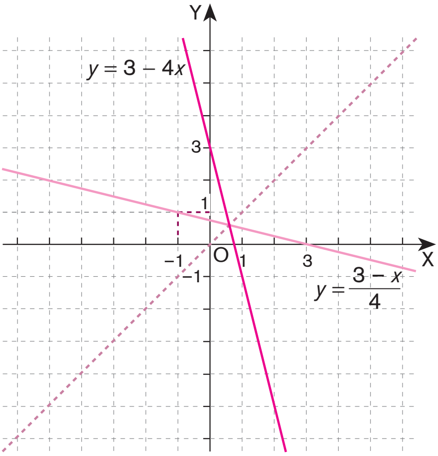
a)



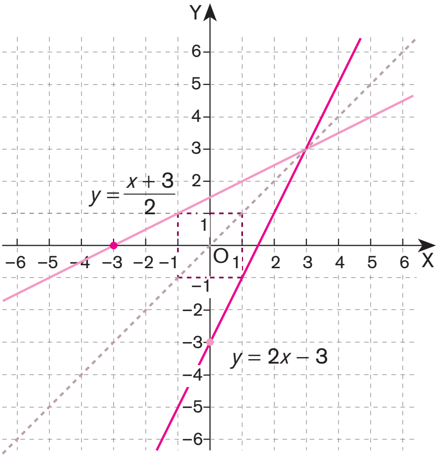
b)



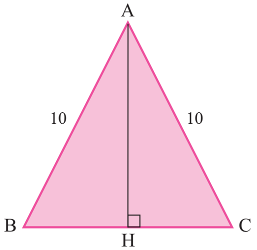
c)



d)



29 **Se considera un triángulo isósceles *ABC* con *AB* = *AC* = 10 cm y *BC* = *x* cm. Sea *S*(*x*) la superficie del triángulo *ABC* en función de la longitud del lado BC.**



a) Demuestra que el área del triángulo en función de la longitud *x* del lado *BC* es $S(x) = \frac{x}{4}\sqrt{400 - x^2}$

b) Determina el dominio de la función *S*.

c) Completa una tabla de valores del intervalo [0, 20] y haz una gráfica aproximada de la función *S*.

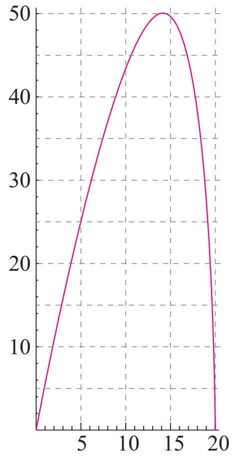
d) ¿Para qué valor de *x* piensas que el triángulo tendrá una superficie máxima?

a) Por Pitágoras $h = \frac{1}{2}\sqrt{400 - x^2} \Rightarrow S(x) = \frac{x}{4}\sqrt{400 - x^2}$

b) $D(S) = \{x \mid 0 \le x \le 20\} = [0, 20]$

c)

x	$S(x)$
0	0
2	9,95
4	19,60
6	28,62
8	36,66
10	43,30
12	48
14	49,99
16	48
18	39,23
20	0



d) Para $x = 14$

1 **Completa en tu cuaderno una tabla como la siguiente:**

Ángulo en grados	0°	75°	105°	15°	80°	165°	195°
Ángulo en radianes	0°	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{4\pi}{9}$	$\frac{11\pi}{12}$	$\frac{13\pi}{12}$

Ángulo en grados	255°	200°	$\frac{360°}{\pi} \simeq 114,59°$	285°	2040°	540°
Ángulo en radianes	$\frac{17\pi}{12}$	$\frac{10\pi}{9}$	2	$\frac{19\pi}{12}$	$\frac{34\pi}{3}$	3π

2 **a) Expresa en el sistema circular el ángulo de 25° 15’ 30”.**
b) Expresa en el sistema sexagesimal el ángulo de 1,25 radianes.

a) 0,44 rad

b) 71° 37’ 11”

3 **Expresa en el sistema circular los ángulos:**

a) 27° **b) 55°**
c) 100° 30' **d) 140° 2' 15''**
e) 240° 10' **f) 315° 15' 15''**

a) $\frac{3\pi}{20} \simeq 0,47$ rad; **b)** $\frac{11\pi}{36} \simeq 0,96$ rad; **c)** $\frac{20,1\pi}{36} \simeq 1,75$ rad

d) $\frac{28,0075\pi}{36} \simeq 2,44$ rad; **e)** $\frac{240,16667\pi}{180} \simeq 4,19$ rad

f) $\frac{315,25417\pi}{180} \simeq 5,50$ rad

4 **Expresa en el sistema sexagesimal los ángulos:**

a) 0,5 rad. **b)** $\frac{\pi}{5}$ **rad.** **c)** $\frac{7\pi}{12}$ **rad.**

d) 2,5 rad. **e)** $\frac{3\pi}{10}$ **rad.** **f)** $\frac{7\pi}{9}$ **rad.**

a) 28° 38’ 52” **b)** 36° **c)** 105°
d) 143° 14’ **e)** 54° **f)** 140°

5 **En una circunferencia de 24 m de radio, un arco mide 6 m. Halla el ángulo central correspondiente expresado en radianes y en grados sexagesimales.**

0,25 rad $\simeq$ 14° 19' 26''

6 **¿Cuántos radianes y cuántos grados sexagesimales gira la Tierra en 3 horas y 20 minutos?**

0,87 rad ≈ 50°

7 **Expresa en grados sexagesimales y en radianes el ángulo que forman las agujas del reloj a las 2 h y 30 min.**

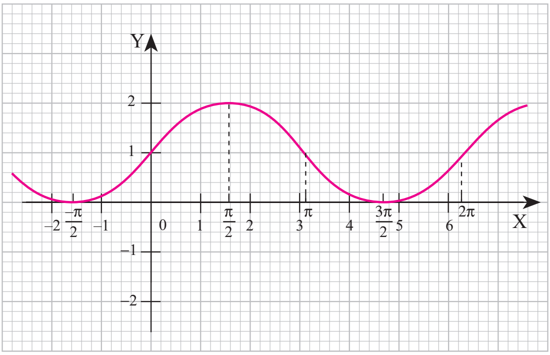
$\frac{7\pi}{12} \simeq 1{,}83$ rad = 105°

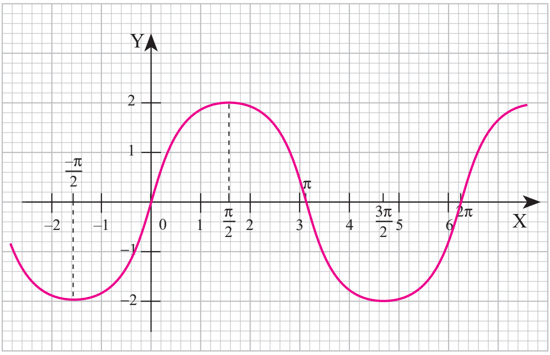
8 **¿A qué ángulo positivo menor de 2π radianes equivale el ángulo de $\frac{15\pi}{4}$ radianes? ¿y el de $\frac{20\pi}{3}$?**

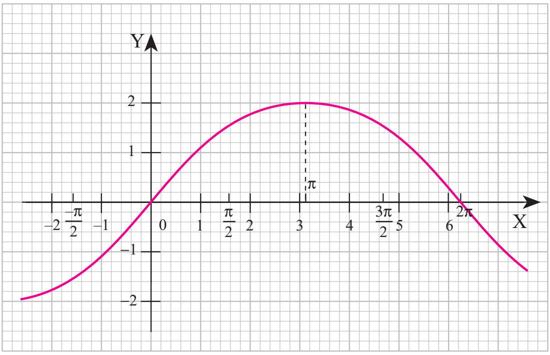
$\frac{7\pi}{4}$; $\frac{2\pi}{3}$

9 **Las gráficas siguientes corresponden a las funciones $g(x) = 2$ sen x; $h(x) = 1 +$ sen x y $j(x) =$ sen $\frac{x}{2}$.**

Comparándolas con la gráfica de la función $f(x) =$ sen x o con la tabla de valores construída en la unidad, identifica la función con su gráfica.







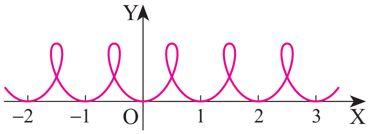
Para $g(x) = 2$ sen x se tiene que para un mismo valor de x el valor de la función $g(x)$ es el doble que el de $f(x)$. Las dos tienen el mismo periodo. Es la segunda gráfica.

Para $h(x) = 1 +$ sen x se tiene que para un mismo valor de x el valor de la función $h(x)$ siempre vale una unidad más que la de $f(x)$. Las dos tienen el mismo periodo. Es la primera gráfica.

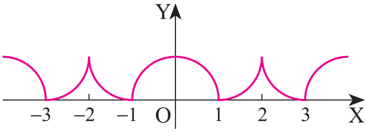
Para $j(x) =$ sen $\left(\dfrac{x}{2}\right)$, su periodo es el doble. Su gráfica no es ninguna de las tres.

10 **Indica si las gráficas siguientes corresponden a funciones periódicas y en caso afirmativo indica su periodo.**

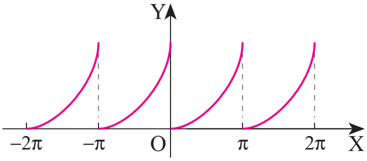
a)



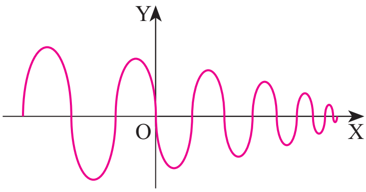
b)



c)



d)



a) Periódica P = 1; **b)** Periódica P = 4; **c)** Periódica P = π; **d)** No es periódica

11 **Indica cuáles de las siguientes funciones son periódicas y halla el periodo de las que lo sean.**

a) $f(x) = \cos^2 x$

b) $f(x) = x + \text{tg } x$

c) $f(x) = \text{sen}^2 x + \cos^2 x$

d) $f(x) = \text{sen } x + \cos x$

e) $f(x) = \text{sen } x \cdot \cos x$

a) Periódica de periodo π.

b) No es periódica.

c) Es la función constante $f(x) = 1$.

d) Periódica de periodo 2π.

e) Periódica de periodo π.

12 **Dibuja las gráficas de las siguientes funciones en los intervalos indicados.**

a) $f(x) = \cos 2x \quad x \in [-\pi, \pi]$

b) $f(x) = 2 \text{ sen } x \quad x \in [0, 2\pi]$

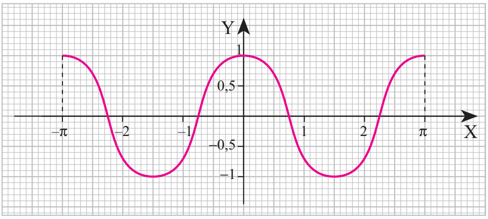
c) $f(x) = \text{sen } |x| \quad x \in [0, 2\pi]$

d) $f(x) = |\text{sen } x| \quad x \in [0, 2\pi]$

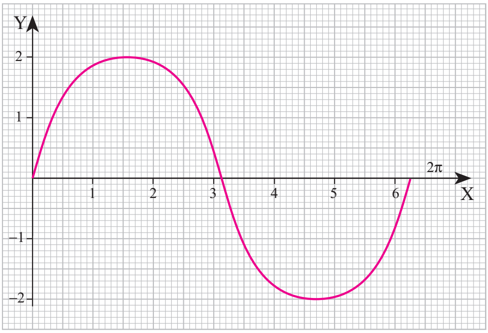
e) $f(x) = |\text{tg } x| \quad x \in [-\pi, \pi]$

f) $f(x) = \cos 4x \quad x \in [0, 2\pi]$

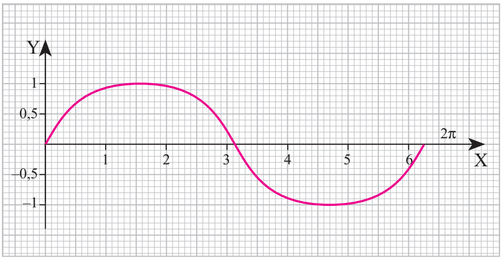
a)



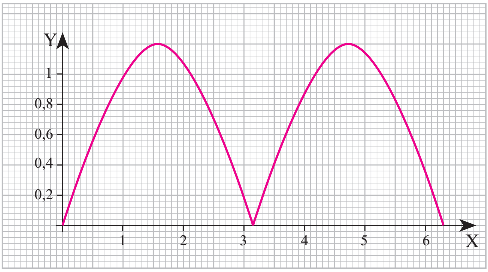
b)



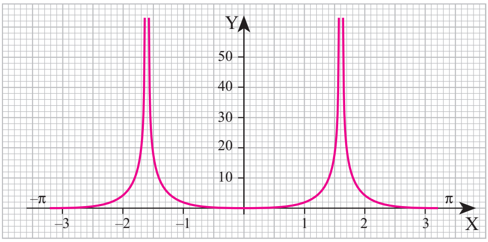
c)



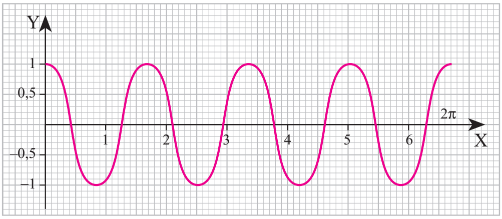
d)



e)

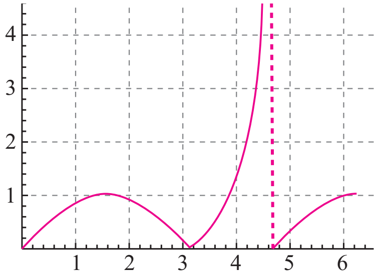


f)



13 **Representa la función siguiente y analiza su continuidad.**

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & x \in [0, \pi[\\ \operatorname{tg} x & x \in \left[\pi, \dfrac{3\pi}{2}\right[\\ \cos x & x \in \left[\dfrac{3\pi}{2}, 2\pi\right] \end{cases}$$



Es continua excepto en $x = \dfrac{3\pi}{2}$ que tiene una discontinuidad de salto infinito.

14 **Conocida la periodicidad de las funciones trigonométricas elementales, halla razonadamente y sin calculadora:**

a) $\operatorname{sen} \dfrac{41\pi}{4}$ **b)** $\operatorname{sen}\left(-\dfrac{23\pi}{2}\right)$ **c)** $\cos 11\pi$

d) $\cos\left(-\dfrac{85\pi}{6}\right)$ **e)** $\operatorname{tg} \dfrac{34\pi}{3}$ **f)** $\operatorname{tg}\left(-\dfrac{21\pi}{4}\right)$

a) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ **b)** 1 **c)** –1

d) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **e)** $\sqrt{3}$ **f)** –1

15 **Calcula *x*:**

a) $x = \text{arc sen } \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **b)** $x = \text{arc cos } (-1)$

c) $x = \text{arc tg } \pi$ **d)** $x = \text{arc tg } 1$

a) $x = \dfrac{\pi}{3} \simeq 1{,}05$ rad **b)** $x = \pi \simeq 3{,}14$ rad

c) $x \simeq 1{,}26$ rad **d)** $x = \dfrac{\pi}{4} \simeq 0{,}79$ rad

16 **Calcula *x***

a) $x = \text{sen}\left(\text{arc sen}\dfrac{\pi}{6}\right)$ **b)** $x = \text{sen}\left(\text{arccos}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$

c) $x = \cos(\text{arcsen } 0)$ **d)** $x = \cos(\text{arctg}(-1))$

a) $\dfrac{\pi}{6}$; **b)** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

c) 1 **d)** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

17 **Utiliza las funciones trigonométricas inversas para despejar *x* en cada una de las igualdades siguientes:**

a) $\text{sen } x = 0{,}79$ **b)** $\cos x = -0{,}3$ **c)** $\text{sen } 2x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

d) $\cos 3x = \dfrac{1}{2}$ **e)** $\text{tg } \dfrac{x}{4} = 2$ **f)** $\text{tg } (x + 1) = 1{,}25$

a) $x \simeq 0{,}91$ rad; **b)** $x \simeq 1{,}88$ rad; **c)** $x = -\dfrac{\pi}{8} \simeq -0{,}39$ rad o $x = \dfrac{3\pi}{8} \simeq 1{,}18$ rad

d) $x \simeq 0{,}35$ rad; **e)** $x \simeq 4{,}43$ rad; **f)** $x \simeq -0{,}10$ rad

18 $\mathbf{N = sen\dfrac{\pi}{4} + sen\dfrac{\pi}{2} + sen\dfrac{3\pi}{4} + sen\,\pi}$

$1 + \sqrt{2}$

19 $\mathbf{N = sen\dfrac{2\pi}{3} + sen\dfrac{4\pi}{3} + sen\dfrac{6\pi}{3} + sen\dfrac{8\pi}{3}}$

$N = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

20 $\mathbf{N = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \cos\frac{2\pi}{3} + \cos\frac{2\pi}{3}}$

$-\frac{1}{2}$

21 $\mathbf{N = \cos\frac{\pi}{8} + \cos\frac{3\pi}{8} + \cos\frac{7\pi}{8} + \cos\frac{11\pi}{8}}$

$N = \sqrt{2}$

22 **Expresa F(*x*) en función de sen *x* y cos *x*.**

F(*x*) = sen(–*x*) + sen(π – *x*)

F(x) = 0

23 **Sea la función *f*(*x*) = sen *x* + sen 2*x* + sen 3*x*.**

Calcula *f*(π – *x*) y $\mathbf{f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}$**.**

$f(\pi - x) = \text{sen } x - 2 \text{ sen } x \cos x + 3 \text{ sen } x \cos^2 x - \text{sen}^3 x$

$f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x + 2 \text{ sen } x \cos x + 3 \text{ sen}^2 x \cos x - \cos^3 x$

24 **Sea la función *f*(*x*) = cos *x* + cos 2*x* + cos 3*x*.**

Calcula *f*(π + *x*) y $\mathbf{f\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}$**.**

$f(\pi + x) = -\cos x + \cos 2x - \cos 3x$

$f\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \text{sen } x + \cos 2x - \text{sen } 3x$

Tema 7 FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

1 **Las amebas son seres unicelulares sin forma fija que se reproducen por bipartición. Un biólogo estudia la evolución de una cierta población de amebas y comprueba que su número de dobla todos los días. Si se dispone inicialmente de un millón de amebas:**

a) Da una expresión del número de amebas y en función del tiempo *x* (en días).

b) Determina el número de amebas en los instantes $x = 2$; $x = 5$; $x = -2$; $x = -3$.

c) ¿En qué instante piensas que había 7 millones de amebas?

a) $f(t) = 10^6 \times 2^t$

b) $f(2) = 4\,000\,000$; $f(5) = 32\,000\,000$; $f(-2) = 250\,000$; $f(-3) = 125\,000$

c) 2,8 días = 2 días 19 horas 12 min.

2 **Un isótopo radiactivo se descompone siguiendo una ley dada por la fórmula $y = K \cdot (2,7)^{-0,00025 \cdot t}$ siendo *K* la cantidad inicial (para $t = 0$) y *t* el tiempo en años. Si disponemos de 50 gramos inicialmente:**

a) ¿Qué cantidad quedará dentro de 10, 100 y 1000 años?

b) ¿Cuál es la vida media de este isótopo?

a) $t = 10$ $\quad y = 49,876$
$t = 100$ $\quad y = 48,774$
$t = 1000$ $\quad y = 39,006$

b) 1.000.000 de años

3 **Expresa en función de un solo logaritmo:**

a) $\log a + \log b - \log c$ **b) $\ln 4 - 3 \ln x + \dfrac{\ln 5}{2}$**

c) $2 \log m - 3 \log n$ **d) $2 \log_a b + 3 \log_a c - 2 \log_a d$**

a) $\log \dfrac{ab}{c}$; b) $\ln \dfrac{4\sqrt{5}}{x^3}$; c) $\log \dfrac{m^2}{n^3}$; d) $\log_a \dfrac{b^2c^3}{d^2}$

4 **Calcula:**

a) $\log_2 100$ **b) $\log_{100} 25$**

c) $\log_5 72$ **d) $\log_{12} 24$**

a) $\log_2 100 \simeq 6,644$ b) $\log_{100} 25 \simeq 0,699$

c) $\log_5 72 \simeq 2,657$ d) $\log_{12} 24 \simeq 1,279$

5 **Halla x en las expresiones siguientes:**

a) $4^x = 8$ **b)** $5^x = 14$ **c)** $3^{1-x} = 21$ **d)** $6^{2x+5} = 74$

a) $x = \frac{3}{2} = 1{,}5$; **b)** $x \simeq 1{,}64$; **c)** $x \simeq -1{,}77$; **d)** $x \simeq -1{,}30$

Del 6 al 9. Opera y obtén el resultado más simple posible de cada expresión.

6 **a)** $\frac{2}{3} \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{-2}{3}\right)^2 \times \left(\frac{3}{-4}\right)^2$ **b)** $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \times \left(\frac{1}{-2}\right)^{-3}$

a) $\frac{1}{8}$; **b)** -72

7 **a)** $(-2)^{-1} \times (-3)^{-1} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \times \left(\frac{-1}{2}\right)^{-1}$ **b)** $(-1)^3 \times \left(-\frac{7}{8}\right)^3 \times \left(-\frac{2}{7}\right)^2$

a) $\frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$; **b)** $-2^3 \times 3^2 = -72$

8 **a)** $\left(\frac{3}{5}\right)^2 \times \left(1 - \frac{2}{5}\right)^{-3} \times \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 \times \left(2 - \frac{1}{2}\right)^{-1} \times \frac{1}{5}$

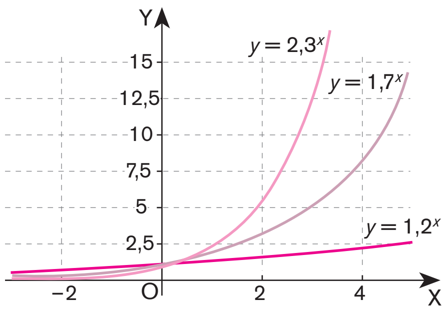
b) $(2^2)^{-1} \times \left(2 + \frac{1}{2}\right)^2 \times \left(1 + \frac{1}{4}\right)^{-2} \times \frac{3}{5}$

a) $\frac{1}{2}$; **b)** $\frac{3}{5}$

9 **a)** $\frac{3a^2b}{2c^3} : \left(\frac{4ab^2}{c^{-1}}\right)^{-2}$ **b)** $\frac{3m^{-2}n}{2n^3} : \frac{4n^2m^{-1}}{9n^{-1}m}$

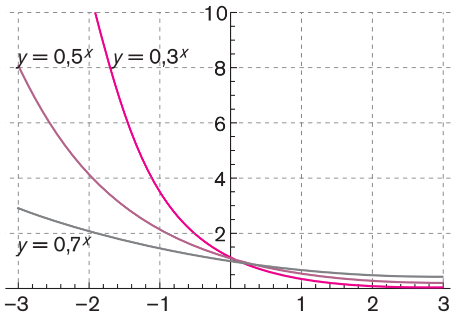
a) $\frac{3}{32\,b^3c^5}$; **b)** $\frac{27}{8n^5}$

10 **Representa en un mismo sistema de ejes las funciones $f(x) = 1{,}2^x$; $g(x) = 1{,}7^x$ y $h(x) = 2{,}3^x$. ¿Qué influencia tiene el valor de la base en la gráfica de estas funciones?**



Para valores de $x > 0$, cuanto mayor es la base, mas alta es la gráfica $1{,}2^x < 1{,}7^x < 2{,}3^x$ y al contrario para $x < 0$.

11 **Representa en un mismo sistema de ejes las funciones $f(x) = 0{,}3^x$; $g(x) = 0{,}5^x$ y $h(x) = 0{,}7^x$. ¿Qué influencia tiene el valor de la base en la gráfica de estas funciones?**



Para valores de $x > 0$, cuanto mayor es la base, mas alta es la gráfica, $0{,}3^x < 0{,}5^x < 0{,}7^x$ y al contrario para $x < 0$.

12 **Encuentra en cada caso una función exponencial del tipo $f(x) = K \cdot a^x$ tal que:**

a) $f(2) = 12$; $f(-1) = 1{,}5$ **b)** $f(3) = 25$; $f(4) = 125$

c) $f(3) = 4{,}5 \times 10^{-4}$; $f(-2) = 45$ **d)** $f(1) = 2$; $f(3) = 2\,048$

a) $f(x) = 3 \cdot 2^x$ **b)** $f(x) = \dfrac{1}{5} \cdot 5^x$

c) $f(x) = 0{,}45 \cdot 0{,}1^x$ **d)** $f(x) = \dfrac{1}{16} \cdot 32^x$

13 **Resuelve las inecuaciones: a)** $\sqrt[3]{2^{x-4}} < \sqrt{4^{1-2x}}$ **;** **b)** $\sqrt[6-x]{5^{x^2}} < 5$

a) $x < 1$ **b)** $x \in\ ]-3, 2[\ \cup\ ]6, +\infty[$

14 **El peso P de una población de elefantes africanos hembras está relacionado con la edad t (t en años) mediante la expresión:**

$$P(t) = 2600(1 - 0{,}5e^{-0{,}075t})^3$$

a) ¿Cuánto pesa un elefante recién nacido?

b) Suponiendo que la hembra adulta pesa 1800 kg, estima su edad.

a) 325 kg **b)** 19,55 años ó 19 años 6 meses 19 dias

15 **En un laboratorio de Biotecnología se tiene un cultivo de bacterias en un fermentador durante 4 horas. La población de bacterias crece rápidamente con el paso del tiempo.**

La función que relaciona la cantidad de bacterias y el tiempo t transcurrido en horas es:

$$C(t) = 0{,}025 \times e^{t^2}$$

Determina en cuánto se incrementa la población desde $t = 1$ hasta $t = 3$ horas.

$0{,}025\, e\,(e^8 - 1) \simeq 202{,}5$

16 **Se introduce en un pantano una cantidad desconocida de una nueva variedad de peces. Después de 3 años se estima que el número de individuos es 4 000, y después de 5 años 8 000.**

¿Cuántos peces se introdujeron originariamente suponiendo que su crecimiento es de tipo exponencial?

1 414 peces

17 **Un martillo pilón golpea cada 6 segundos una pieza metálica cuyo espesor inicial es 1 cm. En cada golpe, el grosor del metal disminuye un 1%. Sea $f(n)$ el grosor de la pieza después de n golpes.**

a) Calcula $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$.

b) Expresa $f(n)$ en función de n.

c) ¿Cuántos golpes serían necesarios para reducir al menos un 25% el grosor de la pieza?

d) Una pieza se considera terminada cuando su grosor no excede de 5 mm. ¿Cuánto tiempo es necesario, como mínimo, para terminar una pieza?

a) $f(0) = 1$; $f(1) = \dfrac{99}{100}$; $f(2) = \dfrac{9801}{10\,000}$; $f(2) = \dfrac{970\,299}{1000\,000}$

b) $f(n) = \left(\dfrac{99}{100}\right)^n$

c) 29 golpes.

d) 6 minutos 54 segundos.

18 **Se sabe que una determinada población tiene un crecimiento de un 2% anual. Si en el instante de iniciar el recuento se contabilizan 1000 ejemplares, se pide:**

a) Expresión de la población y en función del tiempo x.

b) ¿Cuánto tardará en duplicarse la población?

c) ¿Qué población había hace 6 meses?

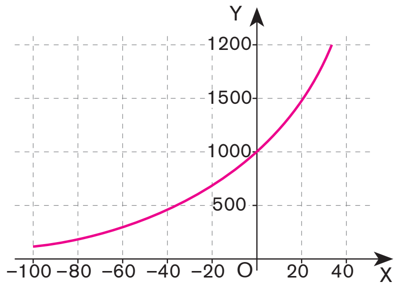
d) Representa gráficamente la función obtenida en a).

a) $f(x) = 1000 \cdot 1{,}02^x$

b) 35 años

c) 990 peces

d)



19 **Un medicamento se elimina del organismo a través de la orina. La dosis inicial es de 10 mg y la cantidad en el cuerpo t horas después está dada por A(t) = $10 \times 0{,}8^{t}$.**

a) Calcula la cantidad de fármaco restante en el organismo 8 horas después de la toma inicial.

b) ¿Qué porcentaje del medicamento que está todavía en el organismo se elimina cada hora?

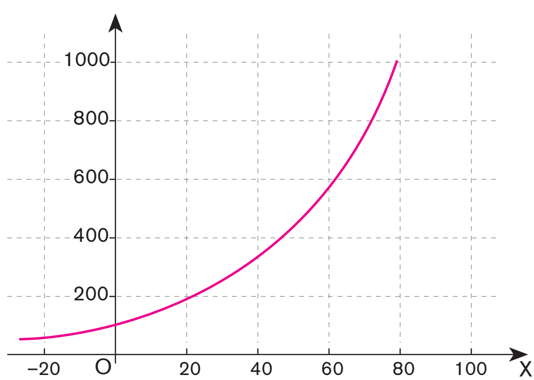
a) 1,678 mg **b)** 20%

20 **Un país tiene actualmente una población de 110 millones de habitantes y suponiendo un crecimiento exponencial se espera que ésta se duplique en 25 años.**

a) Estima su población dentro de 40 años y representa gráficamente la función crecimiento.

b) ¿Cuál era la población hace 10 años?

a) 333,46 millones



b) 83,36 millones

21 **Un problema importante de oceanografía consiste en determinar la cantidad de luz que puede penetrar a varias profundidades oceánicas. La Ley de Beer Lambert establece que, para modelar este fenómeno, se debe utilizar una función exponencial I, tal que $I(x) = I_0 \times a^x$.**

Suponiendo que $I(x) = 10 \times 0{,}4^{x}$ es la energía lumínica equivalente (en cal $\times$ s/cm^2) que llega a una profundidad de x metros.

a) ¿Qué energía se tiene a una profundidad de 2 m?

b) Traza la gráfica de *I*, desde *x* = 0 a *x* = 5.

c) A qué profundidad se espera una energía de 0,02 cal × s/cm^2.

a) 1,6 cal × s/cm^2

b)

c) 6,78 m

22 **El IPC es el índice de precios de consumo. Está elaborado por el Instituto Nacional de Estadística y es una medida estadística de la evolución de los precios de los bienes y servicios que consume la población residente en viviendas familiares en España.**

Suponiendo un IPC de un 0,25% mensual durante un año.

a) ¿Cuál es el precio al final de diciembre de un producto que el 1 de enero de ese mismo año era de 25 euros?

b) La afirmación "El 30 de junio el producto ha subido ya la mitad de lo que va a subir en todo el año" ¿es verdadera o falsa?

a) 363, 8 € **b)** Es falsa

23 **La siguiente fórmula relaciona la intensidad *I* de un terremoto con el área que lo rodea A (en km cuadrados), que es afectada por el temblor.**

$$I = 2{,}3\log(2{,}6A + 34000) - 7{,}5$$

a) Despeja *A* en función de *I*

b) Evalúa la superficie afectada para un terremoto de intensidad 7 en la escala Richter.

a) $A = \dfrac{10^{\frac{I+7{,}5}{2{,}3}} - 34000}{2{,}6}$ **b)** 762 052,96 km^2

24 **De acuerdo con la ley del enfriamiento de Newton, un objeto se enfría en forma directamente proporcional a la diferencia de temperatura entre el objeto y el medio que lo rodea. Si cierto objeto pasa de 52 °C a 38 °C en 30 minutos, cuando se encuentra rodeado por aire que tiene una temperatura de 24 °C, entonces puede mostrarse que su temperatura $f(t)$ después de t horas está dada por $f(t) = 28 \times 2^{-2t} + 24$.**

Si $t = 0$ corresponde a las 12 del mediodía.

a) Calcula la temperatura a las 14 horas y a las 18 horas

b) Cuánto tardará el objeto en adquirir una temperatura de 25 °C?

a) A las 14 h : 25,75 °C

A las 18 h : 24,0068 °C

b) 2,4 h ó 2 h 24 min.

