ECIR EDITORIAL

Guía Didáctica II

bachillerato 2

Matemáticas

aplicadas a las Ciencias Sociales

Autores
Maribel Deusa
Rodolfo Esteve
Pascual Montesinos
Antonio J. Ramírez
Ernesto Veres

ECIR EDITORIAL

Matemáticas aplicadas a las CC.S.S.

2 bachillerato

Guía Didáctica II

Maribel Deusa
Rodolfo Esteve
Pascual Montesinos
Antonio J. Ramírez
Ernesto Veres
Editorial ECIR, S.A.

ISBN: 978-84-9826-534-7

Diseño de interior: Diseño gráfico ECIR
Edición: Editorial ECIR

Ilustraciones: Diseño Gráfico ECIR
Diseño e ilustración cubierta: Valverde e Iborra / Diseño gráfico ECIR

ECIR EDITORIAL
Villa de Madrid, 60 - 46988 - P. I. Fuente del Jarro - PATERNA (Valencia)
Tels: 96 132 36 25 - 96 132 36 55
Móvil: 677 431 115
Fax: 96 132 36 05
E-mail: ecir@ecir.com - http://www.ecir.com

Índice interactivo. Situar el cursor sobre el tema al que se desee ir y hacer clic.

Índice

Tema 1 SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES. MÉTODO DE GAUSS

1. Por ejemplo (0, 0, 4), (1, 1, 6), (–1, 0, 5)...

2. Sí, es solución particular de $x + y - z = 4$.

3. Si lo es porque $3(2) - 5(5) - 2(-3) = -13$

4. $\left(1, 1, -\frac{8}{5}\right)$; $\left(0, 0, -\frac{7}{5}\right)$; $(-1, 2, 0)$

5. $3\alpha + 2\beta - (3\alpha + 2\beta - 5) = 5$, luego si lo es.

6. Si.

7. $\alpha + \beta - \frac{2(\alpha + \beta - 1)}{2} = 1$, luego si es $\left(\alpha, \beta, \frac{\alpha + \beta - 1}{2}\right)$ una solución general de $x_1 + x_2 - 2x_3 = 1$

$1 - \gamma + 2\delta + \gamma - 2\delta = 1$, luego también $(1 - \gamma + 2\delta, \gamma, \delta)$ es una solución general de $x_1 + x_2 - 2x_3 = 1$

8. Si, depende de los parámetros que sean adjudicados a las variables.

9. a) $\left(\frac{-9\alpha + 1}{3}, \alpha\right)$ b) $\left(\frac{5 + 3\alpha}{2}, \alpha\right)$

c) $\left(\alpha, \beta, \frac{2 - 3\alpha + 2\beta}{5}\right)$ d) $\left(\alpha, \beta, \frac{-3\alpha + 2\beta}{5}\right)$

e) $\left(\alpha, \beta, \gamma, \frac{\alpha - \beta - 2\gamma - 1}{3}\right)$ f) $\left(\alpha, \beta, \gamma, \frac{\alpha - \beta + 2\gamma}{3}\right)$

10. a) $x = 1 \quad y = 2 \quad z = 4$

b) $x = 3 \quad y = 5 \quad z = -8$

c) No tiene solución.

11. a) $x = y = z = 0$

b) No tiene solución

c) $x = \alpha; \quad y = \alpha; \quad z = 0$

12. a)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 4 & -2 & 0 & 12 \end{array}\right)_{4e_1 - e_3} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 8 & 4 \end{array}\right)_{\frac{e_3}{2}} =$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & 2 \end{array}\right)_{e_2 + e_3} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 7 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} x - y + 2z = 4 \\ y + 3z = -1 \\ 7z = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow x = \frac{16}{7}; \quad y = \frac{-10}{7}; \quad z = \frac{1}{7}$$

Sistema compatible determinado.

b) Sistema compatible indeterminado.

$$x = \frac{-3 - 7\lambda}{11}; \quad y = \frac{42 + 10\lambda}{11}; \quad z = \lambda$$

13. a) Sistema incompatible

b) Sistema compatible indeterminado con solución $x = \alpha, \; y = \beta, \; z = 2 - \alpha - \beta, \; t = -1 - \alpha - 2\beta$

14. a) Para $a = 1 \rightarrow$ sistema incompatible

para $a = -1 \rightarrow$ sistema compatible indeterminado

para $a \neq \pm 1 \rightarrow$ sistema compatible determinado

b) Para $a = 0 \rightarrow$ sistema incompatible

para $a \neq 0 \rightarrow$ sistema compatible determinado

15. No lo son porque la cuarta ecuación del primer sistema no es una combinación lineal de las otras tres y el primer sistema no tiene solución cuando el segundo si tiene $x = \frac{3}{2}$; $y = \frac{1}{2}$; $z = \frac{3}{2}$

16. a) Sistema compatible determinado de solución $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$.

b) Sistema compatible determinado de solución $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$.

17. a) Sistema incompatible

b) Sistema homogéneo compatible indeterminado de solución $x = \frac{3}{2}\lambda, \; y = \frac{5}{2}\lambda, \; z = \lambda$

18. a) Sistema homogéneo compatible determinado, solución trivial (0, 0, 0).

b) Sistema compatible determinado de solución $x = 4$, $y = 2$.

19. a) Sistema compatible determinado de solución $x = 1$, $y = 1, \; z = 1$

b) Sistema compatible determinado de solución

$$x = \frac{2}{3}, \; y = \frac{2}{3}, \; z = \frac{2}{3}, \; t = \frac{2}{3}$$

20. a) Sistema compatible indeterminado

$x = 28\alpha - 2, \; y = 29\alpha - 4,$

$z = 49\alpha - 7, \; t = 12\alpha - 3$

b) Sistema compatible determinado de solución $x = 7, \; y = -3, \; z = -9, \; t = 2$.

21. a) Sistema compatible determinado de solución $x = 2$, $y = -1$, $z = -2$, $t = 3$

b) Sistema compatible determinado de solución $x = -2$, $y = 0$, $z = 1$, $t = 1$

22. a) $x = \dfrac{-3-7\alpha}{11}$, $y = \dfrac{42+10\alpha}{11}$, $z = \alpha$

b) $x = \dfrac{6\alpha+1}{4}$, $y = -\dfrac{1}{2}$, $z = \dfrac{3+2\alpha}{4}$, $t = \alpha$

23. a) $x = \alpha$, $y = 2\alpha - 1$ b) Incompatible

24. a) $x = 6$, $y = -1$, $z = 5$, $t = 7$

b) $x = z = t = \alpha$, $y = 2\alpha$

25. a) El sistema será compatible determinado y tendrá solución única cuando $t \neq 0$ y $t \neq 1$ y su solución será $x = \dfrac{-t}{1-t}$; $y = \dfrac{1}{1-t}$; $z = \dfrac{-t}{1-t}$

b) El sistema será compatible indeterminado y tendrá infinitas soluciones cuando $t = 0$ y su solución será $x = 1 - \lambda$; $y = \lambda$; $z = 0$.

c) El sistema será incompatible y no tendrá solución cuando $t = 1$.

26. a) Si $a \neq 2$ compatible determinado de solución

$x = \dfrac{2-2b}{a-2}$, $y = \dfrac{a+4b-6}{a-2}$, $z = \dfrac{b-1}{a-2}$

Si $a = 2$ y $b = 1$ compatible indeterminado $x = -2\alpha$,
$y = 1 + 4\alpha$, $z = \alpha$

Si $a = 2$ y $b \neq 1$ incompatible

b) Si $a = 1$ compatible indeterminado

$x = 1 - \alpha - \beta$, $y = \alpha$, $z = \beta$

Si $a = -2$ incompatible

Si $a \neq 1$ y $a \neq 2$ compatible determinado

$x = y = z = \dfrac{1}{a+2}$

27. a) El sistema es homogéneo, luego nunca puede ser incompatible y será:

- Compatible determinado para $a \neq -3$ con la solución trivial $x = y = z = 0$
- Compatible indeterminado para $a = -3$ con la solución $x = \alpha$, $y = 2\alpha$, $z = -\alpha$

b) Para todo valor de a, es compatible determinado $x = y = z = \dfrac{a}{4}$

28. a) $x = \dfrac{3}{5}$; $y = \dfrac{-4}{5}$; $z = 0$ b) $x = y = z = 0$

29. Si x = nº de días de vacaciones

y = nº de mañanas lluviosas

z = nº de tardes lluviosas

El sistema es $\left.\begin{array}{r} y + z = 7 \\ z + 5 = x \\ y + 6 = x \end{array}\right\}$ de solución x = 9 días

30. a) 14,55 €

b) 0,70 €

c) 1,65 €

d) no, es un sistema indeterminado

e) 0,55, 0,70 y 1,10 € respectivamente.

31. La corona contenía 5631,978 gr de oro y 1833,023 gr de plata. El peso de la corona sumergida estaría comprendida entre 6755,82 y 7076,82 gr.

32. $a = -1$ el sistema es compatible indeterminado.

$a \neq -1$ el sistema es incompatible.

33. a) Un ejemplo puede ser $\left.\begin{array}{r} x + y - z = -2 \\ 2x - y + z = 8 \end{array}\right\}$

b) Si llamamos a $z = \lambda$ $\left.\begin{array}{r} x + y = -2 + \lambda \\ 2x - y = 8 - \lambda \end{array}\right\}$ nos da como solución $x = 2$; $y = -4 + \lambda$; $z = \lambda$

c) Por ejemplo $\left.\begin{array}{r} x - y - z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \\ 3x - 2z = 0 \end{array}\right\}$

d) El sistema tiene como solución general

$x = \dfrac{2}{3}\lambda$; $y = -\dfrac{1}{3}\lambda$; $z = \lambda$ que para el valor $\lambda = 3$, obtenemos la solución particular $x = 2$, $y = -1$, $z = 3$

34. 123

35. a al 1%, b al 3% y c al 10%

36. 150 pasajeros el importe total, 300 el 20% y 50 el 50%.

37. a) 2 cajas de tipo A, 2 cajas de tipo B y 1 de tipo C.

b) Es un sistema compatible determinado.

38. $x = 1$, $y = 0$, $z = 0$.

Es posible tansformarlo en compatible indeterminado cambiando la primera ecuación por $x + y - z = 1$.

39. 4 440 €

40. A a 16 \$/barril; B a 20 \$/barril.

41. 432

42. 39, 21 y 12 respectivamente**.**

43. Siendo x la edad del padre, y la del primer hijo y z la del segundo, el sistema que obtenemos con los datos del problema es:

$$\left.\begin{aligned} x - 2y - 2z &= 0 \\ x + 2y - 8z &= 0 \\ x + 4y + 4z &= 150 \end{aligned}\right\}$$

resolviendo obtenemos que el padre tiene 50 años, el primer hijo 15 años y el segundo 10 años, luego cuando nació el primero el padre tenía 35 años y cuando nació el segundo tenía 40 años.

44. 12 han pagado 5,30 €, 40 han pagado 7,50 € y 8 han pagado 6 €.

45. El sistema siendo x la edad de la madre, y la edad del primer hijo y z la edad del segundo es:

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 57 \\ x - 4y - 4z &= -28 \\ x - 7y + 7z &= -9 \end{aligned}\right\}$$

obtenemos las edades que son 40 años la madre, 12 años el hijo mayor y 5 años el pequeño.

46. El tipo A vale 54 €, el tipo B 45 € y el tipo C 39 €.

47. En el nivel A hay 26 estudiantes, en el B 54 y en el nivel C hay 20.

48. a) $x = 1;\ \ y = 2;\ \ z = 4$

b) $x = 0;\ \ y = 0;\ \ z = 0$

c) $x = \frac{5}{3};\ \ y = \frac{4}{3};\ \ z = 2$

d) $x = -2;\ \ y = \frac{1}{5}$

e) $x = -\frac{2}{3};\ \ y = \frac{3}{4};\ \ z = 0$

f) El sistema no tiene solución, las tres rectas se cortan dos a dos, representada en la gráfica:

g) $x = 3\lambda - 3;\ \ y = 4 - \lambda;\ \ z = \lambda$

h) $1 - \frac{2\lambda}{3};\ \ y = \frac{-2\lambda}{3};\ \ z = \lambda$

i) $x = \frac{3}{2};\ \ y = \frac{1}{2} + \lambda;\ \ z = \lambda$

49. Sí, son equivalentes siendo la solución de ambos $x = 1,\ y = 0,\ z = -2$.

50. $x = \frac{-5\lambda}{26};\ \ y = \frac{-20\lambda}{13};\ \ z = \lambda$

Tema 2 SIGNIFICADO GEOMÉTRICO DE LOS SISTEMAS LINEALES

1. a) No b) Si c) No

2. $y = \sqrt{3}x + (3 - \sqrt{3})$ ó $y = 1{,}7x + 1{,}3$

3. No, porque los vectores $\overrightarrow{AB}(-1, -2)$ y $\overrightarrow{AC}(-4, 4)$ no determinan la misma dirección.

4. $m = \frac{3}{5};\ \ n = -3;\ \ y = \frac{3}{5}x - 3$

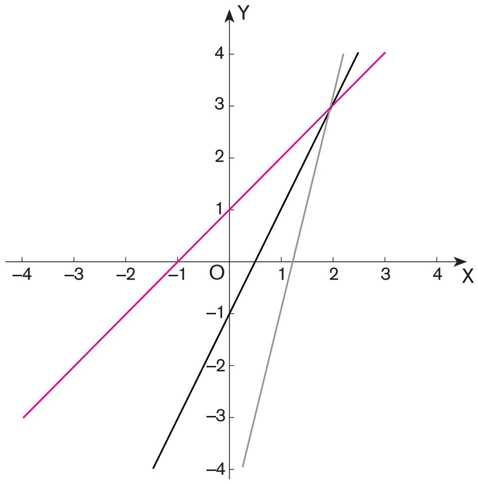
5. a) Recta que pasa por los puntos $A(3, 0)$ y $B(0, 1)$

$x + 3y - 3 = 0$

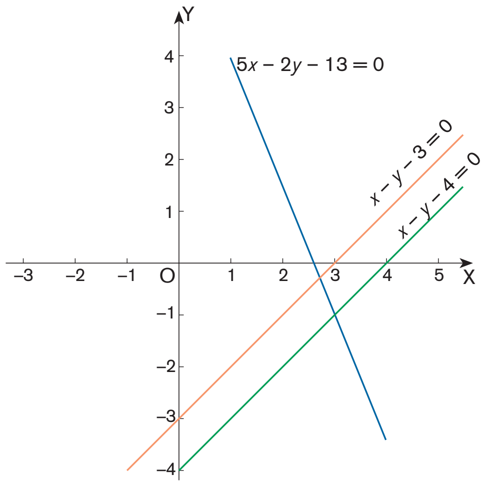
b) $y = 2$ ó $y - 2 = 0$

c) $y = x + 2$ ó $x - y + 2 = 0$

6. a) Las tres rectas se cortan en el punto (2, 3).



b) r y s son paralelas y t las corta en dos puntos P y Q respectivamente, $P\left(\frac{19}{7}, -\frac{2}{7}\right)$ y Q(3, –1).



7. *a)* y *b)* $\left.\begin{array}{r}2x-y+3z+2=0\\-2x+y-3z+1=0\end{array}\right\}\ \dfrac{2}{-2}=\dfrac{-1}{1}=\dfrac{3}{-3}\neq\dfrac{2}{1}$

corresponde a planos paralelos

a) y *c)* $\left.\begin{array}{r}2x-y+3z+2=0\\2x-y+2z=0\end{array}\right\}\ \dfrac{2}{2}=\dfrac{-1}{-1}\neq\dfrac{3}{2}$

corresponde a dos planos que se cortan en una recta

a) y *d)* $\left.\begin{array}{r}2x-y+3z+2=0\\6x-3y+9z+6=0\end{array}\right\}\ \dfrac{2}{6}=\dfrac{-1}{-3}=\dfrac{3}{9}=\dfrac{2}{6}$

corresponde a dos planos coincidentes

b) y *c)* $\left.\begin{array}{r}-2x+y-3z+1=0\\2x-y+2z=0\end{array}\right\}\ \dfrac{-2}{2}=\dfrac{1}{-1}\neq\dfrac{-3}{2}$

corresponde a dos planos que se cortan en una recta

b) y *d)* $\left.\begin{array}{r}-2x+y-3z+1=0\\6x-3y+9z+6=0\end{array}\right\}\ \dfrac{-2}{6}=\dfrac{1}{-3}=\dfrac{-3}{9}\neq\dfrac{1}{6}$

son planos paralelos

c) y *d)* $\left.\begin{array}{r}2x-y+2z=0\\6x-3y+9z+6=0\end{array}\right\}\ \dfrac{2}{6}=\dfrac{-1}{3}\neq\dfrac{2}{9}$

son planos que se cortan en una recta

8. a) $\left.\begin{array}{l}x=-1-3\lambda\\y=2\lambda\\z=\lambda\end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{l}x=1\\y=\lambda-1\\z=\lambda\end{array}\right\}$

9. 1) Dos coinciden y se cortan con el otro
2) Se cortan dos a dos en tres rectas paralelas
3) Se cortan en el punto $P\left(1, 2, \dfrac{1}{2}\right)$
4) Son coincidentes
5) Son paralelos dos a dos
6) Dos son paralelos y el otro los corta en sendas rectas paralelas
7) Los tres se cortan en la misma recta
8) Dos coinciden y son paralelos al otro

10. $a = 13$

11. $5x - 2y = 0$. Una recta pasa por el origen cuando no tiene término independiente

12. $2x - y - 6 = 0$

13. $2x - 5y + 5 = 0$

14. $y = \dfrac{3}{2}x - \dfrac{3}{2}$

15. $m = -\dfrac{4}{3}$ y $n = \dfrac{5}{3}$. El ángulo que forma la recta con el eje OX^+ es mayor de 90°

16. $7x - 7y + 5 = 0$; $45x - 29y + 39 = 0$

17. r: $x - 5y + 2 = 0$; s: $7x + 5y - 10 = 0$

a) $P\left(1, \dfrac{3}{5}\right)$ b) $18x - 5y - 15 = 0$

18. a) $m = \dfrac{3}{2}$ $n \neq -1$ b) $m = \dfrac{3}{2}$ $n = -1$

19. $a = -2$; $b = 3$

20. a) $9x - 2y - 2 = 0$ b) $k = -2$

21. a) $a \neq b$ b) $P(ab, -b - a)$

22. $m = 10$

23. Es un sistema incompatible y no hay planos ni paralelos ni coincidentes, luego se cortan dos a dos en tres rectas paralelas

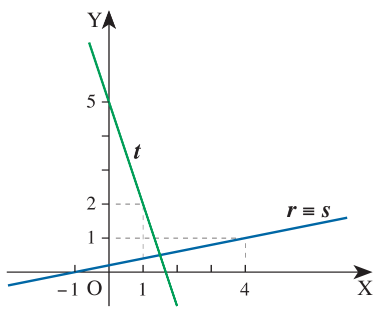
24. Los planos se cortan en una recta de ecuación

$$\left\{\begin{array}{l}x=2\lambda\\y=\lambda\\z=0\end{array}\right.$$

25. Los tres planos se cortan en un punto, luego forman un tiedro, el punto de corte es $P\left(\dfrac{3}{5}, -\dfrac{4}{5}, 0\right)$

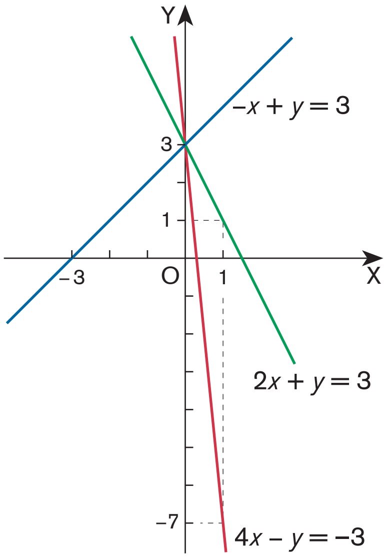
26. $\left.\begin{array}{l}x=-\lambda\\y=-1-\lambda\\z=\lambda\end{array}\right\}$

27. a)



b) La solución en ambos es $P\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ y tienen la misma porque en ambos sistemas son las mismas rectas. La solución del último sistema será $P\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$, la misma que en los sistemas anteriores porque la primera y segunda ecuación son iguales, luego se reduce a cualquiera de los anteriores.