25 **El carbono 14, C_{14}, es un isótopo radiactivo que forma parte de los organismos vivos en los que se introduce junto con el dióxido de carbono (CO_2). Tras la muerte ya no se produce más absorción de C_{14} y la cantidad, M, que hay en cada organismo decrece de acuerdo con la ley $M = M_o\, e^{-0{,}000121t}$ siendo M_o la cantidad inicial (cuanto $t = 0$).**

Si en una excavación arqueológica se encuentran restos humanos que contienen la tercera parte de C_{14} de la que hay en una persona viva, determina la antigüedad aproximada de dichos restos.

9079,44 años $\simeq$ 9079 años 5 meses 9 días

26 **Una cooperativa agrícola vende los productos cosechados por sus socios. El importe de cada venta aumenta el 10% sobre la venta precedente. La cooperativa acaba de realizar su sexta venta este año y el importe de esta sexta venta asciente a 18050 euros.**

a) ¿Cuál fue el importe de la primera venta?

b) ¿Cuál es el importe total de las ventas desde el principio?

a) 11207,6 € **b)** 86473,5 €

27 **Una producción anual de pescado en un puerto pesquero aumenta un 3% anual. Se entiende por $P(0)$ la producción, en toneladas, de este puerto en 2008 y es $P(0) = 145000$ t. Se designa $P(n)$ la producción en toneladas de este puerto en 2008 + n.**

a) Calcula la producción de este puerto, en toneladas, en 2011.

b) Expresa $P(n)$ en función de n.

c) ¿A partir de qué año la producción de este puerto será por lo menos el doble de la de 2008?

a) 158445,42 *t*

b) $P(n) = 145000\,(1{,}03)^n$

c) A partir del vigésimocuarto año.

28 **Calcula los siguientes logaritmos:**

a) $\log_2 4$; $\log_2 \frac{1}{4}$; $\log_4 2$

b) $\log_3 \frac{1}{3}$; $\log_3 27$; $\log_{\frac{1}{3}} 9$

c) $\log_8 4$; $\log_8 16$; $\log_8 1$

d) $\log 0{,}1$; $\log 10\,000$; $\log 10^{-5}$

e) $\log_2 32$; $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{32}$; $\log_{\frac{2}{3}} \frac{81}{16}$

a) $\log_2 4 = 2$; $\log_2 \frac{1}{4} = -2$; $\log_4 2 = \frac{1}{2}$

b) $\log_3 \frac{1}{3} = -1$; $\log_3 27 = 3$; $\log_{\frac{1}{3}} 9 = -2$

c) $\log_8 4 = \frac{2}{3}$; $\log_8 16 = \frac{4}{3}$; $\log_8 1 = 0$

d) $\log 0{,}1 = -1$; $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{32} = 5$; $\log_{\frac{2}{3}} \frac{81}{16} = -4$

29 **La cantidad $q(t)$ que queda de una sustancia radiactiva al cabo de t días viene expresada por la fórmula $q(t) = Me^{-0{,}1t}$.**

a) ¿Al cabo de cuánto tiempo la masa M se ha reducido a la mitad?

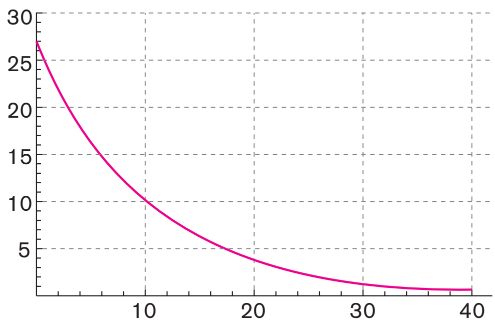
b) Si la masa inicial M es 27 mg. ¿cuánta sustancia quedará, aproximadamente, al cabo de 10 días?

c) Representa en este caso la gráfica aproximada de $q(t)$.

a) 7 días

b) 10 mg

c)



30 **Halla x en las siguientes expresiones:**

a) $\log_x 7 = -2$ b) $\log_4 2x = 2$ c) $\log_{\sqrt{2}} x = 6$ d) $\log_{\frac{1}{8}} x = \frac{1}{3}$

e) $\log_x 125 = 3$ f) $\log_{\frac{3}{4}} \frac{64}{27} = x$ g) $\log_{\frac{2}{3}} 1 = x$ h) $\log_3 x = -2$

a) $x = \frac{1}{\sqrt{7}}$ **b)** $x = 8$ **c)** $x = 8$ **d)** $x = \frac{1}{2}$

e) $x = 5$ **f)** $x = -3$ **g)** $x = 0$ **h)** $x = \frac{1}{9}$

31 **Desarrolla los logaritmos siguientes:**

a) $\log \frac{3m^2 p}{2q}$;   b) $\log_3 \frac{1}{2xy}$;   c) $\log \frac{a+b}{c}$;   d) $\log \sqrt{\frac{mn}{p}}$

a) $\log \frac{3m^2 p}{2q} = \log 3 + 2 \log m + \log p - \log 2 - \log q$

b) $\log_3 \frac{1}{2xy} = -\log_3 2 - \log_3 x - \log_3 y$

c) $\log \frac{a+b}{c} = \log (a+b) - \log c$

d) $\log \sqrt{\frac{mn}{p}} = \frac{1}{2} [\log m + \log n - \log p]$

32 **Mismo ejercicio:**

a) $\log \frac{x^4 y^3}{2z}$ b) $\log \frac{x^2 \sqrt{y}}{\sqrt[3]{z}}$ c) $\log_a a^3 \sqrt[4]{a^3}$ d) $\log_a \sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}$

a) $\log \frac{x^4 y^3}{2z} = 4 \log x + 3 \log y - \log 2 - \log z$

b) $\log \frac{x^2 \sqrt{y}}{\sqrt[3]{z}} = 2 \log x + \frac{1}{2} \log y - \frac{1}{3} \log z$

c) $\log_a a^3 \sqrt[4]{a^3} = 3 \log_a a + \frac{3}{4} \log_a a = \frac{15}{4}$

d) $\log_a \sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}} = \frac{7}{8} \log_a a = \frac{7}{8}$

33 **¿Verdadero o falso?**

a) $\log(m+n)+\log(m-n)=\log(m^2-n^2)$

b) $\log 100x = 2\log x$

c) $\log\sqrt{xy}=\dfrac{\log x+\log y}{2}$

d) $\log 0{,}001 = -3\log_5 5$

a) Verdadero; **b)** Falso; **c)** Verdadero; **d)** Verdadero

34 **Expresa en función de un solo logaritmo.**

a) $\log x - \log y + 3\log z$

b) $\dfrac{1}{2}\log(a-b)-\dfrac{1}{3}\log(a+b)+\dfrac{2}{3}\log p$

c) $\log 3 - \log 2 + \dfrac{5}{2}\log x - \log y$

d) $-2\log m + 4\log n - 2$

a) $\log\dfrac{x\,z^3}{y}$

b) $\log\dfrac{\sqrt{a-b}\cdot\sqrt[3]{p^2}}{\sqrt[3]{a+b}}$

c) $\log\dfrac{3\cdot\sqrt{x^5}}{2y}$

d) $\log\dfrac{n^4}{(10\,m)^2}$

35 **Expresa en función de log 3 la expresión:** $\log\dfrac{(0{,}081)^2\cdot 30}{\sqrt{243}}$

$$\log\frac{(0{,}081)^2\cdot 30}{\sqrt{243}}=\frac{13-10\log_3 10}{2\log_3 10}$$

36 **Expresa en función de log 2 y log 3:** $\log\dfrac{54\cdot\sqrt[4]{36}}{0{,}027^3\cdot 810}$

$$\frac{3}{2}\log 2-\frac{19}{2}\log 3+8$$

37 **Calcula los logaritmos siguientes:**

a) $\log_3 5$; $\log_7 2$

b) $\log_4 217$; $\log_2 17$

c) $\log_{0,1} 0{,}5$; $\log_2 1{,}73$

d) $\log_4 100$; $\log_{0,3} 0{,}02$

a) $\log_3 5 \simeq 1{,}46497$; $\log_7 2 \simeq 0{,}356207$

b) $\log_4 217 \simeq 3{,}88078$; $\log_2 17 \simeq 4{,}08746$

c) $\log_{0,1} 0{,}5 \simeq 0{,}30103$; $\log_2 1{,}73 \simeq 0{,}790772$

d) $\log_4 100 \simeq 3{,}32193$; $\log_{0,3} 0{,}02 \simeq 3{,}24926$

38 **Calcula *x* en las siguientes ecuaciones exponenciales:**

a) $8^x = 9$ **b)** $5^{2x-1} = 32$ **c)** $6^{1-x} = 51$ **d)** $3^{4x} = 23$

a) $x = 1{,}0566$ **b)** $x = 1{,}57669$ **c)** $x = -1{,}1944$ **d)** $x = 0{,}7135$

39 **Determina la función inversa de:**

a) $f(x) = 3 + 10^{4x}$ **b)** $g(x) = 1 - 4^{1+2x}$

c) $h(x) = 5 + \log(1 - x)$ **d)** $j(x) = e + 3 \ln 2x$

a) $f^{-1}(x) = \frac{1}{4}\log(x-3)$

b) $g^{-1}(x) = \frac{1}{2}\left(\log_4(1-x) - 1\right) = \dfrac{\log\frac{1-x}{4}}{2\log 4}$

c) $h^{-1}(x) = 1 - 10^{x-5}$

d) $j^{-1}(x) = \frac{1}{2}\, e^{\frac{x-e}{3}}$

40 **¿En qué base se cumple que $\log_a 12 + \log_a 3 = 2$?**

$a = 6$

41 **Calcula el menor entero *n* que verifique:**

a) $1{,}21^n > 9$ **b)** $3{,}48^n > 10^5$ **c)** $1{,}02^n > 10^6$ **d)** $10{,}01^n > 8{,}4 \times 10^6$

a) $n = 12$; **b)** $n = 10$; **c)** $n = 698$; **d)** $n = 7$

42 **Calcula el mayor valor real de *x* para que:**

a) $3{,}25^x < 2$ **b)** $5{,}68^x < 1$

c) $0{,}98^x < 10^{-6}$ **d)** $4{,}32^x < 10^{-5}$

a) $x = 0{,}588083$ **b)** $x = 0$

c) $x = 683{,}845$ **d)** $x = -7{,}86802$

43 **El nivel de intensidad, D, de un sonido de *intensidad* I, se obtiene por la expresión:**

$$D = 10 \cdot \log \frac{I}{I_0}$$

donde D se mide en *decibelios* e I en vatios/m^2. El nivel máximo de percepción o umbral es $I_o = 10^{-12}$.

a) Calcula el nivel de intensidad de los siguientes sonidos cuya intensidad es (en w/m^2).

***Conversación normal*: $3{,}4 \cdot 10^{-6}$**

***Sonido trompeta*: $2 \cdot 10^{-3}$**

***Umbral doloroso*: 1**

***Fórmula 1*: $7 \cdot 10^2$**

b) Calcula la intensidad de los siguientes sonidos de los que se conoce su nivel en decibelios.

***Grito humano*: 80**

***Interior discoteca*: 115**

***Motocicleta*: 90**

a) Conversación normal: D $\simeq$ 65,31 decibelios.

Sonido trompeta: D $\simeq$ 93,01 decibelios.

Umbral doloroso: D $\simeq$ 120 decibelios.

Fórmula 1; D $\simeq$ 148,45 decibelios.

b) Grito humano: $I = 10^{-4}$ w/m^2

Interior discoteca: $I = \dfrac{\sqrt{10}}{10} \simeq 0{,}3162$ w/m^2

Motocicleta = 10^{-3} w/m^2

44 **La intensidad de los terremotos se expresa en la *escala Richter.* Esta es una escala logarítmica (en base 10) y por tanto un terremoto de grado 4 es 100 veces más intenso que uno de grado 2, pues log 10 000 = 4 mientras que log 100 = 2. El terremoto de San Francisco de 1906 tuvo una magnitud de 8,2 y en Octubre de 1992 se produjo un terremoto en la costa colombiana de una intensidad de 6,6. ¿Cuántas veces fué mayor la potencia del primero que la del segundo?**

39,81 veces mayor

45 **El número de personas, P, afectadas por una epidemia al cabo de *t* semanas transcurridas desde el primer brote es:**

$$P = \frac{35\,000}{1 + 25e^{-0{,}4t}}$$

a) Calcula el número de personas que habrá contraído la enfermedad al cabo de 1, 2 y 3 semanas.

b) ¿Qué sucedería al cabo del tiempo si no se consiguiera frenar el desarrollo de la epidemia?

c) ¿Cuándo estará afectada la mitad de la población inicial, que es de 35 000 individuos?

a) $P(1) \simeq 1\,970{,}94$ personas

$P(2) \simeq 2\,861{,}06$ personas

$P(3) \simeq 4\,103{,}23$ personas

b) Que tendería a estabilizarse alrededor de 35 000 personas afectadas.

c) 8 semanas.

Del 46 al 71. Resuelve las ecuaciones siguientes:

46 $2^{-x} - 4 = 0$

$x = 1{,}31862$

47 $0{,}07^{x} = 0{,}03$

$x \simeq 1{,}31862$

48 $2^{x} + 2^{x+1} + 2^{x+2} = 112$

$x = -7$

49 $\sqrt[x+15]{2^{x-5}} = \frac{1}{4}\sqrt[x-5]{8^{x+5}}$

$x = -7$

50 $2^{x^3} - 4^{x^2} = 0$

$x = 2$

51 $9^{x} - 6 \cdot 3^{x+1} = -81$

$x = 2$

52 $2^{4x} - 12 = 2^{2x}$

$x = 1$

53 $2^{x} \cdot 3^{x} \cdot 5^{2x} = 150$

$x = 1$

54 $\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2+2} = \left(\frac{4}{9}\right)^{-1-x}$

$x = -3$

55 $3^{x+3} + 3^{x+2} + 3^{x+1} + 3^{x} = \frac{40}{27}$

$x = -3$

57 $3^{x} + 3^{1-x} = 4$

$x = 0$ y $x = 1$

58 $5^{x+1} - 30 \cdot 5^{x} + 5^{3} = 0$

$x = -2$

56 $5^{2x+1} - 5^{x+2} = 2500$

$x = 0, \ \ x = 1$

59 $4^{x+3} = \dfrac{1}{2^x}$

$x = -2$

60 $2^{x-1} + 2^{x-2} + 2^{x-3} + 2^{x-4} = 960$

$x = 1, \ \ x = 9$

61 $2 \log x = 1 + \log (x - 0{,}9)$

$x = 1$ y $x = 9$

62 $\log 1250 - 2 = 2 - \log (2^{2-x})^{2+x}$

$x = \dfrac{1}{9}$

63 $\log (x + 1) - 1 = \log x$

$x = \dfrac{1}{9}$

64 $\log 2 + \log (x - 3) = \log \sqrt{2x}$

$x = 5 + \sqrt{85}$

65 $2 \log x - \log (x + 6) = 1$

$x = 5 + \sqrt{85}$

66 $\log (x - 16) + \log (x + 5) = 2$

$x = \dfrac{3}{2}$

67 $\log (x + 1) + 2 \log 2 = \log (4x - 1) - \log (x - 1)$

$x = \dfrac{3}{2}$

68 $2 (\log x)^2 - 9 \log x + 10 = 0$

$x = 11$

69 $\log (x - 1) - \log (x - 10) = 1$

$x = 11$

70 $\log(x-1) - \log\sqrt{x+5} = \log\sqrt{5-x}$

$x = 1,\ \ x = 2$

71 $3\log x - \log(2x^2 + x - 2) = 0$

$x = 2$

Del 72 al 79. Resuelve los sistemas:

72 $\left.\begin{aligned} \log x + \log y &= 2 \\ x - y &= 20 \end{aligned}\right\}$

$x = 10^{7/4},\ \ y = 10^{5/4}$

73 $\left.\begin{aligned} \log x + \log y &= 3 \\ 2\log x - 2\log y &= 1 \end{aligned}\right\}$

$x = \sqrt[4]{10^7},\ \ y = \sqrt[4]{10^5}$

74 $\left.\begin{aligned} x + y &= 133 \\ \log x + \log y &= 3 \end{aligned}\right\}$

$x = -100,\ \ y = -\dfrac{1}{1000};\quad x = 100,\ y = \dfrac{1}{1000}$

75 $\left.\begin{aligned} \log x - \log y &= 5 \\ x \cdot y &= \frac{1}{10} \end{aligned}\right\}$

$x = 100,\ \ y = \dfrac{1}{1000}$

76 $\left.\begin{aligned} \log_2 y - 5 &= \log_2 x \\ x \cdot y &= 32 \end{aligned}\right\}$

$x = 3,\ y = 1$

77 $\left.\begin{aligned} 2^x + 2^y &= 10 \\ 2^{x-y} &= 4 \end{aligned}\right\}$

$x = 3,\ \ y = 1$

78 $\left.\begin{aligned} 2\log x - 3\log y &= 5 \\ 3\log x + \log y &= 2 \end{aligned}\right\}$

$x = -49,\ y = -\dfrac{1}{49};\ \ x = 49,\ y = \dfrac{1}{49}$

79 $\left.\begin{aligned} \log_7 x - \log_7 y &= 4 \\ x \cdot y &= 1 \end{aligned}\right\}$

$x = 49, \ \ y = \dfrac{1}{49}$

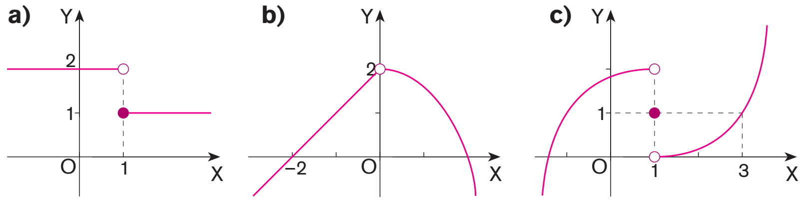
80 **Resuelve el sistema:** $\left.\begin{aligned} x^3 - y^2 &= 0 \\ y \log x - x \log y &= 0 \end{aligned}\right\}$

$x = \dfrac{9}{4}, \ y = \dfrac{27}{8}$

81 **Resuelve la ecuación:** $\mathbf{1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \ldots + 2^x = 4095}$

$x = 11$

1 **Observa las siguientes gráficas y determina cuál es el límite de cada una de las funciones en los puntos que se indican:**



en $x = 0$ y $x = 1$ **en $x = -2$ y $x = 0$** **en $x = 1$ y $x = 3$**

a) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 2$; $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 2$; $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 1$

$f(x)$ no tiene límite cuando $x \to 1$

b) $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 2$

c) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 2$; $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 0$; $f(x)$ no tiene límite cuando $x \to 1$; $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 1$

2 **Dadas**

$$f(x) = x^2 - 5x$$

$$g(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{si } x \leq -2 \\ 3 & \text{si } -2 < x < 2 \\ 5 - x^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

determina, si es posible el límite de cada una de ellas en los puntos de abscisa $x = -2$, $x = 0$ y $x = 2$.

$\lim\limits_{x \to -2} f(x) = 14$; $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = -6$;

$\lim\limits_{x \to -2} g(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$ no existe; $\lim\limits_{x \to 2} g(x) = 4$

$\lim\limits_{x \to -2} h(x) = 3$; $\lim\limits_{x \to 0} h(x) = 3$; $\lim\limits_{x \to 2} h(x)$ no existe

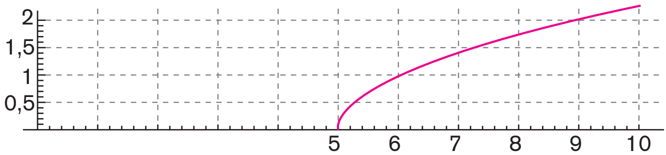
3 **Representa cada una de las funciones siguientes y halla los límites laterales en los puntos indicados.**

a) $f(x) = \sqrt{x - 5}$ **en $x = 5$**

b) $g(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \neq 2 \\ 4 & \text{si } x = 2 \end{cases}$ **en $x = 2$**

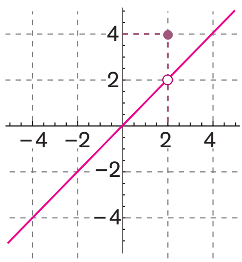
c) $h(x) = \begin{cases} x^2 - 1 \text{ si } x \le 0 \\ x - 1 \text{ si } x > 0 \end{cases}$ **en** $x = 0$

a)



$\lim\limits_{x \to 5^-} f(x)$ no existe; $\quad \lim\limits_{x \to 5^+} f(x) = 0$

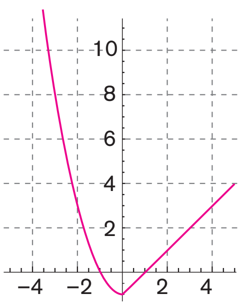
b)



$\lim\limits_{x \to 2^-} g(x) = 2$

$\lim\limits_{x \to 2^+} g(x) = 2$

c)



$\lim\limits_{x \to 0^-} h(x) = -1$

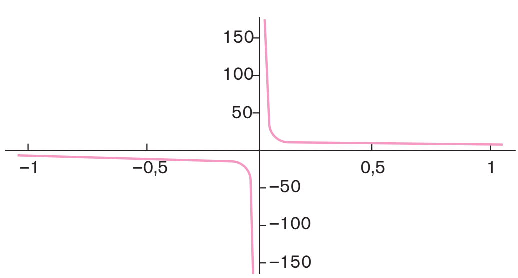
$\lim\limits_{x \to 0^+} h(x) = -1$

4 **Estudia si las gráficas de las funciones dadas poseen asíntotas verticales y ayúdate de una tabla de valores para dibujar la gráfica de la función en las proximidades de dicha asíntota.**

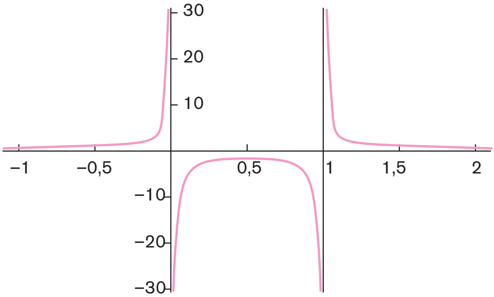
a) $f(x) = \dfrac{x+2}{x}$ $\qquad$ b) $f(x) = \dfrac{1}{2(x^2 - x)}$

c) $f(x) = \dfrac{-2}{(1+x)^2}$ $\qquad$ d) $f(x) = \dfrac{3-x}{x^2}$

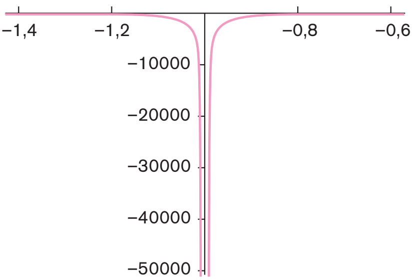
a) $x = 0$



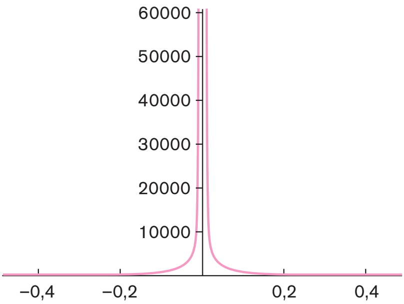
b) $x = 0$ y $x = 1$



c) $x = -1$



d) $x = 0$



5 **Calcula los siguientes límites:**

a) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2 + 4}{x - 2}$

b) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{2x + 6}{3}$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 + x}{x}$

d) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{2x + 4}{x - 4}$

e) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 2x}{x^2 + 3x - 10}$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} (2 - 3x^2)$

g) $\lim\limits_{x \to +\infty} (-3x^3 + 5x - 1)$

h) $\lim\limits_{x \to -\infty} (3x^2 - 5x^3)$

i) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{6x^2 - 3x + 1}{2x^2 + 5}$

j) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{5 - 4x^2}{(x + 3)^2}$

k) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{6x + x^2 - x^3}{3 + 2x^2}$

l) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3 + 3x - 5}{(2 + x)(2 - x)}$

a) -2; **b)** 0; **c)** 1; **d)** Por la izquierda $-\infty$. Por la derecha $+\infty$; **e)** $\frac{2}{7}$; **f)** $-\infty$; **g)** $-\infty$; **h)** $+\infty$; **i)** 3; **j)** -4; **k)** $-\infty$; **l)** $-\infty$

6 **Dada la función $f(x) = \begin{cases} x+3 & \text{si } x \le 1 \\ -x+1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$. Completar la tabla:**

x	0,9	0,99	0,999	0,9999	… $\to 1^-$
$f(x)$	3,9	3,99	3,999	3,9999	… $\to 4$

x	1,1	1,01	1,001	1,0001	… $\to 1^+$
$f(x)$	–0,1	–0,01	–0,001	–0,0001	… $\to 0$

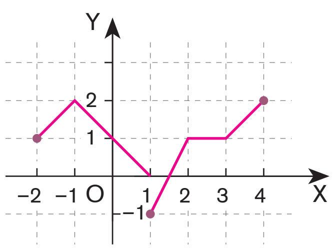
a) ¿Podemos decir que $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 4$ y $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 0$?

b) ¿Existe $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$?

a) si, si

b) no

7 **Observa la gráfica siguiente:**



Indicar, si existen, los límites siguientes:

a) $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$ b) $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$ c) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ d) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$

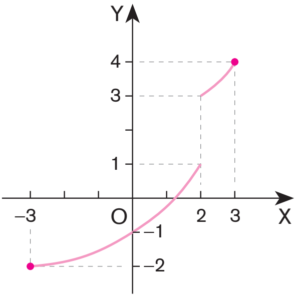
e) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ f) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ g) $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)$ h) $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)$

a) 2; **b)** 2; **c)** 2; **d)** 0; **e)** –1; **f)** no existe; **g)** 1; **h)** 2

8 **Haz una gráfica posible de una función que cumpla las cuatro condiciones siguientes:**

$D(f) = [-3, 3]$; $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 1$; $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 3$; $f(0) = -1$

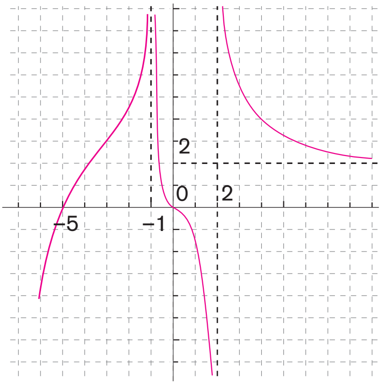
Por ejemplo:



9 **Haz una gráfica posible de una función que cumpla las siguientes condiciones:**

$\lim\limits_{x \to -\infty} f = -\infty$; $f(-5) = 0$; $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = +\infty$; $f(0) = 0$;

$\lim\limits_{x \to 2^-} f = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 2^+} f = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f = 2$

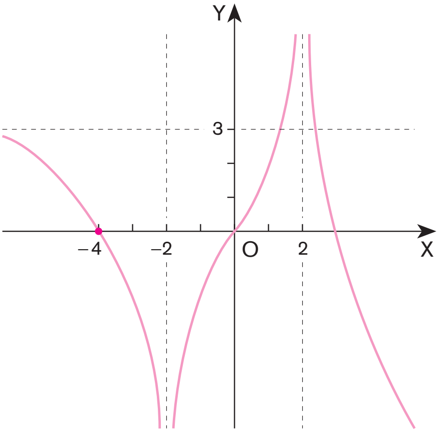


10 **Dibuja la gráfica de una función que cumpla las siguientes condiciones:**

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 3$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = +\infty$

$f(-4) = 0$ y $f(0) = 0$

Por ejemplo:



11 **Dada la función $f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x < -3 \\ x^2 - 6 & \text{si } -3 \le x \le 3 \\ 1 & \text{si } x > 3 \end{cases}$, indica si existe el límite de la función en $x = -3$ y en $x = 1$.**

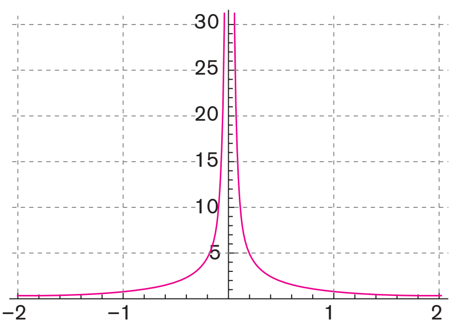
$\lim_{x \to -3} f(x) = 3$; $\lim_{x \to 1} f(x) = 5$

12 **Dada la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{si } x \neq 1 \\ 2 & \text{si } x = 1 \end{cases}$ estudia su límite cuando $x \to 1$.**

$\lim_{x \to 1} f(x) = 2$

13 **Sea la función $f(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{x} & \text{si x} < 0 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si x} > 0 \end{cases}$. Ayúdate de su gráfica para decir cuáles son los siguientes límites:**

$\lim_{x \to 0^-} f(x)$; $\lim_{x \to 0^+} f(x)$; $\lim_{x \to 0} f(x)$

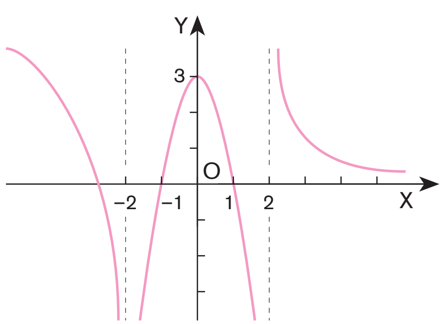


$\lim_{x \to 0^-} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$

14 **A la vista de la gráfica de la figura, contesta a las siguientes cuestiones:**



a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) =$

b) $\lim\limits_{x \to -2} f(x) =$

c) $\lim\limits_{x \to -1} f(x) =$

d) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) =$

e) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) =$

f) $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) =$

g) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) =$

h) $f(0) =$

a) $+\infty$

b) $-\infty$

c) 0

d) 3

e) $-\infty$

f) $+\infty$

g) 0

h) 3

15 **a) Determina los límites laterales de la función $f(x) = \dfrac{3-4x}{(x+1)^2}$ en $x = 1$.**

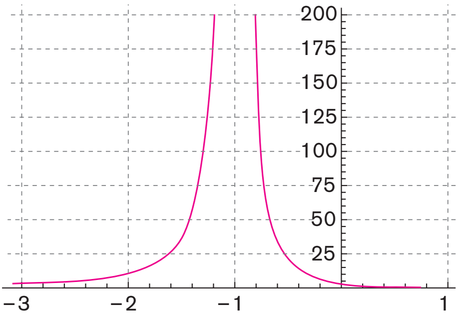
b) Justifica que la gráfica de la función tiene una asíntota vertical.

c) Dibuja la gráfica de la función en las proximidades de dicha asíntota.

a) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = -\dfrac{1}{4}$

b) Tiene asíntota vertical en la recta $x = -1$ porque los límites laterales en ese punto son mas infinito.

c)



16 **Determina las asíntotas de las funciones siguientes y representa gráficamente el comportamiento de la función en sus proximidades:**

a) $f(x) = \dfrac{x+5}{x+3}$

b) $f(x) = \dfrac{3x^2+1}{x^2-4}$

c) $f(x) = \dfrac{-3}{x+2}$

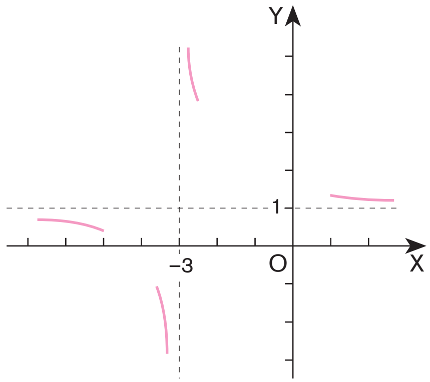
d) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-4x+3}$

e) $f(x) = \dfrac{4x}{x^2-x-2}$

f) $f(x) = \dfrac{2}{x^2+4}$

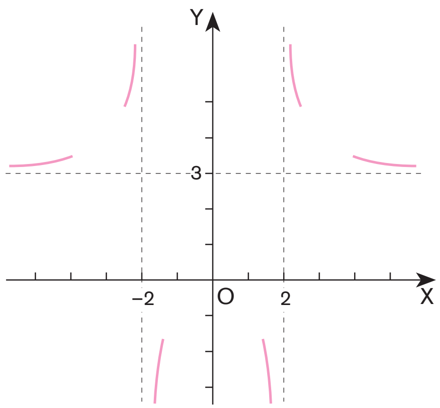
a) Horizontal $y = 1$

Vertical $x = -3$



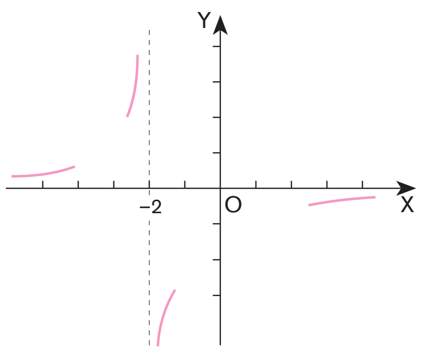
b) Horizontal $y = 3$

Vertical $x = 2,\ \ x = -2$



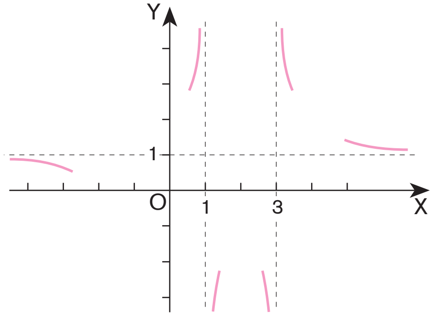
c) Horizontal $y = 0$

Vertical $x = -2$



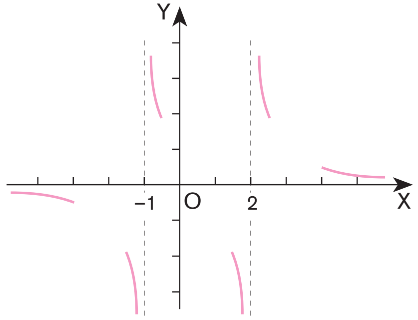
d) Horizontal $y = 1$

Vertical $x = 3,\ x = 1$



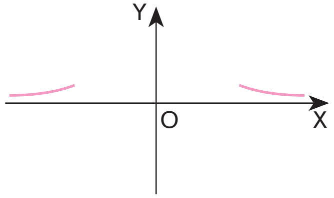
e) Horizontal $y = 0$

Vertical $x = 2,\ x = -1$



f) Horizontal $y = 0$

Vertical no tiene



17 **La teoría de la Relatividad enunciada por A. Einstein a principios del siglo pasado expresa, entre otros resultados, que la relación entre la masa en reposo m_0 y en movimiento m de un cuerpo con una cierta velocidad v es**

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$$

siendo c la velocidad de la luz (3×10^5 km/s).

a) ¿Qué predice la teoría en el caso de que el cuerpo alcance velocidades cercanas a la de la luz, si eso fuera posible?

b) ¿Confirma esta fórmula que la velocidad de la luz es inalcanzable?

a) Que su masa tendería a infinito

b) Si

Del 17 al 35. Calcula los siguientes límites:

18 a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{3x-2}$ b) $\lim_{x\to-\infty} \frac{3}{x+8}$

a) $\frac{1}{3}$; b) 0

19 $\lim_{x\to+\infty} \frac{3x-2}{x-5}$ $\lim_{x\to-\infty} \frac{3x-2}{x-5}$

a) 3; b) 3

20 a) $\lim_{x\to 0} \frac{2+x}{x^2}$ b) $\lim_{x\to-3} \frac{x+1}{(x+3)^2}$

a) $+\infty$; b) $+\infty$

21 $\lim_{x\to-5} \frac{1}{(x+5)^2}$ $\lim_{x\to 0} \left(3 - \frac{x+2}{x^2-1}\right)$

a) $+\infty$; b) 5

22 a) $\lim_{x\to 0} \frac{3x+1}{2x+3}$ b) $\lim_{x\to 2} (\sqrt{x+3} + \sqrt{2x+1})$

a) $\frac{1}{3}$; b) $2\sqrt{5}$

23 a) $\lim_{x\to-\infty} \frac{5}{x^2+3}$ b) $\lim_{x\to+\infty} 3\sqrt{x}$

a) 0; b) $+\infty$

24 a) $\lim_{x\to 1} \left(\sqrt{x}\right)^{x-3}$ b) $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2+1}{2x^2-3x}\right)^{x}$

a) 1; b) 0

25 a) $\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{3x+1}{x-5}\right)^{2x-4}$ b) $\lim_{x\to+\infty} \left[x \cdot \sqrt{x+4}\right]$

a) 0; b) $+\infty$

26 a) $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{3x^2+5x-3}{5x-10}$ b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-2x+1}{x^2+3}$

a) $+\infty$; **b)** 0

27 a) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x^2+3x-2}{x^2-2x}$ b) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{3x^3+3x}{5x^3-2x+1}$

a) 2; **b)** $\dfrac{3}{5}$

28 a) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x^2}{5x+2}$ b) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2+3x}{x^3-2}$

a) $+\infty$; **b)** 0

29 a) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{5x^2+2}{2x^5-3}$ b) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^3-3x}{2x+4}$

a) 0; **b)** $+\infty$

30 a) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+4}$ b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x^2-14x+12}{x^2-10x+4}$

a) 1; **b)** 2

31 a) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x+4}}{x-2}$ b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{x^2-1}$

a) 0; **b)** $\dfrac{3}{2}$

32 a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}$ b) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2-1}{x^2+3x+2}$

a) 4; **b)** -2

33 a) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{27+x^3}{27+9x}$ b) $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{x^2-9}{(x-3)^2}$

a) 3; **b)** $+\infty$

34 a) $\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{x^2-9}{(x-3)^2}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^5-3x^3}{x^3-2x^2+x}$

a) $-\infty$; **b)** 0

35 a) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(1-\dfrac{x^2+2}{x^2-1}\right)$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4-\sqrt{16+x}}{x}$

a) 0; **b)** $-\dfrac{1}{8}$

36 **La población de cierta isla viene dada en función del tiempo por la fórmula:**

$$p(t) = \frac{39000}{1 + 6 \times 2^{-0,1t}}$$

a) Determina la población actual (t = 0).

b) ¿Cuánto tiempo tardará en duplicarse la población inicial?

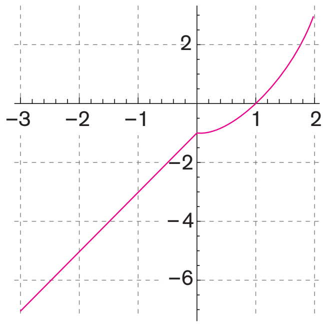
c) ¿Qué tendencia seguirá la población con el paso del tiempo? ¿Llegará a estabilizarse entorno a un número? ¿De cuál?

a) $p(0) = \frac{39000}{7} \simeq 5571$;

b) 12,63 años ó 12 años 7 meses 17 dias

c) La población tiende a crecer, estabilizandose en torno a 39 000 individuos.

37 **Representa gráficamente la función:** $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 \text{ si } x \in [-3, 0] \\ x^2 - 1 \text{ si } x \in]0, 2[\end{cases}$



38 **Dada la función:** $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 \text{ si } x \in]-4, -2[\\ 1 + 3x \text{ si } x \in [-2, 1] \\ x^2 \quad\;\; \text{ si } x \in]1, 5] \end{cases}$

a) ¿Es continua e x = –2?

b) ¿Es continua a la izquierda en x = 1?

c) ¿Es continua a la derecha en x = 1?

a) Si

b) Si

c) Si

39 **La función** $f(x) = \frac{2x + 2}{x^2 - 1}$, **¿es discontinua en x = –1? ¿La discontinuidad es evitable? ¿Cuál es el verdadero valor?**

Es discontinua en $x = -1$. La discontinuidad es evitable. El verdadero valor es –1.

40 **Dada la función** $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4x + 4}{x - 2} & \text{si } x \neq 2 \\ k & \text{si } x = 2 \end{cases}$

Determina el valor de *k* para que la función sea continua en $x = 2$.

$k = 0$

41 **Dada la función** $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 2x - 3} & \text{si } x \neq -1 \\ k & \text{si } x = -1 \end{cases}$**. Determina el valor de *k* para que la función sea continua en $x = -1$.**

$-\dfrac{1}{4}$

42 **Estudia la continuidad de la función** $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + 6x - 7}{x^2 + 2x - 3} & \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$

y clasifica, en su caso, la posible discontinuidad.

Es discontinua en $x = 1$. La discontinuidad es evitable.

43 **¿Puedes encontrar un valor de *k* para que la función**

$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ k & \text{si } x = 0 \end{cases}$ **sea continua en $x = 0$?**

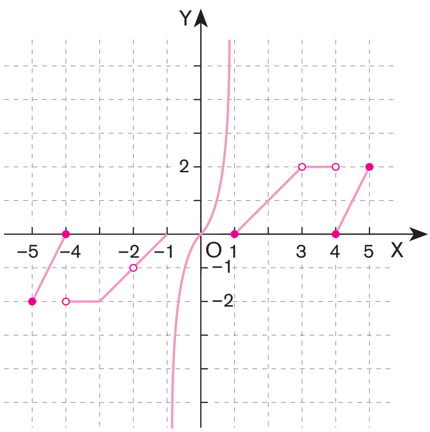
No

44 **Observa la gráfica de la función.**

a) Indica los intervalos donde es continua.

b) Indica los puntos de discontinuidad.

c) Calcula el verdadero valor o el salto cuando sea posible.



a) $]-5, -4[\cup]-4, -2[\cup]-2, -1[\cup]-1, 1[\cup]1, 3[\cup]3, 4[\cup]4, 5[$

b) $-4, -2, -1, 1, 3, 4$

c) En -4 el salto es 2; en -2 el verdadero valor es -1; en -1 el salto es ∞; en 1 es salto es ∞; en 3 el verdadero valor es 2; en 4 el salto es 2.

1 **Halla la tasa de variación media de las siguientes funciones en el intervalo que se indica:**

a) $f(x) = 4 + 3x^2$ **en** $[2, 5]$ **b)** $g(x) = 3 - (1 + x^2)$ **en** $[-1, 1]$

a) 21; **b)** 0

2 **Mismo ejercicio:**

a) $h(x) = \dfrac{3x+1}{x+5}$ **en** $[-1, 2]$ **b)** $j(x) = \dfrac{1}{x}$ **en** $[1, 3]$

a) t.v.m. $[-1, 2] = \dfrac{1}{2}$ **b)** t.v.m. $[1, 3] = -\dfrac{1}{3}$

3 **Se lanza un proyectil y el espacio recorrido *s* en metros en función del tiempo *t* en segundos es $s(t) = 500t - t^2$. Halla la velocidad media entre $t = 0$ y $t = 8$ seg.**

$V_m = 492$ m/seg.

4 **Utiliza la definición [1] para calcular la derivada de las funciones dadas en el punto que se indica.**

a) $f(x) = 2x^2 - 3x$ **en** $x = 0$

b) $f(x) = 1 + x - x^2$ **en** $x = -2$

c) $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ **en** $x = 1$.

a) $f'(0) = -3$ **b)** $f'(-2) = 5$ **c)** $f'(1) = -\dfrac{1}{4}$

5 **Utiliza la definición [2] para calcular la derivada de las funciones dadas en el punto que se indica.**

a) $f(x) = 3 - 2x$ **en** $x = 2$

b) $f(x) = x^2 - 2x$ **en** $x = -2$

c) $f(x) = 2x^2 + 3x - 1$ **en** $x = -3$

a) $f'(2) = -2$

b) $f'(-2) = -6$

c) $f'(-3) = -9$

6 **El espacio recorrido por un móvil viene dado por $e = 2t^2 - 12t$, *e* en metros y *t* en segundos. Halla la velocidad en los instantes $t = 3$ y $t = 10$ segundos.**

$v(3) = 0$ m/s; $v(10) = 28$ m/s

7 **Encuentra la función derivada de cada una de las siguientes funciones.**

a) $f(x) = x + 7$

b) $f(x) = 3 - 2x$

c) $f(x) = 2x^2$

d) $f(x) = (x + 3)^2$

e) $f(x) = \dfrac{3}{x}$

f) $f(x) = x^2 - 4$

g) $f(x) = x^2 + x$

h) $f(x) = \dfrac{x+3}{4}$

a) $f'(x) = 1$; **b)** $f'(x) = -2$; **c)** $f'(x) = 4x$; **d)** $f'(x) = 2x + 6$

e) $f'(x) = -\dfrac{3}{x^2}$; **f)** $f'(x) = 2x$; **g)** $f'(x) = 2x + 1$; **h)** $f'(x) = \dfrac{1}{4}$

8 **Halla la derivada de las siguientes funciones:**

a) $f(x) = 3x + 5$

b) $f(x) = x + \sqrt{x}$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x} + x^3$

d) $f(x) = x^5 + 5^x$

e) $f(x) = x^e + e^x$

f) $f(x) = \ln x + \lg_3 x$

g) $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$

h) $f(x) = \cos x + \operatorname{tg} x$

i) $f(x) = \operatorname{sen} x \cdot \cos x$

j) $f(x) = \dfrac{3x^2 + 5}{x + 1}$

k) $f(x) = (1 - 3x) \cdot \operatorname{tg} x$

l) $f(x) = 5 + \operatorname{arc\,sen} x$

m) $f(x) = \dfrac{\operatorname{arc\,sen} x}{\operatorname{sen} x}$

n) $f(x) = 3 \operatorname{arc\,tg} x$

ñ) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x + x}{\sqrt{x}}$

o) $f(x) = \dfrac{\operatorname{arc\,sen} x}{\operatorname{arc\,cos} x}$

p) $f(x) = \sqrt{x} \cdot \sqrt[4]{x}$

q) $f(x) = 2x \operatorname{arctg} x$

a) $f'(x) = 3$

b) $f'(x) = 1 + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

c) $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} + 3x^2$

d) $f'(x) = 5x^4 + 5^x \ln 5$

e) $f'(x) = ex^{e-1} + e^x$

f) $f'(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x \ln 3}$

g) $f'(x) = \cos x - \operatorname{sen} x$

h) $f'(x) = -\text{sen}\, x + \dfrac{1}{\cos^2 x} = -\text{sen}\, x + 1 + \text{tg}^2\, x$

i) $f'(x) = \cos^2 x - \text{sen}^2\, x$

j) $f'(x) = \dfrac{3x^2 + 6x - 5}{(1+x)^2}$

k) $f'(x) = -3\, \text{tg}\, x + (1 - 3x)\,(1 + \text{tg}^2\, x)$

l) $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

m) $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}\ \text{sen}\, x} - \dfrac{\text{arc sen}\, x \cos x}{\text{sen}^2\, x}$

n) $f'(x) = \dfrac{3}{1+x^2}$

ñ) $f'(x) = \dfrac{x + 2x\cos x - \text{sen}\, x}{2x\sqrt{x}}$

o) $f'(x) = \dfrac{\text{arc cos}\, x + \text{arc sen}\, x}{\sqrt{1-x^2}\ \text{arc cos}^2\, x}$

p) $f'(x) = \dfrac{3}{4\sqrt[4]{x}}$

q) $f'(x) = 2\, \text{arctg}\, x + \dfrac{2x}{1+x^2}$

9 **Utiliza la regla de la cadena para hallar la derivada de las siguientes funciones.**

a) $f(x) = (3 - x)^3$ **b)** $f(x) = \sqrt{2x+3}$ **c)** $f(x) = 3\cos 5x$

d) $f(x) = \ln \text{sen}\, x$ **e)** $f(x) = \cos^2 x$ **f)** $f(x) = e^{8x^2+5}$

a) $f'(x) = -3\,(3 - x)^2$; **b)** $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x+3}}$; **c)** $f'(x) = -15\, \text{sen}\, 5x$

d) $f'(x) = \dfrac{\cos x}{\text{sen}\, x} = \text{ctg}\, x$; **e)** $f'(x) = -2\, \text{sen}\, x \cos x = -\text{sen}\, 2x$

f) $f'(x) = 16x\, e^{8x^2+5}$

10 **Halla la tasa de variación media de las siguientes funciones en los intervalos que se indican.**

a) $f(x) = 3 - 2x$ **en** $[-1, 4]$ **b)** $f(x) = x^2 - 2x$ **en** $[-2, 2]$

c) $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ **en** $[1, 3]$ **d)** $f(x) = \text{sen}\, x$ **en** $[0, \pi]$

e) $f(x) = \ln x$ **en** $[1, e]$ **f)** $f(x) = \cos x$ **en** $[-\pi, \pi]$

a) t.v.m. $[-1, 4] = -2$ **b)** t.v.m. $[-2, 2] = -2$

c) t.v.m. $[1, 3] = -\dfrac{1}{8}$ **d)** t.v.m. $[0, \pi] = 0$

e) t.v.m. $[1, e] = \dfrac{1}{e-1}$ **f)** t.v.m. $[-\pi, \pi] = 0$

11 **Sea la función $f(x) = 2x^2 - x$. Halla la pendiente de la recta secante a la gráfica de f que pasa por los puntos de abscisas 0 y 2 respectivamente.**

$m = 3$

12 **Un móvil se desplaza según la ecuación**

$$e(t) = 5t^2 - 2t + 1$$

e en metros y t en segundos. Halla la velocidad media entre los instantes $t = 2$ y $t = 10$ segundos.

$v_m = 58$ m/s

Del 13 al 22. Utiliza la definición de derivada para hallar la derivada de las funciones siguientes en los puntos que se indican.

13 $f(x) = 1 - 3x^2$ **en** $x = 0$

$f'(0) = 0$

14 $f(x) = 3x - 5$ **en** $x = -2$

$f'(-2) = 3$

15 $f(x) = x^3$ **en** $x = 1$

$f'(1) = 3$

16 $f(x) = \dfrac{2}{3 + x}$ **en** $x = -1$

$f'(-1) = -\dfrac{1}{2}$

17 $f(x) = x^3 - x^2$ **en** $x = \dfrac{2}{3}$

$f'\left(\dfrac{2}{3}\right) = 0$

18 $f(x) = x^2 - 5x + 7$ **en** $x = 2$

$f'(2) = -1$

19 $f(x) = \dfrac{x}{x + 1}$ **en** $x = 0$

$f'(0) = 1$

20 $f(x) = x(x - 2)$ **en** $x = 1$

$f'(1) = 0$

21 $\boldsymbol{f(x) = \dfrac{1}{x+2}}$ **en** $\boldsymbol{x = 3}$

$f'(3) = -\dfrac{1}{25}$

22 $\boldsymbol{f(x) = x^3}$ **en** $\boldsymbol{x = 1}$

$f'(1) = 3$

Del 23 al 31. Utilizando la definición, encuentra en cada caso la función derivada *f'* de la función *f* dada e indica el conjunto donde *f* es derivable.

23 $\boldsymbol{f(x) = 3x^2 - 5}$

$f'(x) = 6x$, f es derivable en R.

24 $\boldsymbol{f(x) = x - x^2}$

$f'(x) = 1 - 2x$, f es derivable en R

25 $\boldsymbol{f(x) = 2x + 3}$

$f'(x) = 2$, f es derivable en R.

26 $\boldsymbol{f(x) = 3(1 + x^2)}$

$f'(x) = 6x$, f es derivable en R

27 $\boldsymbol{f(x) = \dfrac{5}{2x}}$

$f'(x) = -\dfrac{5}{2x^2}$, f es derivable en R – {0}

28 $\boldsymbol{f(x) = \dfrac{1}{x^2}}$

$f'(x) = -\dfrac{2}{x^3}$, f es derivable en R – {0}

29 $\boldsymbol{f(x) = 2 + x + x^2}$

$f'(x) = 1 + 2x$, f es derivable en R.

30 $\boldsymbol{f(x) = (2 + x)(2 - x)}$

$f'(x) = -2x$, f es derivable en R

31 $\boldsymbol{f(x) = \sqrt{x+1}}$

$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$, f es derivable en $]-1, +\infty[= R -]-\infty, -1]$

Del 32 al 41. Utiliza las reglas de derivación para encontrar la función derivada de la función *f* dada e indica el conjunto de derivabilidad de *f*.

32 $f(x) = x^5 + x^4 - 3x^2 + 1$

$f'(x) = 5x^4 + 4x^3 - 6x$, *f* es derivable en R

33 $f(x) = \dfrac{4}{3x}$

$f'(x) = -\dfrac{4}{3x^2}$, *f* es derivable en R – {0}.

34 $f(x) = 2\sqrt{x} + 6 + \dfrac{5}{x}$

$f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{5}{x^2}$, *f* es derivable en R – {0}

35 $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$

$f'(x) = \dfrac{-2}{(x-1)^2}$, *f* es derivable en R – {1}.

36 $f(x) = 4x^2\,(1 + x)^5$

$f'(x) = 8x(1 + x)^5 + 20x^2(1 + x)^4$, *f* es derivable en R

37 $f(x) = (1 + x^2)\ \sqrt{x}$

$f'(x) = \dfrac{5x^2 + 1}{2\sqrt{x}}$, *f* es derivable en]0, +∞[= R –]–∞, 0]

38 $f(x) = 3 - (1 + x)^2$

$f'(x) = -2(1 + x)$, *f* es derivable en R

39 $f(x) = \dfrac{x}{1 - x^2}$

$f'(x) = \dfrac{x^2 + 1}{(1 - x^2)^2}$, *f* es derivable en R – {–1, 1}

40 $f(x) = \dfrac{1}{3x^2 - 1}$

$f'(x) = \dfrac{-6x}{(3x^2 - 1)^2}$, *f* es derivable en R – $\left\{-\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right\}$

41 $f(x) = -\frac{2}{3}x^4 + 3x^2 - 7$

$f'(x) = 6x - \frac{8}{3}x^3$, f es derivable en R.

Del 42 al 49. Encuentra una ecuación de la recta tangente a cada una de las siguientes curvas en el punto cuya abscisa se indica.

42 $y = \frac{1}{2x^2}$ en $x = 1$

$2x - 2y - 1 = 0$

43 $y = 4x^2 - 3x$ en $x = \frac{1}{2}$

$y = x - 1$

44 $y = \frac{x^2 + 2}{x - 1}$ en $x = -2$

$2x - 3y - 2 = 0$

45 $y = \sqrt{x}$ en $x = 4$

$y = \frac{1}{4}x + 1$

46 $y = \sqrt{1 - x}$ en $x = \frac{3}{4}$

$4x + 4y - 5 = 0$

47 $y = \frac{x^2}{x + 1}$ en $x = 0$

$y = 0$

48 $y = 2x - 3x^2$ en $x = 1$ y $x = 3$

$4x + y - 3 = 0$ y $16x + y - 27 = 0$

49 $y = 3x - x^2$ en $x = \frac{3}{2}$

$y = \frac{9}{4}$

50 **Calcula las coordenadas del punto de la gráfica de la función $f(x) = 2\sqrt{5x}$ en el que la recta tangente forme con OX^+ un ángulo de 45°. Determina la ecuación de dicha recta.**

$x - y + 5 = 0$

51 **Determina las coordenadas de los puntos de la gráfica de $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ en los que la recta tangente es paralela al eje OX.**

$P(-1, -1)$ y $Q(1, 1)$.

52 **La ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función f en el punto de abcisa $x = -2$ es $y = -x + 2$. Determina el valor de $f'(-2)$ y las coordenadas del punto de tangencia.**

$f'(-2) = -1$; $P(-2, 4)$

53 **¿En qué puntos la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = 2x^3 - 4x$ tiene pendiente 2? ¿Hay algún punto de la gráfica en el que la recta tangente sea horizontal?**

Tiene pendiente 2 en $P(-1, 2)$ y $Q(1, -2)$.

Es horizontal en $P\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{8}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ y $Q\left(\sqrt{\frac{2}{3}}, -\frac{8}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$.

54 **Halla la derivada de las siguientes funciones:**

a) $f(x) = (x^2 - 1)^3$

b) $f(x) = \frac{2x - 3}{x - 2}$

c) $f(x) = (2x - 3)^3\,(2x + 4)$

d) $f(x) = \frac{\text{sen } x}{x}$

e) $f(x) = x \cdot \text{sen } x$

f) $f(x) = \sqrt{\text{sen } x}$

g) $f(x) = \cos 3x$

h) $f(x) = \text{tg}^2\, x$

i) $f(x) = 3x + \text{sen } 3x$

j) $f(x) = \frac{e^x}{x}$

k) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x}$

l) $f(x) = \text{sen } \frac{1}{x}$

m) $f(x) = e^{3x^2 - 2x}$

n) $f(x) = \text{sen } 2x \cdot \text{tg } 3x$

ñ) $f(x) = \text{tg } \sqrt{x}$

o) $f(x) = \text{arc sen } (x - 2)$

p) $f(x) = 3 \text{ arc cos } x^2$

q) $f(x) = \sqrt{\text{arc tg } x}$

r) $f(x) = \sec x$

s) $f(x) = \text{cosec } x$

t) $f(x) = \text{cotg } x$

u) $f(x) = \sqrt[4]{2x + 3}$

v) $f(x) = \text{sen}^2\, x^2$

w) $f(x) = \log_3 (5x + 4)$

x) $f(x) = \mathit{ln} (\cos x)$

y) $f(x) = \text{sen}^2\, x + \cos 2\, x$

z) $f(x) = \mathit{ln}\, \frac{x + 1}{x - 1}$

a) $f'(x) = 6x(x^2 - 1)^2$

b) $f'(x) = \dfrac{-1}{(x-2)^2}$

c) $f'(x) = 2(2x - 3)^2\,(8x + 9)$

d) $f'(x) = \dfrac{x \cos x - \operatorname{sen} x}{x^2}$

e) $f'(x) = \operatorname{sen} x + x \cos x$

f) $f'(x) = \dfrac{\cos x}{2\sqrt{\operatorname{sen} x}}$

g) $f'(x) = -3 \operatorname{sen} 3x$

h) $f'(x) = 2 \operatorname{tg} x\,(1 + \operatorname{tg}^2 x) = \dfrac{2 \operatorname{tg} x}{\cos^2 x}$

i) $f'(x) = 3 + 3 \cos 3x$

j) $f'(x) = \dfrac{e^x(x-1)}{x^2}$

k) $f'(x) = \dfrac{-\sqrt{x}}{2x^2}$

l) $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} \cos \dfrac{1}{x}$

m) $f'(x) = (6x - 2)\, e^{3x^2 - 2x}$

n) $f'(x) = 2 \cos 2x \operatorname{tg} 3x + 3 \operatorname{sen} 2x\,(1 + \operatorname{tg}^2 3x)$

ñ) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\,(1 + \operatorname{tg}^2 \sqrt{x})$

o) $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - (x-2)^2}}$

p) $f'(x) = \dfrac{-6x}{\sqrt{1 - x^4}}$

q) $f'(x) = \dfrac{1}{2\,(1 + x^2)\sqrt{\operatorname{arc\,tg} x}}$

r) $f'(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = \sec x \operatorname{tg} x$

s) $f'(x) = \dfrac{-\cos x}{\operatorname{sen}^2 x} = -\operatorname{cosec} x \operatorname{ctg} x$

t) $f'(x) = -1 - \operatorname{ctg}^2 x = \dfrac{-1}{\operatorname{sen}^2 x}$

u) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt[4]{(2x+3)^3}}$

v) $f'(x) = 4x \operatorname{sen} x^2 \cos x^2$

w) $f'(x) = \dfrac{5}{(5x + 4)\ln 3}$

x) $f'(x) = -\operatorname{tg} x$

y) $f'(x) = 2 \operatorname{sen} x \cos x - 2 \operatorname{sen} 2x$

z) $f'(x) = \dfrac{-2}{x^2 - 1}$

55 **Halla los puntos de la gráfica de la función $f(x) = x^3 - 5x^2 + 8x$ en los que la recta tangente tiene pendiente 8.**
Demuestra que hay dos puntos de la gráfica de f en los que la recta tangente es horizontal.

Tiene pendiente 8 en $P(0, 0)$ y $Q\left(\dfrac{10}{3}, \dfrac{220}{27}\right)$.

Es horizontal en $P\left(\dfrac{4}{3}, \dfrac{112}{27}\right)$ y $Q(2, 4)$.