28. Son tres rectas concurrentes en (0, 3).



29. a) Por ejemplo $2x + y = 2$

b) Por ejemplo $x + y = 0$

c) Como el sistema propuesto tiene solución $x = 1$, $y = 0$, en a) se añade otra ecuación que verifique dicha solución y en b) se añade una ecuación que representa a una recta paralela a una de las del sistema, con lo que el sistema resultante sería incompatible al tener dos rectas paralelas.

30. Se cortan en una recta pues no hay proporcionalidad entre los coeficientes.

Puesto que los dos planos dados pasan por el punto (1, 0, 0), bastará añadir un tercer plano que también pase por dicho punto, por ejemplo el $x + y + z = 1$.

31. Sistema compatible indeterminado.

Los tres planos se cortan en una recta de ecuación

$$\begin{cases} x = -\lambda \\ y = -1 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

32. Sistema compatible determinado.

Los tres planos se cortan en el punto $P(0, 1, 0)$.

Se puede sustituir la tercera ecuación por la de un plano paralelo a cualquiera de los otros dos, por ejemplo, una tercera ecuación como la $x - 2y - 3z = 0$ haría el sistema incompatible.

33. $a = 3$

34. $a = -4$ y $b = 12$ $\Rightarrow$ planos coincidentes

$a = -4$ y $b \neq 12$ $\Rightarrow$ planos paralelos

$a \neq -4$ $\Rightarrow$ planos que se cortan en una recta

35. a) Dos planos paralelos y un plano que los corta en dos rectas paralelas

b) Los tres planos se cortan en un punto

c) Los tres planos son paralelos dos a dos

d) Dos planos paralelos y el otro los corta

e) Los tres planos se cortan en una misma recta

f) Tres planos coincidentes

g) Dos coincidentes y el tercero paralelo

h) Se cortan dos a dos en tres rectas paralelas

Tema 3 MATRICES

1. a) 16, b) 4, c) no

2. a) $a_{22} = 2$; a_{13} no existe

b) $-8, -1$

c) $\dim(A) = 3 \times 2$ $\dim(B) = 2 \times 2$

$$A^t = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ -8 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad B^t = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -8 & 4 \end{pmatrix}$$

3. a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

b) Es simétrica B

c) $A^t = (a_{ij}) = 2j - i$ $B^t = (b_{ij}) = |i - j|$

4. a) $A^t = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $B^t = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$

b) $(-B)^t = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$

5. $A + B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 4 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ $A - B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 \\ 2 & -1 & 6 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$B - A =$ la opuesta de $A - B$

6. a) Ventas de Enero $= \begin{array}{c} \text{Andrés Juan Lucas Pedro} \\ \begin{pmatrix} 9 & 3 & 0 & 6 \\ 5 & 8 & 0 & 7 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ 1\text{ cm} \\ 3\text{ cm} \\ 7\text{ cm} \end{array}$

Ventas de Febrero $= \begin{array}{c} \text{Andrés Juan Lucas Pedro} \\ \begin{pmatrix} 5 & 6 & 4 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ 1\text{ cm} \\ 3\text{ cm} \\ 7\text{ cm} \end{array}$

b) $E + F = \begin{pmatrix} 14 & 9 & 4 & 6 \\ 7 & 14 & 0 & 7 \\ 5 & 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $F - E = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 4 & -6 \\ -3 & -2 & 0 & -7 \\ 1 & 6 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

7. a) $a = -1$, $b = 9$, $c = 11$, $d = -1$, $e = 1$, $f = 13$

b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 9 & 5 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 4 & 11 \\ 3 & 8 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 & -14 \\ 6 & -3 & -2 \end{pmatrix}$

8. $2A - 3B + I_3 = \begin{pmatrix} -4 & -5 & 0 \\ 0 & 13 & -7 \\ -10 & -17 & -1 \end{pmatrix}$

9. $a = 2$; $b = 1$; $c = 1$; $d = 17$; $e = -7$; $f = -2$; $g = -9$; $h = -2$; $i = 5$

10. $A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & -6 & 1 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$ $B \cdot A = \begin{pmatrix} -6 & 1 & -1 \\ 11 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

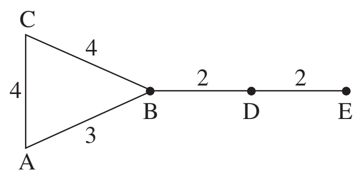
11. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ $B \Rightarrow$ no tiene inversa

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{4} \\ \frac{5}{24} & \frac{1}{12} & \frac{-1}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

12. a) $X = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ b) $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

13. a) $X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ b) $X = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$

14.
$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 2 & 8 & 7 & 14 \\ 2 & 0 & 6 & 5 & 12 \\ 8 & 6 & 0 & 6 & 13 \\ 7 & 5 & 6 & 0 & 7 \\ 14 & 12 & 13 & 7 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

15.


16. a) $\begin{pmatrix} 0 & -13 & 20 \\ 9 & -7 & -4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 9 & 4 \\ -13 & 4 \end{pmatrix}$

17. $AB - BA = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

18. $AB = \begin{pmatrix} 6 & -4 & 8 \\ -3 & 2 & -4 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$; $B \cdot A = 12$

19. a) falsa; b), c) y d) verdaderas

20. $x = 2,\ y = 3,\ z = 0,\ t = 1$

21. $X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

22. Las que lo tienen fuera de la diagonal principal.

23. $x = 1,\ y = 3,\ z = -1$

24. $X = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

25. $\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, luego son inversas

26. Solución general: $X = \begin{pmatrix} a_0 & -\frac{5}{2}a_0 & -2a \end{pmatrix}$

Solución particular: $X = (2 \quad -5 \quad -4)$

27. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ $\qquad B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

C^{-1} = no existe $\qquad D^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{10} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}$

28. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ Veamos las primeras potencias

$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

$A^3 = A^2 \cdot A = I \cdot A = A$

supongamos cierto para (n–1) en dos supuestos

I) Si (n–1) es par $A^{n-1} = I \rightarrow A^n = A^{n-1} \cdot A = I \cdot A = A$ y n será impar

II) Si (n–1) es impar $A^{n-1} = A \rightarrow$

$\rightarrow A^n = A^{n-1} \cdot A = A \cdot A = A^2 = I$ y n será par.

Luego queda demostrado.

30. a) $X = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$

31. a) Matrices cuadradas del mismo orden

b) $X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

c) No, porque la dimensión de la matriz producto $Y \cdot A$ nunca pueden ser 2×3 que es la dimensión de la resta $C - B$.

32. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; en general $\begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix}$ para todo a.

33. $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$; $A^2 - 2A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$

34. $A^{35} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

35. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

36. a) No $\qquad$ b) $\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

37. $X = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$; X es la matriz inversa de A

38. $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$; $X = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

39. La ecuación matricial despejando queda:

$$X = \left[2\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 & -11 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Luego $X = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

40. El sistema en forma de ecuación matricial es:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 13 & -7 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -9 & 5 \end{pmatrix}$$

solución del sistema $x = 6$, $y = 1$, $z = -3$

41. a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$; b) $X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

42. $A^5 = \begin{pmatrix} 81 & 81 & 81 \\ 81 & 81 & 81 \\ 81 & 81 & 81 \end{pmatrix}$

43. $x = 1,\ \ y = -1,\ \ z = -2$

44. a) $P \cdot H = \begin{pmatrix} 53 \\ 22 \end{pmatrix}$

53 es el número de bicicletas de carreras que producen las dos fábricas

22 es el número de bicicletas de montaña que producen las dos fábricas

b) $\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} A & B \end{array} \\ \begin{array}{r} \text{carreras} \\ \text{montaña} \end{array} & \begin{pmatrix} 21 & 32 \\ 14 & 8 \end{pmatrix} \end{array} = \text{producción diaria}$

c) $X = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$

45. 5 gramos de A y 1 gramo de B

46. a)

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{array}{c} M \\ T \\ N \end{array} & \begin{pmatrix} 36 & 57 & 12 \\ 54 & 47{,}5 & 24 \\ 135 & 85{,}5 & 84 \end{pmatrix} \end{array}$$

b)

A	B	C
(1 908	1472'5	1 068)

en miles de euros

47. $B^2 = (2A - I)^2 = 4A^2 + I^2 - 4AI =$
$= 4A + I - 4A = I$, pues $A^2 = A$ e $I^2 = I$

48. $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -14 & 30 \\ 0 & -9 & 19 \end{pmatrix}$

49. Veamos para $n = 2$ y $n = 3$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot A$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 2^2 \cdot A$$

Suponiendo cierto para $A^{n-1} = 2^{n-2} \cdot A$

$A^n = A^{n-1} \cdot A = 2^{n-2} \cdot A \cdot A = 2^{n-2} \cdot A^2 =$
$= 2^{n-2} \cdot 2 \cdot A = 2^{n-1} \cdot A$

queda demostrado para $A^n = 2^{n-1} \cdot A$

50. a) $M = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} 1 & 1{,}5 & 2 & 2{,}5 \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ Q \\ H \end{array} & \begin{pmatrix} 100 & 200 & 500 & 300 \\ 50 & 20 & 30 & 10 \\ 700 & 600 & 400 & 800 \end{pmatrix} \end{array}$

$N = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} A & Q & H \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 1{,}5 \\ 2 \\ 2{,}5 \end{array} & \begin{pmatrix} 0{,}20 & 0{,}30 & 0{,}40 \\ 0{,}30 & 0{,}45 & 0{,}60 \\ 0{,}40 & 0{,}60 & 0{,}80 \\ 0{,}50 & 0{,}75 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$

b) $M \cdot N = \begin{pmatrix} 430 & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & 49{,}5 & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & 1760 \end{pmatrix}$

precio de todas las unidades producidas en un minuto de cada tipo por materiales.
430 las unidades de A
49,5 las unidades de Q
1760 las unidades de H

c) $N \cdot M = \begin{pmatrix} 315 & \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & 429 & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & 530 & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ & 957{,}5 \end{pmatrix}$

precio de los tornillos según tamaños
315 todas las unidades de 1 cm
429 todas las unidades de 1,5 cm
530 de 2 cm
957,5 de 2,5 cm

51. a) $M = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} V.G. & V.M. & V.P. \end{array} \\ \begin{array}{c} S \\ N \\ L \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 2 & 9 & 2 \\ 4 & 10 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$

$N = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \text{cristales} & \text{visagras} \end{array} \\ \begin{array}{c} V.G. \\ V.M. \\ V.P. \end{array} & \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$

b) $M \cdot N = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \text{cristales} & \text{visagras} \end{array} \\ \begin{array}{c} S \\ N \\ L \end{array} & \begin{pmatrix} 19 & 38 \\ 28 & 56 \\ 39 & 78 \end{pmatrix} \end{array}$

52. $x = 2, \quad y = -1, \quad z = 2$

53. a) $$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{cocinas} & \text{baños} & \text{aseos} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} (\text{C.L.}) \\ (\text{C.A.}) \\ (\text{V.P.O.}) \end{array}$$

ventana grande ventana pequeña

b) $$B = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{ventana grande} & \text{ventana pequeña} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} (\text{C.L.}) \\ (\text{C.A.}) \\ (\text{V.P.O.}) \end{array}$$

c) $$C = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{ventana grande} & \text{ventana pequeña} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \text{cocina} \\ \text{baño} \\ \text{aseo} \end{array}$$ Si, porque $C = A \times B$

d) 230 de cada tipo

$$D = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} (\text{C.L.}) & (\text{C.A.}) & (\text{V.P.O.}) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 10 & 20 & 50 \end{pmatrix} \end{array} \times C = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{ventana grande} & \text{ventana pequeña} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 230 & 230 \end{pmatrix} \end{array}$$

e) 13 800 €

$$E = D \times \begin{pmatrix} 40\,000 \\ 20\,000 \end{pmatrix} = 13\,800$$

54. $X = \frac{1}{3}(2A - B) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$

55. $A^2 - 2A + I = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

56. $X = A^{-1}\,(2\,C)\,B^{-1} \qquad X = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ 2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

57. $X = \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} \\ \frac{9}{5} \\ \frac{28}{5} \end{pmatrix}$

La expresión $AX - 3X = B$ siendo $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

nos proporciona el sistema

$$\left.\begin{aligned} 2y - z &= -2 \\ 3x - 3y + z &= -1 \\ 2x + y &= 0 \end{aligned}\right\}$$

que es la ecuación matricial

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y resolviéndola obtenemos $X = \begin{pmatrix} \frac{-2}{5} \\ \frac{9}{5} \\ \frac{28}{5} \end{pmatrix}$

58. $X = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad Y = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

59. $x = 2$

Para que sean matrices inversas se debe cumplir que:

$$(A - xI)\cdot\frac{1}{x}(A - I) = I \Rightarrow (A - xI)(A - I) = xI \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A\big(A - (1 - x)I\big) = 0 \Rightarrow A\big(A - (1 - x)I\big) = 0$$

$$= \begin{pmatrix} 2 - x & 2 - x & 2 - x \\ 2 - x & 2 - x & 2 - x \\ 2 - x & 2 - x & 2 - x \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow x = 2$$

También podemos obtener cada una de las matrices:

$$(A - xI) = \begin{pmatrix} 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 \\ 1 & 1 & 1-x \end{pmatrix} y$$

$$\frac{1}{x}(A - 1) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{x} & \frac{1}{x} \\ \frac{1}{x} & 0 & \frac{1}{x} \\ \frac{1}{x} & \frac{1}{x} & 0 \end{pmatrix}$$

al ser inversas su producto ha de ser la matriz unidad, luego multiplicando e igualando obtenemos

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{x} & \frac{2-x}{x} & \frac{2-x}{x} \\ \frac{2-x}{x} & \frac{2}{x} & \frac{2-x}{x} \\ \frac{2-x}{x} & \frac{2-x}{x} & \frac{2}{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

luego x = 2

Tema 4 DETERMINANTES

1. a) -28 b) 0

2. a) $x = 0$; $x = -1$ b) $x = -5$

3. proposición (1)

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & -3 & 7 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} -3 & 7 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 - 15 + 18 = 6$$

proposición (2)

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 8 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -8 + 20 - 12 = 0$$

4. $\frac{7}{5}$ y $a \cdot d \cdot f$

5. a) $-22\,104$

b) 3864

c) $abc\,(a-1)\,(b-1)\,(c-1)\,(b-a)\,(c-a)\,(c-b)$

d) $x^3(x-1)^3$

6. $A^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

7. $C^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{35} & -\frac{1}{35} & \frac{9}{35} \\ \frac{3}{35} & -\frac{8}{35} & \frac{2}{35} \\ \frac{4}{35} & \frac{3}{70} & \frac{4}{35} \end{pmatrix}$; $D^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

8. $E^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $F^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{8}{3} & \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{7}{6} & \frac{11}{12} & -\frac{5}{12} \end{pmatrix}$

9. a) No es posible

b) $x = 5$, $y = -1$, $z = 6$

10. a) $x = -\frac{18}{5}$; $y = \lambda - \frac{6}{5}$; $z = \lambda$ $\lambda \in R$

b) $x = \frac{5\lambda + 9}{z}$; $y = \frac{7\lambda + 23}{2}$; $z = \lambda$ $\lambda \in R$

11. a) $x = -2$; $y = 1$; $z = 3$

b) $x = \frac{19}{5}$; $y = -\frac{1}{5}$

c) $x = 3$; $y = 2$; $z = 1$

d) $x = -2$; $y = -3$; $z = 4$

e) $\left.\begin{aligned} x - y + z &= 3 \\ 2x + y + z &= 4 \end{aligned}\right\}$ $\left.\begin{aligned} x - y &= 3 - \lambda \\ 2x + y &= 4 - \lambda \end{aligned}\right\}$

$$x = \frac{7 - 2\lambda}{3}; \quad y = \frac{\lambda - 2}{3}$$

12. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

13. $|A| = 3$, $|B| = 1$, $|C| = 0$, $|D| = 4$

14. a) $x_1 = 1$ y $x_2 = 4$

b) $x = -\frac{1}{7}$

15. a) $x_1 = -1$ y $x_2 = -18$

b) $x_1 = 1$ y $x_2 = -1$

16. $|A| = 0$, $|B| = ab$, $|C| = 4xyz$, $|D| = 0$

17. El determinante hemisimétrico será

$$\det\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 \end{vmatrix} = 0\begin{vmatrix} 0 & a_{23} \\ -a_{23} & 0 \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} -a_{12} & a_{23} \\ -a_{13} & 0 \end{vmatrix} +$$

$$+ a_{13}\begin{vmatrix} -a_{12} & 0 \\ -a_{13} & -a_{23} \end{vmatrix} = -a_{12}\,a_{13}\,a_{23} + a_{13}\,a_{12}\,a_{23} = 0$$

18. *A* lo es al serlo la segunda columna

B lo es al ser la primera fila múltiplo de 5 y la tercera múltiplo de 2

19. *A* por tener una columna de ceros. *B* por tener dos columnas iguales

20. La ecuación tiene por solución $x = 1$

para $x = 1$ no tiene inversa la matriz, ya que el determinante es 0

para $x = 3$ sí tiene matriz inversa

$$\begin{pmatrix} -4 & -3 & 3 \\ \frac{5}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \\ \frac{7}{4} & \frac{3}{2} & -\frac{5}{4} \end{pmatrix}$$

21. Su inversa $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -8 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

22. $X = (B + 3C)\,A^{-1} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 \\ 10 & 9 & 8 \end{pmatrix}$

23. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ ó $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

24. $x = \frac{3}{5},\ y = \frac{1}{5},\ z = 0$

25. $x = 2;\ y = 1;\ z = -1$

26. $x = 1,\ y = 1,\ z = 2$

27. $B = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & -\frac{3}{4} \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad |(A^t \cdot A^{-1})|^{276} = 1$

28. $m = 2$ y $m = -1$

29. $k = 1 - \sqrt{5}$ y $k = 1 + \sqrt{5}$. La matriz inversa para $k = 3$ es

$$\begin{pmatrix} -3 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 6 & -\frac{5}{2} & -\frac{9}{2} \\ -4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

30. $X = A^{-1}\,(B + 2C) \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

31. $X = \begin{pmatrix} 16 & -32 \\ -6 & 13 \end{pmatrix}$

32. a) $\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 24 & 100 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 0 + 12\cdot 2 & 4 + 12\cdot 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} + 12\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} =$

$= \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 2\cdot 4\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 8\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 5 & 30 & 20 \\ 6 & 9 & 12 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 5\cdot 3\begin{vmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 15\begin{vmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1+1 & -3+6 & 0+4 \end{vmatrix} =$

$= 15\begin{vmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} + 15\begin{vmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 6 & 4 \end{vmatrix} = 0 + 0 = 0$

33. $x = 1$ y $x = -21$

34. a) $x_1 = \sqrt{2}$, $x_2 = -\sqrt{2}$ $\qquad$ b) $x = -\frac{1}{6}$

c) $x = \frac{1}{2}$ $\qquad$ d) $x = 41$

35. a) -2 $\qquad$ b) -18 $\qquad$ c) -45 $\qquad$ d) -6

36. a) $(a + 3)\,(a - 1)^3$

b) $3x^2 + 8y^2 + 3z^2 - 11xy - 4zx - 7yz$

c) $a^4 - b^4$

d) $a^2\,d^2 + b^2\,e^2 - 2abed + \ cf(ad - be)$

37. A no tiene inversa por no ser matriz cuadrada

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{6} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{5}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ \frac{7}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

C no tiene inversa porque $|C| = 0$

39. $x = \frac{3}{5}$, $y = -\frac{4}{5}$, $z = 0$

40. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

41. $a\,(b - a)\,(d - c)\,(c - b)$

42. $x = 3,\ y = -2,\ z = -1$

43. a) $x = 3;\ y = 1;\ z = -1$

b) $x = a + b;\ y = b - a;\ z = ab$ con $a \neq b$

44. $a = 30,\ x = 7\lambda,\ y = 4\lambda,\ z = \lambda$ con $\lambda \in R$

45. $x = 1,\ y = -1$ y $z = -1$

46. El determinante es nulo, basta con descomponerlo adecuadamente como suma de determinantes para observar la igualdad o proporcionalidad de líneas.

47. $D_2 = D_3 = D_1 = 1;\ D_4 = -1$

48. Si se suma la segunda columna a la tercera se obtiene un determinante con dos columnas proporcionales.

49. Hacer $f_1 - f_2$ y $f_2 - f_3$ para obtener ceros en la primera columna.

Sacar factor común $(x - y)$ y desarrollar por la primera columna

50. Se intercambian las filas 1 y 2 y las columnas 2 y 3 con lo que el determinante no cambia de signo. Después se suma a la fila 2 la fila 1.

51. Restando $c_1 - c_4$ y $c_2 - c_3$, después $f_1 + f_4$ y $f_2 + f_3$. Desarrollando por la columna que tiene 3 ceros y volviendo a desarrollar por la columna que tiene 2 ceros.