56 **Estudia el crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = 2x^3 + 6x^2 - 8x + 5$ en los puntos de abscisa:**

a) $x = 0$

b) $x = 2$

c) $x = -\dfrac{1}{2}$

a) En $x = 0$ es decreciente

b) En $x = 2$ es creciente

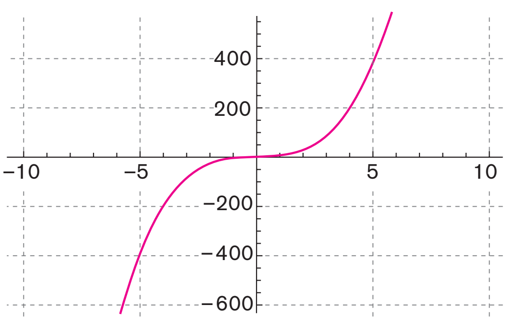
c) En $x = -\dfrac{1}{2}$ es decreciente

57 **Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento así como los posibles extremos relativos de las funciones siguientes. Esboza también una gráfica de dichas funciones.**

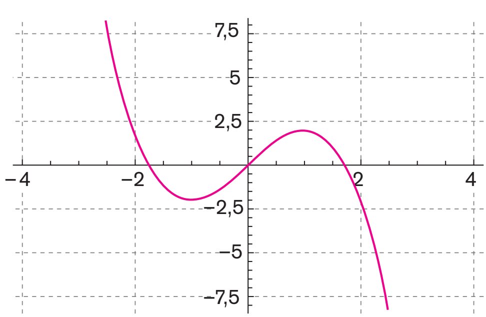
a) $f(x) = 3x^3 + 2x$ **b)** $f(x) = 3x - x^3$ **c)** $f(x) = 2x - x^2$

d) $f(x) = x^4 - 2x^2$ **e)** $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$ **f)** $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 9}$

a) Creciente en R.
Decreciente nunca.
Máximos y mínimos no tiene.



b) Creciente en $]-1, 1[$
Decreciente en $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty$
Máximo en $(1, 2)$
Mínimo en $(-1, -2)$

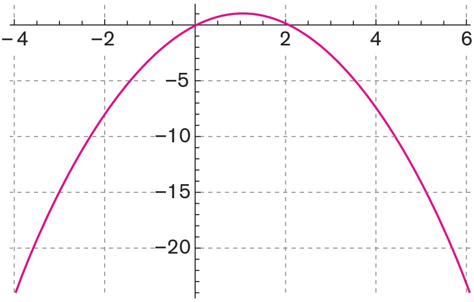


c) Creciente en]–∞, 1[

Decreciente en]1, +∞[

Máximo en (1, 1)

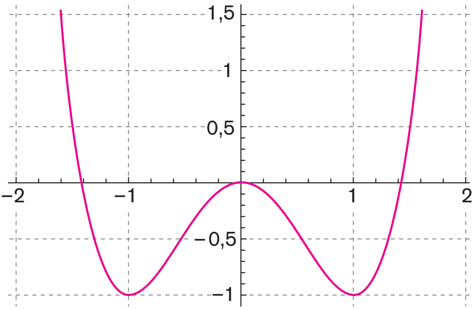
Mínimo no tiene



d) Creciente en]–1, 0[∪]1, +∞[

Decreciente en]–∞, –1[∪]0, 1[

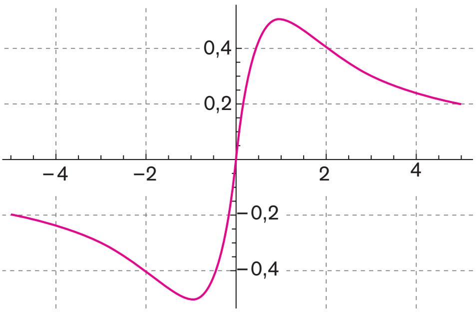
Máximo en (0, 0) Mínimos en (–1, –1) y (1, –1)



e) Creciente en]–1, 1[

Decreciente en]–∞, –1[∪]1, +∞[

Máximo en $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ Mínimo $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$

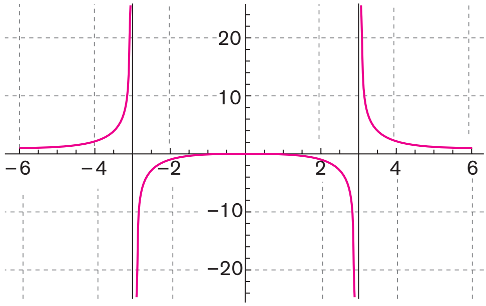


f) Creciente en $]-\infty, -3[\cup]-3, 0[$

Decreciente en $]0, 3[\cup]3, +\infty[$

Máximo en (0, 0)

Mínimo no tiene



58 **Halla *a, b* y *c* sabiendo que la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ pasa por (–1, 0) y tiene un máximo en (0, 4).**

$a = -3, \; b = 0, \; c = 4$

59 **Una población de 100 millones de bacterias está siendo tratada para su eliminación y se sabe que la población *p* en millones en el instante *t* (en días) es $p(t) = 100 - t^2$.**

a) Halla su tasa de variación entre los días $t = 1$ y $t = 2$.

b) ¿Cuál es la velocidad de decrecimiento de la población en $t = 3$?

a) –3 millones/día

b) 6 millones día

60 **Se ha trazado la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^3$ y se sabe que su pendiente es 3 y que pasa por el punto (0, –2). Halla el punto de tangencia.**

$P(1, 1)$

61 **Encuentra las funciones polinómicas**

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

cuya segunda derivada sea $x - 1$. ¿Cuál o cuáles de ellas tienen un mínimo relativo en el punto $\left(4, -\dfrac{1}{3}\right)$.

$$f(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + cx + d$$

$$f(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 13$$

62 **Supongamos que el rendimiento *r* de un alumno en un examen de una hora viene dado por $r = 300\ t(1 - t)$, donde $0 \le t \le 1$ es el tiempo en horas. Se pide:**

a) ¿En qué momentos aumenta o disminuye el rendimiento?

b) ¿En qué momentos el rendimiento es nulo?

c) ¿Cuándo se obtiene el mayor rendimiento y cuál es?

a) aumenta en $\left[0, \frac{1}{2}\right[$ y disminuye en $\left]\frac{1}{2}, 1\right]$

b) El rendimiento es nulo en $t = 0$ y $t = 1$.

c) Se obtiene el mayor rendimiento en $t = \frac{1}{2}$ y es $r = 75$.

63 **Un trabajador experimentado de una fábrica de juguetes puede montar un máximo de 100 juguetes diariamente. Si un trabajador sin experiencia ocupa su lugar, se estima que el número de juguetes que diariamente puede producir al cabo de *x* días es**

$$P(x)=100(1 - e^{-kx})$$

siendo *k* una constante que depende de cada individuo.

a) Obtén el valor de la constante *k* para un trabajador novato que es capaz de montar 50 juguetes con sólo un día de entrenamiento.

b) ¿Cuántos juguetes montará el cuarto día de entrenamiento?

c) Obtén el valor de la derivada de *P*(*x*) en $x = 1$ y en $x = 2$. Comenta los valores obtenidos en relación a la velocidad de aprendizaje de este trabajador sin experiencia.

a) $k = \ln 2$

b) 93

c) $P'(1) = 50 \ln 2$; $P'(2) = 25 \ln 2$. Al aumentar el tiempo la velocidad de aprendizaje disminuye.

64 **Sea la función** $f(x) = \dfrac{16}{x^2(x-4)}$

a) Determina su dominio de existencia y sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

b) Calcula sus asíntotas y extremos.

c) Representa gráficamente la función.

a) $D =]-\infty, 0[\ \cup\ ]0, 4[\ \cup\ ]4, \infty[$

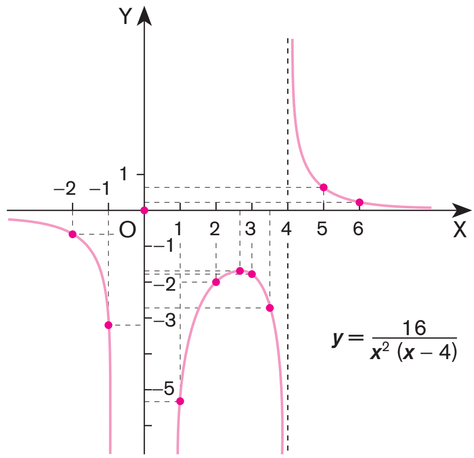
crecimiento $x \in \left]0, \frac{8}{3}\right[$

decrecimiento $x \in\ ]-\infty, 0[\ \cup \left]\frac{8}{3}, \infty\right[$

b) Asíntotas verticales $x = 0$ y $x = 4$

Asíntota horizontal $y = 0$ y $x = \frac{8}{3}$ máximo

c)



65 **Sea la función $f(x) = \dfrac{x^2}{(x-1)^2}$. Estudia su crecimiento y decrecimiento así como sus extremos relativos. Dibuja su gráfica.**

Creciente en $]0, 1[$

Decreciente en $]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$

Máximo no tiene

Mínimo en $(0, 0)$

66 **Calcula la derivada de $y = \dfrac{1}{x}$ y justifica si esa función es creciente o decreciente en el intervalo [1, 7].**

$y' = -\dfrac{1}{x^2}$. Es decreciente porque y' es negativa en dicho intervalo.

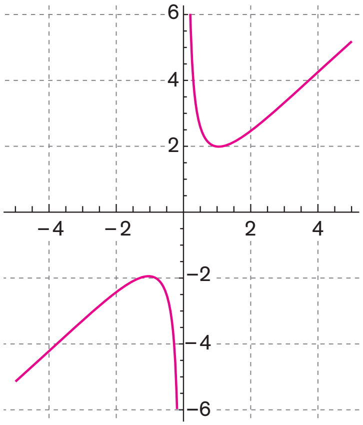
67 **Se define la función $f(x) = x - \dfrac{k}{x}$. Se pide:**

a) Determinar k para que dicha función tenga un máximo para $x = -1$.

b) Dibuja la gráfica de la función f para el valor de k hallado en el apartado anterior.

a) $k = -1$

b)



68 **El número de miembros de una peña deportiva fundada en 1993 es *x* años después de su fundación:**

$$f(x) = -\frac{1}{3}(x^3 - 9x^2 + 24x - 48)$$

a) ¿En qué año tuvo el máximo número de miembros entre 1993 y 1998?

b) ¿Cuál es la tendencia actual en 1998, creciente o decreciente?

c) ¿Llegará a quedarse sin socios?

a) En 1997.

b) Decreciente.

c) Si.

69 **Halla una función polinómica de segundo grado sabiendo que pasa por el punto *P*(1, 0) y que la pendiente de la recta tangente en el punto de abcisas $x = 2$ es 7.**

Todas las de la forma $f(x) = ax^2 + (7 - 4a)x + 3a - 7$, en particular $f(x) = x^2 + 3x - 4$.

70 **Halla el punto de la gráfica de la función $f(x) = 4x^2 - 3x + 5$ en el que la recta tangente es paralela a la bisectriz del segundo cuadrante.**

$P\left(\frac{1}{4}, \frac{9}{2}\right)$

71 **Encuentra una ecuación polinómica de segundo grado sabiendo que pasa por el punto *P*(–1, 6) y que tiene un mínimo en *Q*(2, –3).**

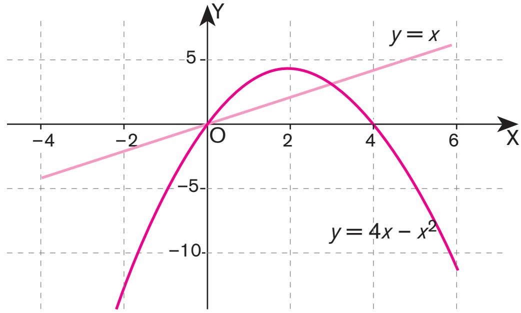
$f(x) = x^2 - 4x + 1$

72 **Sean las funciones $f(x) = 4x - x^2$ y $g(x) = x$.**

a) Represéntalas gráficamente.

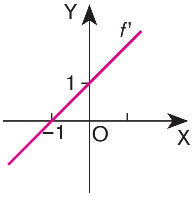
b) Encuentra un punto de la gráfica de la función *f* en el que la recta tangente sea paralela a la gráfica de la función *g*.

a)

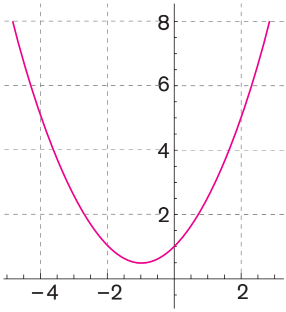


b) $P(2, 4)$

73 **La figura siguiente es la derivada de una función *f* continua en R. Esboza una posible gráfica de función *f*.**



Una posible gráfica es:



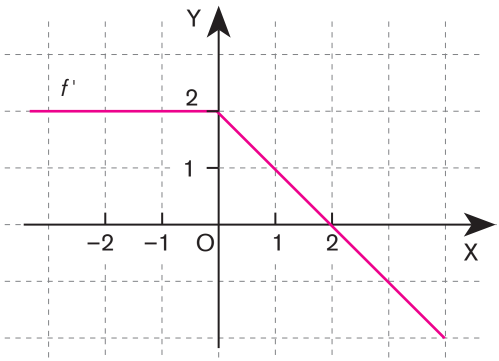
74 **Calcula los valores de *a, b* y *c* sabiendo que la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ pasa por los puntos (1, 0) y (0, –2) y presenta un máximo relativo cuando $x = \frac{3}{2}$.**

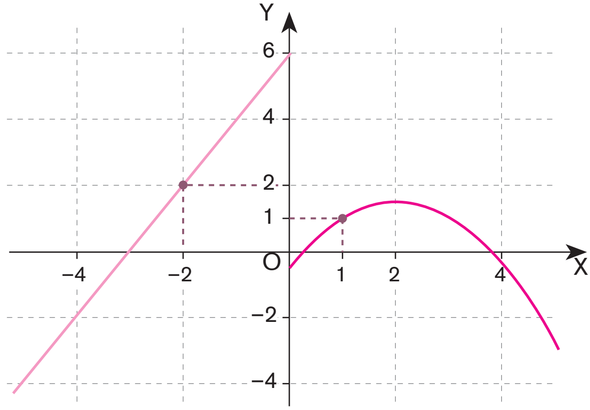
$a = -1, \ \ b = 3, \ \ c = -2$

75 **Sea la función $f(x) = x^2 - 6x + 5$. Calcula en qué punto de la gráfica la recta tangente tiene de pendiente 2.**

$P(4, -3)$

76 **La figura siguiente representa la gráfica de la derivada de una función *f* continua en R. Deduce a partir de ella su gráfica sabiendo que pasa por los puntos $A(-2, 2)$ y $B(1, 1)$.**





77 **Al vender un producto a un precio x entre 40 y 65 euros, el beneficio es $y = -x^2 + 100x - 2100$ euros. Obtén razonadamente el precio de x que hace máximo el valor de y.**

78 **Con un alambre de 4 metros se quiere construir el borde de un rectángulo de área máxima. ¿Qué dimensiones hay que dar al rectángulo?**

Los dos lados iguales a 2 m.

$x = 50$

79 **Descomponer el número 18 como suma de dos números positivos, de manera que el producto de uno de ellos por el cuadrado del otro sea máximo.**

6 y 12

80 **Halla el área del triángulo rectángulo de área máxima que tenga 10 m de hipotenusa.**

25 m^2

81 **Se desea comprar un terreno rectangular de 400 m^2 de superficie. ¿Cuáles serán las dimensiones más convenientes para que la construcción de la cerca resulte lo más económica posible?**

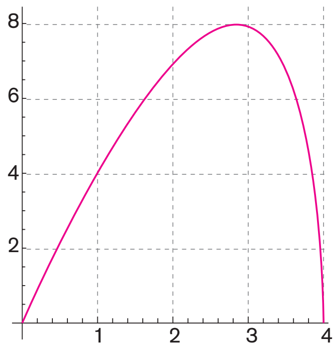
Un cuadrado de lado 20 m.

82 **De todos los pares *x* e *y* de números reales positivos cuya suma sea 30, determina el par (*x, y*) cuyo producto *P* = *x* · *y* es máximo.**

(15, 15)

83 **Obtén el área de un rectángulo inscrito en una circunferencia de radio 2 en función de la base *x* del rectángulo. Representa la función área obtenida y deduce de su derivada dónde es creciente o decreciente, así como cuál es el rectángulo de área máxima inscrito en dicha circunferencia.**

$A(x) = x\sqrt{16 - x^2}$



Creciente en $]0,\ 2\sqrt{2}\ [$

Decreciente en $[2\sqrt{2}\ ,\ 4[$

El rectángulo de área máxima es un cuadrado de lado $2\sqrt{2}$.

1 **La distribución de los 140 alumnos de 1º de Bachillerato según su calificación de Matemáticas obtenida en la 1ª Evaluación es:**

Calificaciones	Muy Deficiente	Insuficiente	Suficiente	Bien	Notable	Sobresaliente
Nº de alumnos	6	29	55	25	16	9

a) Clasifica la variable.

b) Elabora la tabla de frecuencias correspondiente.

c) Contesta a la preguntas siguientes: ¿Porcentaje de alumnos que han obtenido suficiente? ¿Número de alumnos que han sacado menos de un notable? ¿Porcentaje de alumnos que han aprobado?

a) Es una variable estadística cualitativa.

b)

Calificación	Frec. Abs.	Frec. rel.	Frec. Abs. Acum	Frec. rel. Acum.
MD	6	0,04	6	0,04
I	29	0,21	35	0,25
S	55	0,39	90	0,64
B	25	0,18	115	0,82
N	16	0,11	131	0,94
So	9	0,06	140	1
	N=140			

c) Han obtenido suficiente el 39%

Han obtenido menos de notable un 82%

Han aprobado un 79% (100% – 21%)

2 **Preguntados los alumnos de una clase por el número de hermanos que tenían, sus respuestas fueron: 3, 1, 0, 2, 1, 1, 2, 4, 4, 2, 1, 5, 0, 3, 1, 0, 2, 1, 1, 2, 2, 4, 2, 1, 0, 0, 5, 2, 2, 3, 1, 0, 2, 2, 1 y 2.**

a) Forma una tabla de distribución con efectivos y frecuencias acumuladas.

b) ¿Cuántos alumnos tienen dos hermanos?

c) ¿Cuántos tienen como máximo tres hermanos?

d) ¿Qué porcentaje de alumnos tiene menos de cuatro hermanos?

a)

nº hermanos (x)	Frecuencia absoluta (n)	Frecuencia Acumulada (n_i)
0	6	6
1	10	16
2	12	28
3	3	31
4	3	34
5	2	36
$N = 36$		

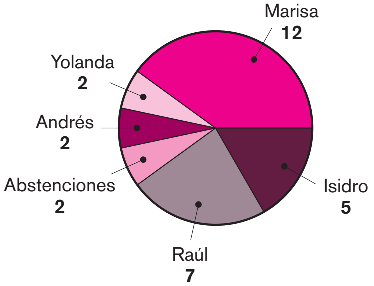
b) Hay 12 alumnos que tienen 2 hermanos

c) Hay 31 alumnos que tienen un número de hermanos menor o igual que 3

d) Estos 31 alumnos del apartado anterior representan un 91,2%

3 **Los resultados de las elecciones para delegado de curso han sido: Marisa, 12 votos; Raúl, 7; Isidro, 5; Yolanda y Andrés, 2 y 2 abstenciones. Representa los resultados en un diagrama de sectores.**

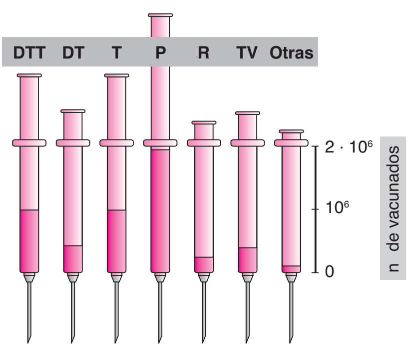
Al ser 30 el número de votos (incluidas las abstenciones) a cada voto le corresponden $\dfrac{360°}{30} = 12°$



4 **La distribución de las vacunaciones efectuadas por los responsables sanitarios de cierto país están reflejadas en el cuadro adjunto: construye su pictograma. ¿Es cuantitativo o cualitativo el carácter estudiado?**

Tipo de vacuna	Número de vacunados
Difteria-tétanos-tosferina	989 250
Difteria-tétanos	425 928
Tétanos	987 153
Poliomielitis	1 938 175
Rubéola	242 936
Triple vírica	393 043
Otras	105 306

El carácter estudiado es cualitativo.



5 **En una asignatura se establecen tres pruebas parciales y una global. La global vale el doble que cada una de las demás. Paloma tiene 5, 3,5 y 2,5 en las parciales y 7 en la global.**

a) ¿Cuál es su nota final?

b) Compárala con la media aritmética no ponderada.

a) $\text{Nota} = \dfrac{5 + 3{,}5 + 2{,}5 + 7 \times 2}{5} = 5$

b) $\bar{x} = \dfrac{5 + 3{,}5 + 2{,}5 + 7}{4} = 4{,}5$

6 **Un examen de Inglés consta de cuatro pruebas: lectura, gramática, vocabulario y práctica de conversación.**

Las cuatro pruebas no tienen el mismo valor, la prueba de lectura tiene un 4 de ponderación, la de gramática un 5, la de vocabulario un 3 y la de conversación un 6.

Un alumno ha obtenido las notas siguientes: lectura 4; gramática, 6; vocabulario, 8; y conversación 5,5. ¿Qué nota ha obtenido?

$$\text{Nota} = \frac{4 \times 4 + 6 \times 5 + 8 \times 3 + 5{,}5 \times 6}{4 + 5 + 3 + 6} = 5{,}7\widehat{2}$$

7 **En la fabricación de un tipo de piezas, aparece un número de ellas defectuosas. Se han estudiado 200 lotes diferentes de 500 piezas cada uno, obteniéndose la siguiente distribución de piezas defectuosas por lote:**

Piezas defectuosas	1	2	3	4	5	6	7	8
Núm. de lotes	5	15	38	42	49	32	17	2

Calcula la media, la moda y la mediana.

$\bar{x} = 4{,}445$; Mo = 5 piezas defectuosas; $M_e = \dfrac{4 + 5}{2} = 4{,}5$

8 **Calcula la media aritmética, la moda, mediana, desviación típica y varianza de la distribución siguiente en la que nos dan los pesos en Kg de los 32 alumnos de una clase de 1º de Bachillerato.**

Obtén las conclusiones que puedas con los valores hallados.

Peso	48	49	51	53	55	58	61	64	68	74
Nº de alumnos	1	2	3	4	4	6	5	4	1	2

$\bar{x} = 58$ kg; $M_o = 58$ kg; $M_e = 58$ kg; $S^2 = 42{,}0625$; $s = 6{,}49$

Es una distribución bastante simétrica en la que resalta la coincidencia de valores de la media, moda y mediana.

9 **Calcular los percentiles 40 y 65 de la distribución del ejemplo anterior.**

Edad (x_i)	[18, 21[	[21, 24[	[24, 27[	[27, 30[	[30, 33[
Nº de Jugadores (n_i)	20	87	52	18	3

$$P_{40} = 21 + \frac{72 - 20}{87} \cdot 3 = 22{,}8; \qquad P_{65} = 24 + \frac{117 - 107}{52} \cdot 3 = 24{,}6$$

10 **Las calificaciones en un examen de Matemáticas 1º de Bachillerato han sido:**

5, 4, 7, 4, 7, 6, 4, 4, 2, 7, 5, 1, 7, 3, 3, 1, 1, 5, 3, 9, 5, 2, 1, 6, 4, 4, 3, 5, 8, 5

a) Construye la tabla de efectivos, efectivos acumulados, frecuencias relativas y frecuencias relativas acumuladas.

b) ¿Cuántos alumnos hay con calificación menor o igual que 4?

c) ¿Cuántos tienen nota menor o igual que 6?

d) ¿Qué % de la población obtiene nota menor o igual que 4? ¿Y mayor que 4?

e) ¿Qué notas tiene el 80% de los alumnos con menores notas?

a)

Califi. (x)	nº alumnos (n)	Frecuen. acumul.	Frecuen. relativa	Frec. relat. acumulada
1	4	4	0,13	0,13
2	2	6	0,07	0,20
3	4	10	0,13	0,33
4	6	16	0,20	0,53
5	6	22	0,20	0,73
6	2	24	0,07	0,80
7	4	28	0,13	0,93
8	1	29	0,03	0,96
9	1	30	0,03	0,99
	$N = 30$			

b) 16 alumnos

c) 24 alumnos

d) El 53% tiene una nota menor o igual que 4 y el 47% tiene, lógicamente una calificación mayor que 4.

e) Se trata de hallar P_{80} y corresponde a una calificación menor o igual que 5,5

11 **He aquí la talla, en cm., de un grupo de alumnos de 1º de Bachillerato:**

173, 151, 160, 164, 148, 160, 159, 162, 154, 155,
162, 163, 147, 170, 157, 152, 149, 172, 164, 148,
154, 152, 148, 155, 172, 146, 162, 168, 157, 164,
165, 148, 159, 167, 170, 155, 167, 161, 168, 152

a) Forma una tabla de distribución con efectivos y frecuencias acumuladas, agrupando los datos en clases de amplitud 5 cm.

b) ¿Cuántos alumnos hay con una altura menor que 150 cm.?

c) ¿Qué porcentaje de alumnos tiene una talla menor que 160 cm.?

d) ¿Qué porcentaje de alumnos tienen una talla igual o superior a los 165 cm.?

Como el rango es 173 – 147 = 26, haremos 6 intervalos

a)

Talla	nº alumnos	Frec. Acum.
[145-150[	7	7
[150-155[	6	13
[155-160[	7	20
[160-165[	10	30
[165-170[	5	35
[170-175[	5	40
	N = 40	

b) 7 alumnos miden menos de 150 cm.

c) El 50%

d) El 25%

12 **Se lanza un dado y se anota la cifra que aparece. Los resultados, agrupados de tres en tres para facilitar su lectura, son:**

3-6-4	**1-4-4**	**2-5-4**	**6-5-2**	**2-4-5**	**2-3-3**
3-3-3	**6-4-1**	**3-4-6**	**3-1-3**	**5-4-1**	**3-5-3**
6-5-6	**6-4-1**	**5-5-5**	**5-5-2**	**6-3-2**	**5-3-5**
6-5-2	**5-1-1**	**3-3-1**	**5-5-3**	**6-4-5**	**1-2-6**
2-2-6	**5-6-3**	**1-4-1**	**6-2-4**	**5-4-4**	**4-1-2**
2-2-1	**2-4-5**	**2-4-2**	**2-1-2**	**6-5-1**	**6-6-3**
5-3-5	**4-2-5**	**5-4-4**	**3-1-5**	**5-6-2**	**3-6-3**
2-5-5	**6-5-5**	**3-6-3**	**4-3-4**	**6-3-1**	**1-6-2**
4-4-5	**3-1-5**	**4-3-4**	**4-4-6**	**1-4-1**	**4-6-6**
3-4-1	**2-6-3**	**3-3-3**	**4-4-1**	**5-2-6**	**6-3-3**

a) Cuenta el número de veces que ha salido cada número y su tanto por ciento; cuenta el total de lanzamientos y forma una tabla.

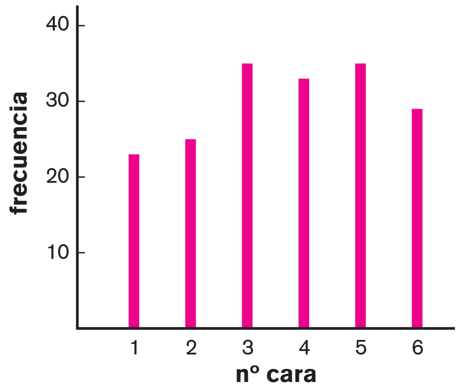
b) Haz una representación gráfica adecuada.

c) Comenta los resultados.

a)

nº cara	Frecuencia	%
1	23	12,8
2	25	13,9
3	35	19,4
4	33	18,3
5	35	19,4
6	29	16,1
	N = 180	

b) La representación gráfica adecuada es un diagrama de barras



c) El dado no está muy bien construido pues la frecuencia de los resultados 1 y 2 es menor de lo esperado, que sería una cifra cercana a 30

13 **En una charcutería se ha observado que las ventas inferiores al medio kilo de salchichón se distribuyen según la tabla.**

gramos	nº ventas	%
[0, 100[	24	20
[100, 200[	48	40
[200, 300[	33	27,5
[300, 400[	12	10
[400, 500[	3	2,5
	N = 120	100

Complétala y halla el peso de la venta media.

El peso de la venta media es $\overline{x}_p$ = 185 gramos

14 **En los parciales, no eliminatorios, de una asignatura se va arrastrando toda la materia anterior, por lo que el segundo vale el doble que el primero y el tercero el triple que el primero. Adela, Paco y Ramón han obtenido las calificaciones:**

	1º	2º	3º
Adela	4	5	6
Paco	6	5	4
Ramón	4	4	?

a) Halla la calificación final de Adela y la de Paco.

b) ¿Qué nota necesita Ramón para aprobar?

c) Halla las medias de Adela y Paco si valieran lo mismo los tres parciales.

d) Halla la nota que necesita Ramón en el caso c).

e) ¿Cuánto influyó más en la nota final el primer parcial, cuando eran ponderados los parciales o cuando no lo eran?

a) Adela: $\bar{x}_A = 4,\widehat{6}$; Paco: $\bar{x}_p = 4,5$

b) Necesita un $5,\widehat{3}$

c) Adela: $\bar{x}_A = 4,\widehat{6}$; Paco: $\bar{x}_p = 4,\widehat{6}$

d) Necisita un 5

e) Cuando las notas no son ponderadas todas suponen $\frac{1}{3}$ de la nota final mientras que al ser ponderadas la primera calificación es $\frac{1}{6}$ de la nota final. Por tanto la influencia es mayor en el primer caso.

15 **Un jugador ha obtenido las ganancias que se muestran en la tabla:**

g_i	–3	–1	0	2	3	4	5
n_i	1	1	4	1	2	4	2

Calcula la media, la mediana y las modas.

$\bar{x} = 2$

$M_e = 3$

$M_o = 0$ y 4 (bimodal)

16 **Una variable estadística discreta toma los valores 1, 2, 3, ..., *n* (*n* impar), con frecuencias 1. Prueba que la diferencia entre su media y su mediana es nula.**

En ambos casos el parámetro vale $\frac{n+1}{2}$.

17 **De la siguiente serie**

montante (x)	número (n)
[0, 8.000[	8
[8.000, 12.000[	9
[12.000, 16.000[	10
[16.000, 20.000[	8
[20.000, 24.000[	5
[24.000, 32.000[	6
[32.000, 40.000[	4

que da el montante de los talones abonados por un banco y el número de ellos, se pide:

a) **Construir el histograma y el polígono de frecuencias tomando una variable adecuada.**

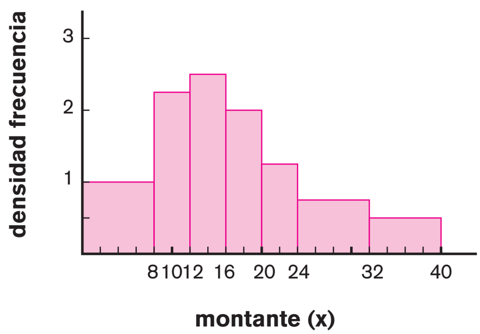
b) **Calcular la moda, la mediana y la media aritmética.**

c) **Calcular los cuartiles.**

d) **Calcular la varianza y la desviación típica.**

a) Tomaremos como nueva variable expresada en «miles» y como los intervalos no son de la misma amplitud, habrá que considerar las densidades de frecuencia

Montante (x)	número (n)	densidad de frecuencia
[0, 8[	8	1
[8, 12[	9	2,25
[12, 16[	10	2,5
[16, 20[	8	2
[20, 24[	5	1,25
[24, 32[	6	0,75
[32, 40[	4	0,5
	N = 50	



b) Intervalo modal [12, 16[. Moda = 14. Mediana = P_{50} = 15,2

$\overline{x}$ = 16,32

c) C_1 = 10; C_2 = 15,2; C_3 = 22

d) s^2 = 78,46; s = 8,86

18 **Una distribución tiene media $\overline{x}$. Pruébese que no cambia el valor de la media si se le añaden:**

a) ***n* valores iguales a la media**

b) **dos valores cuyas diferencias a la media sean opuestas.**

a) La nueva media $\overline{x}'$ será:

$$\overline{x}' = \frac{\frac{\Sigma x_i n_i}{N} + \overline{x}}{2} = \frac{\frac{\Sigma x_i n_i}{N} + \frac{\Sigma x_i n_i}{N}}{2} = \frac{2\,\frac{\Sigma x_i n_i}{N}}{2} = \frac{\Sigma x_i n_i}{N} = \overline{x}$$

b) Este caso es evidente pues se añaden dos valores de media cero.

19 **Una distribución posee varianza s^2. Pruébese que s^2 disminuye si se añaden uno o más valores iguales a la media.**

Como $s^2 = \dfrac{\sum\left(x_i - \overline{x}\right)^2 n_i}{N}$ si se añaden valores iguales a la media, los sumandos correspondientes $(\overline{x} - \overline{x})^2$ serán cero mientras que N aumenta pues se aumenta el número de valores. Por tanto, el numerador permanece constante y el denominador aumenta, luego el cociente disminuye.

20 **Hállese la media y la desviación típica de una distribución que consta de dos valores opuestos.**

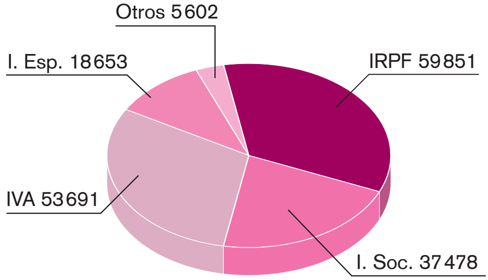
Si los valores son x y $-x$ entonces: $\overline{x} = 0$; $s = x$.

21 **Si todos los datos de una distribución se aumentasen en una unidad, ¿cómo se modificarían la media y la desviación típica? Justifica la respuesta.**

Son las propiedades vistas en la unidad.

La media queda aumentada en una unidad y la desviación típica no varía.

22 **Según el avance de la liquidación de los Presupuestos Generales del Estado del año 2006, la distribución por tipo de impuestos de los ingresos obtenidos por el Estado, en millones de €, fue el siguiente: por IRPF, se ingresaron 59851 millones de €; por el Impuesto de Sociedades, 37478 millones de €; por IVA, 53691 millones de €; por Impuestos Especiales, 18653 millones de €; y, finalmente, el Estado ingresó por otros conceptos impositivos, 5602 millones de €. Dibuja el gráfico de sectores correspondiente a estos datos.**



23 **Calcula la media y la mediana de los datos de la tabla adjunta que resume la observación hecha a 30 niños de la edad, en meses, a la que empiezan a andar.**

Meses	9	10	11	12	13	14	15
nº niños	1	2	4	13	6	3	1

Analizando la tabla de frecuencias, o bien mediante su representación gráfica, justifica por qué la media es superior a la mediana.

$\bar{x} = 12{,}13$ meses; $M_e = 12$ meses

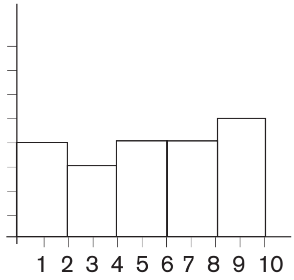
La media supera a la mediana por que los valores superiores a la mediana tienen mayor frecuencia (10) que los menores (7).

24 **En la tabla adjunta se indica la media y la desviación típica de las notas no agrupadas correspondientes a un exámen que ha sido realizado por los alumnos de tres grupos diferentes A, B y C, con 20 alumnos cada grupo.**

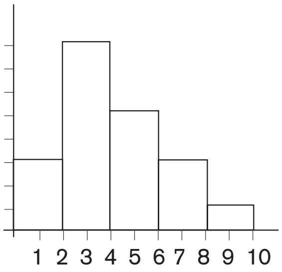
	A	B	C
Media	4.35	6.28	5.33
Desv. típica	2.37	2.20	2.68

Con las notas de cada uno de estos tres grupos agrupadas en intervalos de igual longitud, se han construido los histogramas H-1, H-2 y H-3.

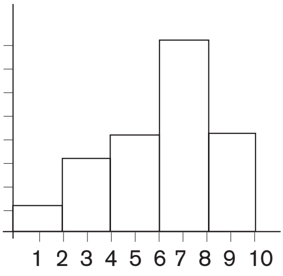
H-1



H-2



H-3



Se pide:

a) Razona cada uno de estos histogramas a qué grupo de notas pertenece, a las del grupo A, las del grupo B o las del C.

b) Tomando el centro de cada intervalo como representante de clase, calcula la media y la desviación típica correspondiente a cada uno de estos histogramas.

Comprueba si los resultados obtenidos en b) confirman tu razonamiento del apartado a).

a) La media más alta corresponde a la H-2 (el valor 7 se repite 8 veces) y la media menor es la H-3 (el valor 3 se repite 8 veces).

Así pues: Grupo A $\Rightarrow$ H-3
Grupo B $\Rightarrow$ H-2
Grupo C $\Rightarrow$ H-1

b) H-1: $\bar{x} = 5,3$; $s = 2,9$

H-2: $\bar{x} = 6,1$; $s = 2,2$

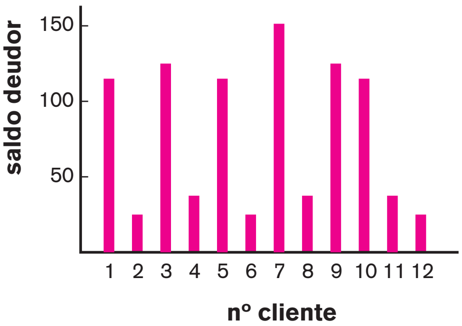
H-3: $\bar{x} = 4,1$; $s = 2,1$

Estos resultados confirman lo apuntado en el apartado a).

25 **Los saldos deudores de doce clientes de una empresa en miles de pesetas son:**

120, 25, 131, 32, 117, 27, 142, 30, 130, 122, 28, 25

Representa gráficamente estos datos. Calcula su media y desviación típica, explicando por qué es grande la desviación típica.



$\bar{x} = 77,4$ miles de pesetas; $s = 49,97$

Los valores están muy dispersos respecto del valor medio, de ahí el alto valor de la desviación típica

26 **A dos grupos de ocho profesores de letras (grupo A) y de ciencias (grupo B) se les ha planteado un test de cultura general con cien preguntas, arrojando el siguiente número de contestaciones acertadas:**

Grupo A	46	48	49	50	50	51	52	54
Grupo B	10	18	30	50	50	70	82	90

Halla para cada uno de los grupos la media, moda y mediana, así como la desviación típica. Interpreta los resultados.

Grupo A: $\bar{x} = 50$; $M_o = 50$; $M_e = 50$; $s = 2,3$
Grupo B: $\bar{x} = 50$; $M_o = 50$; $M_e = 50$; $s = 27,5$

Aunque la observación de la tabla ya indica la dispersión, los coeficientes de variación son: $V_A = 4,58\%$; $V_B = 55\%$.

La serie B es mucho más dispersa que la A.

27 **De una muestra de 75 pilas eléctricas, se han obtenido los siguientes datos sobre su duración en horas:**

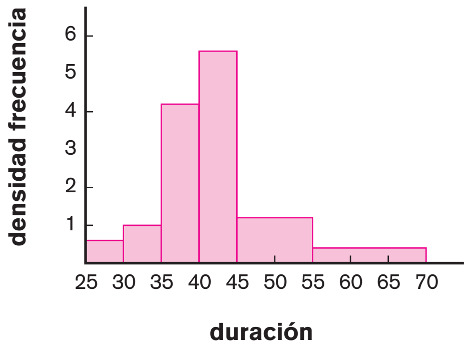
Duración	[25, 30[	[30, 35[	[35, 40[	[40, 45[	[45, 55[	[55, 70]
Nº de pilas	3	5	21	28	12	6

a) Representa gráficamente estos datos.

b) Obtén el porcentaje de pilas que, en dicha muestra, duran menos de 40 horas.

c) Tomando los centros de los intervalos, calcula la media y la varianza de la duración.

a)



b) El 38,7%

c) $\bar{x} = 42,63$; s = 7,98

28 **En un grupo de sociología se han obtenido las siguientes puntuaciones en un test de habilidad mental:**

50 23 45 36 56 34 56 67 45 34 23 45 23 67 54 21 34 43 12
78 36 49 53 27 66 31 45 22 33 44 48 53 57 77 31 23 47 52
33 37 64 21

Comprobar si en el intervalo $]\bar{x}-s,\ \bar{x}+s[$ **se encuentra aproximadamente el 68% de los datos.**

$[\bar{x} - s,\ \bar{x} + s] = [26,8,\ \ 55,7]$.

Como N = 42 y hay 28 puntuaciones entre 27 y 58, éstas suponen un 66,7% de los datos.

29 **Del ayuntamiento de cierto pueblo se han obtenido los siguientes datos sobre el número de fincas agrícolas en relación con la superficie explotada:**

Superficie (en Ha.) Nº	de fincas
[0 - 5[	2
[5 - 10[	10
[10 - 15[	3
[15 - 20[	4
[20 - 25[	1

a)Calcular la superficie media de explotación, la moda y la mediana.

b) Calcular los cuartiles de la distribución, explicando lo que significa cada uno.

a) $\overline{x} = 10{,}5$; intervalo modal [5, 10[; $M_e = 0$

b) $C_1 = 6{,}5$; $C_2 = M_e = 9$; $C_3 = 15$

Por debajo de 6,5 ha está el 25% de las fincas; la mitad de las fincas tienen una superficie menor o igual a 9 ha y el 75% de las fincas tienen una superficie menor o igual a 15 ha.

Entre 6,5 y 15 ha (el recorrido intercuartílico) se halla el 50% de las fincas.

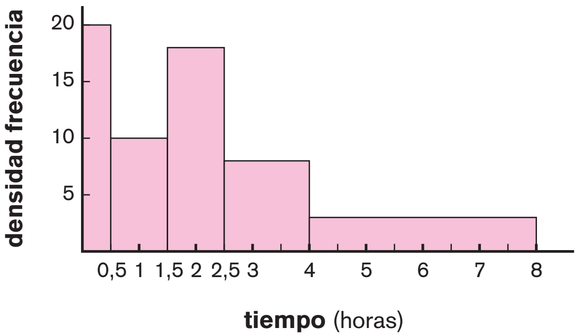
30 **Se dice que el precio de un determinado automóvil está en el percentil 70 de los precios de todos los automóviles que se ofrecen en el mercado. ¿Qué quiere decir esto?**

Quiere decir que el 70% de los automóviles tienen un precio menor o igual que dicho automóvil.

31 **Se preguntó a 62 personas cuánto tiempo habían dedicado a ver la televisión durante un cierto fin de semana. Los datos obtenidos son los siguientes:**

Tiempo en horas	Nº de personas
[0-0,5[	10
[0,5-1,5[	10
[1,5-2,5[	18
[2,5-4[	12
[4-8]	12

Dibújese el histograma de frecuencias. Hállese la media, la mediana y la desviación típica.



$\overline{x} \simeq 2{,}6$ horas; $M_e = 1{,}1$ hora; $s = 1{,}93$

32 **El departamento de contabilidad de una determinada empresa registró en el mes de mayo de 2008 los siguientes datos relativos a la percepción neta de sueldos, en euros, para sus empleados:**

Haberes Netos	Nº de empleados
1400	2
1700	14
2000	31
2300	22
2600	15
2900	3
3500	1

Calcular la media, mediana y moda de la distribución de sueldos.

$\bar{x}$ = 2163,64 €; M_e = 2000; M_o = 2000

33 **Obténgase el primer cuartil, el séptimo decil y el percentil 53 en la siguiente distribución:**

x	n
[2-6[	17
[6-10[	12
[10-15[	11
[15-25[	8
[25-32[	5
[32-40[	16
[40-45]	29

C_1 = 8,5; D_7 = 39, 8; P_{53} = 30,5

34 **Tras realizar una prueba a 20 personas, las puntuaciones obtenidas, agrupadas en intervalos, han sido:**

Intervalo	[0, 2[	[2, 4[	[4, 6[	[6, 8[	[8, 10]
Nº de personas	2	4	8	5	1

Hallar la media, mediana y varianza de la distribución.

$\bar{x}$ = 4,9; M_e = 5; s^2 = 4,19

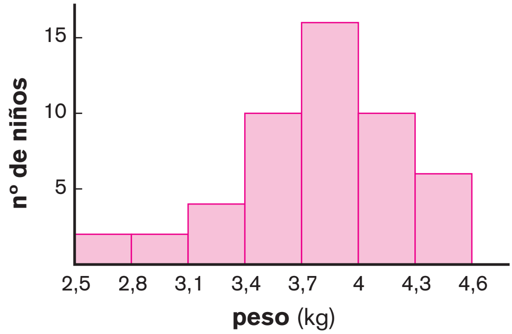
35 **Se ha controlado el peso de 50 recién nacidos, obteniéndose los siguientes resultados:**

Peso Kg	Nº niños
[2,5; 2,8[	2
[2,8; 3,1[	2
[3,1; 3,4[	4
[3,4; 3,7[	10
[3,7; 4[	16
[4; 4,3[	10
[4,3; 4,6]	6

Se pide:

i) Representar gráficamente estos datos eligiendo el sistema más adecuado.

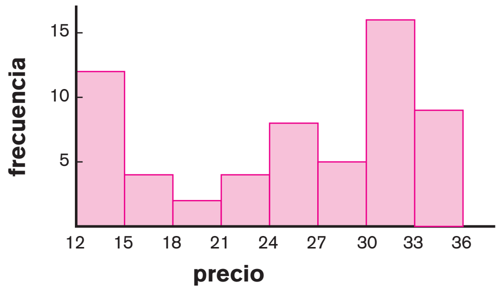
ii) ¿Cuántos de estos recién nacidos pesan por debajo de la media?



Como $\overline{x} = 3{,}79$, el nº de niños que pesan por debajo de la media es 18.

36 **Los datos que aparecen en la tabla siguiente se han obtenido en un estudio del precio medio del menú en 60 restaurantes. Hacer un diagrama de barras expresando la frecuencia de cada intervalo de precios. Calcular la media, la moda y la desviación típica.**

Euros	Frecuencia
12-15	12
15,01-18	4
18,01-21	2
21,01-24	4
24,01-27	8
27,01-30	5
30,01-33	16
33,01-36	9



$\overline{x} = 25{,}30$ €.

Intervalo modal [30,01; 33,00]

$s = 7{,}65$ €.

37 **Un jugador de baloncesto tiene dos ofertas para la próxima temporada en equipos de categorías similares.**

Al consultar la información de la pasada liga, observa que los componentes del equipo A tienen una media de 18 puntos con desviación típica de 4 puntos, mientras que en el equipo B la media es de 21 puntos con desviación típica de 9.

Dado que las condiciones económicas de ambos contratos son prácticamente las mismas, el jugador decide fichar por el equipo en el que tenga mayores posibilidades de destacar como *figura*. ¿Cuál deberá ser la opción elegida?

Deberá optar por el equipo B pues aunque es más irregular tiene más probabilidades de destacar con puntuaciones altas.

38 **La distribución en porcentajes de la talla de los soldados españoles en los distintos reemplazos de 1985 es:**

Talla (cm)	Porcentaje
menos de 150	0,1
[150, 155[	0,2
[155, 160[	1,8
[160, 165[	8,7
[165, 170[	22,2
[170, 175[	30,8
[175, 180[	22,7
180 o más	13,5

Suponiendo que la marca de la primera clase es 145 cm. y la de la última 185 cm. se pide:

a) Confecciona una nueva tabla incluyendo las marcas de clase y los porcentajes acumulados.

b) Determina los valores de P_{60}, P_{90}, D_2, D_4 y C_3.

c) Determina la talla media.

a)

Talla (cm)	Marca (x)	Porcentaje	Porcentaje acumulado
menos de 150	145	0,1	0,1
[150, 155[	152,5	0,2	0,3
[155, 160[	157,5	1,8	2,1
[160, 165[	162,5	8,7	10,8
[165, 170[	167,5	22,2	33
[170, 175[	172,5	30,8	63,8
[175, 180[	177,5	22,7	86,5
180 o más	185	13,5	100

b) $P_{60} = 174{,}8$; $P_{90} = 182{,}6$ (suponiendo la última clase la [180, 190[ )

$D_2 = 167{,}1$; $D_4 = 171{,}1$; $C_3 = 177{,}5$

c) $\bar{x} = 173$ cm.

39 **Una máquina fabrica arandelas de un diámetro teórico de 25 mm.Se realiza un control de funcionamiento de la máquina tomando al azar una muestra de 100 piezas. Las medidas de los diámetros han dado los siguientes resultados:**

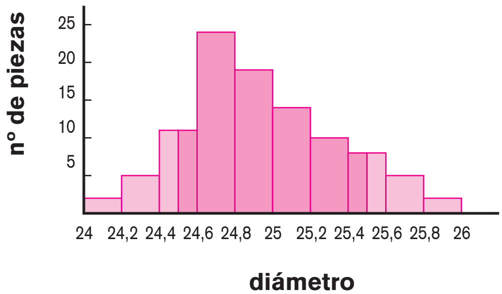
Diámetro	nº piezas
[24,0; 24,2[	2
[24,2; 24,4[	5
[24,4; 24,6[	11
[24,6; 24,8[	24
[24,8; 25,0[	19
[25,0; 25,2[	14
[25,2; 25,4[	10
[25,4; 25,6[	8
[25,6; 25,8[	5
[25,8; 26,0[	2

a) Representa estos resultados en un histograma.

b) Calcula la media, la desviación típica y el coeficiente de variación.

c) Se considera que la máquina tiene un rendimiento aceptable si el 80% de las piezas tienen un diámetro en el intervalo [24,5; 25,5]. ¿Cómo calificarías el rendimiento de esta máquina?

a)



b) $\overline{x} = 24,9$; $s = 0,4$; $V = 1,6\%$

c) El intervalo [24,5; 25,5] es el rayado en la figura y le corresponden $5,5 + 24 + 19 + 14 + 10 + 4 = 76,5$ piezas que son el 76,5% pues el número de piezas es 100.

La máquina tiene un rendimiento no aceptable.

40 **Una empresa alimenticia desea comprar una máquina que empaquete automáticamente sus productos en paquetes de 200 gramos. Para ello realiza diez pruebas en dos máquinas A y B obtiene los siguientes resultados en gramos:**

A	196	198	203	200	201	199	205	197	200	201
B	200	204	203	196	200	201	200	194	206	196

a) Halla la media y la desviación típica y el coeficiente de variación de cada máquina.

b) ¿Cuál crees que debe seleccionar?

a) Máquina A: $\bar{x} = 200$; $s = 2,57$: V = 1,28%

Máquina B: $\bar{x} = 200$; $s = 3,61$: V = 1,8%

b) La máquina A tiene menor dispersión y, por tanto, es la que se deberia seleccionar.

Tema 11 DISTRIBUCIONES BIDIMENSIONALES. REGRESIÓN Y CORRELACIÓN

1 **Calcula las medias, las varianzas, las desviaciones típicas y la covarianza de las dos distribuciones siguientes:**

a)

x_i	1	2	3	4	5
y_i	3	5	7	9	11

b)

x_i	–2	–1	0	1	3	5
y_i	4	2	1	1	3	6

a) $\bar{x} = 3$; $s_x = 1{,}41$; $s_x^2 = 2$ $\quad \bar{y} = 7$; $s_y = 2{,}83$; $s_y^2 = 8$ $\quad s_{xy} = 4$

b) $\bar{x} = 1$; $s_x = 2{,}38$; $s_x^2 = 5{,}67$ $\quad \bar{y} = 2{,}83$; $s_y = 1{,}77$; $s_y^2 = 3{,}14$ $\quad s_{xy} = 2{,}17$

2 **Calcula e interpreta el coeficiente de correlación de las tablas del ejercicio 1.**

a) $r = 1$. La dependencia es funcional, es la recta $y = 2x + 1$.

b) $r = 0{,}52$. La correlación es directa y débil.

3 **Con la tabla b) del ejercicio 1 calcula y dibuja la recta de regresión de y sobre x. Para un valor de $x = 5{,}5$, obtén el valor estimado de y.**

$y = 2{,}45098 + 0{,}38235x$

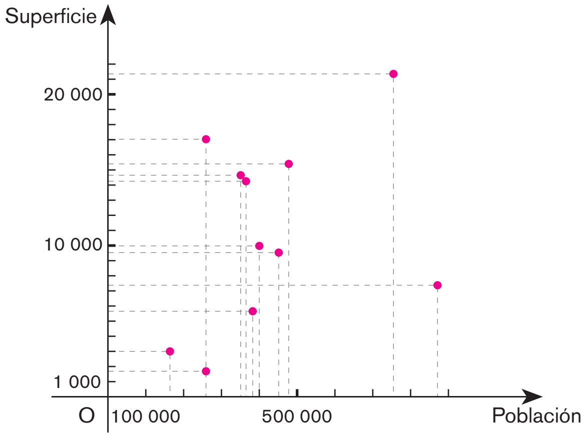
$y(5{,}5) = 4{,}5539$

4 **En el cuadro siguiente tienes la superficie en km² y la población de 10 provincias españolas. Estudia su posible correlación.**

Provincia	Población	Superficie
Alava	179 869	3 047
Albacete	341 812	14 858
Badajoz	754 454	21 657
Burgos	362 787	14 269
Cádiz	878 518	7 385
Cuenca	266 590	17 061
Girona	394 786	5 886
Huelva	401 549	10 085
Lugo	458 197	9 803
Toledo	488 599	15 368

$r = 0{,}228$ la correlación es escasa

Observando la nube de puntos obtendríamos la misma conclusión



5 **Vamos a buscar la relación entre la densidad de algunas sustancias expresada en (g/cm^3) y su calor específico expresado en cal/g. °C. Calcula el coeficiente de correlación lineal.**

Sustancia	Densidad	Calor específico
Agua	1	1
Hielo	0,92	0,5
Aluminio	2,69	0,217
Hierro	7,85	0,113
Plata	10,42	0,057
Oro	19,3	0,032
Plomo	11,005	0,031
Níquel	8,8	0,106
Cinc	7,1	0,093
Cobre	8,9	0,092
Estaño	7,29	0,054
Hidrógeno	0,07	3,4

$r = -0,57$ débil y negativa

6 **Considerar la serie estadística bidimensional**

x	–2	–1	0	1	23
y	–7	–4	–1	2	58

Calcular:

a) Las rectas de regresión.

b) El coeficiente de correlación.

c) Interpretar el resultado.

a) recta de regresión de y sobre x

$y = 2,58x - 1,24$

recta de regresión de x sobre y

$x = 0,39y + 0,48$

b) $r = 0,99$. El coeficiente nos indica que la correlación es muy fuerte y positiva

7 **Idem, para la serie:**

$$(x_i , y_j) = \{(1, 4), (2, 5), (4, 3), (2, 0), (5, 4)\}$$

a) $y = 0{,}11x + 2{,}89$

$x = 0{,}08y + 2{,}54$

b) $r = 0{,}09$ la correlación es escasa o nula

8 **Dada la distribución bidimensional:**

x	1	2	3	4	5
y	4	7	10	13	16

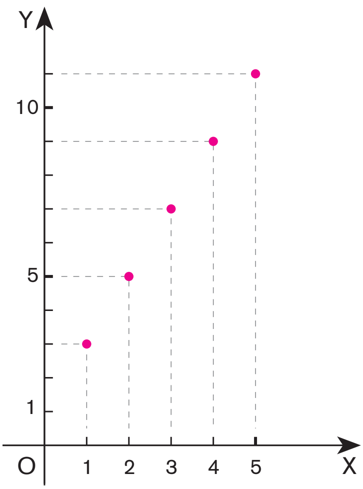
a) Dibujar la nube de puntos.

b) Comprobar que $S_x^2 = 2$; $S_y^2 = 18$; $S_{xy} = 6$.

c) Comprobar que las dos rectas de regresión coinciden.

d) ¿Puede hablarse de una relación funcional?

a)



b) $\overline{x} = 3$; $s_x^2 = 2$; $\overline{y} = 7$; $s_y^2 = 8$; $s_{xy} = 25 - 21 = 4$

c) $y = 2x + 1$; $2x - y + 1 = 0$ recta de regresión de y sobre x

$x = \dfrac{y-1}{2}$; $2x - y + 1 = 0$ recta de regresión de x sobre y

d) Si, la recta es $y = 2x + 1$

9 **Dada la distribución:**

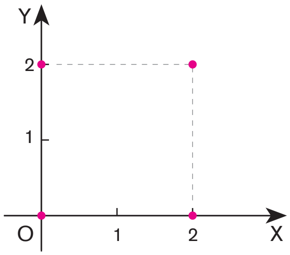
x	0	0	2	2
y	0	2	0	2

a) Dibujar la nube de puntos.

b) Comprobar que $S_x^2 = S_y^2 = 1$ y que $S_{xy} = 0$.

c) Comprobar la perpendicularidad de las rectas de regresión.

a)



b) $s_x^2 = s_y^2 = 1$; $s_{xy} = 0$

c) recta de regresión de y sobre x, $y = 1$

recta de regresión de x sobre y, $x = 1$

10 **La distribución de edades y presión arterial de 10 personas es:**

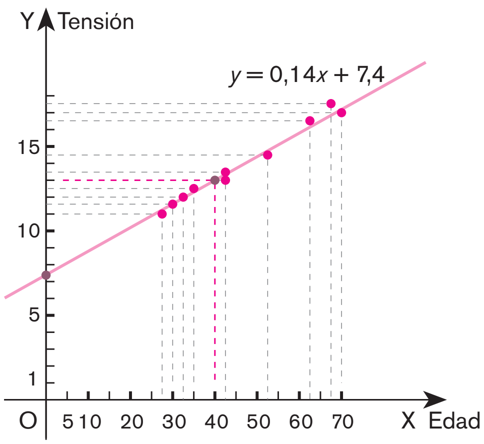
Edad (X)	30	28	35	42	51	42	63	32	70	67
Tensión (Y)	11,5	11,3	12,5	13,5	14,6	13	16,6	12	16,9	17

a) Representar la nube de puntos. ¿Se puede proceder a un ajuste lineal?

b) Calcular el coeficiente de correlación lineal.

c) Prever la tensión de una persona de sesenta años.

a)



Si se puede proceder a un ajuste lineal

b) $r = 0,99$

c) Con 60 años la tensión será 15,8

En las series estadísticas de los ejercicios 11 y 12 se pide:

a) Dibujar la nube de puntos.

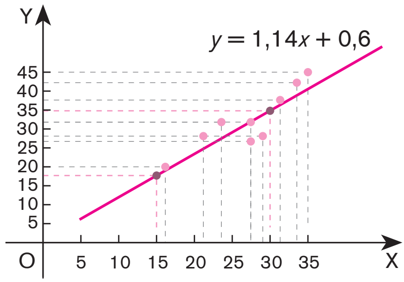
b) Calcular la recta de regresión de *Y* sobre *X* y representarla en la nube de puntos.

c) Calcular el coeficiente de correlación y comentar el resultado.

11

16	28	23	24	28	29	31	34	35
20	26	28	32	32	28	36	41	45

a)



Si se puede proceder a un ajuste lineal

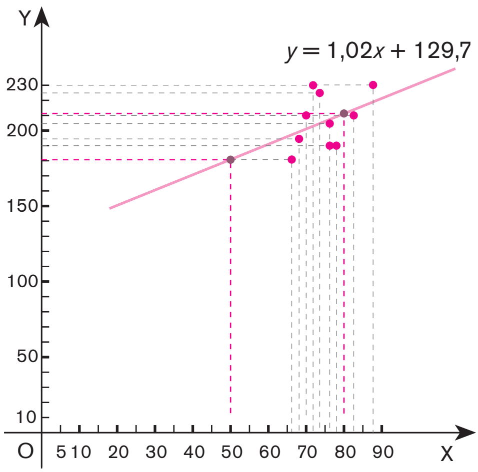
b) $y = 1,14x + 0,6$

c) $r = 0,87$ es fuerte y positiva

12

68	76	78	70	74	72	78	66	86	82
195	205	190	210	225	230	190	180	230	205

a)



b) $y = 1,02x + 129,7$

c) $r = 0,36$ muy débil la correlación existente

13 **La tabla adjunta proporciona las tasas de variación interanual del Índice de Precios al Consumo y los miles de parados registrados en las oficinas del INEM, de los doce meses del año 2006:**

	Tasa IPC	Parados		Tasa IPC	Parados
Enero	4,2	2171,5	Julio	4	1955,0
Febrero	4	2169,3	Agosto	3,7	1983,7
Marzo	3,9	2148,5	Septiembre	2,9	1966,2
Abril	3,9	2075,7	Octubre	2,5	1992,8
Mayo	4	2004,5	Noviembre	2,6	2023,2
Junio	3,9	1959,8	Diciembre	2,7	2022,9

Valora, con el coeficiente de correlación lineal, el grado de dependencia lineal entre la tasa del IPC y el número de parados.

$r = 0{,}399 \Rightarrow$ la relación es débil y en sentido creciente.

14 **Las tasas de variación mensual e interanual del Índice de Precios al Consumo correspondientes a los seis primeros meses del año 2007 se recogen en la tabla siguiente:**

	Variación mensual	Variación anual
Enero	–0,7	2,4
Febrero	0,1	2,4
Marzo	0,8	2,5
Abril	1,4	2,4
Mayo	0,3	2,3
Junio	0,2	2,4

Se pide:

a) Las medidas aritméticas y las desviaciones típicas de ambas variaciones.

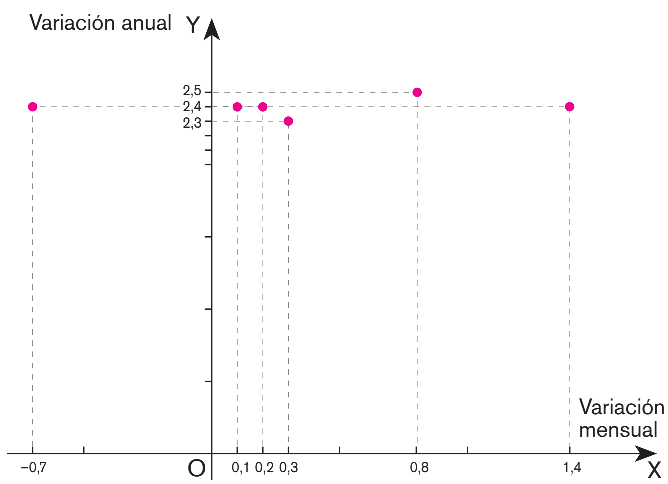
b) El coeficiente de correlación lineal entre las dos variaciones.

c) Relacionar el coeficiente de correlación anterior con la nube de puntos.

a) 0,35 y 0,645; 2,4 y 0,058

b) $r = 0{,}223$ relación débil y positiva

c)



La nube de puntos puede representarse por una recta paralela al eje de abcisas, y se confirma la débil relación lineal de las variaciones mensuales y anuales del IPC en el primer semestre del año 2007.