52. a) $x = \dfrac{23 - \lambda}{11}$; $y = \dfrac{3\lambda + 8}{11}$; $z = \lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.

b) $x = -2$; $y = 3$; $z = 1$

53. $A^2x + AB = B \Rightarrow A^2x = B - AB \Rightarrow X = (A^{-1})^2\,(B - AB)$

$$(A^{-1}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (A^{-1})^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

54. $\det(A) = a^2 + 4a - 21$, luego no tendrá inversa para $a = 3$ y $a = -7$.

Para $a = 4 \rightarrow A^{-1} = \dfrac{1}{11}\begin{pmatrix} 8 & 4 & -3 \\ 23 & 6 & -10 \\ 14 & 7 & -8 \end{pmatrix}$

55. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a+b+c & a+b+c & a+b+c \end{vmatrix} \underset{f_3 + f_2}{=}$$

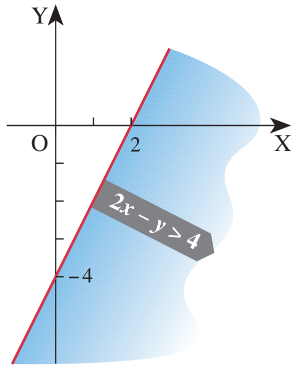
$$= (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

56. $X = A^{-1}B \rightarrow X = \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}$

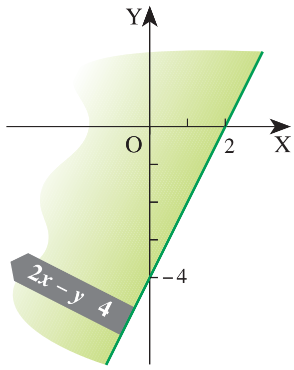
57. a) $x = -2$; $y = 1$; $z = -3$; b) $x = 0$; $y = 2$; $z = 1$

Tema 5 PROGRAMACIÓN LINEAL

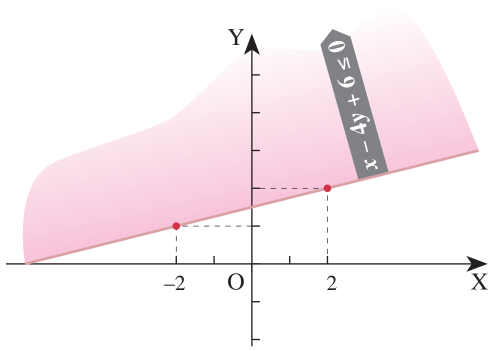
2. a)



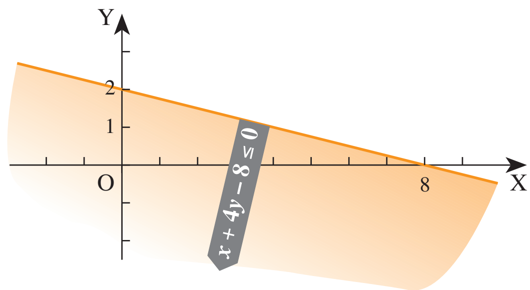
b)



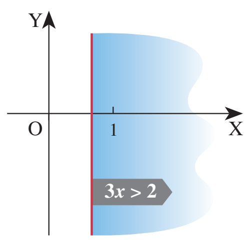
c)



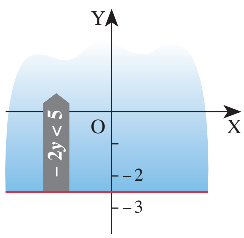
d)



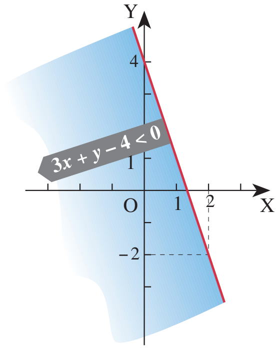
3. a)



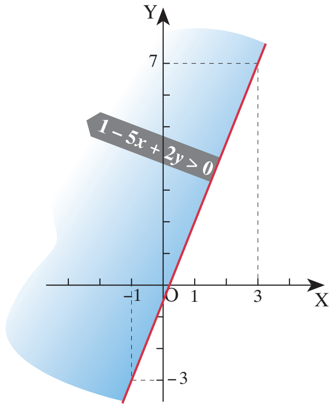
b)



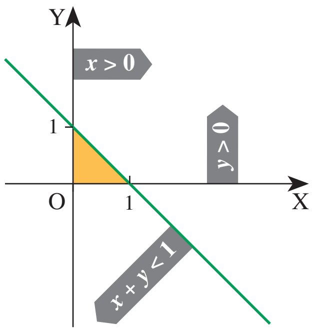
c) La frontera no pertenece a la solulción



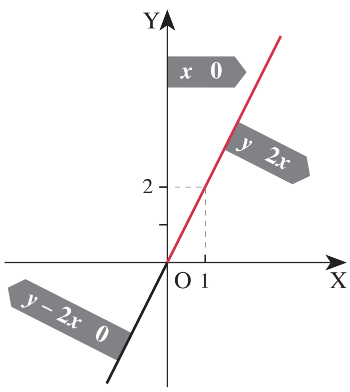
d) La frontera no pertenece a la solución



4.

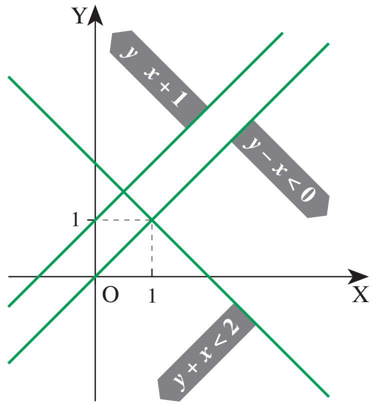


5.



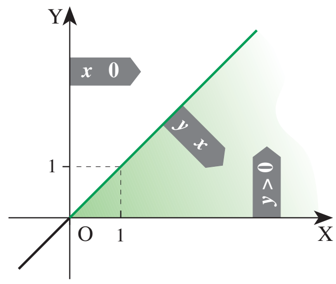
La solución es la semirrecta $y = 2x$ desde el origen de coordenadas.

6.

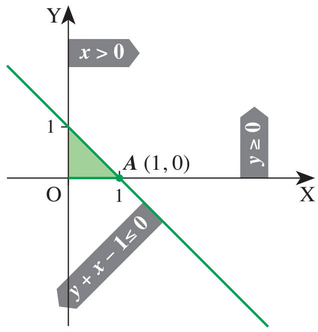


No tiene solución.

7.



8. a)

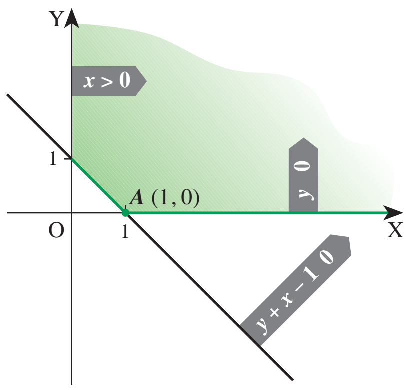


f alcanza un máximo en A: $f(1, 0) = 2$

g no alcanza máximo pero si mínimo $g(1, 0) = -2$

h alcanza un máximo en A: $h(1, 0) = 1$

b)



f no alcanza ni máximo ni mínimo

g no alcanza ni máximo ni mínimo

h no alcanza ni máximo ni mínimo

9.
$$\left.\begin{aligned} 2x - y + 2 &\geq 0 \\ y - 4 &\leq 0 \\ 4x + y - 28 &\leq 0 \\ x &\geq 0 \\ y &\geq 0 \end{aligned}\right\}$$

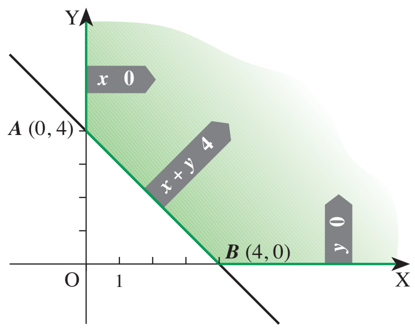
10. El sistema de inecuaciones es:
$$\left.\begin{aligned} x + y - 2 &\geq 0 \\ y - 5 &\leq 0 \\ 3x - 2y + 4 &\geq 0 \\ 5x - 3y - 10 &\leq 0 \end{aligned}\right\}$$

Los vértices de la región son $A(2, 0)$; $B(5, 5)$; $C(2, 5)$ y $D(0, 2)$.

$f(A) = 6$; $f(B) = 25$; $f(C) = 16$ y $f(D) = 4$

Luego la función $f(x, y) = 3x + 2y$ alcanza su máximo en el punto $C(2, 5)$.

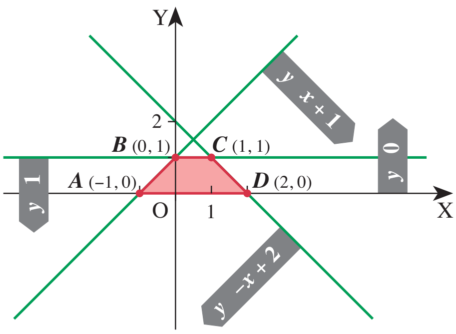
11. a)



b) No

c) La función a maximizar no es una recta, sino una circunferencia centrada en el origen de coordenadas

12.



a) no hay ninguna inecuación redundante

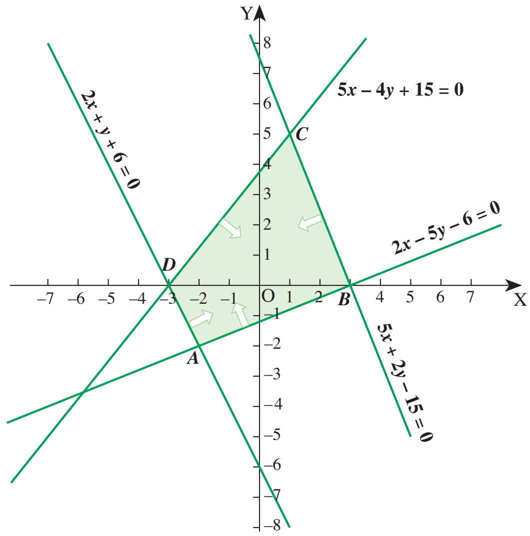
b) para que tenga un máximo en el punto $B(0, 1)$ la función lineal debe tener una pendiente menor que 1, por ejemplo, la función $f(x, y) = -x + 2y$

c) el punto está fuera de la solución C, no puede haber función que alcance su mínimo en ese punto

d) la función que alcanza el máximo en el punto (0, 1) y en el (1, 1) es $f(x, y) = = y$, que coincide con una de las restricciones, luego serían solución los infinitos puntos de la recta $y = 1$ entre los puntos (0, 1) y (1, 1)

e) no puede tener una función el mínimo en los tres puntos porque no están alineados en 1^er^ lugar y en este caso porque $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ no pertenece a la solución C

13. a)



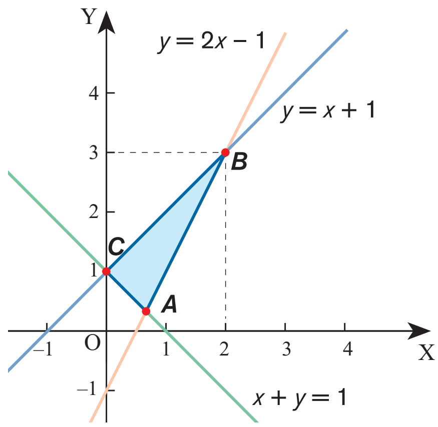
$A(-2, -2)$; $B(3, 0)$; $C(1, 5)$; $D(-3, 0)$

b) $F(A) = 0$; $F(B) = 3$; $F(C) = -4$; $F(D) = -3$

el máximo se alcanza en el punto $B(3, 0)$ y el mínimo en el punto $C(1, 5)$

c) La función $G(x, y)$ coincide con una de las restricciones, luego serán válidos todos los puntos del segmento AB.

14.



$A\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ $B(2, 3)$ $C(0, 1)$

$F(A)\ \frac{-26}{3}$ $F(B) = -2$ $F(C) = -8$

El máximo se alcanza en el punto $B(2, 3)$ y el mínimo en el punto $A\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

15. a)
$$\left.\begin{array}{r} x+2y-4=0 \\ 4x-3y+6=0 \\ y=4 \\ x=4 \end{array}\right\}$$

b) $A(0, 2)$; $B\left(\frac{3}{2}, 4\right)$; $C(4, 4)$; $D(4, 0)$

$f(A) = 6$; $f(B) = \frac{27}{2}$; $f(C) = 16$; $f(D) = 4$

El máximo se alcanza en el punto $C(4, 4)$

c)
$$\left.\begin{array}{l} x+2y-4 \geq 0 \\ 4x-3y+6 \geq 0 \\ x \leq 4 \\ y \leq 4 \end{array}\right\}$$

16. Función objetivo $f(x, y) = 1500x + 1000y$

restricciones $\left.\begin{array}{r} x+y \geq 11 \\ x+2y \geq 4 \\ 2x+y \geq 14 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right\}$ vértices $A(0, 14)$, $B(3, 8)$ y $C(11, 0)$

El máximo se alcanza en $B(3, 8)$, con un coste de 12.500 € si cambian los precios, el mínimo se alcanzaría en C con un coste de 11.000 €.

Deben utilizar 3 camiones del tipo A y 8 camiones del tipo B para minimizar el coste.

Si los precios son distintos, la solución es 11 camiones del tipo A y ninguno del tipo B.

17. $\frac{100}{3}$ gramos de P_1 y $\frac{100}{3}$ gramos de P_2 hay que tomar diariamente para combatir la enfermedad con el mínimo coste.

La relación entre P_1 y P_2 han de ser mayor que la mitad y menor que el doble

18. Función objetivo $f(x, y) = 100x + 200y$

restricciones $\left.\begin{array}{r} x+3y \geq 9 \\ 3x+y \geq 9 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right\}$

vértices $A(0, 9)$, $B\left(\frac{9}{4}, \frac{9}{4}\right)$ y $C(9, 0)$

$f(A) = 1800$ €; $f(B) = 675$ € y $f(C) = 900$ €, el mínimo se alcanza en $B\left(\frac{9}{4}, \frac{9}{4}\right)$ con un coste de 675 €.

Deben comprarse 2 kilos y $\frac{1}{4}$ de kilo de A y la misma cantidad de B.

19. La dieta deseada se obtiene con 2 botes de P_1 y $\frac{2}{3}$ de bote de P_2

20. 3000 € en acciones del tipo A y 2000 € en acciones del tipo B.

21. 6 cajas de REVIT y 2 cajas de VITAL

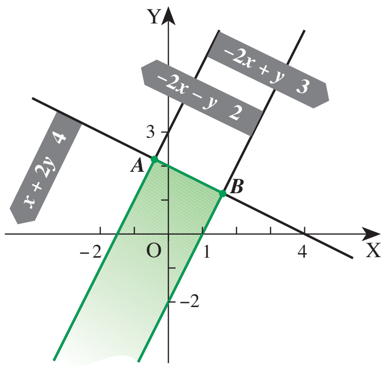
22. Han de elaborar 15000 cajas del tipo 1 y 5000 del tipo 2.

23. Lo alcanza en los extremos (0, 1) y $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$ y en todos los pertenecientes a la frontera comprendida entre ellos

24. 100 cajas de tipo A y 200 cajas de tipo B.

25. 80 coches de tipo A y 30 coches de tipo B con un beneficio de 265 000 €.

26.



a) $A\left(\frac{-2}{5}, \frac{11}{5}\right)$; $B\left(\frac{8}{5}, \frac{6}{5}\right)$

b) z alcanza el máximo de A y vale $\frac{46}{5}$.

27. El máximo se alcanza en el punto $\left(\frac{5}{3}, \frac{2}{3}\right)$ y $f\left(\frac{5}{3}, \frac{2}{3}\right) = \frac{7}{3}$ y el mínimo se alcanza en el punto $(-1, -1)$ y $f(-1, -1) = -2$

28. Restricciones $\left.\begin{array}{r} x \geq y \\ x \leq 120 \\ x+y \geq 60 \\ x+y \leq 200 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right\}$

sobre dos funciones objetivo

$f(x, y) = 900x + 700y$ para minimizar el consumo

$h(x, y) = 3000x + 2000y$ para maximizar las ganancias

las vértices del recinto solución es A (60,0) B(120,0)

C (129,80) D(100, 100) y E(30, 30)

f(A) = 54000   f(B) = 108000   f(C) = 164000

f(D) = 160000   f(E) = 48000

Gastamos la menor cantidad de combustible haciendo 30 viajes con el tipo A y 30 con el tipo B.

h(A) = 180000 €   h(B) = 360000 €

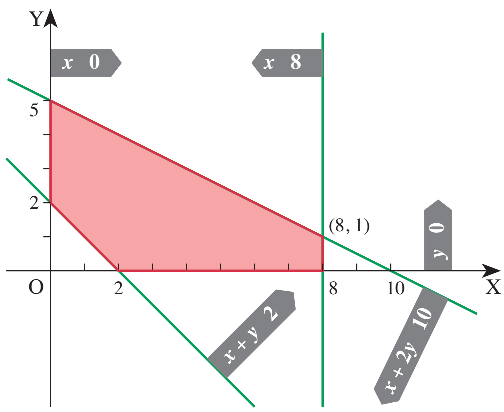
h(C) = 520000 €   h(D) = 500000 €

h(E) = 150000 €

El máximo beneficio se obtiene realizando 120 vuelos con el avión A y 80 con el avión B.

29. Hay que invertir 13 millones en acciones de tipo *A* y 8 millones en las del tipo *B*

30. a)



b) El máximo es 8 y el mínimo –15.

31. 3 aparatos de tipo *A* y 3 de tipo *B* proporcionarían unos beneficios de 12000 € y 3 de tipo *A* y 1 de tipo *B* poporcionarían un beneficio de 10000 €.

32. Para minimizar el coste utilizaremos 8 autobuses grandes de 50 plazas.

La función objetivo es $f(x, y) = 250x + 300y$

donde x son los autobuses de 40 plazas e y el nº de autobuses de 50 plazas.

Las restricciones son:
$$\left.\begin{array}{r} 40x + 50y \geq 400 \\ x \leq 8 \\ y \leq 10 \\ x + y \leq 9 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right\}$$

Los vértices son $A(5, 4)$, $B(0, 9)$ y $C(0, 8)$

y $f(A) = 2450$ €, $f(B) = 2700$ € y $f(C) = 2400$ €, el mínimo se alcanza en $C(0, 8)$ con un coste de 2400 €

33. 20 de tipo *A* y 40 de tipo *B*

34. Función objetivo $f(x, y) = 2x + y$

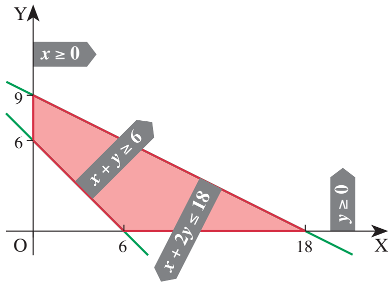
restricciones
$$\left.\begin{array}{r} x \geq 3 \\ y \geq 2x \\ 40x + 30y \leq 600 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right\}$$

vértices $A\left(3, \frac{3}{2}\right)$, $B(6, 12)$, $C(3, 16)$

$f(A) = 7{,}5$ €; $f(B) = 24$ € y $f(C) = 22$ €

Se alcanza el máximo beneficio cuando se elaboran 6 pastillas grandes y 12 pequeñas, con un beneficio de 24 €.

35.



La función $f(x, y)$ alcanza el mínimo en el punto (6, 0)

36. 1 paquete de A_1 con 2 paquetes de A_2.

37. El precio mas bajo se obtiene contratando 10 autobuses de 60 plazas

38. a) Deben fabricarse 300 tarros de mermelada y ninguna botella de sidra

b) Si x es el número de botellas de sidra e y el número de tarros de mermelada, deben fabricarse el número que corresponde a las coordenadas enteras (x, y) de los puntos del segmento cerrado de extremos (100, 200) y (0, 300).

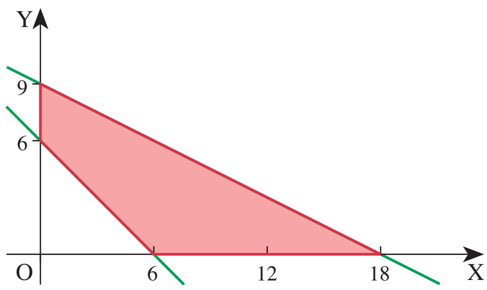
c) Si, las 400 horas de trabajo diario.