15 **La nota media del expediente (x) y la nota obtenida de pruebas de acceso a la Universidad (y) de ocho alumnos elegidos al azar fueron:**

x	6,24	7,91	7,04	6,13	6,38	6,48	6,44	5,99
y	4,20	4,65	6,51	6,73	5,20	4,60	5,69	3,42

Se pide:

a) Obtener el coeficiente de correlación entre ambas variables e interpretar el resultado.

b) Calcular la recta de regresión de y sobre x.

c) Según el ajuste que ofrece la recta de regresión, ¿qué nota sería esperable que sacara en las pruebas de acceso un alumno con nota media de expediente 8,31?

a) $r = 0,1$ escasa correlación

b) $y = 0,2x + 3,8$

c) $y = 5,46$

16 **Considera la serie estadística bidimensional**

x	2	4	5	5	8	9
y	3	3	1	3	6	4
n	2	1	3	4	2	3

a) Representa la nube de puntos.

b) Calcula el coeficiente de correlación e indica qué significa el valor obtenido.

c) Calcula las rectas de regresión y represéntalas en la nube de puntos.

$r = 0,557$; $y = 1,13 + 0,36x$; $x = 3 + 0,858y$

17 **Una empresa dispone de los datos de la tabla**

número de vendedores	3	4	5	8	10
número de pedidos	90	110	140	190	235

Estimar el número de pedidos que obtendrían 9 vendedores. Indica el método utilizado en el cálculo de la estimación y la fiabilidad de esta estimación.

9 vendedores tendrían un número de pedidos estimado de 214. Se ha utilizado la recta de regresión $y = 20,26x + 31,45$.

Con un coeficiente $r = 0,9$, dependencia muy fuerte.

18 **Una empresa tiene los datos de la tabla**

mill. en publicidad	1	2	3	4	5	6	7	8
ventas	15	16	14	18	21	19	19	21

Estima las ventas esperadas al invertir 10 millones en publicidad.

Explica la fiabilidad de la estimación realizada. Los datos de ventas de la tabla son también en millones.

Ventas esperadas con 10 millones de publicidad serán 22,77 millones

$r = 0{,}83$, es una correlación fuerte

19 **Construye, razonadamente, dos distribuciones bidimensionales que tengan coeficientes de correlación cercanos a 0 y a 1.**

x	2	3	5	6
y	5	8	15	19

$r \Rightarrow 0{,}99$

x	2	3	5	6
y	1	8	1	2

$r \Rightarrow -0{,}27$

20 **Se ha realizado un estudio sobre las preferencias de las ratas con respecto a la temperatura del agua. Un grupo de 10 ratas fue sometido a dos temperaturas del agua diferentes y se midió el tiempo de permanencia en este medio. Estos fueron los resultados.**

26°C	6	7	8	5	9	3	6	4	7	2
30°C	1	8	3	10	4	7	9	2	4	6

Calcular la covarianza y el coeficiente de correlación. Analizar qué tipo de dependencia existe entre las variables.

$s_{xy} = -1{,}28$; $r = -0{,}21$

Existe una dependencia escasa

21 **La media de los pesos de una población es de 65 kg y la de las estaturas 170 cm, mientras que las desviaciones típicas son de 5 kg y 10 cm respectivamente y la covarianza de ambas variables es 40. Calcular la recta de regresión de los pesos respecto de las estaturas. ¿Cuánto estima que pesará un individuo de 180 cm de estatura?**

$x = 0{,}4y - 3$; x = peso en kg; y = estatura en cm;

$y = 180$ cm $\rightarrow$ peso = 69 kg

22 **La siguiente tabla ofrece los resultados de 6 pares de observaciones realizadas para analizar el grado de relación existente entre dos variables X e Y.**

X	2	2	3	3	3	4
Y	0	1	1	2	4	3

Obtener:

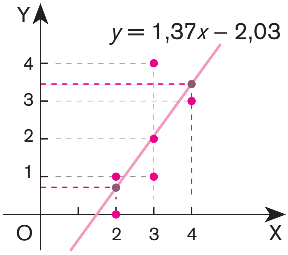
a) Recta de regresión de Y sobre X.

b) Representación gráfica de la misma, así como de los pares de observaciones anteriores.

c) ¿Qué grado de relación lineal existe entre ambas variables?

a) $y = 1{,}37x - 2{,}03$

b)



c) El coeficiente de correlación r = 0,71 positiva y media.

23 **Calcula la recta de regresión correspondiente a la distribución siguiente**

Altura sobre el nivel del mar	0	184	231	481	730	911	1550
Presión atmosférica	760	745	740	720	700	685	650

¿Qué presión atmosférica habría sobre Peña Vieja (2.600 metros de altitud aproximadamente)?

$y = -0{,}07x + 756{,}40$.

Presión atmosférica sobre Peña Vieja

$x = 2.600$; $y = 574{,}4$

24 **¿Qué significa que en una distribución bidimensional el coeficiente de correlación sea 0? ¿Y que sea –1?**

$r = 0 \rightarrow$ las variables son linealmente independientes y no están correlacionadas

$r = -1 \rightarrow$ la dependencia lineal es funcional, pero inversa

25 **En una muestra fiable de una determinada región se han obtenidos los siguientes datos:**

AÑO	1994	1995	1996	1997	1998	1999
X	13	20	23	25	27	31
Y	80	80	90	100	110	110

AÑO	2000	2001	2002	2003	2004	2005
X	36	46	55	63	70	76
Y	120	160	180	190	200	210

(*X* = nº de telespectadores en miles. *Y* = nº de enfermos mentales).

Calcular el coeficiente de correlación.

¿Se puede inferir de este resultado que la televisión altera la salud mental de los telespectadores? ¿Se puede deducir que en esa región compran televisiones una vez que se han vuelto locos?

r = 0,99. Son dos variables que aunque su correlación sea alta no tienen ningún tipo de dependencia.

26 **Una compañía desea hacer predicciones del valor anual de sus ventas totales en cierto país a partir de la relación entre éstas y la renta nacional. Para investigar la relación cuenta con los siguientes datos:**

X	189	190	208	227	239	252	257	274	293	308	316
Y	402	404	412	425	429	436	440	447	458	469	469

donde X representa la renta nacional en millones de dólares e Y representa las ventas de la compañía en miles de dólares en el periodo desde 1995 hasta 2005 (ambos inclusive).

Se pide:

a) Obtener la recta de regresión de Y sobre X. Brevemente: ¿qué representa esta recta?

b) Calcular el coeficiente de correlación lineal entre X e Y e interpretarlo.

c) En 2006 se espera que la renta nacional del país sea 325 millones de dólares. ¿Cuál será la predicción para las ventas de la compañía en este año?

a) $y = 0{,}53x + 301{,}67$

b) $r = 0{,}998$ es una correlación muy fuerte y positiva

c) $y = 473{,}92$ millones de dólares, siendo $x = 325$ millones de dólares

27 **Se han medidos los pesos y tallas de 5 personas, obteniéndose los siguientes datos:**

Peso (x) kg	50	55	55	60	60
Talla (y) cm	150	160	170	180	190

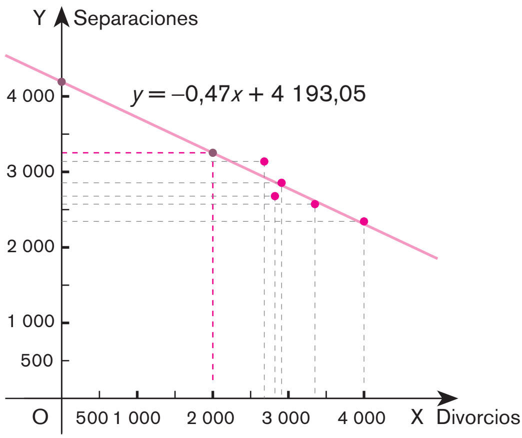
Calcular la recta de regresión de y (talla) sobre x (peso). ¿Cuál es la talla esperada para una persona que pese 62 kg?

$y = 3{,}57\ x - 30{,}18$ si $x = 62$kg; $y = 191{,}16$ cm

28 **Durante cinco años, los Juzgados de Madrid tramitaron los siguientes casos de separaciones y divorcios:**

Separaciones	2 357	2 586	2 689	3 073	2 821
Divorcios	4 000	3 428	2 903	2 711	2 910

Representar la nube de puntos de esta tabla y calcular el coeficiente de correlación lineal de las dos variables (número de separaciones y número de divorcios). Interpretar el resultado. Ajustando una recta de regresión lineal, ¿cuántas separaciones se prevé que se produzcan en un determinado año, sabiendo que hubo 3.600 divorcios? Dibujar la recta ajustada.



$r = -0,92$ es una correlación fuerte y negativa

$y = -0,47x + 4193,05$ recta de regresión

$x = 3600$ divorcios; $y = 2501$ separaciones

29 **Una asociación dedicada a la protección de la infancia desea estudiar la relación entre la mortalidad infantil en cada país y el número de camas de hospital por cada mil habitantes. Para ello, posee los siguientes datos sobre diez países concretos que pueden considerarse representativos del resto:**

X	50	100	70	60	120	180	200	250	30	90
Y	5	2	2,5	3,75	4	1	1,25	0,75	7	3

donde X representa el número de camas por cada mil habitantes e Y el tanto por ciento de mortalidad infantil en el país correspondiente. Se pide:

a) Calcular razonadamente la media y la desviación típica de X.

b) Calcular razonadamente la media y la desviación típica de Y.

c) ¿Qué distribución está más dispersa? Razona la respuesta.

d) Calcular el coeficiente de correlación lineal e interpretarlo.

a) $\overline{x} = 115 \quad s_x = 68,59$

b) $\overline{y} = 3,03 \quad s_y = 1,87$

c) Está más dispersa «y», calculando los coeficientes de variación de ambos CV(x) = 60%, CV(y) = 62%

d) $r = -0,82$ es una correlación fuerte y negativa, luego al aumentar el nº de camas, disminuye el índice de mortalidad

30 **La creciente inclinación de la torre de Pisa ha generado numerosos estudios sobre su futura estabilidad. En la tabla siguiente se presentan las medidas de su inclinación durante los años 1978 a 1987. Los años se han codificado a las dos últimas cifras y los de la inclinación como décimas de mm por exceso de 2,9000 m, de forma que la inclinación en el año 1978, que fue de 2,9667 aparece en la tabla como 667.**

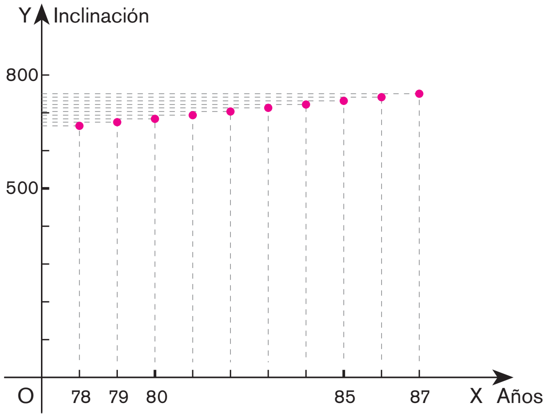
Año	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87
Incl.	667	673	688	696	698	713	717	725	742	757

a) Representa gráficamente estos datos. ¿Crees que la inclinación de la torre tiene una tendencia lineal que crece con el tiempo?

b) Calcula la recta de mínimos cuadrados de la inclinación sobre el tiempo.

c) En 1918 la inclinación de la torre era de 2,9071 m. ¿Cuál sería el valor ajustado según la recta que has obtenido en el aparatado b)? ¿Cuál crees que es la causa de la diferencia entre ambos valores?

a)



b) $y = 9{,}45x - 71{,}64$

c) en 1918; $x = 18$, $y = 98{,}46$ luego la inclinación sería 2,9098 según la recta de mínimos cuadrados. La diferencia se debe a que la recta de mínimos cuadrados proporciona un valor esperado.

31 **Se han hecho dos pruebas de Historia a un grupo de 10 alumnos de 2º de ESO para valorar sus conocimientos. Los resultados obtenidos son:**

Alumno	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	14	12	15	12	13	12	17	7	9	14
B	14	13	17	15	16	12	22	10	14	20

Calcular la covarianza y el coeficiente de correlación. ¿Existe dependencia entre ambas pruebas?

$s_{xy} = 7{,}65$; $r = 0{,}81$

Existe una dependencia fuerte y positiva

32 **Cinco niñas, de 2, 3, 5, 7 y 8 años, pesan respectivamente, 11, 13, 21, 25y 30 kg.**

a) Hallar la ecuación de la recta de regresión del peso sobre las edades.

b) ¿Cuál sería el peso estimado para una niña de 6 años?

a) $y = 5{,}16x + 4{,}22$

b) $x = 6$ años; $y = 35{,}18$ kg

33 **Dada la distribución bidimensional (X, Y):**

X	5	6,5	8	4	3
Y	4,5	7	7,5	5	3,5

a) Calcular el coeficiente de correlación lineal, interpretando el resultado.

b) Determinar la recta de regresión de Y sobre X.

c) Hallar el punto donde se cortan las dos rectas de regresión.

a) $r = 0{,}94$ es una correlación fuerte y positiva

b) $y = 0{,}8x + 1{,}23$

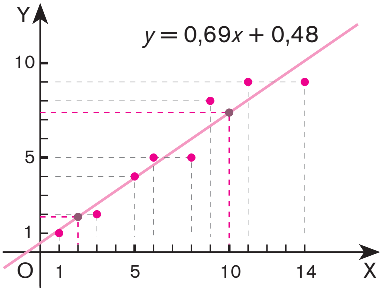
c) (4,82; 5,08)

34 **Calcular la ecuación de la recta de regresión correspondiente a la distribución:**

(1, 1), (3, 2), (5, 4), (6, 5), (8, 5), (9, 8), (11, 9), (14, 9)

Dibujar posteriormente la nube de puntos y la recta de regresión.

$y = 0{,}69x + 0{,}48$



35 **La tabla siguiente muestra el número de gérmenes patógenos (en miles por centímetro cúbico) de un determinado cultivo, según el tiempo transcurrido. Calcula una recta de regresión para predecir el número de gérmenes por centímetro cúbico en función del tiempo. ¿Qué cantidad de gérmenes por centímetro cúbico es predecible encontrar cuando hayan transcurrido seis horas? ¿Es buena esa predicción?**

Nº horas	0	1	2	3	4	5
Nº gérmenes	20	26	33	41	47	53

$y = 6{,}72x + 19{,}86$ recta de regresión

$x = 6$ horas, $y = 60{,}18$ gérmenes por cm^3

Es muy buena la predicción porque $r = 0{,}99$

36 **Se observaron las edades de 5 niños y sus pesos respectivos, obteniéndose los siguientes resultados:**

Edad, en años (x)	2	4,5	6	7,2	8
Peso, en Kg (y)	15	19	25	33	34

a) Hallar el coeficiente de correlación y las rectas de regresión de Y sobre X y de X sobre Y.

b) ¿Qué peso corresponderá a un niño de 5 años? ¿Qué edad corresponderá a un peso de 36 Kg?

a) $r = 0{,}97$

$y = 3{,}4x + 6{,}36$

$x = 0{,}27y - 1{,}38$

b) $x = 5$ años, $y = 23{,}36$ kg

$y = 36$ kg, $x = 8{,}34$ años

37 **Una Compañía Telefónica está interesada en efectuar previsiones sobre sus ingresos en los próximos años, para lo que toma como referencia la información disponible en una determinada zona sobre el número X de líneas en servicio y el total de ingresos en miles Y por operaciones, para los últimos 9 años:**

$\sum_i x_i = 8\,055$ $\quad S_x = 110$

$\sum_i y_i = 336\,600$ $\quad S_y = 1\,120$

$\sum_i x_i y_i = 302\,335\,110$

Obtener, a partir de esos datos, el coeficiente de correlación lineal e interpretar el resultado.

Calculando la recta de regresión de Y sobre X, ¿cuáles serán los ingresos esperados por la Compañía el próximo año, si el número de líneas en servicio va a ser de 1 200?

$r = 0{,}97$ la correlación es fuerte

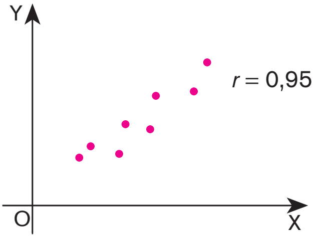
recta de regresión $y = 9{,}9x + 28539{,}5$

$x = 1200 \Rightarrow y = 40419{,}5$ ingresos

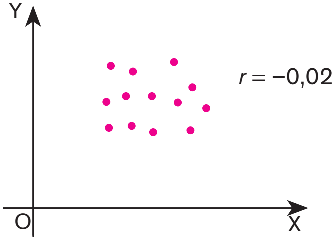
38 **Representa de forma aproximada una nube de puntos que corresponde a una distribución bidimensional según los siguientes valores del coeficiente de correlación lineal:**

a) r = 0,95; b) r = –0,02; c) r = –0,93

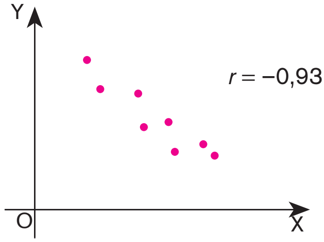
a)



b)



c)



39 **Justifica si es posible que las rectas de regresión de *y sobre x* y de *x sobre y* en una distribución bidimensional sean $2x + 3y = 7$; $2y - 3x = 22$.**

No son posibles, pues una de las rectas es creciente y la otra decreciente, mientras que las pendientes de las dos rectas de regresión deben tener el mismo signo.

40 **Calcula las pendientes de las dos rectas de regresión en una distribución bidimensional, sabiendo que $S_{xy} = -20$; $S_x^2 = 10$; $S_y^2 = 40$.**

Regresión Y sobre X: pendiente = −2

Regresión X sobre Y: pendiente = −0,5

1 **a) ¿Cuál es el espacio muestral en el experimento de lanzar dos dados?**

b) En el experimento de lanzar un dado y una moneda, escribe el espacio muestral E.

a) E = {(1, 1) (1, 2) … (1, 6) (2, 1) … (2, 6) … (6, 1) … (6, 6)}. Consta de 36 elementos o sucesos elementales

b) E = {(1, +) (2, +) … (6, +) (1, c) (2, c) … (6, c)} consta de 12 elementos o sucesos elementales

2 **Al lanzar un dado, indica cuáles son los sucesos contrarios de:**

a) obtener número par

b) obtener más de 3

c) obtener 2

d) obtener número primo

e) obtener 4 ó 6

f) obtener menos de 7

a) obtener un número impar

b) obtener menos o igual que 3

c) no obtener 2

d) obtener número compuesto

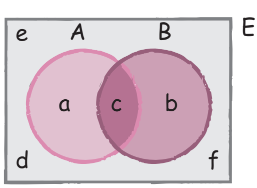
e) no obtener 4 ni 6

f) el contrario es obtener una puntuación mayor o igual que 7 que es el suceso imposible

3 **Sean los sucesos: A = «ser varón», B = «tener los ojos marrones», C = «ser mujer» y D = «tener los ojos azules». ¿Qué parejas de sucesos son incompatibles?**

Son incompatibles: A y C ; B y D

4 **Observa la figura y escribe los elementos de E, $\bar{\varnothing}$, $\bar{B}$ y de $\overline{A - B}$.**



E = {a, b, c, d, e, f}

$\bar{\varnothing}$ = E

$\bar{B}$ = {a, d, e, f}

$\overline{A - B}$ = {b, c, d, e, f}

5 **Un alumno fabrica un dado y parece que no está muy bien construido, para comprobarlo lo lanza 25 veces y obtiene los resultados siguientes:**

6, 4, 4, 1, 3, 2, 5, 5, 1, 3, 5, 4, 5, 1, 3, 5, 3, 5, 2, 5, 1, 3, 4, 4, 3

a) Calcula la frecuencia de cada puntuación.

b) Si con el mismo dado tuvieras que apostar, ¿a qué número o números lo harías?

a)

Puntuación	Frecuencia
1	4
2	2
3	6
4	5
5	7
6	1

b) se debería apostar por el 5

6 **En el lanzamiento de tres monedas, halla la probabilidad de los sucesos siguientes:**

a) A = {obtener tres caras}

b) B = {obtener al menos una cruz}

c) C = {obtener más caras que cruces}

d) D = {obtener tantas caras como cruces}

e) E = {obtener al menos dos caras}

Como E = {ccc, cc+, c+c, +cc, c++, +c+, ++c, +++}

a) $P(A) = \frac{1}{8}$ **b)** $P(B) = \frac{7}{8}$ **c)** $P(C) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ **d)** $P(D) = 0$ **e)** $P(E) = \frac{1}{2}$

7 **Se pide a dos niños que escriban, por separado, una de las cinco vocales. ¿Cuál es la probabilidad de que escriban la misma?**

$P = \frac{1}{5}$

8 **Hállese la probabilidad de que al lanzar dos dados ordinarios se obtenga: a) suma 3; b) suma 10; c) suma mayor que 5; d) diferencia (en valor absoluto) 3; e) diferencia 0; f) diferencia 6.**

a) $P = \frac{1}{18}$ **b)** $P = \frac{1}{12}$ **c)** $P = \frac{3}{4}$ **d)** $P = \frac{1}{6}$ **e)** $P = \frac{1}{6}$ **f)** $P = 0$

9 **En una clase de 21 chicas y 19 chicos se rifan dos entradas para un concierto. Halla la probabilidad de que correspondan a: a) dos chicas; b) dos chicos; c) una chica y un chico.**

a) $P = \frac{21}{40} \cdot \frac{20}{39} = \frac{7}{26}$

b) $P = \frac{19}{40} \cdot \frac{18}{39} = \frac{57}{260}$

c) $P = \frac{21}{40} \cdot \frac{19}{39} + \frac{19}{40} \cdot \frac{21}{39} = \frac{133}{260}$

10 **Calcula la probabilidad de que una matrícula de coche de cuatro dígitos: a) conste sólo de cifras impares; b) termine en 23; c) sea múltiplo de 4; d) tenga sus cuatro cifras iguales.**

a) $P = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 0{,}0625$ **b)** $P = \frac{1}{100} = 0{,}01$

c) $P = \frac{1}{250} = 0{,}004$ **d)** $P = \frac{1}{1000} = 0{,}001$

11 **Sea el experimento de extraer una carta de una baraja de 40 y los sucesos S = {extraer un 7}; B = {extraer un basto}; F = {extraer una figura}. Calcular P(S), P(F), P(S ∪ F), P(S ∪ B).**

$P(S) = \frac{1}{10}$; $P(F) = \frac{3}{10}$; $P(SUF) = \frac{2}{5}$; $P(SUB) = \frac{13}{40}$

12 **¿Cuál es la probabilidad de elegir una ficha del dominó que sea múltiplo de 3 o mayor que 8?**

$$P = \frac{7}{28} + \frac{6}{28} - \frac{1}{28} = \frac{3}{7}$$

13 **En una ruleta de 36 números, sin el cero, halla la probabilidad de: M = {obtener múltiplo de 2 o de 7}; V = {obtener más de 20 o más de 25}; R = {obtener rojo o negro}**

$P(M) = \frac{7}{12}$; $P(V) = \frac{4}{9}$; $P(R) = 1$

14 **Deduce la fórmula correspondiente a la probabilidad de la unión de 3 sucesos, tanto en el caso de sucesos compatibles como en el de incompatibles.**

Caso de sucesos compatibles:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

Caso de sucesos incompatibles:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$$

15 **Sea el suceso S = {obtener al menos una cara}, en el experimento de lanzar dos monedas. Obtén P(S) a través de la probabilidad del suceso complementario y compruébalo después directamente sobre el espacio muestral.**

El espacio muestral es E = {(c, c) (c, +) (+, c) (+, +)}

$P(S) = 1 - P$ (no obtener ninguna cara) $= 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

16 **Halla la probabilidad de que al extraer una carta de una baraja española de 40, resulte ser un as y calcula cómo se modifica si antes de verla te dicen que:**

a) salió sota **b) no salió una sota**

c) salió copa **d) no salió copa**

a) $P = 0$ **b)** $P = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$

c) $P = \frac{1}{10}$ **d)** $P = \frac{3}{10}$

17 **En el experimento de sacar dos cartas de una baraja de 40, sean los sucesos 2C = {extraer las dos cartas del palo de copas}; 2NC = {extraer dos cartas que no sean de copas}.**

Halla la probabilidad de ambos:

a) sin devolución;

b) con devolución.

c) ¿Es razonable que la suma en cada apartado no sea 1? Busca el suceso que falta, halla su probabilidad y calcula la suma de las tres.

a) $P(2C) = \frac{10}{40} \cdot \frac{9}{39} = \frac{3}{52}$; $P(2NC) = \frac{30}{40} \cdot \frac{29}{39} = \frac{29}{52}$

b) $P(2C) = \frac{10}{40} \cdot \frac{10}{40} = \frac{1}{16}$; $P(2NC) = \frac{30}{40} \cdot \frac{30}{40} = \frac{9}{16}$

En ambos casos falta el suceso «Extraer una carta que sea copa y la otra no» cuya probabilidad es:

En a) $P = \frac{5}{13}$; en b) $P = \frac{3}{8}$

18 **En una clase de Bachillerato hay 19 chicos y 16 chicas, de ellos 4 chicos y 3 chicas son zurdos y el resto diestros. Construye la tabla de contingencia y calcula las probabilidades siguientes:**

Seleccionado un alumno al azar.

a) Probabilidad de que sea chico.

b) Probabilidad de que sea chica y zurda.

c) Probabilidad de que sea zurdo.

d) Sabemos que es chico, ¿cuál es la probabilidad de que sea diestro?

	chicos	**chicas**	**total**
zurdos	4	3	7
diestros	15	13	28
total	19	16	35

a) $P = \frac{19}{35}$

b) $P = \frac{3}{35}$

c) $P = \frac{7}{35} = \frac{1}{5}$

d) $P(D/Chico) = \frac{P(D \cap chico)}{P(chico)} = \frac{\frac{15}{35}}{\frac{19}{35}} = \frac{15}{19}$

19 **En una ciudad el 55% de la población en edad laboral son hombres; de ellos, un 12% está en paro. Entre las mujeres el porcentaje de paro es del 23%. Si en esta ciudad se elige al azar una persona en edad laboral. ¿Cuál es la probabilidad de que esté en paro?**

$P = 0{,}55 \cdot 0{,}12 + 0{,}45 \cdot 0{,}23 = 0{,}1695$

20 **Una caja A contiene 3 bolas blancas y 2 negras y otra B, 2 bolas blancas y 8 negras. Se lanza al aire una moneda. Si sale cara se saca una bola de la caja A y si sale cruz de la caja B. Hallar la probabilidad de sacar una bola negra.**

$P = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{10} = \frac{3}{5}$

21 **Una caja A contiene tres bolas blancas y 2 negras y otra B, 2 bolas blancas y 8 negras. Se lanza al aire una moneda. Si sale cara se saca una bola de la caja A y si sale cruz de la caja B. Calcular la probabilidad de que haya salido cara, sabiendo que la bola ha sido blanca.**

$$P = \frac{\frac{3}{5} \times \frac{1}{2}}{\frac{3}{5} \times \frac{1}{2} + \frac{2}{10} \times \frac{1}{2}} = \frac{3}{4}$$

22 **Se tienen las urnas U y M. La urna U contiene 6 bolas blancas, 4 negras y 2 rojas.**

La urna M contiene 3 bolas blancas y 7 negras.

Se lanza un dado al aire, y si aparece un número múltiplo de 3 se saca una bola de la urna U, en caso contrario, se saca la bola de la urna M. Hallar las probabilidades siguientes:

a) Que salga una bola blanca.

b) Que salga una bola negra.

c) Que salga una bola roja.

a) $P(Blanca) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{10} = \frac{11}{30}$

b) $P(Negra) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{10} = \frac{26}{45}$

c) $P(Roja) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{18}$

23 **Cada cara de un dado está marcada con una de las letras de la palabra COMICO. Si se lanza 4 veces, halla la probabilidad de que se forme la palabra:**

a) COCO **b) MICO** **c) COMO**

a) $\frac{1}{81}$ **b)** $\frac{1}{324}$ **c)** $\frac{1}{162}$

26 **En una bolsa hay 10 caramelos de menta, 13 de fresa y 12 de limón. Se extrae uno al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que: a) sea de fresa; b) sea de limón; c) no sea de menta.**

Si se extrae uno y, sin devolverlo, se extrae otro, ¿cuál es la probabilidad de obtener:

d) el primero de menta y el segundo de fresa

e) los dos de limón

f) ninguno de limón

a) $\frac{13}{35}$ **b)** $\frac{12}{35}$ **c)** $\frac{5}{7}$ **d)** $\frac{13}{119}$ **e)** $\frac{66}{595}$ **f)** $\frac{253}{595}$

27 **De una baraja española de 40 cartas se extraen 4 sin devolver. ¿Cuál es la probabilidad de que:**

a) sean los cuatro ases?

b) los tres primeros sean ases y el cuarto no?

c) sean los cuatro del palo de oros?

d) los dos primeros sean oros y los otros dos no?

a) $\frac{1}{91390}$ **b)** $\frac{37}{66\,690}$ **c)** $\frac{21}{9139}$ **d)** $\frac{1305}{36\,556}$

28 **Se lanzan dos dados, pero a uno de ellos se le ha puesto un punto más en la cara del 2, transformándolo en otro 3. ¿Cómo varían las probabilidades de obtener cada una de las 11 sumas posibles?**

$P(2) = \frac{1}{36}$; $P(3) = \frac{1}{36}$; $P(4) = \frac{2}{36}$; $P(5) = \frac{5}{36}$; $P(6) = \frac{5}{36}$;

$P(7) = \frac{6}{36}$; $P(8) = \frac{5}{36}$; $P(9) = \frac{5}{36}$; $P(10) = \frac{3}{36}$; $P(11) = \frac{2}{36}$;

$P(12) = \frac{1}{36}$

29 **Después de lanzar muchas veces dos dados octaédricos con sus caras numeradas del 1 al 8, se observa que la frecuencia de la suma 16 es 0,14. ¿Deben tomarse los dados como correctos?**

No, pues cabe esperar suma 16 con probabilidad $\frac{1}{64} \simeq 0{,}016$.