39. Debe contratar 3h. de alta prioridad y 15h. de baja prioridad

40. Debe fabricar 20 soldados y 60 trenes.

41. 30 del modelo *A* y 40 del modelo *B*, suponiendo que las horas de alta cualificación se utilizan en la confección de modelos *B*

42. Mínimo en (6, 0); $f(6, 0) = 6$.



43. 50 kg de cada uno de los dos tipos de fiambre

44. Se deben comprar 2,5 unidades de cada clase de abonos.

45. 66 automóviles y 24 camiones

46. 2 aviones pequeños y 3 medianos.

47. a) El número de botes diarios para obtener el máximo beneficio será de 800 del tipo A y 200 del tipo B

b) El beneficio será de 460.000 €

48. a) Deberá fabricar 1000 componentes de cada tipo para maximizar el beneficio.

b) El beneficio será de 5000 €.

Función objetivo $f(x, y) = 3{,}2x + 1{,}8y$ siendo x el número de componentes de tipo A e y el número de componentes tipo B.

restricciones $\left.\begin{array}{r} 2x + y \le 3000 \\ x + y \le 2000 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{array}\right\}$

vértices $A(0, 2000)$, $B(1000, 1000)$ y $C(1500, 0)$

$f(A) = 3600$, $f(B) = 5000$, $f(C) = 4800$

máximo se alcanza en $B(1000, 1000)$ y el beneficio es 5000 €.

49. Para que los beneficios sean máximos hay que fabricar 1200 kg de aleación tipo A y 1400 kg del tipo B, con un beneficio de 18,4 millones.

50. Función objetivo $f(x, y) = 30000x + 10000y$ donde x es el nº de auditorías e y el nº de liquidaciones.

restricciones $\left.\begin{array}{r} 40x + 8y \le 800 \\ 10x + 4y \le 300 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{array}\right\}$

vértices $A(0{,}75)$, $B(10, 50)$ y $C(20, 0)$

$f(A) = 750.000 \quad f(B) = 800.000 \quad f(C) = 600.000$

Para maximizar ingresos deberá realizar 10 auditorías y 50 liquidaciones que aportarán unos ingresos de 800.000 €.

51. Llamando x = nº de lotes tipo A

y = nº de lotes tipo B

la función a maximizar será $f(x, y) = 15x + 20y$ sujeta a las restricciones siguientes:

$$\left.\begin{array}{r} x + 2y \le 5000 \\ 2x + 2y \le 6000 \\ 3x + 2y \le 8000 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{array}\right\}$$

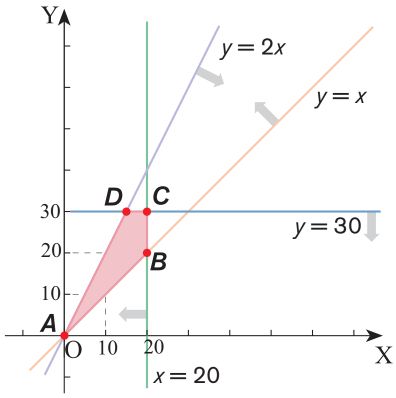
Obtenemos los vértices $A(0, 0)$, $B\left(\frac{8000}{3}, 0\right)$, $C(2000, 1000)$, $D(1000, 2000)$, $E(0, 2500)$

El beneficio máximo se obtiene en el vértice D, luego confeccionaremos 1000 lotes de tipo A y 2000 lotes de tipo B, produciendo un beneficio de 55.000 €.

52. $A(0, 0)$; $B(20, 20)$; $C(20, 30)$; $D(15, 30)$

$f(A) = 0$; $f(B) = 40$; $f(C) = 50$; $f(D) = 45$

El máximo se alcanza en el punto $C(20, 30)$ y el mínimo en el punto $A(0, 0)$.



53. Si llamamos a x el nº de barriles crudo ligero e y el nº de barriles de crudo pesado, la función objetivo a minimizar es $f(x, y) = 70x + 65y$ sujeta a las restricciones siguientes:

$$\left.\begin{array}{r} 0{,}3x + 0{,}1y \ge 26300 \\ 0{,}4x + 0{,}2y \ge 40600 \\ 0{,}2x + 0{,}5y \ge 29500 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{array}\right\}$$

Obtenemos los vértices $A(0, 263000)$; $B(6000, 8300)$; $C(90000, 23000)$ y $D(147500, 0)$.

Obtenemos el mínimo en el vértice C (90000, 23000) luego comprará la refinería 90000 de crudo ligero y 23000 de crudo pesado con un coste de 7.795.000 €.

54. Función objetivo $f(x, y) = 0{,}14x + 0{,}07y$ donde x es el capital invertido a riesgo alto e y el de riesgo medio.

restricciones $\left.\begin{array}{r} y \ge 4 \\ \dfrac{x}{y} \le \dfrac{4}{5} \\ x + y \le 18 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{array}\right\}$

vértices $A(0, 4.000.000)$, $B(3.200.000, 4.000.000)$, $C(8.000.000, 10.000.000)$, $D(0, 18.000.000)$

$f(A) = 280.000$, $f(B) = 728.000$, $f(C) = 1.820.000$,

$f(D) = 1.260.000$

Para maximizar los beneficios dedicaremos 8.000.000 al préstamo de riesgo alto y 10.000.000 al préstamo de riesgo medio, obteniendo un beneficio de 1.820.000 €.

55. Si llamamos x al nº de vagones dedicado a coches e y al nº de vagones dedicado a motos, obtenemos la función objetivo $f(x, y) = 540x + 360y$ con las restricciones

$$\left.\begin{aligned} x + y &\le 27 \\ x &\ge 12 \\ y &\ge \frac{x}{2} \\ x &\ge 0 \\ y &\ge 0 \end{aligned}\right\}$$

Obtenemos los vértices $A(12, 6)$; $B(12, 15)$ y $C(18, 9)$ y el máximo beneficio se obtiene en el vértice $C(18, 9)$ con un beneficio de 12960 €. Pondremos 18 vagones para coches y 9 vagones para motos.

56. Función objetivo $f(x, y) = 720x + 960y$ donde x serán los días de trabajo del primer taller e y los del segundo taller.

restricciones $\left.\begin{aligned} 4x + 2y &\ge 12 \\ 2x + 2y &\ge 8 \\ 4x + 12y &\ge 24 \\ x &\ge 0 \\ y &\ge 0 \end{aligned}\right\}$

vértices $A(0, 6)$, $B(2, 2)$, $C(3, 1)$ y $D(6, 0)$

$f(A) = 5760$, $f(B) = 3360$, $f(C) = 3120$, $f(D) = 4320$

El mínimo se alcanza en $C(3, 1)$

Deberá trabajar 3 días el taller 1º y 1 día el taller 2º, con un coste de 3120 €.

Quedará un excedente de carpetas de tipo A, 2 carpetas exactamente.

Tema 6 LÍMITES DE UNA FUNCIÓN

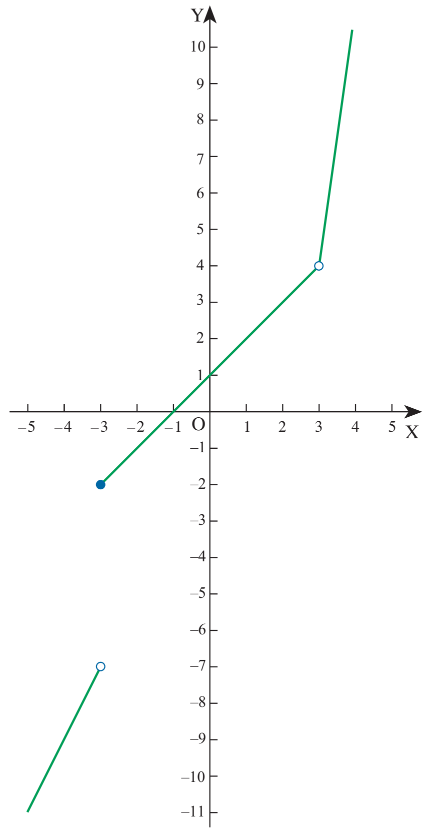
1. a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5x+1}{x-2} = 5$

b) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x+2}{(x-3)^2} = +\infty$

c) $\lim\limits_{x\to 1}(6x-1) = 5$

d) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2} = 4$

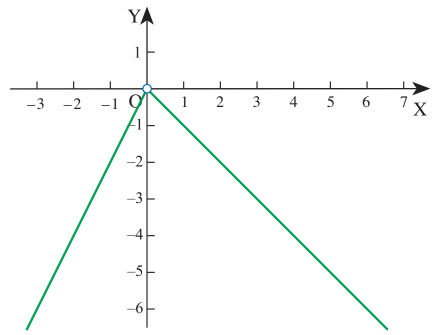
2.



a) $\lim\limits_{x\to-3^-} f(x) = -7$ $\lim\limits_{x\to-3^+} f(x) = -2$

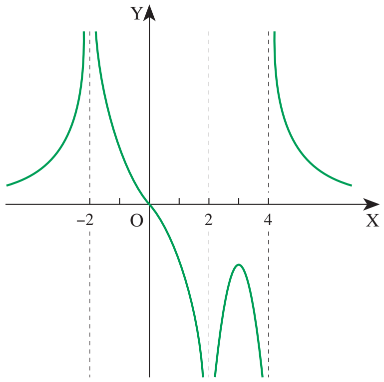
$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = 4$ $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = 4$

b)



$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0$ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$

3. Por ejemplo:



4. a) $f(x) = \dfrac{3+x}{x-2} \to \lim\limits_{x\to 2} f(x) \begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = +\infty \end{cases}$

x	1,9	1,99	1,999	$\Rightarrow 2^-$
y	–16	–196	–1996	$\Rightarrow -\infty$

x	2,01	2,001	2,0001	$\Rightarrow 2^+$
y	204	2004	20004	$\Rightarrow +\infty$

luego en $x = 2$ hay una asíntota vertical.

b) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1} f(x) \begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty \end{cases}$

x	0,9	0,99	0,999	$\Rightarrow 1^-$
y	–4,7	–49,75	–499,75	$\Rightarrow -\infty$

x	1,01	1,001	1,0001	$\Rightarrow 1^+$
y	50,25	500,25	5000,25	$\Rightarrow +\infty$

luego en $x = 1$ hay una asíntota vertical.

c) $f(x) = \dfrac{2x-3}{x} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x) \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty \end{cases}$

x	–0,1	–0,01	–0,001	$\Rightarrow 0^-$
y	29,8	302	3002	$\Rightarrow +\infty$

x	0,1	0,01	0,001	$\Rightarrow 0^+$
y	–28	–298	–2998	$\Rightarrow -\infty$

en $x = 0$ hay una asíntota vertical.

5. a) En $x = -3$

1° $\exists\, f(-3) = -1$

2° $\lim\limits_{x\to -3} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to -3^-} f(x) = -1 \\ \lim\limits_{x\to -3^+} f(x) = -1 \end{cases} \Rightarrow \exists \lim\limits_{x\to -3} f(x) = -1$

3° $\lim\limits_{x\to -3} f(x) = f(-3) = -1$

La función es continua en $x = -3$

b) En $x = 2$

1° $\exists\, f(2) = 4$

2° $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 4 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 4 \end{cases} \Rightarrow \exists \lim\limits_{x\to 2} f(x) = 4$

3° $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2) = 4$

La función es continua en $x = 2$

6. a) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{1-3x}{x^2} = \dfrac{-8}{9}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} (5+2x)^x = 1$

c) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2+x}{x^2-3x-4} = \dfrac{0}{0} \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x(x+1)}{(x+1)(x-4)} = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x}{x-4} = \dfrac{1}{5}$

d) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} = \dfrac{0}{0} \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x+2-4}{\left(\sqrt{x+2}+2\right)(x-2)} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{\sqrt{x+2}+2} = \dfrac{1}{4}$

e) $\lim\limits_{x\to +\infty} (x^2-3x) = +\infty$

f) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{3x+5}{x^2-4} = 0$

g) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{3x^2+6x-5}{2x^2+9} = \dfrac{3}{2}$

h) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{5x^3+8x-2}{3x^2+x} = +\infty$

i) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{3x^2-5x}{2x+5} - \dfrac{6x^2+9x}{4x-1}\right) = \infty - \infty \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{71x^2+40x}{-8x^2-18x+5} = -\dfrac{71}{8}$

j) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{x+1}{x-1} - \dfrac{x^2+5}{x^2+3}\right) = 0$

7. a) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x^2-3} - \sqrt{x^2+4}\right) = \infty - \infty =$ indeterminación

$\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\left(\sqrt{x^2-3}-\sqrt{x^2+4}\right)\left(\sqrt{x^2-3}+\sqrt{x^2+4}\right)}{\left(\sqrt{x^2-3}+\sqrt{x^2+4}\right)} =$

$= \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{-7}{\left(\sqrt{x^2-3}+\sqrt{x^2+4}\right)} = 0$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(3x + 1 - \dfrac{x^2 + 2x - 1}{x - 2} \right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2 - 7x - 1}{x - 2} = +\infty$

c) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 - 1}{x + 1} = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{(x-1)(x+1)}{(x+1)} = -2$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{6x^2 + 5x}{x + x^2} = 6$

e) $\lim\limits_{x \to 3} \left(\dfrac{6}{x - 3} - \dfrac{4}{x^2 - 9} \right) = 0$

8.

x	0,9	0,99	0,999
$f(x)$	0,8	0,98	0,998

x	1,1	1,01	1,001
$f(x)$	1,1	1,01	1,001

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 1$ $\quad \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 1$ $\quad \exists \lim\limits_{x \to 1} f(x) = 1$

9. a) $\lim\limits_{x \to 2} (3x - 1) = 5$ b) $\lim\limits_{x \to 0} (x^2 + 5) = 5$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} (7x + 4) = +\infty$ d) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2x}{x + 1} = \dfrac{4}{3}$

e) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4x}{x^2 + 3} = 0$ f) $\lim\limits_{x \to -\infty} (-2x + 1) = +\infty$

10. a) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -1$ b) $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = -1$

c) $\lim\limits_{x \to 6^-} f(x) = 7$ d) $\lim\limits_{x \to 6^+} f(x) = -5$

e) Si $\exists \lim\limits_{x \to 2} f(x) = -1$ f) $\nexists \lim\limits_{x \to 6} f(x)$

11. a) $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -1$ b) $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = 2$

c) $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 2$ d) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 2$

e) No f) Si

12. a) $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -2$; b) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 4$; c) $\nexists \lim\limits_{x \to 0} f(x)$

13. a) Asíntota horizontal $y = 1$

b) $y = 2$

c) No tiene

d) $y = 3$

e) $y = \dfrac{5}{4}$

f) No tiene

g) $y = 0$

h) $y = \dfrac{6}{5}$

i) $y = -\dfrac{1}{2}$

j) Asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$ $\; y = 0$

14. a) $x = \dfrac{1}{2}$ b) $x = \pm 2$

c) $x = 2$ d) no tiene

e) $x = -3$ f) $x = -2$ y $x = 3$

g) $x = 0$; $x = 1$ h) $x = 1$

i) $x = 3$ j) $x = 0$

15. a) La función a trozos está compuesta por tramos que son funciones polinómicas y son continuas, luego los únicos problemas los pueden plantear $x = -2$ y $x = 2$.

En $x = -2$

1º $\nexists f(-2)$

2º

$$\lim_{x \to -2} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = 5 \\ \lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = 5 \end{cases} \Rightarrow \exists \lim_{x \to -2} f(x) = 5$$

La función presenta en $x = -2$ una discontinuidad evitable.

En $x = 2$

1º $\exists f(2) = 7$

2º

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 5 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 7 \end{cases} \Rightarrow \nexists \lim_{x \to 2} f(x)$$

La función presenta en $x = 2$ una discontinuidad no evitable y de salto finito.

16. a) $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) \Rightarrow$ no tiene b) $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = 2$

c) $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = 1$ d) $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -1$

e) $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = 2$ f) $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = 4$

g) $\lim\limits_{x \to 7^-} f(x) = -2$ h) $\lim\limits_{x \to 7^+} f(x) =$ no tiene

17. a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3}{x^2 + 1} = 0$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x + 1} + \sqrt{x - 2} \right) = +\infty$

18. a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{6x - 1}{x + 2} = \dfrac{11}{4}$ b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4x - 2}{x + 1} = -2$

19. a) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x+2}{x-1} = -\dfrac{1}{2}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} (6x^3 - 2x + 1) = +\infty$

20. a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - 6x + 2}{3x^2 + 2} = \dfrac{1}{3}$ b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x+5}{x^2+3} = 0$

21. a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3 - 6x^2 + 3}{5x^3 + 4} = \dfrac{1}{5}$ b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{6x+5}{x^2+1} = 0$

22. a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x+1}}{x+1} = 0$ b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 - 3}{5x^2 + 1} = \dfrac{1}{5}$

23. a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-3x+2}{x+1} = -3$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-2x^2 + 4x - 1}{5x^2 + 4x + 3} = -\dfrac{2}{5}$

24. a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - 3}{x+1} = +\infty$ b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2 + 3}{\sqrt{x^2 - 1}} = +\infty$

25. a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 - 2}}{\sqrt{4x^2 - 3x}} = \dfrac{1}{2}$ b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{6x - 1}{2x + 3} = 3$

26. a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^3 + 3}{x^2 - 1} - \dfrac{x^2 + 3}{x + 1} \right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - 3x + 6}{x^2 - 1} = 1$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{5x^2 - 1}{x} - \dfrac{x^3}{x^2 + 1} \right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4x^4 + 4x^2 - 1}{x^3 + x} = +\infty$

27. a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x+5} - \sqrt{x+3} \right) = 0$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 + 5x} \right) = -2$

28. a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x - 1} - \sqrt{x^2 + x - 1} \right) =$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{(x^2 + 2x - 1) - (x^2 + x - 1)}{\sqrt{x^2 + 2x - 1} + \sqrt{x^2 + x - 1}} =$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 2x - 1} + \sqrt{x^2 + x - 1}} = \dfrac{-1}{2}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{2x-1} - \sqrt{x+3} \right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x-4}{\left(\sqrt{2x+1} + \sqrt{x+3} \right)} = +\infty$

29. a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^2 + 3}{2x - 1} - \dfrac{x^2 + 1}{4x - 2} \right) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^3 - 2}{x^2 - 1} - \dfrac{x^3 + 1}{x - 1} \right) = -\infty$

30. a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x + 1} = \lim\limits_{x \to 1} (x - 1) = 0$

b) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{2x - 4} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x-2)(x+2)}{2(x-2)} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x+2}{2} = 2$

31. a) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{(x-3)}{(x-3)(x-2)} = 1$ b) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{(x+1)}{x(x+1)} = -1$

32. a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x-2}{x^2 - x - 2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x-2)}{(x-2)(x+1)} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{1}{3}$

b) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2 + 2x}{x^2 - 4} = \lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x(x+2)}{(x+2)(x-2)} = \lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x}{x-2} = \dfrac{1}{2}$

33. a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 3x + 2}{x^2 - 2x + 1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x-1)(x^2 + x - 2)}{(x-1)(x-1)} =$

$= \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x-1)(x+2)}{(x-1)} = 3$

b) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{3x+4} - x}{x - 4} = \lim\limits_{x \to 4} \dfrac{-x^2 + 3x + 4}{(x-4)\left(\sqrt{3x+4} + x\right)} =$

$= \lim\limits_{x \to 4} \dfrac{-(x-4)(x+1)}{(x-4)\left(\sqrt{3x+4} + x\right)} = \dfrac{-5}{8}$

34. a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - 3x + 1}{3x^2 + 7} = \dfrac{1}{3}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{6x^2 - 4x - 1}{x + 1} = +\infty$

35. a) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2 - 3x - 10}{x^2 + x - 2} = \lim\limits_{x \to -2} \dfrac{(x+2)(x-5)}{(x+2)(x-1)} = \dfrac{7}{3}$

b) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 2x - 3} = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{(x+1)(x-2)}{(x+1)(x-3)} = \dfrac{3}{4}$

36. a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{5x - 2}{x^3 - 7} = 0$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x-5} - \sqrt{x+4} \right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-9}{\sqrt{x-5} + \sqrt{x+4}} = 0$

37. a) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x^2+7}-4}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{(x-3)\left(\sqrt{x^2+7}+4\right)}=$

$=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x+3}{\sqrt{(x^2+7)}+4}=\dfrac{3}{4}$

b) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x-2}{x+1}=\dfrac{7}{4}$

38. a) $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{2x}{x-2}=-\infty$ b) $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{x-5}{3-x}=+\infty$

39. $a=-1$

40. a) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{3}{2}\right)^x=+\infty$ b) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{3}{2}\right)^x=0$

c) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+x-6}{(x+3)}=\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{(x+3)(x-2)}{(x+3)}=-5$

d) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{3x^2+6}{x^2-1}=3$

41. a) Hemos de estudiar la continuidad en los puntos $x=-2$ $x=0$ y $x=2$ porque en el resto sabemos que es continua

$x=-2$

1° $\exists\, f(-2)=-7$

2° $\lim\limits_{x\to -2}f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to -2^-}f(x)=-7\\ \lim\limits_{x\to -2^+}f(x)=\dfrac{-1}{2}\end{cases}\Rightarrow \nexists \lim\limits_{x\to -2}f(x)$

En $x=-2$ la función es discontinua, no evitable y de salto finito.