30 **Entre los 1 000 televisores que ha vendido una fábrica, ha tenido que reparar después 32 por avería de audio y 48 por avería de vídeo, mientras que 923 no han pasado por el taller. Seleccionado un televisor al azar ¿cuál es la probabilidad de que haya sido reparado de ambas averías?**

Si A = {el TV tiene problemas de audio} y V = {el TV tiene problemas de video}

	A	$\bar{A}$	Total
V	3	45	48
$\bar{V}$	29	923	952
Total	32	968	1000

La probabilidad pedida es:

$$P(A \cap V) = \frac{3}{1000} = 0{,}003$$

31 **Según el Servicio Meteorológico, en Valdemorillo hay una probabilidad 0,4 de que haga frío; 0,6 de que llueva o haga frío y 0,1 de que llueva y haga frío. ¿Cuál es la probabilidad de que si estoy en Valdemorillo me moje si salgo a la calle sin paraguas?**

Sea F = {hace frío} y LL = {llueve}

	F	$\bar{F}$	Total
LL	0,1	0,2	0,3
$\overline{LL}$	0,3	0,4	0,7
Total	0,4	0,6	1

Puesto que $P(LL \cup F) = P(LL) + P(F) - P(LL \cap F)$ es decir,
$0{,}6 = P(LL) + 0{,}4 - 0{,}1 \Rightarrow P(LL) = 0{,}3$

32 **Se lanza una moneda hasta que salga cara. Halla la probabilidad de que esto suceda en el primer lanzamiento, en el segundo y en el tercero. ¿Y en el lanzamiento *n*-ésimo?**

$$P(1^o) = \frac{1}{2};\ P(2^o) = \left(\frac{1}{2}\right)^2;\ P(3^o) = \left(\frac{1}{2}\right)^3;\ \ldots;\ P(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

33 **Halla la probabilidad de que al lanzar tres dados se obtenga una suma inferior a 17.**

Los casos posibles son $PR_{6,3} = 6^3 = 216$

$P(\text{suma} < 17) = 1 - P(s \geq 17) = 1 - \dfrac{4}{216} = \dfrac{53}{54}$ pues los casos de suma mayor o igual que 17 son 4 (6, 6, 5; 6, 5, 6; 5, 6, 6; 6, 6, 6)

34 **Nueve personas se sientan al azar alrededor de una mesa. ¿Cuál es la probabilidad de que dos determinadas se sienten juntas?**

casos posibles: $PC_7 = 6! = 720$

casos favorables: 2 (derecha-izquierda, izquierda-derecha)

$$P = \frac{2}{720} = \frac{1}{360}$$

35 **En una bolsa hay 7 bolas numeradas del 1 al 7. Se extraen dos simultáneamente. Halla la probabilidad de que la suma de los puntos sea par.**

$P = \dfrac{9}{21} = \dfrac{3}{7}$ pues los casos posibles son $C_{7,2} = 21$

36 **De 2 barajas de 40 cartas se extrae una de cada una. ¿Cuál es la probabilidad de que sean dos oros? ¿Y si las dos barajas están mezcladas y se extraen 2 a la vez?**

De dos barajas separadas: $P = \dfrac{10}{40} \cdot \dfrac{10}{40} = \dfrac{1}{16}$

De dos barajas mezcladas: $P = \dfrac{C_{20,2}}{C_{80,2}} = \dfrac{19}{316}$

37 **Una secretaria muy despistada escribe 5 cartas diferentes a 5 personas, pero mete cada carta en un sobre sin fijarse. ¿Cuál es la probabilidad de que todas reciban la suya?**

Casos posibles: $P_5 = 120$; casos favorables: 1; $P = \dfrac{1}{120}$

38 **En ocho tarjetas iguales se escribe cada una de las letras de la palabra CASANOVA. Se sacan al azar 4 tarjetas sin reponer. ¿Cuál es la probabilidad de que se forme la palabra SANO?**

$$P = \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{840}$$

39 **¿Cuál es la probabilidad de que al extraer la primera bola de un bingo, resulte múltiplo de 3 ó de 5?**

Múltiplos de 3: 30

Múltiplos de 5: 18

Múltiplos de 3 y de 5: 6 (son los múltiplos de 15)

$$P(\dot{3} \cup \dot{5}) = P(\dot{3}) + P(\dot{5}) - P(\dot{3} \cap \dot{5}) = \frac{30}{90} + \frac{18}{90} - \frac{6}{90} = \frac{42}{90} = \frac{7}{15}$$

40 **80 de los 100 asistentes a un congreso hablan inglés y 40 francés. Elegidos dos al azar, ¿cuál es la probabilidad de que necesiten intérprete para entenderse?**

Es evidente que 20 congresistas hablan ambos idiomas.

Si F = {ambos hablan francés} e I = {ambos hablan inglés}

es $P(F \cup I) = P(F) + P(I) - P(F \cap I) = \dfrac{C_{80,2}}{C_{100,2}} + \dfrac{C_{40,2}}{C_{100,2}} - \dfrac{C_{20,2}}{C_{100,2}} = \dfrac{25}{33}$

41 **Para elegir a un muchacho entre tres se prepara una bolsa con dos bolas negras y una blanca. Los tres van sacando, por orden, una bola que no devuelven. Quien saque la blanca, gana. ¿Quién lleva más ventaja, el primero, el segundo o el tercero?**

Todos tienen la misma probabilidad $= \dfrac{1}{3}$

42 **Se lanzan cuatro monedas y se sabe que han salido por lo menos dos caras. ¿Cuál es la probabilidad de que en total haya exactamente: a) 3 caras; b) 4 caras?**

Los casos posibles son 11: {cc+c, c+c+, c++c, +c+c, ++cc, +cc+, ccc+, cc+c, c+cc, +ccc, cccc}

a) $P(3 \text{ caras}) = \dfrac{4}{11}$ **b)** $P(4 \text{ caras}) = \dfrac{1}{11}$

43 **¿Cuál es la probabilidad de que una quiniela de fútbol de 14 resultados tenga 14 unos?**

a) Si el 1 tienen probabilidad 0,5 en cada partido;

b) Si los tres resultados 1, X, 2 son equiprobables.

a) $P = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{14}$ **b)** $P = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{14}$

44 **¿Verdadero o falso?**

a) Un suceso posible es siempre compatible consigo mismo.

b) El suceso seguro es compatible con cualquier suceso posible.

c) La unión de dos sucesos imposibles es un suceso posible.

d) Si dos sucesos son incompatibles, su unión es el suceso imposible.

a) verdadero **b)** verdadero **c)** falso **d)** falso

45 **En el lanzamiento de dos dados, averigua cuáles de las siguientes parejas de sucesos son dependientes y cuáles independientes:**

a) (obtener suma 8); (obtener diferencia 0).

b) (obtener suma mayor que 10); (obtener 6 en el primero).

c) (obtener suma par); (obtener diferencia par).

d) (obtener par en el primero); (obtener impar en el segundo).

a) Si A = {obtener suma 8} es $P(A) = \frac{5}{36}$ y B = {obtener diferencia cero} es

$P(B) = \frac{6}{36}$

El suceso $A \cap B$ tiene $P(A \cap B) = \frac{1}{36}$ (obtener 4 y 4) como

$P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$, entonces A y B son dependientes

b) A = {obtener suma mayor que 10} es $P(A) = \frac{3}{36}$ y B = {obtener 6 en el primero es $P(B) = \frac{6}{36}$

$A \cap B$ = {suma mayor que 1° y 6 en el primero}, $P(A \cap B) = \frac{2}{36}$

Como $P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$, A y B son dependientes

46 **Suponiendo todos los meses de 30 días, hállese la probabilidad de que los cumpleaños de tres hermanos sean:**

a) el mismo día del año,

b) los tres en fecha diferentes,

c) los tres en el mismo mes,

d) cada uno en un mes diferente,

e) los tres en marzo

f) ninguno en mayo

g) dos en la misma fecha y el otro, otro día.

a) $P = \left(\frac{1}{360}\right)^2$

b) $P = \frac{359}{360} \cdot \frac{358}{360} \simeq 0{,}99$

c) $P = \left(\frac{1}{12}\right)^2$

d) $P = \frac{11}{12} \cdot \frac{10}{12} = \frac{55}{72}$

e) $P = \left(\frac{1}{12}\right)^3$

f) $P = \left(\frac{11}{12}\right)^3$

g) $P = \frac{1}{360} \cdot \frac{359}{360} \simeq 0{,}0028$

47 **Una batería antiaérea está compuesta por tres cañones, cuya probabilidad de acertar en el blanco es de 0,4 cada uno por separado. ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar cada uno un disparo:**

a) la batería alcance el blanco?

b) la batería falle?

c) los tres den en el blanco?

d) acierten primero y segundo, pero falle el otro?

e) acierte uno de ellos y fallen los otros dos?

a) P = 0,4 + 0,6 · 0,4 + 0,6 · 0,6 · 0,4 = 0,784

b) P = 1 – 0,784 = 0,216

c) P = $(0,4)^3$ = 0,064

d) P = 0,4 · 0,4 · 0,6 = 0,096

e) P = 0,4 · 0,6 · 0,6 + 0,6 · 0,4 · 0,6 + 0,6 · 0,6 · 0,4 = 0,003

48 **Un examen consta de tres partes: teoría, cuestiones y problemas. La preparación de un alumno es tal que tiene una probabilidad 0,8 de aprobar cada parte. ¿Qué probabilidad tiene de aprobar si:**

a) las partes son eliminatorias?

b) bastan dos partes para aprobar?

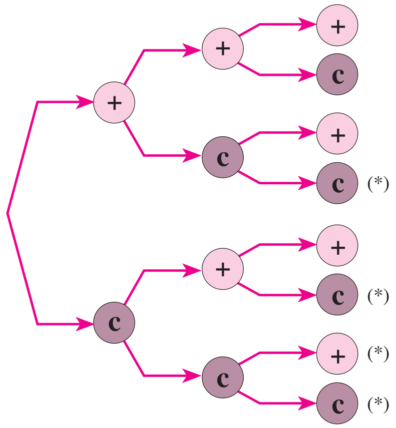
c) basta una parte para aprobar?

a) P = $(0,2)^3$ = 0,008

b) P = $(0,2)^2 + (0,2)^2 \cdot 0,8 + (0,2)^2 \cdot 0,8$ = 0,104

c) P = 0,2 + 0,8 · 0,2 + 0,8 · 0,8 · 0,2 = 0,488

49 **Utilizando un diagrama de árbol, hállese la probabilidad de obtener más de una cara al lanzar tres veces una moneda.**



Los caminos indicados con (*) contienen más de una cara. Al ser cuatro, la probabilidad es $P = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

50 **Calcula la probabilidad de que al levantar una ficha de un dominó se obtenga un múltiplo natural de 4 o una suma de puntos mayor de 9.**

A = {múltiplo de 4}. $P(A) = \frac{7}{28} = \frac{1}{4}$

B = {suma mayor de 9}. $P(B) = \frac{4}{28} = \frac{1}{7}$

$A \cap B$ = {sumar 12}. $P(A \cap B) = \frac{1}{28}$

$$P(A \cup B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \frac{1}{28} = \frac{10}{28} = \frac{5}{14}$$

51 ***Juego A*: Se lanza un dado ordinario, si sale un seis se gana y si no, se pierde.**

***Juego B*: Se sacan simultáneamente dos bolas de una bolsa que contiene 4 bolas marcadas con los números 1, 2, 3 y 4; si la suma de ambos números es menor que 4, se gana y si no, se pierde. ¿Cuál de los dos juegos es más ventajoso?**

Ambos juegos tienen probabilidad $\frac{1}{6}$ de ganar.

52 **Seis cajas contienen cada una una bola blanca; además, la caja *n* contiene *n* bolas negras, *n* = 1, 2, …, 6. Se elige la caja *n* con probabilidad proporcional a *n* y se extrae una bola. ¿Cuál es la probabilidad de que sea blanca?**

Puesto que la probabilidad de elegir una caja es proporcional al número de bolas negras es:

$$K + 2K + 3K + 4K + 5K + 6K = 1 \Rightarrow K = \frac{1}{21}$$

Llamando P(nB) a la probabilidad de elegir la caja *n* y extraer una bola blanca, será:

P(obtener blanca) = P(1B) + P(2B) + … + P(6B) =

$$\frac{1}{21} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{21} \cdot \frac{1}{3} + \frac{3}{21} \cdot \frac{1}{4} + \frac{4}{21} \cdot \frac{1}{5} + \frac{5}{21} \cdot \frac{1}{6} + \frac{6}{21} \cdot \frac{1}{7} = 0{,}21$$

53 **En el juego de dardos, el tirador A puede dar en el blanco 4 veces de cada 5; el B acierta 2 veces de cada 3, y el C, 3 veces de cada 4. Hállese la probabilidad de que, al lanzar un dardo cada uno:**

a) los 3 acierten
b) ninguno acierte
c) al menos dos acierten
d) acierten A y B, pero no C
e) acierten 2 y el otro no
f) sólo acierte B

a) $P = \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{2}{5}$

b) $P = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{60}$

c) $P = \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{5}{6}$

d) $P = \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{15}$

e) $P = \frac{13}{30}$

f) $P = \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{30}$

54 **Si entre la población de un determinado país se estima que el 55% padece obesidad, el 20% es hipertensa y el 15% es obesa e hipertensa, calcular las probabilidades de «ser obeso condicionado a ser hipertenso» y «ser hipertenso condicionado a ser obeso». Justifica si son o no independientes los sucesos «ser obeso» y «ser hipertenso».**

O = {ser obeso}; H = {ser hipertenso}

$$P(O/H) = \frac{P(O \cap H)}{P(H)} = \frac{0,15}{0,20} = \frac{3}{4}$$

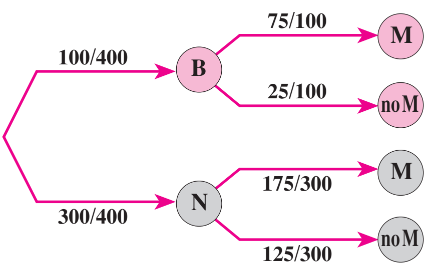
$$P(H/O) = \frac{P(O \cap H)}{P(O)} = \frac{0,15}{0,55} = \frac{3}{11}$$

$P(O \cap H) = 0,15 \neq P(O) \cdot P(H)$ luego O y H son dependientes

55 **Una urna contiene 25 bolas blancas sin marcar, 75 bolas blancas marcadas, 125 bolas negras sin marcar y 175 bolas negras marcadas. Se extrae al azar una bola.**

a) Calcula la probabilidad de que sea blanca.

b) Se extrae al azar una bola y está marcada. ¿Cuál es la probabilidad de que sea blanca?



a) $P(\text{Blanca}) = \dfrac{100}{400} = \dfrac{1}{4}$

b) $P(B/M) = \dfrac{P(B \cap M)}{P(M)} = \dfrac{\frac{100}{400} \cdot \frac{75}{100}}{\frac{100}{400} \cdot \frac{75}{100} + \frac{300}{400} \cdot \frac{175}{300}} = 0,3$

56 **El 70% de empresas tienen errores en sus activos financieros, el 60% tienen errores en sus pasivos financieros y el 40% tienen errores en sus activos y en sus pasivos financieros.**

a) Obtén razonadamente el porcentaje de empresas con errores en sus activos, en sus pasivos o en ambos.

b) De una muestra de 500 empresas, ¿cuántas se espera que no tengan errores ni en sus activos ni en sus pasivos financieros?

A = {tener errores en activos}

P = {tener errores en pasivos}

a) $P(A \cap P) = P(A) + P(P) - P(A \cap P) = 0,70 + 0,60 - 0,40 = 0,90 \Rightarrow 90\%$

b) Como $0,90 \cdot 500 = 450$ resulta que $500 - 450 = 50$ empresas no tendrán errores ni en sus activos ni en sus pasivos

57 **La probabilidad de que un hombre viva 10 años más es $\frac{1}{4}$ y la probabilidad de que su mujer viva 10 años más es $\frac{1}{3}$. Suponiendo que ambos sucesos son independientes, calcular la probabilidad de que al menos uno de ellos siga vivo después de los 10 años.**

H = {el hombre vive 10 años más}; M = {la mujer vive 10 años más}

$$P(H \cup M) = P(H) + P(M) - P(H \cap M) = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$

58 **Disponemos de un dado que tiene pintadas las caras de la siguiente forma:**

Caras 1, 2, 3, 4 de color verde.

Cara 5 de color rojo.

Cara 6 de color blanco.

y de dos urnas con la siguiente composición:

Urna I: 6 bolas con brillo, 4 sin brillo.

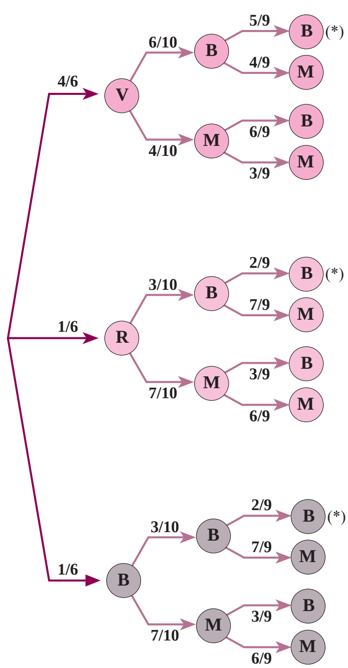
Urna II: 3 bolas con brillo, 7 sin brillo.

Lanzamos el dado y nos fijamos en el color de la cara: si sale verde vamos a la urna I, si sale rojo a la urna II y si sale blanco también a la urna II. A continuación extraemos dos bolas una a una sin remplazamiento. Se pide:

i) Probabilidad de que las dos bolas tengan brillo y que sean de la urna I.

ii) Probabilidad de que las dos bolas tengan brillo.

El esquema en árbol puede ser:



a) $P = \frac{4}{6} \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} = \frac{2}{9}$

b) $P = \frac{4}{6} \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} + \left(\frac{1}{6} \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9}\right) \cdot 2 = \frac{11}{45}$

59 **Una comisión delegada de un pleno de cierto ayuntamiento está formada por 10 concejales de los cuales 5 pertenecen al partido A, 4 al partido B y 1 al partido C. Se eligen al azar y de forma sucesiva 3 personas de dicha comisión. Calcula la probabilidad de que las 3 personas pertenezcan a:**

a) Partidos distintos **b) Al partido A** **c) Al partido C**

a) $P = \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{8} \cdot 6 = \frac{1}{6}$ **b)** $P = \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{12}$ **c)** $P = 0$

60 **Se propone a Juan y a Pedro la resolución de un problema. Se estima, en función de sus evaluaciones, que la probabilidad de que lo resuelva Juan es de 1/3 y la de que lo resuelva Pedro 1/4. ¿Cuál es la probabilidad de que el problema sea resuelto? ¿Y de que no sea resuelto?**

J = {lo resuelve Juan}

P = {lo resuelve Pedro}

a) $P(J \cup P) = P(J) + P(P) - P(J \cap P) = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

pues J y P son independientes y $P(J \cap P) = P(J) \cdot P(P)$

b) $P = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

61 **Sean A y B dos sucesos independientes de un cierto experimento aleatorio, tales que la probabilidad de que ocurran ambos simultáneamente es 1/3 y la de que no ocurra ninguno de los dos es 1/6. Calcúlese P(A) y P(B).**

$P(A \cap B) = \frac{1}{3} = P(A) \cdot P(B)$ (*)

$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = \frac{1}{6} = P(\overline{A \cup B}) = 1 - [P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)] \Rightarrow$

$\Rightarrow P(A) + P(B) = \frac{7}{6}$ (**) de (*) y (**) se obtiene $P(A) = \frac{2}{3}$ y $P(B) = \frac{1}{2}$

62 **En una clase, el 40% aprueba Filosofía y el 50% Matemáticas. Además, la probabilidad de aprobar la Filosofía habiendo aprobado las Matemáticas es 0,8. Probar que la mitad de la clase suspende ambas asignaturas y calcular el porcentaje de alumnos que, teniendo aprobada la Filosofía, aprueba también las Matemáticas.**

Sea F = {aprueba Filosofía} y M = {aprueba Matemáticas}

Como $P(F/M) = \dfrac{P(F \cap M)}{P(M)} = \dfrac{P(F \cap M)}{0{,}5} = 0{,}8 \Rightarrow P(F \cap M) = 0{,}4$ y se puede construir la tabla de contingencia:

	M	**no M**	**Total**
F	0,4	0	0,4
no F	0,1	0,5	0,6
Total	0,5	0,5	1

se ve que $P(noF \cap noM) = 0{,}5$

$$P(M/F) = \frac{P(M \cap F)}{P(F)} = \frac{0{,}4}{0{,}4} = 1$$

El 100%

63 **Tiramos una moneda tres veces. Hallar el espacio muestral. ¿Cuál es la probabilidad de sacar al menos dos caras?**

Sean los sucesos:

E = un alumno ha estudiado

A = un alumno aprueba

E = {ccc, cc+, c+c, +cc, c++, +c+, ++c, +++}

$$P = (\text{al menos dos caras}) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

64 **Utilizar la fórmula**

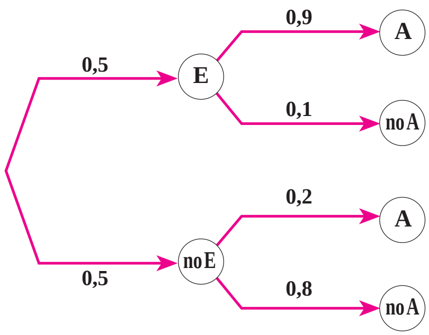
$$\mathbf{P(A) = P(E) \cdot P(A/E) + P(no\ E) \cdot P(A/no\ E)}$$

para calcular la probabilidad de que cierto alumno apruebe un examen si sabemos que, habiendo estudiado, puede aprobar con probabilidad 0,9; que si no ha estudiado, puede aprobar con probabilidad 0,2; y que estudia para la mitad de sus exámenes.

Sea E = {el alumeno ha estudiado}

A = {aprueba el examen}

El árbol puede ser:



$P(A) = P(E) \cdot P(A/E) + P(no\ E) \cdot P(A/no\ E) = 0{,}5 \cdot 0{,}9 + 0{,}5 \cdot 0{,}2 = 0{,}55$

65 **Una compañía de seguros hace una investigación sobre la cantidad de partes de siniestros fraudulentos presentados por sus asegurados. Clasificados los seguros en tres clases: incendio, automóviles y «otros», se obtiene la siguiente relación de datos:**

El 6% son partes por incendio fraudulentos; el 1% son partes de automóvil fraudulentos; el 3% son «otros» partes fraudulentos; el 14% son partes por incendio no fraudulentos; el 29% son partes de automóvil no fraudulentos y el 47% son «otros» partes no fraudulentos.

a) Hacer una tabla ordenando los datos anteriores y hallando el porcentaje total de partes fraudulentos y no fraudulentos.

b) Calcular qué porcentaje total de partes corresponde a la rama de incendios, cuál a la de automóviles y cuál a «otros». Añadir estos datos a la tabla.

c) Calcular la probabilidad de que un parte escogido al azar sea fraudulento. ¿Cuál será, en cambio, la probabilidad de que sea fraudulento si se sabe que es de la rama de incendios?

a) y **b)**

	Incendio	Automóvil	Otros	Total
Fraudulento	6 %	1 %	3 %	10 %
no Fraudulento	14 %	29 %	47 %	90 %
Total	20 %	30 %	50 %	100 %

c) P(Fraudulento) = 0,1; $\quad P(F/I) = \dfrac{P(F \cap I)}{P(I)} = \dfrac{0{,}06}{0{,}20} = 0{,}3$

66 **Extraemos una carta de la baraja española, si sale figura, extraemos una bola de la urna I; en caso contrario, la extraemos de la urna II. Las urnas tienen la siguiente composición:**

Urna I: 6 bolas blancas; 8 bolas verdes.

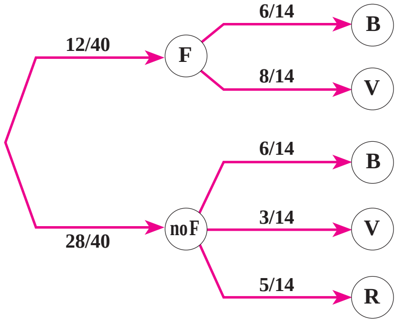
Urna II: 6 bolas blancas; 3 bolas verdes; 5 bolas rojas.

Calcular las probabilidades de los siguientes sucesos:

a) La bola es verde y de la urna II.

b) La bola es blanca.

El posible árbol es:



a) $P = \frac{28}{40} \cdot \frac{3}{14} = \frac{3}{20}$

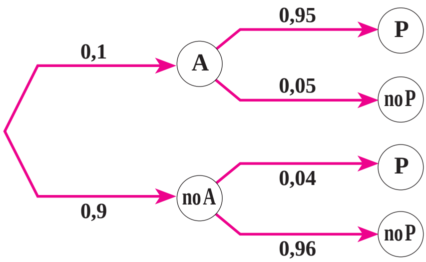
b) $P = \frac{12}{40} \cdot \frac{6}{14} + \frac{28}{40} \cdot \frac{6}{14} = \frac{3}{7}$

67 **En una empresa de transporte, la probabilidad de que se accidente un camión es de 0,1. Si éste se produce, la probabilidad de perder la carga es 0,95. Por otra parte, la probabilidad de perder la carga sin que haya accidente es de 0,04. Calcular las probabilidades de los siguientes sucesos:**

a) Que habiéndose perdido la carga, no haya habido accidente.

b) Que no habiéndose perdido la carga, haya habido accidente.

Sea A = {hay accidente} y P = {se pierde la carga}



a) $P(\text{no } A/P) = \frac{P(\text{no } A \cap P)}{P(P)} = \frac{0{,}9 \cdot 0{,}04}{0{,}1 \cdot 0{,}95 + 0{,}9 \cdot 0{,}04} \simeq 0{,}275$

b) $P(A/\text{no } P) = \frac{P(A \cap \text{no } P)}{P(\text{no } P)} = \frac{0{,}1 \cdot 0{,}05}{0{,}1 \cdot 0{,}05 + 0{,}9 \cdot 0{,}96} \simeq 0{,}005$

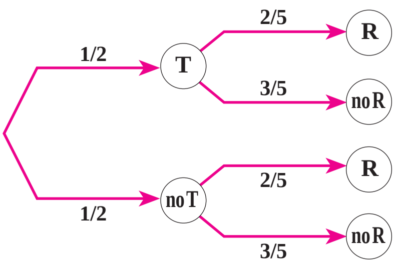
68 **Un experimento consiste en lanzar un dado y extraer una bola de una urna que contiene una bola blanca, dos rojas, una verde y una azul.**

a) Construye un espacio muestral apropiado a dicha experiencia para calcular la probabilidad de obtener un número mayor que tres y una bola roja.

b) Obtén dicha probabilidad.

Sea T = {obtener más de 3} y R = {obtener bola roja}

El árbol que genera el espacio muestral es:



$P(T \cap R) = P(T) \cdot P(R/T) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{5}$

69 **El 6% de los coches de una determinada fábrica tiene defecto en el motor, el 8% tiene defecto en la carrocería y el 2% tienen defecto en ambos.**

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un coche tenga al menos un defecto?

b) ¿Y la probabilidad de que un coche no sea defectuoso?

a) $P = 0{,}06 + 0{,}08 - 0{,}02 = 0{,}12$

b) $P = 1 - 0{,}12 = 0{,}88$

70 **En una Universidad en la que sólo hay estudiantes de Arquitectura, Ciencias y Letras, terminan la carrera el 5% de Arquitectura, el 10% de Ciencias y el 20% de Letras.**

Se sabe que el 20% estudia Arquitectura, el 30% Ciencias y el 50% Letras. Eligiendo un estudiante al azar, se pide:

a) Probabilidad de que sea de Arquitectura y haya terminado la carrera.

b) Nos dice que ha terminado la carrera. Probabilidad de que sea Arquitectura.

a) $P(A \cap T) = 0{,}2 \cdot 0{,}05 = 0{,}01$

b) $P(A/T) = \dfrac{P(A \cap T)}{P(T)} = \dfrac{0{,}2 \cdot 0{,}05}{0{,}2 \cdot 0{,}05 + 0{,}3 \cdot 0{,}1 + 0{,}5 \cdot 0{,}2} \simeq 0{,}07$

71 **Un joyero compra los relojes a dos casas proveedoras. La primera le sirve el 60% de los relojes, de los cuales el 0,4% son defectuosos. La segunda le proporciona el resto, siendo defectuosos el 1,5%. Un día, el joyero, al vender un reloj, obsera que éste no funciona. Hallar la probabilidad de que el reloj proceda de la primera casa proveedora.**

$$P = \frac{0{,}6 \cdot 0{,}04}{0{,}6 \cdot 0{,}04 + 0{,}4 \cdot 0{,}015} = 0{,}8$$

72 **Álvaro, Belén y Carmen juegan un torneo de frontenis en el que cada uno de ellos juega una partida contra cada uno de sus dos amigos. Las distintas partidas son independientes y la probabilidad de que Belén gane a Álvaro es 0,6 y de 0,8 si juega contra Carmen. La probabilidad de que Álvaro gane la partida contra Carmen es 0,9. Calcula las probabilidades de los siguentes sucesos:**

a) Belén gana el torneo (las dos partidas).

b) Carmen sólo gana una partida.

c) Álvaro gana por lo menos una de las dos partidas que juega.

a) $P = 0{,}6 \cdot 0{,}8 = 0{,}48$

b) $P = 0{,}1 \cdot 0{,}8 + 0{,}2 \cdot 0{,}9 = 0{,}26$

c) $P = P(\text{no ganar ninguna}) = 0{,}6 \cdot 0{,}1 = 0{,}06$, luego la probabilidad de ganar al menos una es $P = 1 - 0{,}06 = 0{,}94$

73 **Se tienen 5 bolas numeradas del 1 al 5. Si se escogen al azar dos de ellas, ¿cuál es la probabilidad de que el número mayor sea 3?**

Casos favorables = 2; casos posibles = $C_{5,2} = 10$; $P = \dfrac{2}{10} = \dfrac{1}{5}$

74 **En un instituto hay 60 alumnos de COU. De ellos 40 estudian Inglés, 24 estudian Francés y 12 los dos idiomas. Se elige al azar un alumno de COU, calcular la probabilidad:**

a) Que estudie al menos uno de ellos.

b) Que estudie Inglés, sabiendo que ya estudia Francés.

c) Que no estudie ni Francés ni Inglés.

a) $P(I \cup F) = \dfrac{2}{3} + \dfrac{2}{5} - \dfrac{1}{5} = \dfrac{13}{15}$

b) $P(I/F) = \dfrac{1/5}{2/5} = \dfrac{1}{2}$

c) $P(\bar{I} \cap \bar{F}) = P(\overline{I \cup F}) = 1 - P(I \cup F) = 1 - \dfrac{13}{15} = \dfrac{2}{15}$

75 **Se lanzan dos dados. Si la suma de los puntos de las caras superiores es 5, hallar la probabilidad que en alguno de los dados salga un 2.**

$E = \{(1, 4)\ (4, 1)\ (2, 3)\ (3, 2)\}$; $P = \dfrac{2}{4} = 0,5$

76 **En un taller el 25% de los trabajadores son mecánicos y el 15% son electricistas y el 10% tienen las dos especialidades. Se selecciona un trabajador del taller al azar.**

a) ¿Cuál es la probabilidad que el trabajador seleccionado sea mecánico o electricista?

b) Si se sabe que el trabajador seleccionado es electricista. ¿Cuál es la probabilidad de que sea mecánico?

c) Si se sabe que el seleccionado es mecánico. ¿Cuál es la probabilidad que sea electricista?

	Mec	**no Mec**	**Total**
Elect.	0,10	0,05	0,15
no Elect.	0,15	0,70	0,85
Total	0,25	0,75	1

a) $P(M \cup E) = 0,25 + 0,15 - 0,10 = 0,30$

b) $P(M/E) = \dfrac{P(M \cap E)}{P(E)} = \dfrac{0,10}{0,15} = \dfrac{2}{3}$

c) $P(E/M) = \dfrac{P(M \cap E)}{P(M)} = \dfrac{0,10}{0,25} = \dfrac{2}{5}$

1 **En el experimento de lanzar dos dados se considera la variable aleatoria *«mínimo de los puntos de las caras superiores».* Se pide:**

a) Obtener el espacio muestral del experimento aleatorio.

b) Definir los valores que toma la variable aleatoria.

c) Determinar su función de probabilidad.

d) Determinar su función de distribución.

a) {(1, 1), (1, 2), …, (1, 6), (2, 1), (2, 2), … (6, 6)}

b) {1, 2, 3, 4, 5, 6}

c)

χ	1	2	3	4	5	6
$P(\chi = x)$	$\frac{11}{36}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{36}$

d) $$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \frac{11}{36} & \text{si } 1 \le x < 2 \\ \frac{5}{9} & \text{si } 2 \le x < 3 \\ \frac{27}{36} & \text{si } 3 \le x < 4 \\ \frac{8}{9} & \text{si } 4 \le x < 5 \\ \frac{35}{36} & \text{si } 5 \le x < 6 \\ 1 & \text{si } 6 \le x \end{cases}$$

2 **En el experimento de lanzar dos dados tetraédricos se define la variable aleatoria *«suma de los puntos de las caras ocultas».* Se pide:**

a) Obtener el espacio muestral del experimento aleatorio.

b) Definir los valores que toma la variable aleatoria.

c) Determinar su función de probabilidad.

d) Determinar su función de distribución.

a) {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3) … (4, 4)}

b) {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}

c)

χ	2	3	4	5	6	7	8
$P(\chi = x)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$

d) $F(x)\begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 2 \\ \frac{1}{16} & \text{si} \quad 2 \le x < 3 \\ \frac{3}{16} & \text{si} \quad 3 \le x < 4 \\ \frac{3}{8} & \text{si} \quad 4 \le x < 5 \\ \frac{5}{8} & \text{si} \quad 5 \le x < 6 \\ \frac{13}{16} & \text{si} \quad 6 \le x < 7 \\ \frac{15}{16} & \text{si} \quad 7 \le x < 8 \\ 1 & \text{si} \quad 8 \le x \end{cases}$

3 **En una urna hay 3 bolas blancas y 2 negras. Se extrae una bola se mira su color y se devuelve a la urna. Se hacen tres extracciones consecutivas y se define la variable aleatoria *«número de bolas blancas que han salido»*.**

a) Obtén el espacio muestral del experimento aleatorio.

b) Determina los valores que toma la variable aleatoria.

c) Determina su función de probabilidad.

d) Determina su función de distribución.

a) {(n, n, n), (n, n, b), (n, b, n), (b, n, n), (n, b, b), (b, n, b), (b, b, n), (b, b, b)}

b) {0, 1, 2, 3}

c)

χ	0	1	2	3
$P(\chi = x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

d) $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ \frac{1}{8} & \text{si} \quad 0 \le x < 1 \\ \frac{1}{2} & \text{si} \quad 1 \le x < 2 \\ \frac{7}{8} & \text{si} \quad 2 \le x < 3 \\ 1 & \text{si} \quad 3 \le x \end{cases}$

4 **Se lanzan simultáneamente una moneda y un dado y se define la variable aleatoria del modo siguiente:**

Si en el lanzamiento la moneda sale cara, se asigna al resultado el valor de la puntuación del dado más uno.

Si en el lanzamiento la moneda sale cruz, se asigna al resultado el valor de la puntuación del dado.

a) Obtén el espacio muestral del experimento aleatorio.
b) Determina los valores que toma la variable aleatoria.
c) Determina su función de probabilidad.
d) Determina su función de distribución.

a) {(c, 1), (c, 2), … (c, 6), (+, 1), (+, 2), … (+, 6)}

b) {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}

c)

χ	1	2	3	4	5	6	7
$P(\chi = x)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$

d) $$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 1 \\ \frac{1}{12} & \text{si} \quad 1 \leq x < 2 \\ \frac{1}{4} & \text{si} \quad 2 \leq x < 3 \\ \frac{5}{12} & \text{si} \quad 3 \leq x < 4 \\ \frac{7}{12} & \text{si} \quad 4 \leq x < 5 \\ \frac{3}{4} & \text{si} \quad 5 \leq x < 6 \\ \frac{11}{12} & \text{si} \quad 6 \leq x < 7 \\ 1 & \text{si} \quad 7 \leq x \end{cases}$$

5 **Calcula la media, la varianza y la desviación típica de la variable aleatoria definida en el ejercicio 1.**

$\mu = \frac{91}{36} = 2{,}53$; $\quad \sigma^2 = 1{,}97 = \frac{2\,555}{1\,296}$; $\quad \sigma = 1{,}40$

6 **Calcula la media y la varianza de la variable aleatoria definida en el ejercicio 3.**

$\mu = 1{,}5$; $\quad \sigma^2 = 0{,}75$

7 **Hallar la función de probabilidad y de distribución de la variable aleatoria «*número de cruces*» en el experimento de lanzar 6 monedas simultáneamente.**

χ	0	1	2	3	4	5	6
$P(\chi = x)$	$\frac{1}{64}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{15}{64}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{15}{64}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{1}{64}$

$$
F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 1 \\ \dfrac{1}{64} & \text{si} \quad 0 \leq x < 1 \\ \dfrac{7}{64} & \text{si} \quad 1 \leq x < 2 \\ \dfrac{11}{32} & \text{si} \quad 2 \leq x < 3 \\ \dfrac{21}{32} & \text{si} \quad 3 \leq x < 4 \\ \dfrac{57}{64} & \text{si} \quad 4 \leq x < 5 \\ \dfrac{63}{64} & \text{si} \quad 5 \leq x < 6 \\ 1 & \text{si} \quad 6 \leq x \end{cases}
$$

8 **En una urna hay 4 bolas blancas y 6 negras. Si el experimento consiste en hacer cinco extracciones con devolución, calcular la función de probabilidad y de distribución de la variable «*número de bolas blancas*».**

χ	0	1	2	3	4	5
$P(\chi = x)$	0,07776	0,2592	0,3456	0,2304	0,0768	0,01024

$$
F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ 0{,}07776 & \text{si} \quad 0 \leq x < 1 \\ 0{,}33696 & \text{si} \quad 1 \leq x < 2 \\ 0{,}68256 & \text{si} \quad 2 \leq x < 3 \\ 0{,}91296 & \text{si} \quad 3 \leq x < 4 \\ 0{,}98976 & \text{si} \quad 4 \leq x < 5 \\ 1 & \text{si} \quad 5 \leq x \end{cases}
$$

9 **Hallar la media, la varianza y la desviación típica de la distribución de la variable aleatoria «*número de caras*» en el experimento de lanzar 10 monedas simultáneamente.**

$\mu = 5$; $\sigma^2 = 2{,}5$; $\sigma = 1{,}58$

10 **En una urna hay una bola blanca y 5 negras. Si el experimento consiste en hacer doce extracciones con devolución, calcular la media y la varianza de la distribución de la variable «*número de bolas blancas*».**

$\mu = 10$; $\sigma^2 = 1{,}67$

11 **Se tiene un dado correctamente equilibrado pero tres de sus caras llevan el número 1, dos caras el número 2 y una cara el número 3. Se lanza el dado y se considera la variable aleatoria que asigna a cada**

lanzamiento el número obtenido. Halla la función de probabilidad y la función de distribución de esta variable.

χ	1	2	3
$P(\chi = x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 1 \\ \frac{1}{2} & \text{si} \quad 1 \le x < 2 \\ \frac{5}{6} & \text{si} \quad 2 \le x < 3 \\ 1 & \text{si} \quad 3 \le x \end{cases}$$

12 **Una urna contiene dos bolas blancas, tres rojas y cuatro verdes. Una variable aleatoria χ asigna un 1 si la bola extraída es blanca, un 2 si es roja y un 3 si es verde. Halla:**

a) la función de probabilidad y de distribución de esta variable;

b) la media y la desviación típica.

χ	1	2	3
$P(\chi = x)$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{9}$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 1 \\ \frac{2}{9} & \text{si} \quad 1 \le x < 2 \\ \frac{5}{9} & \text{si} \quad 2 \le x < 3 \\ 1 & \text{si} \quad 3 \le x \end{cases}$$

$$\mu = \frac{20}{9} = 2{,}22; \quad \sigma = \sqrt{\frac{50}{81}} = 0{,}79$$

13 **En una caja hay tres bolas marcadas con un 1 y cinco con un 4. Se sacan al azar dos bolas simultáneamente y se suman los puntos. Hallar la media y la desviación típica de esta variable.**

$$\mu = \frac{161}{28} \simeq 5{,}75; \quad \sigma = \sqrt{\frac{405}{112}} \simeq 1{,}90$$

14 **Como en el ejercicio anterior pero suponiendo que las bolas se sacan sucesivamente y reponiendo cada vez la bola sacada.**

$$\mu = \frac{23}{4} = 5{,}75; \quad \sigma = \sqrt{\frac{135}{32}} \simeq 2{,}05$$

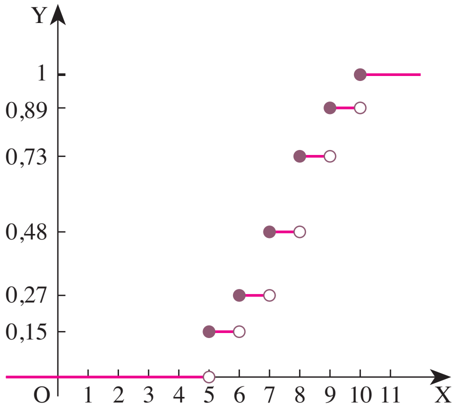
15 **La variable aleatoria χ puede tomar los valores 5, 6, 7, 8, 9 y 10 con probabilidades:**

$P(\chi = 5) = 0{,}15$ $\quad$ $P(\chi = 6) = 0{,}12$ $\quad$ $P(\chi = 7) = 0{,}21$

$P(\chi = 8) = 0{,}25$ $\quad$ $P(\chi = 9) = 0{,}16$ $\quad$ $P(\chi = 10) = 0{,}11$

Halla: a) La función de distribución y su gráfica. b) La media, c) la varianza y la desviación típica.

a) $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 5 \\ 0{,}15 & \text{si } 5 \leq x < 6 \\ 0{,}27 & \text{si } 6 \leq x < 7 \\ 0{,}48 & \text{si } 7 \leq x < 8 \\ 0{,}73 & \text{si } 8 \leq x < 9 \\ 0{,}89 & \text{si } 9 \leq x < 10 \\ 1 & \text{si } 10 \leq x \end{cases}$



b) $\mu = 7{,}48$

c) $\sigma^2 = 2{,}3696$; $\sigma = 1{,}5394$

16 **La función de probabilidad de una variable aleatoria es la de la tabla:**

x_i	4	5	6	7	8	9	10
p_i	0,2	0,15	0,1	0,3	0,1	0,05	

Calcula

a) *p*(10)

b) media y desviación típica.

a) $P(10) = 0{,}1$

b) $\mu = 6{,}5$; $\sigma^2 = 3{,}45$; $\sigma = 1{,}86$

17 **Si el 5% de los cerrojos producidos por una máquina son defectuosos, determina la probabilidad de que de 5 cerrojos elegidos al azar:**

a) uno sea defectuoso;

b) como máximo haya dos defectuosos.

a) 0,2036 **b)** 0,9988

χ sigue una B(5, 0,05) y con la tabla de la f. de probabilidad es:

a) 0,204 **b)** 0,999

18 **Una familia tiene 6 hijos. Si la distribución por sexos es igualmente probable, halla la probabilidad de que haya:**

a) dos niños como máximo;

b) al menos una niña;

c) al menos tres niños;

d) al menos una niña y un niño.

a) 0,34375 **b)** 0,984375

c) 0,65625 **d)** 0,96875

χ sigue una B(6, 0,5) y con la tabla se tiene:

a) 0,344 **b)** 0,984

c) 0,656 **d)** 0,968

19 **A una reunión han sido convocadas 8 personas. Cada persona puede acudir o no con independencia de lo que hagan las demás. Si la probabilidad de que acuda cada una de las personas es 0,85, se pide:**

a) probabilidad de que asistan todas;

b) probabilidad de que asistan más de 6 personas;

c) probabilidad de que al menos asista la mitad.

a) 0,2725 **b)** 0,6572 **c)** $\simeq$ 1

20 **Un jugador de baloncesto tiene acreditado un 62% de acierto en sus lanzamientos de dos puntos. Si en un partido lanza 15 veces a canasta, ¿cuál es la probabilidad de que logre, a) 10 puntos? (5 canastas); b) al menos 5 canastas?; c) más de 25 puntos? (más de 12 canastas).**

a) 0,0173 **b)** 0,9941 **c)** 0,0382

21 **Un equipo de fútbol tiene 3/5 de probabilidad de ganar cada vez que juega. Si se juegan 6 partidos halla la probabilidad de que gane más de la mitad de los partidos.**

0,54432 χ sigue una B(6, 0,6) y con la tabla es: 0,545

22 **Una encuesta revela que el 20% de la población es favorable a un político y el resto es desfavorable. Elegidas 6 personas al azar se desea saber:**

a) La probabilidad de que las seis personas sean desfavorables.

b) La probabilidad de que las seis personas sean favorables.

c) La probabilidad de que sean favorables a ese líder menos de tres de las personas encuestadas.

a) 0,262144 **b)** 0,000064 **c)** 0,90112

23 **¿Cuál es la fórmula que da la probabilidad de que al lanzar 3 monedas bien construidas se obtengan x caras? Supongamos ahora que se han lanzado 3 monedas bien construidas. Se pide:**

a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener 1 cara?

b) ¿Cuál es la probabilidad de obtener 3 caras?

$$P(\chi = x) = \binom{3}{x} 0,5^{x} \cdot 0,5^{3-x} = \binom{3}{x} 0,5^{3}$$

a) 0,375 **b)** 0,125

24 **El 85% de los alumnos que se presentan a las Pruebas de Acceso en la convocatoria de Junio las aprueba. En relación a un centro que presenta 15 alumnos, se pide:**

a) Determinar el número de alumnos que por término medio aprobará.

b) ¿Cuál es su desviación típica?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que aprueben los 15 alumnos?

a) 12,75 **b)** 1,3829 **c)** 0,0874

25 **Se lanzan cuatro monedas simétricas. ¿Cuál es la probabilidad de obtener al menos dos caras?**

0,6875

26 **El 20% de los españoles lee ensayos. Al elegir 3 al azar y representar por x el número de los que leen ensayos es evidente que x puede tomar los valores 0, 1, 2 o 3.**

Calcular las probabilidades de que $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$ y $x = 3$.

Calcular la media y la varianza de x.

$P(x = 0) = 0,512$

$P(x = 1) = 0,384$

$P(x = 2) = 0,096$

$P(x = 3) = 0,008$

$\mu = 0,6$; $\sigma^2 = 0,48$

27 **Juan encesta el 70% de sus tiros a canasta. En dos partidos lanzó 10 tiros en cada uno. ¿Cuál es la probabilidad de que en cada partido enceste más de 7 canastas? Razona si esta probabilidad es mayor, menor o igual que la probabilidad de que entre los dos partidos enceste más de 15 canastas.**

0,1465; 0,2375

Es mayor la probabilidad de encestar más de 15 canastas entre los dos partidos.

28 **Si se contesta al azar un test de 8 preguntas con respuestas SI/NO, ¿cuál es la probabilidad de acertar más de 5?, ¿y la probabilidad de acertar 3 o 4?**

0,1445; 0,4922

29 **ELISA es el nombre de uno de los primeros test que se utilizaron para detectar la presencia de anticuerpos del virus del SIDA en la sangre. Con muestras de sangre contaminada con anticuerpos del SIDA, ELISA da un resultado positivo (señala la presencia de anticuerpos) en el 99% de los casos. Si consideramos n = 10 unidades de sangre contaminada.**

a) ¿Cuál es la probabilidad de que ELISA detecte todos los casos?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que escapen a la detección dos unidades de sangre?

a) 0,9044 **b)** 0,0042

30 **Se considera un hexágono regular H.**

1. Se eligen al azar tres vértices distintos de H.

a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener un triángulo equilátero?

b) ¿Cuál es la probabilidad de obtener un triángulo isósceles no equilátero?

c) ¿Cuál es la probabilidad de obtener un triángulo rectángulo?

2. Se repite cinco veces la experiencia del apartado 1.

Sea χ la variable aleatoria que toma por valor el número de triángulos rectángulos obtenidos.

a) ¿Cuál es el conjunto de valores tomados por χ?

b) Determinar la función de probabilidad de χ, su esperanza matemática y su varianza.

1. a) $\frac{1}{10}$ **b)** $\frac{3}{10}$ **c)** $\frac{3}{5}$

2. a) {0, 1, 2, 3, 4, 5}

b)

χ	0	1	2	3	4	5
$P(\chi = x)$	0,01024	0,0768	0,2304	0,3456	0,2592	0,07776

$\mu = 3$; $\sigma^2 = 1{,}2$

31 **Se pintan las seis caras de un cubo de madera de arista 3 cm. Se divide, con cortes paralelos a las caras de los cubos, en 27 cubos pequeños de arista 1 cm. Se meten los 27 cubos en un saco.**

Se escogen al azar, sin devolución, dos cubos del saco. Sea χ la variable aleatoria igual al número total de caras pintadas que presentan los dos cubos escogidos.

a) ¿Qué valores toma χ?

b) Hallar la función de probabilidad de χ.

c) Hallar μ y σ.

a) {1, 2, 3, 4, 5, 6}

b)

χ	1	2	3	4	5	6
$P(\chi = x)$	$\frac{12}{702}$	$\frac{54}{702}$	$\frac{160}{702}$	$\frac{228}{702}$	$\frac{192}{702}$	$\frac{56}{702}$

c) $\mu = 4; \quad \sigma = \sqrt{\frac{50}{39}} \simeq 1{,}28$

32 **En el experimento de extraer una carta de una baraja de 40 cartas se define la variable aleatoria que asigna el número de la carta si éste es menor que 5 y el 0 a las demás. Determina:**

a) Los valores que toma la variable aleatoria.

b) Su función de probabilidad.

c) Su función de distribución.

a) 0, 1, 2, 3, 4

b)

χ	0	1	2	3	4
$P(\chi = x_i)$	6/10	1/10	1/10	1/10	1/10

c) $$F(x) = P(\chi \le x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ 6/10 & \text{si} \quad 0 \le x < 1 \\ 7/10 & \text{si} \quad 1 \le x < 2 \\ 8/10 & \text{si} \quad 2 \le x < 3 \\ 9/10 & \text{si} \quad 3 \le x < 4 \\ 1 & \text{si} \quad x \ge 4 \end{cases}$$

1 **Utilizando la tabla de valores de la distribución normal, calcular:**

a) $P(\chi \leq 1{,}2)$ **b) $P(0 \leq \chi \leq 0{,}75)$**

c) $P(\chi \leq -0{,}72)$ **d) $P(0{,}35 \leq \chi \leq 0{,}9)$**

a) 0,8849 **b)** 0,2734

c) 0,7642 **d)** 0,1791

2 **Idem:**

a) $P(\chi \leq 2{,}06)$ **b) $P(\chi \geq -0{,}23)$**

c) $P(-2{,}3 \leq \chi \leq -0{,}38)$ **d) $P(-1{,}54 \leq \chi \leq 0{,}46)$**

a) 0,9803 **b)** 0,5910

c) 0,3413 **d)** 0,6154

3 **Hallar x_0 si:**

a) $P(\chi \leq x_0) = 0{,}9884$ **b) $P(\chi \leq x_0) = 0{,}3707$**

c) $P(\chi \leq x_0) = 0{,}2266$ **d) $P(-1{,}24 \leq \chi \leq x_0) = 0{,}7084$**

a) 2,27 **b)** –0,33

c) –0,75 **d)** 0,9

4 **Idem:**

a) $P(\chi \leq x_0) = 0{,}9738$ **b) $P(\chi \geq x_0) = 0{,}1469$**

c) $P(\chi \geq x_0) = 0{,}9207$ **d) $P(x_0 \leq \chi \leq 0{,}3) = 0{,}098$**

a) 1,94 **b)** 1,05

c) –1,41 **d)** 0,05

5 **En una distribución N(7, 4) calcula:**

a) $P(\chi \leq 4)$ **b) $P(\chi \geq 5{,}4)$**

c) $P(3 \leq \chi \leq 7{,}6)$ **d) $P(6 \leq \chi \leq 10)$**

a) 0,2266 **b)** 0,6554

c) 0,4009 **d)** 0,1747

6 **Si χ sigue una distribución N(15, 5) calcula a en los siguientes casos:**

a) $P(\chi \leq a) = 0{,}975$ **b) $P(\chi \geq a) = 0{,}2514$**

c) $P(10 \leq \chi \leq a) = 0{,}5113$ **d $P(a \leq \chi \leq 19) = 0{,}3674$**

a) 24,8 **b)** 18,35

c) 17,2 **d)** 14

7 **Suponiendo que la probabilidad de nacer niño o niña es la misma, halla la probabilidad de que en los 650 nacimientos habidos en un hospital, nacieran:**

a) más de 350 niños

b) menos de 200 niños

c) entre 300 y 400 niños

N(325, 12,75) **a)** 0,025 **b)** 0 **c)** 0,975

8 **Por el historial turístico de una región se sabe que el 45% de los turistas que la visitan son franceses. Éste año se espera que la visiten 2000 turistas. Se pide:**

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la visiten más de 1000 franceses?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la visiten menos de 850 franceses?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que la visiten entre 870 y 920 franceses?

d) ¿Qué número de franceses se espera que la visiten éste año?

N(90,0, 22,25) **a)** 0 **b)** 0,0122 **c)** 0,7274 **d)** 900

9 **La media y la desviación típica de un test pasado a un grupo de estudiantes son 96 y 10 respectivamente. Hallar los resultados reducidos (tipificados) de los estudiantes que obtuvieron los puntos: a) 85; b) 104; c) 100.**

a) –1,1 **b)** 0,8 **c)** 0,4

10 **En una distribución N(0, 1) hallar:**

a) $P(0 \leq \chi \leq 1{,}24)$ **b)** $P(-0{,}37 \geq \chi \leq 0)$

c) $P(0{,}56 \leq \chi \leq 1{,}62)$ **d)** $P(|\chi| \leq 0{,}25)$

a) 0,3925 **b)** 0,1443

c) 0,2351 **d)** 0,1974

11 **Sea χ una variable aleatoria que sigue una distribución N(0, 1). Determinar el valor de *x* si:**

a) $P(0 \leq \chi \leq x) = 0{,}4236$; **b)** $P(\chi \leq x) = 0{,}3669$; **c)** $P(x \leq \chi \leq 2{,}5) = 0{,}123$

a) 1,43 **b)** –0,34 **c)** 1,13

12 **Un equipo de fútbol ha conseguido en las últimas temporadas unos resultados que se han distribuido normalmente con una media de 23 victorias y una desviación típica de 6. Suponiendo que mantenga esta tónica, hallar:**

a) La probabilidad de que gane entre 22 y 27 partidos en la próxima temporada. $\chi \in [22{,}5,\ 26{,}5]$.

b) La probabilidad de que gane más de 30 partidos. $\chi \leq 30{,}5$

Por ser el número de partidos ganados una variable aleatoria discreta, se introduce el factor de corrección, resultando ser:

a) 0,2509; **b)** 0,1056

13 **La temperatura T durante el mes de mayo está distribuida normalmente con media 21° y desviación típica 4. Hallar el número de días en que se espera haya una temperatura entre 19° y 23°.**

0,383

14 **Una moneda corriente se lanza 30 veces. Hallar la probabilidad de obtener entre 17 y 22 caras usando:**

a) La distribución binomial.

b) La aproximación de la normal a la binomial. Considera que $\chi \in [17{,}5,\ 21{,}5]$.

a) 0,1727 **b)** 0,1795

15 **El promedio de aciertos en el tiro a canasta de un jugador de baloncesto es del 73 por 100. Si lanza 200 veces, ¿cuál es la probabilidad de que enceste más de 160 lanzamientos? Considera que $\chi \geq 160{,}5$.**

N(146, 6,28); 0,0129

16 **La duración media de una clase se estima que es de 55 minutos, con una desviación típica de 4 minutos. Calcula:**

a) La probabilidad de que una clase dure más de 1 hora.

b) La probabilidad de que dure entre 52 y 59 minutos.

c) La probabilidad de que dure menos de 49 minutos.

a) 0,1056 **b)** 0,6147 **c)** 0,0668

17 **A partir de la tabla de la distribución N(0, 1) obténganse, aproximadamente, intervalos con extremo inferior 0; 0,2; 0,4 y 1 que contengan el 10 por 100 del área total.**

a) ¿Cómo varía la amplitud del intervalo conforme su extremo inferior se va alejando de la media?

b) Hállese el intervalo de amplitud mínima que contenga el 10% del área total.

Sin interpolar. [0, 0,25]; [0,2, 0,47]; [0,4, 0,69]; [1, 1,56]

a) Aumenta la amplitud del intervalo

b) [–0,13, 0,13]

18 **Los resultados de una prueba objetiva de selección pasada a 200 personas indicaron que la distribución de puntuaciones era normal, con media de 60 puntos y desviación típica de 6 puntos. Calcular cuántos examinados han obtenido una puntuación entre 50 y 57 puntos, y cuál es la mínima puntuación por debajo de la cuál están el 75% de los examinados.**

$P(50 \leq \chi \leq 57) \cdot 200 = 52{,}2 \Rightarrow$ 52 examinandos; 64,02 puntos

19 **Una empresa instala en una ciudad 20 000 bombillas para su iluminación. La duración de una bombilla sigue una distribución normal con media 302 días y desviación típica 40 días.**

a) ¿Cuántas bombillas es de esperar que se fundan antes de 365 días?

b) ¿Cuántas durarán más de 400 días?

a) $P(\chi \leq 365) \simeq 0{,}9429 \Rightarrow 18.858$ bombillas;

b) $P(\chi \leq 400) = 0{,}0071 \Rightarrow 142$ bombillas

20 **Suponiendo que las tallas de los adultos de un país A siguen una distribución normal, con media 180 cm y desviación típica 5 cm y que las tallas de los adultos de un país B siguen una distribución también normal, pero con media 180 cm y desviación típica 15 cm, contestar razonadamente en cuál de los dos países es más probable encontrar adultos con talla superior a 195 cm, y donde es más probable encontrar adultos con talla comprendida entre 175 y 185 cm.**

Es más probable encontrarlos en B porque $P(\chi \geq 1) > P(\chi \geq 3)$

Es más probable encontrarlos en A porque $P(-1 \leq \chi \leq 1) > P\left(-\frac{1}{3} \leq \chi \leq \frac{1}{3}\right)$

21 **El peso de los adultos de una población numerosa se distribuye normalmente con media 65 kg y desviación típica 3 kg. Se eligen dos individuos al azar. Calculando las correspondientes probabilidades, justifica que es más probable:**

a) Que cada uno de los individuos tenga un peso comprendido entre 63,5 y 66,5 kg.

b) Que uno de ellos tenga un peso comprendido entre 62 y 68 kg y el otro tenga un peso no comprendido entre 62 y 68 kg.

La probabilidad de a) es 0,146689. La probabilidad de b) es 0,4333144. Es más probable b)

22 **La estatura de una población se distribuye normalmente con media 170 cm y desviación típica 6 cm.**

Calcular la probabilidad de que elegido un individuo al azar tenga media comprendida entre 158 y 182 cm.

0,9544

23 **Los ingresos diarios de una empresa tienen una distribución normal, con media 35 560 € y desviación típica 2 530 €. Justifica si es o no razonable el esperar obtener un día unas ventas superiores a 55 000 €. Calcular cuántos días en un año se espera obtener unas ventas superiores a 40 620 €.**

$P(\chi \geq 55.000) \simeq 0 \Rightarrow$ no es razonable esperar un día con unas ventas superiores a 55000 €.

$P(\chi \geq 40.620) \cdot 365 = 8{,}322 \Rightarrow$ se espera que 8 días tengan unas ventas superiores a 40620 €.

24 **Se sabe que las puntuaciones obtenidas al pasar un test siguen una distribución normal con media 210 puntos y desviación típica 0,6 puntos. Si se pasa ese test a 100 personas, ¿cuántas de esas 100 personas deberemos esperar que obtengan una puntuación entre 209 y 211 puntos?**

$P(209 \leq \chi \leq 211) \cdot 100 = 90{,}5 \Rightarrow$ se espera que 90 personas obtengan esa puntuación.

25 **Juan encesta el 30% de sus tiros a canasta. En dos partidos lanzó 20 tiros en cada uno. Utilizando la distribución normal: ¿cuál es la probabilidad de que en cada partido enceste más de 7 canastas? Razona si esta probabilidad es mayor, menor o igual que la probabilidad de que entre los dos partidos enceste más de 15 canastas.**

La probabilidad de que en cada partido enceste más de 7 canastas es 0,0542.

La probabilidad de encestar más de 15 canastas entre los dos partidos es 0,1131.

Es mayor la probabilidad de encestar más de 15 canastas entre los dos partidos.

26 **Se tienen muchos datos que siguen una distribución normal de media 20 y desviación típica 2. Calcula el porcentaje de datos que superan el valor 23, y justifica que ese porcentaje es idéntico al porcentaje de datos inferiores a 17.**

6,68%

$P(\chi \geq 23) = P(Z \geq 1{,}5) = 1 - P(Z \leq 1{,}5)$

$P(\chi \leq 17) = P(Z \leq -1{,}5) = 1 - P(Z \leq 1{,}5)$

27 **El 10% de los artículos fabricados en una empresa de material cerámico tiene algún defecto. Obtén (utilizando la distribución normal) la probabilidad de que en un lote de 100 artículos hayan:**

a) 10 defectuosos **b) al menos 10 defecutosos**

a) 0,135 **b)** 0,5675

28 **La distribución de la duración de un embarazo en mujeres es aproximadamente normal con media 266 días y desviación típica 16 días. Calcula:**

a) La proporción de embarazos con una duración mínima de 242 días.

b) El número de días para que la duración del embarazo en el 20% de las mujeres sea inferior a él.

c) El número de días para que su duración en el 50% de las mujeres sea inferior a él.

a) 0,9332 **b)** 252,56 días **c)** 266 días

29 **El grosor de la cáscara de los huevos que ponen las gallinas de la *Granja Ous Integrals* es una variable aleatoria con distribución normal de media 0,38 mm y desviación típica 0,03 mm.**

a) Si se selecciona un huevo de dicha granja al azar, ¿cuál es la probabilidad de que su grosor se encuentre entre 0,35 mm y 0,39 mm?

b) ¿Qué valor de grosor será superado sólo por el 10% de los huevos de la granja?

a) 0,4706 **b)** 0,4184 mm.

30 **Las peticiones de compra de la revista «El Cuore» en un kiosco tienen de media 190 y una desviación típica de 25. ¿Cuántos ejemplares de la revista debe encargar el dueño para satisfacer el 80% de la demanda?**

$\simeq$ 211 revistas

31 **Las oposiciones a cierto Ayuntamiento constan de dos ejercicios. El primero de ellos es un test de inteligencia, que consiste en 200 preguntas. La distribución de aciertos sigue un comportamiento normal, con media 125 y desviación típica 15. El Tribunal decide dar paso al segundo ejercicio a los opositores que hayan superado 140 aciertos en el test. ¿Cuántos opositores pasarán al siguiente ejercicio, sabiendo que se han presentado 1500 opositores?**

238 opositores

ECIR EDITORIAL

Guía del profesor

Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales

ISBN 978-84-9826-449-4