En $x=0$

1° $\nexists\, f(0)$

2° $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=+\infty\end{cases}$

En $x=0$ la función es discontinua, con discontinuidad no evitable y de salto infinito

En $x=2$

1° $\exists\, f(2)=5$

2° $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=\dfrac{1}{2}\\ \lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=5\end{cases}\Rightarrow \nexists \lim\limits_{x\to 2}f(x)$

En $x=2$ presenta una discontinuidad no evitable y de salto finito.

b) Estudiamos en $x=3$ porque en el resto es continua.

1° $\nexists\, f(3)$

2° $\lim\limits_{x\to 3}f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 3^-}f(x)=17\\ \lim\limits_{x\to 3^+}f(x)=17\end{cases}\Rightarrow \exists \lim\limits_{x\to 3}f(x)=17$

En $x=3$ presenta una discontinuidad evitable.

42. $\exists\, f(-1)=k$

$\lim\limits_{x\to -1}f(x)=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(1-x)(1+x)}{(x+1)}=\lim\limits_{x\to -1}(1-x)=2$

$\lim\limits_{x\to -1}f(x)=f(-1)=k=2$

$k=2$ para que la función sea continua.

43. a) Asíntota vertical $x=\pm 1$
Asíntota horizontal $y=0$

b) Asíntota horizontal $y=0$

c) Asíntota vertical $x=-1$
Asíntota horizontal $y=2$

d) Astíntota horizontal $y=0$ cuando $x\to+\infty$

44. a) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^2+1}}{\sqrt{x+1}}=+\infty$

b) $\lim\limits_{x\to 5^-}\dfrac{3}{5-x}=+\infty$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x^4-x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x^2(x^2-1)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2-1}=-1$

d) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)^2}{(x-2)}=\lim\limits_{x\to 2}(x-2)=0$

45. $x=-1$

1° $\exists\, f(-1)=2$

2°

$\lim\limits_{x\to -1}f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to -1^-}f(x)=-a-2\\ \lim\limits_{x\to -1^+}f(x)=2\end{cases}\Rightarrow -a-2=2\Rightarrow a=-4$

3° $\lim\limits_{x\to -1}f(x)=f(-1)=2$ cuando $a=-4$

$x = 1$

1° $\exists\ f(1) = 2$

2° $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 2 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 1 + b \end{cases} \Rightarrow 2 = 1 + b \Rightarrow b = 1$

3° $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1) = 2$

La función será continua por $a = -4$ y $b = 1$

Tema 7 DERIVADA DE UNA FUNCIÓN

1. a)

$$\left.\begin{array}{r} f(2) = -2 \\ f(2+h) = 3h - 2 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3h - 2 + 2}{h} = 3$$

b)

$$\left.\begin{array}{r} g(1) = -2 \\ g(1+h) = -h^2 - 4h - 2 \end{array}\right\} \Rightarrow g'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{g(1+h) - g(1)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-h^2 - 4h - 2 + 2}{h} = \lim_{h \to 0} (-h - 4) = -4$$

c)

$$\left.\begin{array}{r} h\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \\ h\left(\frac{1}{2} + h\right) = \dfrac{1}{\frac{1}{2} + h} \end{array}\right\} \Rightarrow h'\left(\frac{1}{2}\right) = \lim_{h \to 0} \frac{h\left(\frac{1}{2} + h\right) - h\left(\frac{1}{2}\right)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{-4h}{1 + 2h}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-4}{1 + 2h} = -4$$

d) j (-1)=2

$$j(-1+h) = \frac{-2+h}{-1+h} \Rightarrow j'(-1) = \lim_{h \to 0} \frac{j(-1+h) - j(-1)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{-h}{h-1}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-1}{h-1} = 1$$

2. a) No sería derivable en $x = \pm 2$.

b) No sería derivable en el intervalo $]-\infty, 1[$.

c) No sería derivable en $x = 2$.

d) No sería derivable en $x = 0$.

3. a) $f'(x) = 12x - 5$

b) $f'(x) = -\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

c) $f'(x) = 2x - \dfrac{2}{x^2}$

d) $f'(x) = 4x^3 + 4^x \cdot \ln 4$

e) $f'(x) = e^x + \dfrac{1}{x}$

f) $f'(x) = \dfrac{1}{x \cdot \ln 4}$

g) $f'(x) = -\text{sen}\ x + \dfrac{1}{\cos^2 x}$

h) $f'(x) = 3 \cos x$

i) $f'(x) = \cos x \operatorname{tg} x + \dfrac{\text{sen}\ x}{\cos^2 x} = \text{sen}\ x + \dfrac{\text{sen}\ x}{\cos^2 x}$

j) $f'(x) = \dfrac{-4x^2 - 6x - 4}{(x^2 - 1)^2}$

k) $f'(x) = -2x \cos x - (3 - x^2)\ \text{sen}\ x$

i) $f'(x) = \dfrac{-2x - \text{sen } x + 2x \cos x}{2\sqrt{x}(2x - \text{sen } x)^2}$

4. a) $f'(x) = 3(2x + x^2)^2 \cdot (2 + 2x)$

b) $f'(x) = \dfrac{\cos 2x}{\sqrt{\text{sen } 2x}}$

c) $f'(x) = 4 \cdot \dfrac{3}{\cos^2 3x} = \dfrac{12}{\cos^2 3x}$

d) $f'(x) = -\text{sen } (\ln x) \cdot \dfrac{1}{x}$

e) $f'(x) = 4 \text{ sen } x \cdot \cos x$

f) $f'(x) = 3^{\cos x} \cdot (-\text{sen } x) \cdot \ln 3$

g) $f'(x) = -\text{sen } (3 + x - x^2) \cdot (1 - 2x)$

h) $f'(x) = \dfrac{1 + 8x}{(x + 4x^2) \ln 4}$

i) $f'(x) = (1 + \text{tg}^2 (2 - 4x)) \cdot (-4)$

j) $f'(x) = 3e^{3x + 1}$

5. a) $f'(x) = \dfrac{2x^3 + 15x^2 - 10}{(x + 5)^2}$

b) $f'(x) = \dfrac{5\sqrt{x} + 5}{2\sqrt{x}(x + 5)^2}$

c) $f'(x) = 3 \text{ sen}^2(x^2 + 1) \cdot \cos(x^2 + 1) \cdot 2x =$
$= 6x \text{ sen}^2(x^2 + 1) \cos (x^2 + 1)$

d) $f'(x) = \dfrac{\cos \sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

e) $f'(x) = \dfrac{-6}{x^3} + \dfrac{18}{x^4}$

f) $f'(x) = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}} + \dfrac{1}{x}$

6. a) t.v.m. $[-1, 4] = \dfrac{f(4) - f(-1)}{4 - (-1)} = \dfrac{20}{5} = 4$

b) t.v.m. $[-2, 2] = \dfrac{f(2) - f(-2)}{2 - (-2)} = \dfrac{6 - 6}{4} = 0$

c) t.v.m. $[2, 5] = \dfrac{f(5) - f(2)}{5 - 2} = -\dfrac{1}{4}$

d) t.v.m. $[0, \pi] = \dfrac{f(\pi) - f(0)}{\pi - 0} = -\dfrac{2}{\pi}$

7. t.v.m. $[1, 3] = \dfrac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \dfrac{9 + 1}{2} = 5$

8. $e = 4t^2 + 2t - 40$

a) t.v.m. $[4, 6] = \dfrac{e(6) - e(4)}{6 - 4} = \dfrac{116 - 32}{2} = 42$ m/seg

b) $e' = 8t + 2 \rightarrow e'(3) = 26$ m/s la velocidad instantánea.

9. $f'(0) = 0$

10. $f'(-2) = 18$

11. $f'(1) = 3$

12. $f'(-1) = \dfrac{1}{36}$

13. $f'(-1) = 0$

14. $f'(2) = 7$

15. $f'(-1) = -1$

16. $f'(1) = 0$

17. $f'(4) = -1$

18. $f'(x) = 7 - \dfrac{3}{x^2} = \dfrac{7x^2 - 3}{x^2}$ Derivable en R – {0}

19. $f'(x) = \dfrac{4}{(2 - x)^2}$ Será derivable en R – {2}

20. $f'(x) = 3x^2 - 16x$ Derivable en R

21. $f'(x) = \dfrac{8}{(x + 1)^2}$ Será derivable en R – {–1}

22. $f'(x) = -8 \text{ sen } x + \cos 8$ Derivable en R

23. $f'(x) = 21x^2 - 7 \cdot 3^x \cdot \ln 3$ Será derivable en R

24. $f'(x) = 10x - 6 \cos x$ Derivable en R

25. $f'(x) = -2 + \dfrac{1}{x}$ Será derivable en R – {0}

26. $f'(x) = 1 + \cos x$ Derivable en R

27. $f'(x) = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2 - 4}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 4}}$ Será derivable

$]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$

28. $f'(x) = 10x^4 + 4x^3 - 16x$ Derivable en R

29. $f'(x) = \dfrac{-8}{(3x+4)^2}$ Será derivable en $\mathbb{R} - \left\{-\dfrac{4}{3}\right\}$

30. $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x}} + 6 + \dfrac{8}{x^3}$ Derivable en $]0, +\infty[$

31. $f'(x) = \dfrac{2}{(x+1)^2}$ Será derivable en $\mathbb{R} - \{-1\}$

32. $f'(x) = x(3-x)^4\,(6-7x)$ Derivable en $\mathbb{R}$

33. $f'(x) = \dfrac{6x+1}{2\sqrt{x+1}}$ Será derivable en $]-1, +\infty[$

34. $f'(x) = 5 - 2\,\text{sen}\,x\cos x$ Derivable en $\mathbb{R}$

35. $f'(x) = -9\cos 3x$ Será derivable en $\mathbb{R}$

36. $f'(x) = \dfrac{-4x}{(x^2-1)^2}$ Derivable en $\mathbb{R} - \{\pm 1\}$

37. $f'(x) = \sqrt{3} - \dfrac{3}{2\sqrt{x}} = \dfrac{2\sqrt{3x}-3}{2\sqrt{x}}$

será derivable en $]0, +\infty[$

38. $2x + 2y - 3 = 0$

39. La ecuación de la tangente es: $8x - 4y + 1 = 0$

40. $4x + 9y + 5 = 0$

41. La ecuación de la tangente es: $x - 3y + 5 = 0$

42. $x - 2y + 2 = 0$

43. La ecuación de la recta tangente es: $4y + 1 = 0$

44. en $x = 1$ $\quad 4x + y - 3 = 0$

en $x = 3$ $\quad 16x + y - 27 = 0$

45. La ecuación de la recta tangente es: $2x - y = 0$

46. $P\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{-7}{4}\right)$

recta tangente $\quad 4x + 4y + 5 = 0$

recta normal $\quad 4x - 4y - 9 = 0$

47. $f'(x) = \dfrac{x^2-1}{2x^2}$ la pendiente de $3x + 2y - 8 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow m = \dfrac{-3}{2}$ igualando $\dfrac{x^2-1}{2x^2} = -\dfrac{3}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ resolviendo $x = -\dfrac{1}{2}$ y $x = \dfrac{1}{2}$, luego los puntos serán $\left(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{5}{4}\right)$, $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{5}{4}\right)$.

48. a) $f'(x) = 6(x^2-1)^2\,\text{sen}\,2x + 2(x^2-1)^3\cos 2x =$
$= 2(x^2-1)^2\,(3\,\text{sen}\,2x + (x^2-1)\cos 2x)$

b) $f'(x) = \dfrac{-1}{2\sqrt{\dfrac{2x-3}{x-2}}(x-2)^2} = \dfrac{-1}{2(x-2)\sqrt{2x^2-7x+6}}$

c) $f'(x) = 2(2x-3)^2\,(8x+9)$

d) $f'(x) = \dfrac{x\cos x - 2\,\text{sen}\,x}{2x^2\sqrt{\text{sen}\,x}}$

e) $f'(x) = 2x\,\text{sen}\,x(\text{sen}\,x + x\cos x)$

f) $f'(x) = \dfrac{\cos 2x}{\sqrt{\text{sen}\,2x}}$

g) $f'(x) = \dfrac{-3(1-x)\,\text{sen}\,3x + \cos 3x}{(1-x)^2}$

h) $f'(x) = \dfrac{2x}{\cos^2 x^2} + \dfrac{2\,\text{tg}\,x}{\cos^2 x}$

i) $f'(x) = 5^{3-\text{sen}\,3x} \cdot (-3\cos 3x) \cdot \ln 5$

j) $f'(x) = \dfrac{1-2x}{e^{2x-2}}$

k) $f'(x) = \dfrac{x\cos x - \text{sen}\,x}{2x\sqrt{x\,\text{sen}\,x}}$

l) $f'(x) = \dfrac{3\cos\sqrt{3x-2}}{2\sqrt{3x-2}}$

m) $f'(x) = e(3x^2-2x)^{e-1} \cdot (6x-2)$

n) $f'(x) = 2\,\text{sen}\,x\cos x\,\text{tg}\,3x + \text{sen}^2 x \cdot \dfrac{3}{\cos^2 3x}$

$= \text{sen}\,2x\,\text{tg}\,3x + \dfrac{3\,\text{sen}^2 x}{\cos^2 3x}$

ñ) $f'(x) = \dfrac{(1+\text{tg}^2 x)}{2\sqrt{\text{tg}\,x}}$

o) $f'(x) = \dfrac{3\,\text{sen}\,3x}{\cos^2 3x}$

p) $f'(x) = \dfrac{\cos(1-x)}{\text{sen}^2(1-x)}$

q) $f'(x) = 3x^2 \ln 2 \cdot 2^{x^3}$

r) $f'(x) = 2\cos 2x - 2\,\text{sen}\,2x$

s) $f'(x) = 2\,\text{sen}\,x\cos x + 2x\cos x^2 + 2\,\text{sen}\,x^2 \cdot \cos x^2 \cdot 2x =$
$= 2\,\text{sen}\,x\cos x + 2x\cos x^2 + 4x\,\text{sen}\,x^2\cos x^2$

t) $y' = \dfrac{-6}{1-6x}$

u) $y' = \dfrac{1}{\sqrt{3x-2}} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{3x-2}} \cdot 3 = \dfrac{3}{2(3x-2)}$

v) $f'(x) = 0$

w) $f'(x) = \dfrac{-1}{x^2-1}$

49. $f'(x) = 3x^2 + 8x - 2$

a) $3x^2 + 8x - 2 = -6 \Rightarrow x = -2$ y $x = -\dfrac{2}{3}$

b) $3x^2 + 8x - 2 = -9 \Rightarrow x = -\dfrac{11}{3}$ y $x = 1$

50. Punto de tangencia (2, –3).

51. a) $df(x) = \dfrac{-2}{(1+x)^2}\, dx$

b) $dg(x) = (5 \operatorname{sen} 5x + 25x \cos 5x)\, dx$

c) $dh(x) = \dfrac{-6}{\cos^2 2x}\, dx$

d) $dj(x) = 2 \cdot 3^{2x} \ln 3\, dx$

52. $dV = 0{,}003 \text{ m}^3$

53. a) $C'(x) = 150 + 0{,}05x$; $I'(x) = 3000 - 0{,}1x$

b) $C'(15000) = 900$; $I'(15000) = 1500$

Indicaría que si produjera una unidad más le costaría 900 u.m. e ingresaría 1500 u.m.

c) $B'(x) = -2500000 + 2850x - 0{,}075x^2$

19000 unidades

54. $P_1(1, 3)$ y $P_2(-1, 5)$

55. a) 360 personas por día

b) El segundo y el vigésimo día

c) 22 días

56. a) t.v.m. [1, 4] = –4 y t.v.m. [0, 5] = 0

b) 7° C/h

c) En $t = 1$ h y $t = 5$ h 40 min.

57. $m = -4$; la función será $y = -x^2 + 7x - 2$

58. a) $y' = 3x^2 e^{x^3} + 3x^2 \cdot 2^{x^3} \cdot \ln 2 = 3x^2(e^{x^3} + 2^{x^3} \ln 2)$

b) $y' = \dfrac{1}{2}(2e^{2x} - 2e^{-2x}) = e^{2x} - e^{-2x}$

c) $y' = \dfrac{x^2-3}{x^3+3x}$

d) $y' = \dfrac{-3}{x^2} - \dfrac{4}{x^3} + \dfrac{3}{x^4}$

e) $y' = \dfrac{4x}{(x^2+1)^2}$

f) $y' = \dfrac{x(-x^3+9x+8)}{(x^2+3)^3}$

g) $y' = \dfrac{e^{x-3}}{2\sqrt{e^{x-3}}}$

h) $y' = 18x^2 + 8$

i) $y' = 3(x^2-3)^2 \cdot 2x = 6x(x^2-3)^2$

j) $y' = 5x^4 - 9x^2 + 2x$

k) $y' = 3 \operatorname{sen}^2 (x^2+1) \cdot \cos (x^2+1) \cdot 2x =$
$= 6x \operatorname{sen}^2 (x^2+1) \cos (x^2+1)$

59. El 80%, siendo $G(t) = \dfrac{B}{1+4e^{-0{,}35t}}$

Tema 8 APLICACIONES DE LA DERIVADA

1. a) no crece ni decrece

b) creciente

c) decreciente

2. a) $f'(x) = 2x = 0 \Rightarrow x = 0$

signo de $f'(x)$ $\quad \begin{array}{ccc} - & & + \\ \hline \searrow & 0 & \nearrow \end{array}$

creciente $]0, +\infty[$; decreciente en $]-\infty, 0[$

b) $g'(x) = 3x^2 - 18x + 24 = 0 \Rightarrow x = 2$ y $x = 4$

signo de $g'(x)$ $\quad \begin{array}{ccccc} + & & - & & + \\ \hline & 2 & & 4 & \end{array}$

creciente en $]-\infty, 2[\cup]4, +\infty[$; decreciente en $]2, 4[$

c) $h'(x) = \dfrac{-x^2+1}{(x^2+1)^2} = 0 \Rightarrow x = \pm 1$

signo de $h'(x)$ $\quad \begin{array}{ccccc} - & & + & & - \\ \hline & -1 & & 1 & \end{array}$

creciente en $]-4, +\infty[$; nunca a decreciente

d) $j'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+4}} \neq 0$

creciente en $]-1, 1[$; decreciente en $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$

3. Sí, pues $f'(x) = \dfrac{-2}{(x-1)^2} < 0; \quad \forall\ x \in \mathrm{R} - \{1\}$

4. a) mínimo en $(-3, -4)$

b) máximo en $(1 - \sqrt{2}\ , 2 - 2\sqrt{2}\ )$;

mínimo en $(1 + \sqrt{2}\ , 2 + 2\sqrt{2}\ )$

c) mínimo en $\left(\sqrt[3]{2}, \dfrac{3}{\sqrt[3]{4}}\right)$

d) máximo $(-1, 30)$ y mínimo $\left(\dfrac{3}{2}, -\dfrac{185}{4}\right)$

5. $a = 0$; $b = -12$

6. a) mínimo en $(0, 0)$; b) mínimo en $\left(-\dfrac{3}{4}, \dfrac{-27}{256}\right)$

7. a) cóncava en $\left]-\infty, \dfrac{-\sqrt{3}}{3}\right[\cup \left]\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \infty\right[$

convexa en $\left]-\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right[$

b) cóncava $]-\infty, -1[$, convexa $]-1, +\infty[$

c) cóncava en $]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$; convexa en $]-1, 0[$

d) cóncava $]-\infty, 0[$, convexa $]0, +\infty[$

8. a) Cóncava en R. Mínimo en (0, 0). Sin inflexiones

b) $g'(x) = 3x^2 - 12x - 15 = 0 \Rightarrow x = 5$ y $x = -1$

signo de $g'(x)$ $\quad \begin{array}{ccccc} + & & - & & + \\ \hline \nearrow & -1 & \searrow & 5 & \nearrow \end{array}$

$g''(x) = 6x - 12 = 0 \Rightarrow x = 2$

signo de $g''(x)$ $\quad \begin{array}{ccc} - & & + \\ \hline \cap & 2 & \cup \end{array}$

la función $g(x)$ tiene un punto máximo relativo en $(-1, 48)$ y un mínimo relativo en $(5, -60)$.

Es convexa en el intervalo $]-\infty, 2[$ y cóncava en $]2, +\infty[$ y en $(2, -6)$ hay un punto de inflexión.

c) $h'(x) = \dfrac{-5}{(x-3)^2} \neq 0$ luego no hay ni máximos ni mínimos

$h''(x) = \dfrac{10}{(x-3)^3} \neq 0$ no hay puntos de inflexión

signo de $h''(x)$ $\quad \begin{array}{ccc} - & & + \\ \hline \cap & 3 & \cup \end{array}$

La función $h(x)$ no tiene ni máximos, ni mínimos, ni puntos de inflexión, es convexa $]-\infty, 3[$ y cóncava en $]3, +\infty[$.

d) $j'(x) = \dfrac{6(1-x^2)}{(1+x^2)^2} = 0 \quad 1 - x^2 = 0 \quad x = \pm 1$

signo de $j'(x)$ $\quad \begin{array}{ccccc} - & & + & & - \\ \hline \searrow & -1 & \nearrow & 1 & \searrow \end{array}$

$j''(x) = \dfrac{12x(x^2-3)}{(1+x^2)^3} = 0 \quad x = 0 \quad x = \pm\sqrt{3}$

signo de $j''(x)$ $\quad \begin{array}{ccccccc} - & -\sqrt{3} & + & 0 & - & \sqrt{3} & + \\ \hline \cap & & \cup & & \cap & & \cup \end{array}$

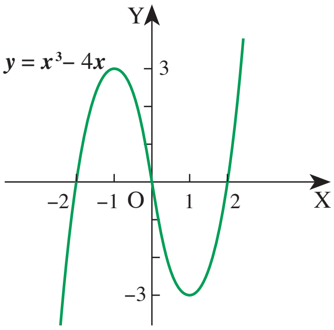
La función $j(x)$ tiene un mímino relativo en $(-1, -3)$, un máximo relativo en $(1, 3)$.

Es convexa en $]-\infty, -\sqrt{3}\ [\ \cup\ ]0, \sqrt{3}\ [$

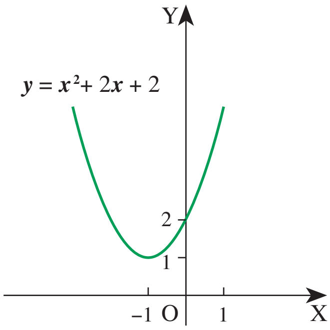
Es cóncava en $]-\sqrt{3}\ , 0[\ \cup\ ]\sqrt{3}\ , +\infty[$

en $\left(-\sqrt{3}, -\dfrac{3}{2}\sqrt{3}\right)$, $\left(\sqrt{3}, \dfrac{3}{2}\sqrt{3}\right)$ y $(0, 0)$ hay tres puntos de inflexión.

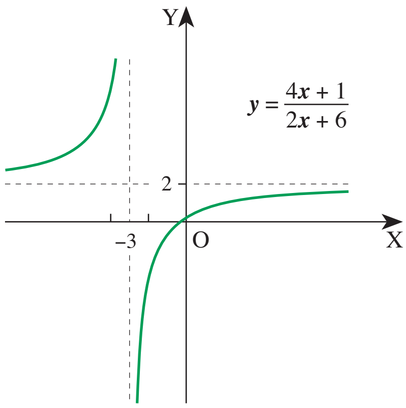
9. a)



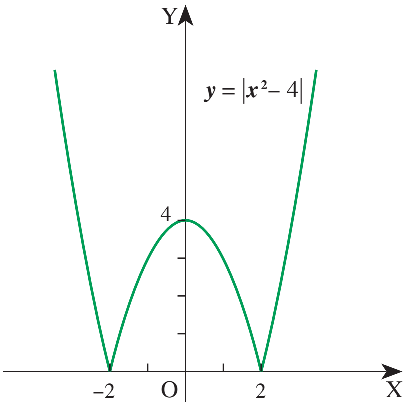
b)



c)



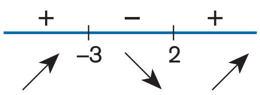
d)



10. $f'(x) = x^2 + x - 6 = 0$

$x = -3$ y $x = 2$

signo de $f'(x)$



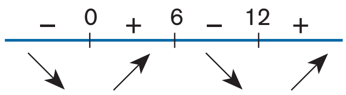
La función es creciente en $]-\infty, -3[\cup]2, +\infty[$ y decreciente en $[-3, 2[$.

Tiene un máximo relativo en $\left(-3, \dfrac{43}{2}\right)$ y un mínimo relativo en $\left(2, \dfrac{2}{3}\right)$.

11. $f'(x) = 15x^2 \geq 0$, aunque $x = 0$ anule a la 1ª derivada es positiva siempre, luego es creciente en R, no hay ni máximos ni mínimos.

12. a) $f'(x) = 4x^3 - 72x^2 + 288x = 0 \Rightarrow x = 0; x = 6; x = 12$

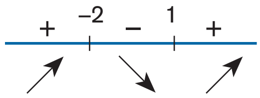
signo de $f'(x)$



La función $f(x)$ tiene mínimos relativos en (0, 0) (12, 0) y máximo relativo en (6, 1296).

b) $g'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 0 \Rightarrow x = 1; x = -2$

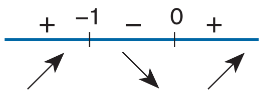
signo de $g'(x)$



La función $g'(x)$ tiene un mínimo relativo (1, –6) y un máximo relativo (–2, 21)

13. a) $h'(x) = 1 - \dfrac{1}{1+x} = \dfrac{x}{1+x} = 0 \Rightarrow x = 0$

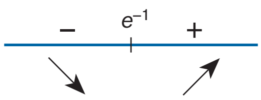
Signo de $h'(x)$



En $x = 0$ hay un mínimo relativo; el punto (0, 0)

b) $j'(x) = \ln x + 1 = 0 \Rightarrow x = e^{-1}$

Signo de $j'(x)$

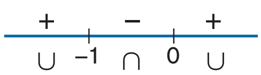


Hay un mínimo relativo en $(e^{-1}, -e^{-1}) = \left(\dfrac{1}{e}, -\dfrac{1}{e}\right)$

14. a) $f'(x) = 4x^3 - 12x$

$f''(x) = 12x^2 - 12 = 0 \quad x = \pm 1$

signo de $f''(x)$



La función $f(x)$ es cóncava $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ y convexa $]-1, 1[$ y tiene puntos de inflexión en (–1, –4) y (1, 4).

b) $g'(x) = 3 + 3(x+2)^2$

$g''(x) = 6(x+2) = 0 \qquad x = -2$

Signo de $g''(x)$

$$\begin{array}{ccc} - & -2 & + \\ \cap & & \cup \end{array}$$

La función $g(x)$ es convexa $]-\infty, -2[$ y cóncava $]-2, +\infty[$ y tiene un punto de inflexión en $(-2, -6)$.

15. El área será $A = x\sqrt{16 - x^2}$

$$A' = \frac{16 - 2x^2}{\sqrt{16 - x^2}} = 0 \qquad x = \pm 2\sqrt{2}$$

Signo de A'

$$\begin{array}{ccccc} - & -2\sqrt{2} & + & 2\sqrt{2} & - \\ \searrow & & \nearrow & & \searrow \end{array}$$

Como x es una distancia, solo es válida $x = 2\sqrt{2}$, que hay un máximo.
El área máxima se alcanza en un cuadrado de lado $2\sqrt{2}$.

16. $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 13$

17. $f(x) = x^2 + 4x - 12$

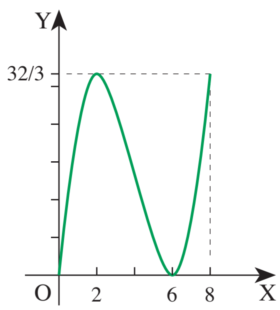
18. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4.\ \ I(1,2)$

19. a) aumenta en $\left[0, \frac{1}{2}\right[$ y disminuye en $\left]\frac{1}{2}, 1\right]$

b) rendimiento nulo en $t = 0$ y $t = 1$

c) rendimiento máximo en $t = \frac{1}{2}$, $r = 75\%$

20.

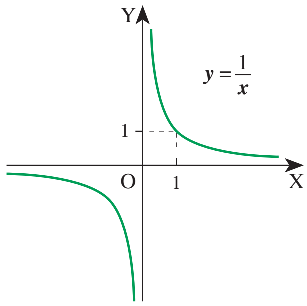


Beneficios máximos en $\left(2, \frac{32}{3}\right)$ y $\left(8, \frac{32}{3}\right)$

Beneficios mínimos en (0, 0) y (6, 0)
Son relativos los de abscisa $x = 2$ y $x = 6$

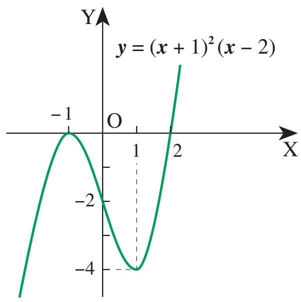
21. a) $f'(x)\ \frac{-1}{x^2} < 0$ en [1, 7] luego es decreciente

b)



22. $x = 50$; $y = 400$

23.



Creciente en $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$;
Drececiente en $]-1, 1[$
Convexa en $]-\infty, 0[$; Cóncava en $]0, +\infty[$
Máximo $(-1, 0)$; mínimo $(1, -4)$

24. En bajada [0, 20[; en alza]20, 30]
Máximo absoluto en (0, 100)
Mínimo en (20, 20)

25. $a = 1$; $b = -2$; $c = 0$; $d = 2$

26. a) $f(0) = 10$
b) En $t = 1$ es $f(1) = 10{,}5$
c) No desaparece, se estabiliza en torno a 10

27. $f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x - 1$

$f'(x) = 3x^2 - 10x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$; $x = 3$

Signo de $f'(x)$

$$\begin{array}{ccccc} + & \frac{1}{3} & - & 3 & + \\ \nearrow & & \searrow & & \nearrow \end{array}$$

La función es creciente $\left]-\infty, \frac{1}{3}\right[\cup]3, +\infty[$

es decreciente $\left]\frac{1}{3}, 3\right[$.

Hay un máximo relativo en $x = \dfrac{1}{3}$ y un mínimo relativo en $x = 3$

$f''(x) = 6x - 10 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{5}{3}$

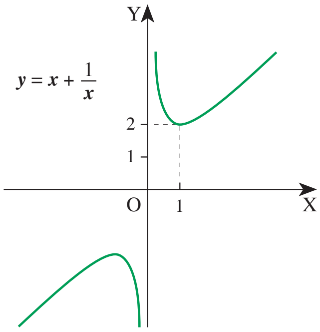
Signo de $f''(x)$

$$\begin{array}{ccc} & \frac{5}{3} & \\ - & | & + \\ \cap & & \cup \end{array}$$

La función es convexa $\left]-\infty, \dfrac{5}{3}\right[$ y es cóncava $\left]\dfrac{5}{3}, +\infty\right[$

28. a) No pues $G(x) \to 0$ si $x \to +\infty$
b) 20 minutos
c) No pues como $x \in [0, +\infty[$ siempre es $G(x) \geq 0$

29. a) $x = -1$
b)



30. Crece: $]-\infty, 2[\cup]4, +\infty[$; decrece: $]2, 4[$
Máximo $(2, 0)$, mínimo $(4, -4)$

31. Como el dominio es $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ y

$f'(x) = \dfrac{2}{x^2 - 1} \neq 0$ y si estudiamos su signo

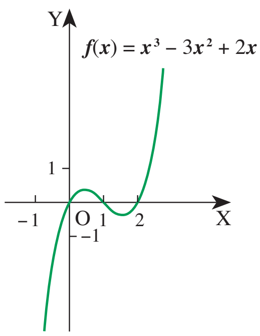
signo de $f'(x)$

$$\begin{array}{ccccc} + & -1 & - & +1 & + \\ \nearrow & & \searrow & & \nearrow \end{array}$$

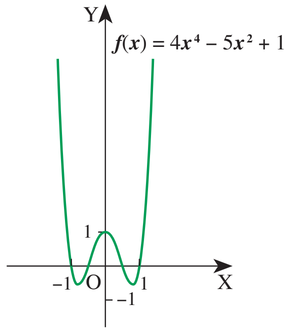
Luego en su dominio siempre es positiva la derivada, luego la función es creciente en su dominio.

32. $a = -1$; $b = 3$; $c = -2$; $f(x) = -x^2 + 3x - 2$

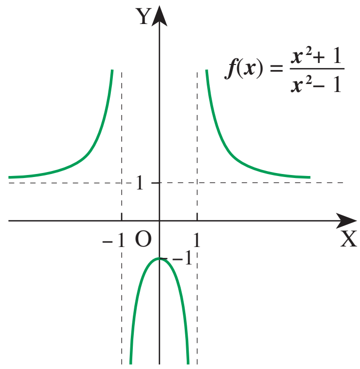
33. a)



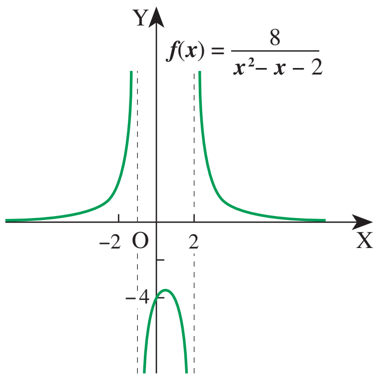
b)



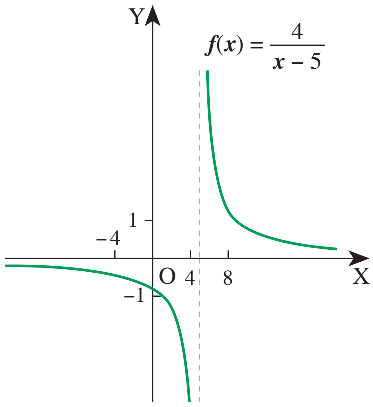
34. a)



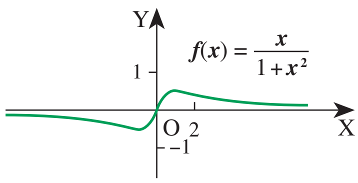
b)



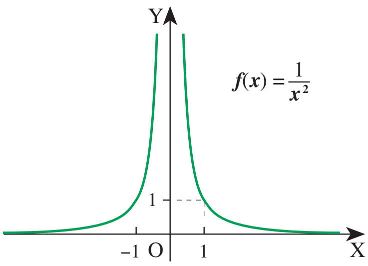
35. a)



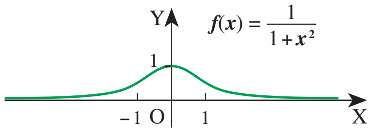
b)



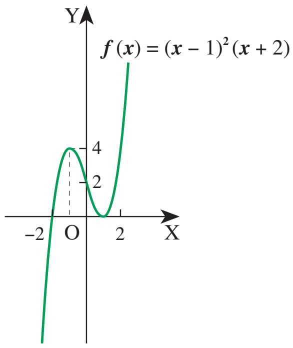
36. a)



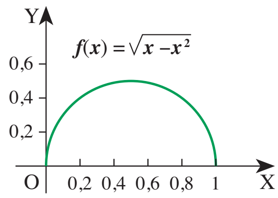
b)



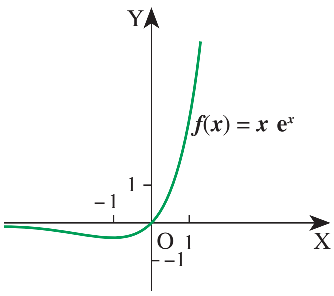
37. a)



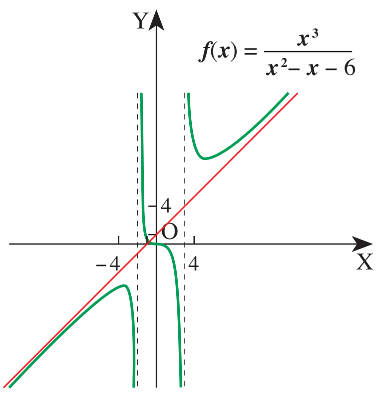
b)



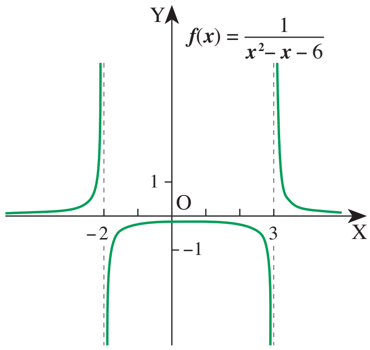
38. a)



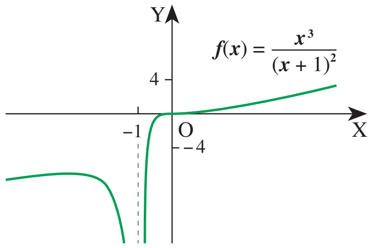
b)



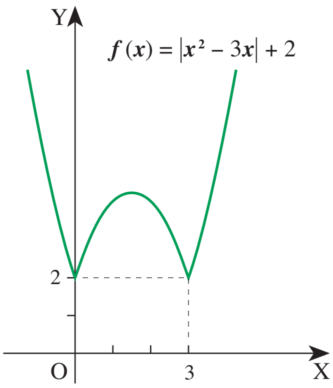
39. a)



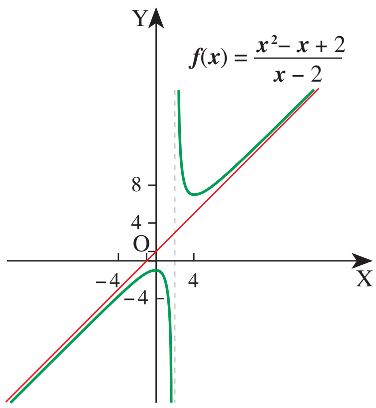
b)



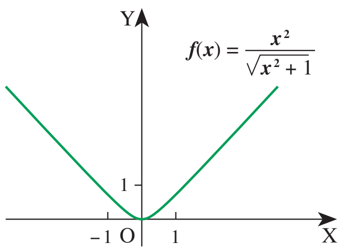
40. a)



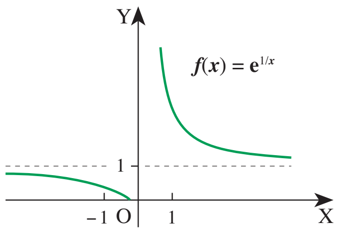
b)



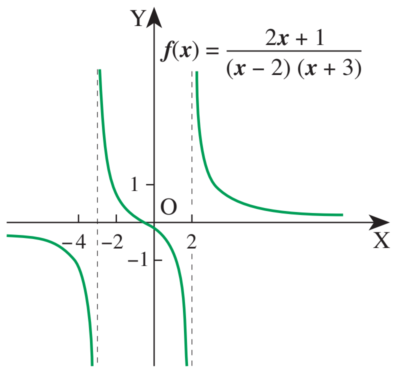
41. a)



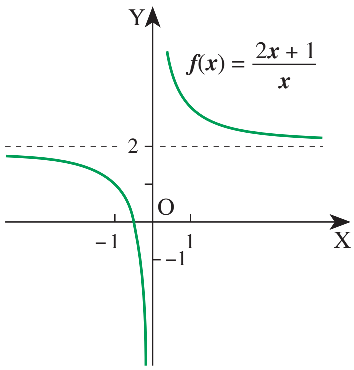
b)



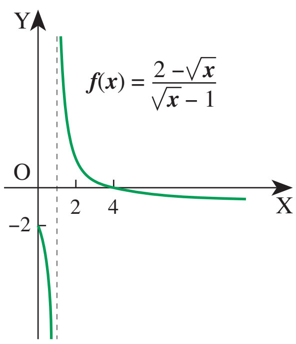
42. a)



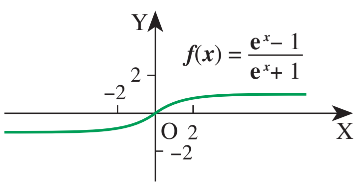
b)



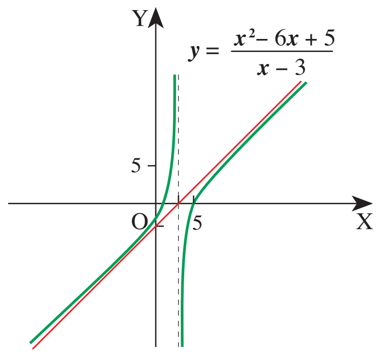
43. a)



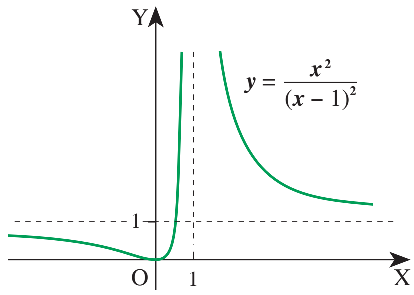
b)



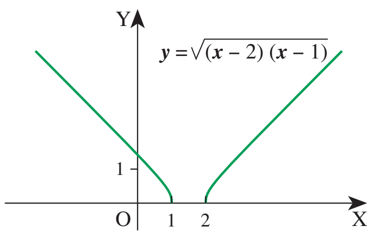
44. a)



b)



45.



46. $x = -1$

47. $t = 50$ seg. $h = 12\,500$ m

48. Triángulo rectángulo isósceles con catetos

$a = b = 10\sqrt{2}$ m, e hipotenusa $c = 20$ m

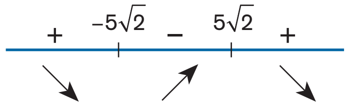
49. Si el triángulo tiene de catetos x e y, el área será

$A = \frac{xy}{2}$ y como $x^2 + y^2 = 100$ obtenemos,

$A = \frac{1}{2}x\sqrt{100 - x^2}$ derivamos $A' = \frac{500 - x^2}{\sqrt{100 - x^2}} = 0$

$x = \pm\sqrt{50} = \pm 5\sqrt{2}$

Signo de A'



El área máxima se alcanza en un triángulo rectángulo isósceles de $5\sqrt{2}$ m cada cateto, y el área $A = 25$ m^2.

50. El triángulo equilátero de lado $5\sqrt{3}$ m

51. Sean x e y los lados del rectángulo, el área $A = x \cdot y$ y como $2x + 2y = 64 \Rightarrow x + y = 32$ obtenemos

$A = x(32 - x) = 32x - x^2 \Rightarrow A' = 32 - 2x = 0 \Rightarrow x = 16$

Signo de A'

$$\begin{array}{ccc} + & 16 & - \\ \nearrow & & \searrow \end{array}$$

El área máxima se alcanza en un cuadrado de lado 16 cm, y el área será 256 cm^2.

52. El cuadrado de lado 4 cm

53. Si x e y son las dimensiones del rectángulo sabemos que $x \cdot y = 16$ y la diagonal $d = \sqrt{x^2 + y^2}$, luego obtenemos $d = \sqrt{x^2 + \dfrac{256}{x^2}} \Rightarrow d' = \dfrac{x^4 - 256}{x^2\sqrt{x^4 + 256}} = 0$

$\Rightarrow x = 4$ y $x = -4$, estudiamos el signo de d'

Signo de d'

$$\begin{array}{ccccc} + & -4 & - & 4 & + \\ \nearrow & & \searrow & & \nearrow \end{array}$$

La diagonal mínima se alcanza en un cuadrado de 4 cm de lado y valdrá $\sqrt{32} = 4\sqrt{2}$ cm.

54. $D = 2\sqrt{2}$ m, es un cuadrado de 2 cm de lado

55. Si x es la base e y la altura, sabemos $x + y = 20$ y el área $A = \dfrac{x \cdot y}{2}$, luego despejando y sustituyendo nos queda $A = \dfrac{1}{2}x(20 - x) = \dfrac{1}{2}(20x - x^2)$ derivamos

$A' = 10 - x = 0 \Rightarrow x = 10$

Signo de A'

$$\begin{array}{ccc} + & 10 & - \\ \nearrow & & \searrow \end{array}$$

$x = 10$ hay un máximo

El área será máxima cuando la base sea 10 cm.

56. $b = \dfrac{40}{3}$ m y el triángulo es equilátero

57. El rectángulo tendrá 6 cm de base y 5 cm de altura y el área será 30 cm^2

58. Un cuadrado de 20 m de lado

59. Si x es la arista básica e y es la altura, el volumen será $V = x^2y$ y sabemos $4xy + x^2 = 192$, luego despejando y sustituyendo

$$V = x^2 \cdot \left(\frac{192 - x^2}{4x}\right) = \frac{1}{4}(192x - x^3)$$

derivando $V' = \dfrac{1}{4}(192 - 3x^2) = 0 \Rightarrow x = \pm 8$, estudiando el signo se alcanza un máximo para $x = 8$.

El estanque para que el volumen sea máximo, medirá 8 m de arista básica y 4 m de altura con un volumen de 256 m^3.

60. Cubo de 5 m de arista

61. Si llamamos $2x$ a la base e y a cada uno de los lados iguales, tendremos que el perímetro es $2x + 2y = 10$ $\Rightarrow x + y = 5$.

El volumen del cono $V = \dfrac{1}{3}\pi x^2 \cdot h$ donde

$$h = \sqrt{y^2 - x^2} = \sqrt{(5 - x^2) - x^2} = \sqrt{25 - 10x}$$

luego $V = \dfrac{1}{3}\pi x^2\sqrt{25 - 10x}$

derivando $V' = \dfrac{\pi}{3}\left(\dfrac{50x - 25x^2}{\sqrt{25 - 10x}}\right) = 0 \Rightarrow x = 0$ y $x = 2$, estudiamos el signo de la derivada y obtenemos que para $x = 2$ hay un máximo.

Luego el triángulo tendrá 4 cm de base y 3 cm cada uno de los lados iguales.

62. a) $A = \dfrac{200x - (\pi + 4)x^2}{8}$ m^2 b) $x = \dfrac{100}{\pi + 4}$m

63. Si llamamos x al radio de la base e y a la altura, el $V = \pi x^2 y$ y la superficie total

$S = 2\pi xy + 2\pi x^2 = 1 \Rightarrow y = \dfrac{1 - 2\pi x^2}{2\pi x} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ sustituyendo en el volumen obtenemos

$V = \dfrac{1}{2}(x - 2\pi x^3)$ derivamos $V' = \dfrac{1}{2}(1 - 6\pi x^2) = 0$

$x = \pm\sqrt{\dfrac{1}{6\pi}}$ estudiamos el signo de V' y obtenemos que en $x = \sqrt{\dfrac{1}{6\pi}} = \dfrac{\sqrt{6\pi}}{6\pi}$ se alcanza el máximo.

El volumen máximo se obtiene en un cilindro de $\dfrac{\sqrt{6\pi}}{6\pi}$ m de radio y de altura $\dfrac{\sqrt{6\pi}}{3\pi}$ m y su volumen será $\dfrac{\sqrt{6\pi}}{18\pi}$ m^2.

64. 1,25 m de ancho y 0,8 m de alto

65. El volumen será

$V = (60 - 2x)(40 - 2x)x = 4x^3 - 200\,x^2 + 2400x$

derivamos $V' = 12x^2 - 400x + 2400 = 0$ y obtenemos

un máximo en $x = \dfrac{50 - 10\sqrt{7}}{3} \simeq 7{,}85$ cm

Luego la longitud del lado del cuadrado será aproximadamente 7,85 cm.

66. 14 cm y 28 cm

67. $f(x) = x + \dfrac{25}{x}$ sea mínimo; $f'(x) = 1 - \dfrac{25}{x^2} = 0, \;\; x = \pm 5$

Estudiando el signo $f'(x)$ obtenemos que en $x = 5$ hay un mínimo, luego el número buscado es el 5.

68. (15, 15)

69. $x = 2$ km

70. Es un cuadrado de lado 1 m

71. a) $A = x(300 - 2x)$

b) los lados perpendiculares al muro 75 m y el paralelo 150 m

72. a) $S = \dfrac{17x^2 - 1200x + 40000}{16}$ siendo x la base del rectángulo.

b) lado del cuadrado 50 m y base del rectángulo 0 m

73. Su base es un cuadrado de 3 dm de lado

74. $5\sqrt{2}$ cm

75. $r \simeq 14{,}7$ cm, $h \simeq 29{,}4$ cm

76. 6 y 12

77. 2000 y 1000 m

78. $v = \dfrac{1000}{11}$ km/h $\simeq 90{,}9$ km/h

Se consumirán 8,97 l/100 km, ¡siempre que $v \neq 0$!

79. a) Desde el 4º mes; b) A partir del 8º mes

80. Si x es el número de inquilinos que pierde, el precio total que obtenga será

$P = (600 + 60x)(400 - x) = -60x^2 + 1800x + 24000$

$P' = -120x + 1800 = 0 \quad x = 15$

signo de P'

$$\begin{array}{ccc} + & 15 & - \\ \nearrow & & \searrow \end{array}$$

Cuando aumente a 1500 € le quedará 25 inquilinos y ganará 37500 €.

Tema 9 LA INTEGRAL

1. a) F b) V c) F d) F

2. Primitiva de $\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}$ es $\sqrt{x-1}$

Primitiva de $3x + 5$ es $\dfrac{3x^2}{2} + 5x$

Primitiva de $6x$ es $3x^2 + 5$

Primitiva de 1 es x

Primitiva de 0 es 7

3. a) $\displaystyle\int x^4\,dx = \frac{x^5}{5} + C$

b) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x} + C$

c) $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$

d) $\displaystyle\int \frac{3x^2}{x^3+7}\,dx = \ln|x^3+7| + C$

e) $\displaystyle\int 2e^{2x}\,dx = e^{2x} + C$

f) $\displaystyle\int 3\cdot 5^{3x}\,dx = \frac{5^{3x}}{\ln 5} + C$

g) $\displaystyle\int 2\,\mathrm{sen}(2x)\,dx = -\cos(2x) + C$

h) $\displaystyle\int \frac{3x^2}{\sqrt{x^3+2}}\,dx = 2\sqrt{x^3+2} + C$

i) $\displaystyle\int 2x\cos(x^2)\,dx = \mathrm{sen}(x^2) + C$

j) $\displaystyle\int x^3\,dx = \frac{x^4}{4} + C$

k) $\displaystyle\int (x^4+7x)^5(4x^3+7)\,dx = \frac{(x^4+7x)^6}{6} + C$

4. $\displaystyle\int -8x\,dx = -\frac{8x^2}{2} = -4x^2 + C$

5. $\displaystyle\int x^3\,dx = \frac{x^4}{4} + C$

6. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2}\,dx = \frac{-1}{x} + C$

7. $\int 3\sqrt[3]{x}\,dx = 3\int x^{\frac{1}{3}}\,dx = 3\dfrac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + C =$

$= \dfrac{9}{4}\sqrt[3]{x^4} + C = \dfrac{9}{4}x\sqrt[3]{x} + C$

8. $\int (x+1)^2\,dx = \dfrac{(x+1)^3}{3} + C$

9. $\int \dfrac{3\,dx}{\sqrt{x}} = 6\sqrt{x} + C$

10. $\int 3\sqrt[3]{x}\,dx = 3\int x^{\frac{1}{3}}\,dx = 3\dfrac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} = \dfrac{9}{4}x^{\frac{4}{3}} = \dfrac{9}{4}x\sqrt[3]{x} + C$

11. $\int (x+1)^2\,dx = \dfrac{(x+1)^3}{3} + C$

12. $\int \cos^2 x \operatorname{sen} x\,dx = -\dfrac{\cos^3 x}{3} + C$

13. $\int e^{2x}\,dx = \dfrac{1}{2}e^{2x} + C$

14. $\int \dfrac{2dx}{x} = 2\ln|x| + C$

15. $\int x\cos x^2\,dx = \dfrac{1}{2}\operatorname{sen} x^2 + C$

16. $\int \dfrac{8x}{\sqrt{5+4x^2}}\,dx = 2\sqrt{5+4x^2} + C$

17. $\int 2x\sqrt{1+4x^2}\,dx = \dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{2}{3}\sqrt{(1+4x^2)^3} + C =$

$= \dfrac{1}{6}(1+4x^2)\sqrt{(1+4x^2)} + C$

18. $\int x\left(1+\operatorname{tg}^2(x^2+5)\right)dx = \dfrac{1}{2}\operatorname{tg}(x^2+5) + C$

19. a) $F(x) = \dfrac{5x^4}{4} - \dfrac{4x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} - 7x + C$

$F(-3) = 2 \Rightarrow C = \dfrac{-643}{4}$

b) $F(x) = \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{2x^3}{3} + C$; $F(-2) = 3 \Rightarrow C = \dfrac{13}{3}$

c) $f(x) = \dfrac{x^3}{3} + x + C$; $F(1) = -1 \Rightarrow C = -\dfrac{7}{3}$

20. $\int_0^2 x^2\,dx = \left[\dfrac{x^3}{3}\right]_0^2 = \dfrac{8}{3}$

21. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x\,dx = [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$

22. $\int_0^4 e^{\frac{x}{2}}\,dx = \left[2e^{\frac{x}{2}}\right]_0^4 = 2(e^2-1)$

23. $\int_{-1}^2 (2-x)\,dx = \left[2x - \dfrac{x^2}{2}\right]_{-1}^2 = \dfrac{9}{2}$

24. $h(x) = x^2 + 9 - 2x^2 - 3 = -x^2 + 6 = 0 \Rightarrow x \pm\sqrt{6}$

Signo de $h(x)$: $-\sqrt{6}$ $\quad -1 \quad + \quad 2 \quad \sqrt{6}$

$A = \int_{-1}^2 (-x^2+6)\,dx = \left[\dfrac{-x^3}{3} + 6x\right]_{-1}^2 = 15$ u.a.

25. $\int_1^2 (3x-1)\,dx = \left[\dfrac{3x^2}{2} - x\right]_1^2 = \dfrac{7}{2}$ u.a.

26. $y = x^3 + 8 = 0 \Rightarrow x = -2$

Signo de y: $-$ $\quad -2 \quad +$ $\quad 3$

$A = \int_{-2}^3 (x^3+8)\,dx = \left[\dfrac{x^4}{4} + 8x\right]_{-2}^3 = \dfrac{225}{4}$ u.a.

27. a) 1; b) 2

28. $y = x^3 \Rightarrow$ se anula para $x = 0$

Signo de y: $-1 \quad - \quad 0 \quad + \quad 2$

$A = -\int_{-1}^0 x^3\,dx + \int_0^2 x^3\,dx = -\left[\dfrac{x^4}{4}\right]_{-1}^0 + \left[\dfrac{x^4}{4}\right]_0^2 = \dfrac{17}{4}$ u.a.

29. $A = -\int_{-2}^{-1} f(x)\,dx + \int_{-1}^2 f(x)\,dx = \dfrac{11}{6} + \dfrac{9}{2} = \dfrac{19}{3}$ u.a.

30. 36

31. $A = \int_{-1}^{0} f(x)\,dx - \int_{0}^{1} f(x)\,dx = \frac{1}{2}$ *u.a.*

32. 1

33. $h(x) = x^2 + x - 2 = 0 \quad x = 1;\ x = -2$

$A = -\int_{-2}^{1} (x^2 + x - 2)\,dx = \frac{9}{2}$ *u.a.*

34. 4

35. $f(x) = 4x^3 - 2x = 0$

$2x(2x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad x = \sqrt{\frac{1}{2}} \quad x = -\sqrt{\frac{1}{2}}$

Signo de $f(x)$

$-\quad +\quad -\quad +$

$-1 \quad -\sqrt{\frac{1}{2}} \quad 0 \quad \sqrt{\frac{1}{2}} \quad 1$

tiene una simetría impar

$A = 2\int_{\sqrt{\frac{1}{2}}}^{1} (4x^3 - 2x)\,dx + 2\int_{-\sqrt{\frac{1}{2}}}^{0} (4x^3 - 2x)\,dx =$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ *u.a.*

36. $A = \int_{0}^{3} x^3\,dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^3 = \frac{81}{4}$ v.s.

37. $h(x) = x^2 - 4 = 0 \quad x = \pm 2$

Signo de $h(x)$

$+\quad -\quad +$

$-2 \quad 2$

$A = -\int_{-2}^{2} (x^2 - 4)\,dx = \frac{32}{3}$ *u.a.*

38. a) $\int (3x - x^3)\,dx = \frac{3x^2}{2} - \frac{x^4}{4} + C$

b) $\int \left(\frac{8}{x^2} + 1\right) dx = -\frac{8}{x} + x + C$

39. a) $\int \frac{x^4 + x^3}{x^2}\,dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + C$

b) $\int \frac{5}{3\sqrt{x}}\,dx = \frac{10}{3}\sqrt{x} + C$

40. a) $\int x(1 - x)^2\,dx = \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + C$

b) $\int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx = \int \left(x + \frac{1}{x} + 2\right) dx = \frac{x^2}{2} + \ln|x| + 2x + C$

41. a) $\int \left(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}\right) dx = \frac{2x\sqrt{x}}{3} + \frac{3x\sqrt[3]{x}}{4} + C$

b) $\int \left(\frac{6}{x^2} + 2x\right) dx = -\frac{6}{x} + x^2 + C$

42. a) $\int (1 - 3x^2)^2\,dx = \frac{9x^5}{5} - 2x^3 + x + C$

b) $\int \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 dx = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{x} + 2x + C$

43. a) $\int \frac{3x^2 - x}{4}\,dx = \frac{x^3}{4} - \frac{x^2}{8} + C'$

b) $\int \frac{5\,dx}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx = 15\sqrt[3]{x} + C$

44. a) $\int \left(x^2 + x + \frac{5}{x^2}\right) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - \frac{5}{x} + C$

b) $\int 6\sqrt{x}\,dx = 4x\sqrt{x} + C$

45. a) $\int (4x)^2\,dx = \frac{16x^3}{3} + C$

b) $\int -(1 + 2x)\,2\,dx = -2(x + x^2) + C$

46. a) $\int \frac{8x + 3}{x^4} dx = \frac{-4}{x^2} - \frac{1}{x^3} + C$

b) $\int \frac{dx}{2\sqrt{x + 2}} = \sqrt{x + 2} + C$

47. a) $\int \frac{dx}{\sqrt{x + 2}} = 2\sqrt{x + 2} + C$

b) $\int 2\cos x\,dx = 2\,\text{sen}\,x + C$

48. $\int \text{tg}^2 x\,dx = \text{tg}\,x - x + C$

49. a) $\int \frac{-2x}{x^2 + 1}\,dx = -\ln\left|x^2 + 1\right| + C$

b) $\int 2 + 2\sec^2 x - 5^x\,dx = 2x + 2\,\text{tg}\,x - \frac{5^x}{\ln 5} + C$

50. a) $\int \text{sen}^2 x \cos x\,dx = \frac{\text{sen}^3 x}{3} + C$

b) $\int \frac{x^2}{x^3 + 3}\,dx = \frac{1}{3}\ln\left|x^3 + 3\right| + C$

51. a) $\int x^2(x^3+3)^3\,dx = \frac{1}{3}\frac{(x^3+3)^4}{4} + C$

b) $\int x \text{ sen } (x^2+3)\,dx = -\frac{1}{2}\cos(x^2+3) + C$

52. a) $\int e^{\text{sen } x}\cdot \cos x\,dx = e^{\text{sen } x} + C$

b) $\int (3x^5+4x^2+3x-2)\,dx = \frac{1}{2}x^6 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{3x^2}{2} - 2x + C$

53. a) $\int \cos(x+4)\,dx = \text{sen }(x+4) + C$

b) $\int \frac{2x+3}{x^2+3x}dx = \ln|x^2+3x| + C$

54. a) $\int \frac{2^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\,dx = \frac{1}{\ln 2}2^{\sqrt{x}} + C$

b) $\int \sqrt[3]{x^2}\,dx = \int x^{\frac{2}{3}}\,dx = \frac{3x\sqrt[3]{x^2}}{5} + C$

55. a) $\int \frac{x^3+x^2+7x}{x}dx = \int (x^2+x+7)\,dx =$

$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 7x + C$

b) $\int \text{sen }(7x+1)\,dx = -\frac{1}{7}\cos(7x+1) + C$

56. a) $\int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)dx = \ln|x| - \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + C$

b) $\int e^{4x+2}\,dx = \frac{1}{4}e^{4x+2} + C$

57. a) $\int 2^{\frac{x}{2}}\,dx = \frac{2}{\ln 2}\cdot 2^{\frac{x}{2}} + C$

b) $\int \frac{x}{\cos^2(x^2)}dx = \frac{1}{2}\text{tg }(x^2) + C$

58. a) $\int \frac{7x}{2x^2+3}\,dx = \frac{7}{4}\ln|2x^2+3| + C$

b) $\int (3x^3+2x^2+7x-3)\,dx = \frac{3x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + \frac{7x^2}{2} - 3x + C$

59. a) $\int x^2\sqrt{x^3+2}\,dx = \frac{2}{9}\sqrt{(x^2+2)^3} + C =$

$= \frac{2}{9}(x^2+2)\sqrt{x^2+2} + C$

b) $\int \frac{dx}{\sqrt{7x+4}} = \frac{2}{7}\sqrt{7x+4} + C$

60. a) $\int x^2 \text{ sen } x^3\,dx = \frac{-1}{3}\cos x^3 + C$

b) $\int x\sqrt{6x^2+1}\,dx = \frac{1}{18}(6x^2+1)\sqrt{(6x^2+1)} + C$

61. a) $\int \frac{x-3}{\sqrt{x^2-6x+2}}\,dx = \sqrt{x^2-6x+2} + C$

b) $\int (2x-5)^3\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{(2x-5)^4}{4} + C = \frac{1}{8}(2x-5)^4 + C$

62. a) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx = 3\sqrt[3]{x} + C$

b) $\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \frac{(\ln x)^2}{2} + C$

63. $f(x) = 2x^3 - \frac{3}{2}x^2$

64. $C = \frac{1}{2}$

65. a) V b) V c) V d) F

66. $F(x) = 2x\sqrt{x} + \frac{8}{x} - \frac{9}{4}$

67. $F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + \frac{7}{6}$

68. $F(x) = x^3 + \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{1}{2}$

69. $F(x) = \text{tg } x - \cos x + \frac{\sqrt{2}-2}{2}$

70. $1{,}28 \le A \le 2{,}08$ con una acotación $\varepsilon = 0{,}4$

71. a) $-\frac{3}{2}$ b) $\frac{2}{3}$ c) 2 d) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{2}{5}$ f) $\frac{32}{3}$

72. a) $\int_{-2}^{2} x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{2} = \left[\frac{8}{3} - \left(\frac{-8}{3}\right)\right] = \frac{16}{3}$

$\int_{-2}^{1} x^2\,dx + \int_{1}^{2} x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{1} + \left[\frac{x^3}{3}\right]_{1}^{2} =$

$= \left[\frac{1}{3} + \frac{8}{3}\right] + \left[\frac{8}{3} - \frac{1}{3}\right] = \frac{16}{3}$

La igualdad es cierta.

b) $\int_0^2 (x+2)^2\, dx = \left[\dfrac{(x+2)^3}{3}\right]_0^2 = \dfrac{64}{3}$

$-\int_2^0 (x+2)^2\, dx = -\left[\dfrac{(x+2)^3}{3}\right]_2^0 = \dfrac{64}{3}$

73. $A = \int_0^1 f(x)\, dx - \int_1^2 f(x)\, dx = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2}$ *u.a.*

74. $\ln 2$

75. $h(x) = -x - 2x + x^2 = x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = 3$

$A = -\int_0^3 (x^2 - 3x) = \dfrac{9}{2}$ *u.a.*

76. $\dfrac{\pi - 3}{2}$

77. $f'(x) = (x-2)(3x+4) = 0 \quad x = 2,\ x = -\dfrac{4}{3}$

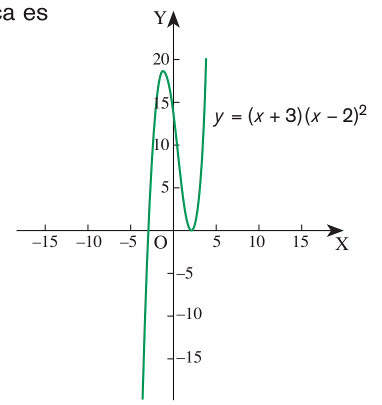
Signo de $f'(x)$

$$\begin{array}{ccccc} + & -\frac{4}{3} & - & 2 & + \\ \nearrow & & \searrow & & \nearrow \end{array}$$

creciente $\left]-\infty, -\dfrac{4}{3}\right[\cup\ ]2, +\infty[$

decreciente $\left]-\dfrac{4}{3}, 2\right[$

La gráfica es



$A = \int_{-3}^2 (x+3)(x-2)^2\, dx = \int_{-3}^2 (x^3 - x^2 - 8x + 12)\, dx = \dfrac{625}{12}$ *u.a.*

78. $\dfrac{3}{2}$

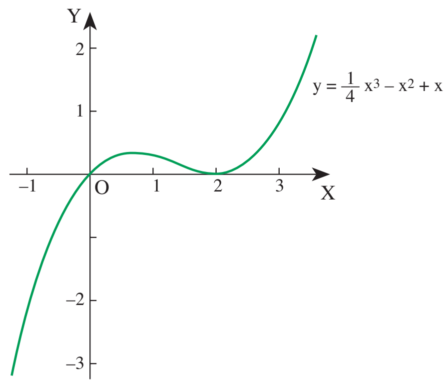
79. $\dfrac{137}{4}$

80. 32

81. $A = -\int_1^5 (x^2 - 6x + 5)\, dx = \dfrac{32}{3}$ *u.a.*

82. a) $y = x^2 - 2x - 3$ b) $\dfrac{11}{3}$

83.



Si derivamos $y' = \dfrac{3}{4}x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{2}{3}$ y $x = 2$

Estudiando el signo de y'

$$\begin{array}{ccccc} + & \frac{2}{3} & - & 2 & + \\ \nearrow & & \searrow & & \nearrow \end{array}$$

Hay un máximo en $x = \dfrac{2}{3}$ y un mínimo en $x = 2$.

Corta la función en los puntos $x = 0$ y $x = 2$ al eje OX.

$A = \int_0^2 \left(\dfrac{1}{4}x^3 - x^2 + x\right) dx = \dfrac{1}{3}\ \text{km}^2$

84. $\dfrac{4}{3}$

85. a) $F(x) = x^4 + 5x^2 + 8x + 6$ b) 38

86. $\int_{-1}^1 (x+1)\, dx + \int_1^2 (-2x+4)\, dx =$

$= \left[\dfrac{x^2}{2} + x\right]_{-1}^1 + \left[-x^2 + 4x\right]_1^2 = 3$ u.a.

87. $\int_{-2}^{-1} (3x+6)\, dx + \int_{-1}^1 (2x^2+1)\, dx +$

$+\int_1^3 3\, dx + \int_3^6 (-x+6)\, dx = \dfrac{46}{3}$ *u.a.*

88. $\int_0^3 x\, dx + \int_3^9 \dfrac{9}{x}\, dx \simeq 14{,}39$ u.s.

89. $\int_0^2 (-x^2+9)\, dx - \int_0^2 \dfrac{5}{2}x\, dx = \dfrac{31}{3}$ *u.a.*

90. $A = \int_{-2}^5 (x^2 + 2x + 1)\, dx = \dfrac{217}{3}$ u.a.

91. $A = \int_0^2 (-x^2 + 2x + 1)\, dx = \frac{10}{3}\ \text{m}^2$

92. $h(x) = 2x^2 - 2x - 4$

$2x^2 - 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2 \quad x = -1$

signo

+	−1	−	2	+

$A = -\int_{-1}^{2} (2x^2 - 2x - 4)\, dx = 9\ u.a.$

93. $h(x) = x^2 + 2x + 1 = 0 \qquad x = -1$

$h(x)$ es siempre positivo, luego

$A = \int_0^1 (x^2 + 2x + 1)\, dx = \frac{7}{3}\ u.a.$

94. $A = \int_1^2 (x^2 - x + 1)\, dx = \frac{11}{6}\ u.a.$

Apéndice

1. $\frac{\ln (x^2 + 9)}{2} + c$

2. $\frac{\text{tg } (3x^2 + 2x)}{2} + c$

3. $\frac{\ln (2x^3 + 9)}{2} + c$

4. $\ln (\text{sen } x) + c$

5. $\frac{5^{2x^3+1}}{6 \ln 5} + c$

6. $-\cos e^x + c$

7. $3^x \left(\frac{x}{\ln 3} - \frac{1}{\ln^2 x} \right) + c$

8. $x \ln x - x + c$

9. $(2 - x^2) \cos x + 2x \text{ sen } x + c$

10. $\frac{x^4 \ln x}{4} - \frac{x^4}{16} + c$

11. $2 \ln(x - 3) + \ln(x - 2) - \ln(x - 1) + c$

12. $\frac{1}{2} \ln \left(\frac{x - 1}{x + 1} \right) + \frac{x^3}{3} + c$

13. $-\frac{1}{2} \ln(2x + 1) + \frac{1}{2} \ln(x - 3)^2 + c$

14. $-\frac{7}{9} \ln(x + 5) + \frac{5}{9} \ln(x + 2) + \frac{2}{9} \ln(x - 1) + c$

15. $\frac{6}{5} \ln(x - 3) + \frac{4}{5} \ln(x + 2) + c$

16. $\ln(x - 4) - \ln(x - 1) + c$

17. $3 \ln(x + 2) - \frac{3x}{x + 2} + c$

18. $-2 \ln(x + 3) - \frac{24x + 55}{2(x + 3)^2} + c$

Tema 10 EXPERIMENTOS ALEATORIOS Y PROBABILIDAD

1. a) 8

b) E = {*ccc*, *cc*+, *c*+*c*, +*cc*, *c*++, +*c*+, ++*c*, +++}

c) "No salir cara" ó "salir tres cruces: +++"

d) Ejemplos: "salir tres caras: *ccc*" y "salir sólo una cara"

2. a) {2, 3, 4, 6, 8} b) {6} c) {4, 8}

d) {2, 6} e) {2, 3, 4, 8} f) ∅

3. a)

Nº películas	1	2	3	4	5	6	Total
Nº alumnos	4	2	6	5	7	1	25

b) $\frac{7}{25}$

4. a) $\frac{1}{4}$; b) $\frac{15}{16}$; c) $\frac{5}{16}$; d) $\frac{3}{8}$; e) $\frac{11}{16}$

5. $P = \frac{1}{5}$

6. a) $\frac{1}{9}$; b) $\frac{1}{6}$; c) $\frac{11}{12}$; d) $\frac{1}{6}$; e) $\frac{1}{6}$; f) 0

7. a) $\frac{8}{29}$; b) $\frac{91}{435}$; c) $\frac{112}{435}$

8. a) $\frac{1}{16} = 0{,}0625$ b) $\frac{1}{100} = 0{,}01$

c) $\frac{1}{250} = 0{,}004$ d) $\frac{1}{100} = 0{,}001$

9. $P(S) = \frac{1}{10}$; $P(F) = \frac{3}{10}$; $P(S \cup F) = \frac{2}{5}$; $P(S \cup B) = \frac{13}{40}$

10. $P(M) = \frac{4}{9}$; $P(V) = \frac{11}{36}$; $P(R) = 1$

11. $\frac{3}{8}$

12. $P(\text{rey}) = \frac{4}{40} = \frac{1}{10}$

a) $P(\text{rey/as}) = 0$ b) $P(\text{rey/as}) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$

c) $P(\text{rey/espada}) = \frac{1}{10}$

d) $P(\text{rey/espada}) = \frac{3}{30} = \frac{1}{10}$

13. a) $P(2O) = \frac{3}{52}$; $P(2NO) = \frac{3}{4}$

b) $P(2O) = \frac{1}{16}$; $P(2NO) = \frac{9}{16}$

En ambos casos falta el suceso "extraer una carta ya pro-
que sea de oros y la otra que no lo sea", cu
babilidad es: en a) $\frac{5}{6}$; en b) $\frac{3}{8}$.

14. Son dependientes las parejas a), b) y c) e independientes la d).

15. $P = 0{,}55 \cdot 0{,}12 + 0{,}45 \cdot 0{,}23 = 0{,}1695$

16. $\frac{3}{5}$

17. $P(A/D) = \frac{15}{37}$; $P(B/D) = \frac{12}{37}$; $P(C/D) = \frac{10}{37}$

18. a) $\frac{3}{7}$; b) $\frac{4}{7}$

19. a) $\frac{2}{15}$; b) $\frac{1}{2}$

c) $P(A/Not) = \frac{1}{3}$; $P(B/Not) = \frac{2}{3}$; $P(C/Not) = 0$

20. a) $\frac{9}{17}$; b) 0,18; c) $\frac{1}{9}$; d) 0,18

21. a) $E = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

b) 11

c) «sumar 8 o más»

d) por ejemplo «sumar 2»

22. a) 0,82; b) $0{,}\widehat{1}$

23. 0,0416

24. a) 12; b) $\frac{1}{12}$

25. a) $P(A \cap B) = 0{,}3$; $P(B) = 0{,}7$.

Como $0{,}3 \neq 0{,}7 \times 0{,}4$ los sucesos no son independientes.

b) 0,5

26. a) $\frac{4}{25}$; b) $\frac{1}{5}$; c) $\frac{6}{25}$; d) $\frac{1}{5}$

27. a) 0,2116; b) 0,7884

28. a) $\frac{1}{256}$; b) $\frac{21}{9139}$

29. a) 0,0060466; b) 0,9939533; c) 0,0001048

30. $\frac{7591}{8085}$

31. a) $\frac{2}{3}$; b) $\frac{1}{2}$; c) $\frac{2}{3}$

32. $\frac{12}{81}$

33. $\simeq$ 0,4014

34. a) $\frac{7}{15}$; b) $\frac{1}{15}$; c) $\frac{7}{30}$; d) $\frac{7}{15}$

35. a) 0,5; b) 0,23; c) 0,3478

36. 0,67 ó 67%

37. 0,4849

38. a) $\frac{207}{250}$; b) $\frac{41}{250}$; c) $\frac{18}{41}$

39. 0,25

40. 0,77

41. a) 0,25; b) 0,3542; c) 0,3226

42. a) $\frac{1}{3}$

b) $P(S_1) = P(S_2) = \frac{2}{3}$ $\quad$ $P(S_1 \cap S_2) = \frac{1}{3} \neq \frac{2}{3} \times \frac{2}{3}$

$\rightarrow$ no son independientes.

43. a) 0,463; b) 0,207

44. a) $\frac{1}{10}$; b) $\frac{9}{10}$; c) $\frac{7}{10}$; d) $\frac{3}{10}$

45. a) $P(\text{asistir a clase}) = \frac{7}{10}$;

$P(\text{no asistir a clase y aprobar}) = \frac{9}{200}$

$P(\text{aprobar}) = \frac{121}{200}$

b) $\frac{112}{121}$

46. 0,075

47. 0,429

48. a) 0,38; b) 0,677

49. a) $\frac{1}{3}$; b) $\frac{3}{4}$

50. a) 0,000997 b) 0,996003
c) 0,000003 d) 0,999997

51. a) $\frac{1}{10}$; b) $\frac{1}{100}$; c) $\frac{1}{10}$

52. a) $E = \{ccc, cc+, c+c, +cc, c++, +c+, ++c, +++\}$

b) $\frac{2}{9}$

53. a) 0,64; b) 0,66; c)0,03

54. a) 0,98; b) 0,18

55. 0,7598

56. a) 0,36; b) 0,28

57. a) $\frac{1}{4}$; b) $\frac{7}{30}$

58. a) $\frac{5}{6}$; b) $\frac{3}{10}$

59. a) $P(A) = 0{,}22$ b) $P(B) = 0{,}51$
c) $P(C) = 0{,}27$ d) 0,73

60. $P(B) = 0{,}5$; $P(A/B) = 0{,}4$; $P(A \cap \bar{B}) = 0{,}4$;
$P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 0{,}8$

61. a) 0,25; b) $\frac{77}{120}$; c) $\frac{20}{77}$

62. a) 18%; b) $\frac{5}{9}$

63. a) 0,2; b) 0,1; c) 0,5

64. a) 0,39; b) 0,246

65. a) S = "*acertar*"; N = "*fallar*":
$E = \{SSS, SSN, SNS, NSS, SNN, NSN, NNS, NNN\}$

b) $\frac{31}{72}$; c) $\frac{42}{72}$

66. a) $\frac{1}{6}$; b) $\frac{5}{6}$

Tema 11 INFERENCIA ESTADÍSTICA (I). MUESTREO Y ESTADÍSTICOS MUESTRALES

1. El porcentaje de paro en la muestra, esto es, el 13,91 %.

2. Universo: personas de 18 y más años con derecho a voto (personas incluídas en el Censo Electoral).

Población: votos emitidos en la consulta electoral.

Censo: recuento exhaustivo de los votos depositados en las urnas, materializado en las actas que se levantan por los miembros de las mesas electorales e interventores de los partidos.

Muestra: recuento parcial de los votos emitidos, conocido a través de las respuestas de una muestra de votantes conforme salen del colegio electoral tras depositar su voto. Estas encuestas reciben el nombre de *encuestas a pie de urna* y sus resultados se facilitan como avance a la hora de cierre de las votaciones.

3. La ordenación alfabética, respecto la característica investigada, puede suponerse razonablemente aleatoria: el hecho de llamarse Pérez no implica tener una determinada opinión sobre el partido.

Como además la elección del primer elemento de la muestra es totalmente aleatoria –elección del socio asociado a un número elegido al azar entre el 1 y el 50– queda asegurada la aleatoriedad.

4. El *sesgo de muestreo*: el que el tamaño de las muestras sea igual no asegura que sus elementos coincidan.

5. La muestra facilitada por la compañía es sólo de conductoras. Estas suelen utilizar más el cinturón de seguridad, pues es conocido que son más prudentes que los conductores. Por ello, los resultados obtenidos con esa muestra hablarían de un grado de cumplimiento normativo superior al real. La muestra está afectada por un *sesgo de selección*.

6. *Sesgo de selección*. Si restrinjo mis resultados a las respuestas de los alumnos que localizo en sus casas de 18 a 19 horas, desconoceré las respuestas de los que a esa hora –habitual para el trabajo en casa de los alumnos de un Instituto– están fuera dedicados a otras actividades. Parte de estos últimos serán los que dedican poco tiempo a estudiar, por lo que los resultados obtenidos a partir de la muestra proporcionarán un número de horas dedicadas al estudio superior a la real.

7. Por ejemplo, entrando en la Tabla de Números Aleatorios de la pág. 262 por la parte superior de su primera columna, si anotamos los cuatro primeros dígitos de cada uno de sus números, obtenemos como unidades seleccionadas las asociadas a los siguientes números:

4852, 3999, 2782, 347, 5136, 1877, 3999, 4475, 1005 y 3569

Se admite la repetición del elemento 3999 pues la muestra es *con reposición*.

Observemos que también podría haberse obtenido la muestra solicitada entrando a la tabla por cualquier otro de sus elementos.

8. Los estratos deben estar formados por unidades de comportamiento parecido respecto la característica de interés y, a su vez, deben ser diferentes entre ellos. Ante la característica «consumo de gasolina», parece conveniente estratificar atendiendo a la tipología del vehículo –distinguiendo entre motos-motocicletas, automóviles, furgonetas y camiones–, y dentro de cada uno de estos tipos distinguir también por cilindrada (en el caso de las motos-motocicletas y automóviles) y por capacidad de carga (en el caso de las furgonetas y los camiones).

9. a) Si el muestreo lo realizo en *una etapa*, se selecciona al azar una muestra de viviendas como conglomerados de personas. Seleccionadas aquéllas se pregunta por las características (edad, sexo, tipo de estudios, etc.) de todas las personas que en ella cursan estudios.

b) Si el muestreo es *bietápico*, seleccionada una muestra de viviendas como conglomerados de personas, se seleccionan en una segunda etapa, y dentro de cada una de las viviendas de la muestra, a una o algunas de las personas que estudian. Sólo a estas últimas personas seleccionadas se les pregunta por sus características.

10. a) $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = \dfrac{1000}{4} = 250$

$$f_1 = \frac{250}{1000} = 0{,}25; \qquad f_2 = \frac{250}{3000} = 0{,}083$$

$$f_3 = \frac{250}{6000} = 0{,}0416; \qquad f_4 = \frac{250}{15000} = 0{,}016$$

b) $n_1 = 1000 \times \dfrac{1000}{1000 + 3000 + 6000 + 15000} =$

$$= 1000 \times \frac{1000}{25000} = 40$$

$$n_2 = 1000 \times \frac{3000}{25000} = 120$$

$$n_3 = 1000 \times \frac{6000}{25000} = 240$$

$$n_4 = 1000 \times \frac{15000}{25000} = 600$$

$f_1 = \dfrac{40}{1000} = 0{,}04; \qquad f_2 = \dfrac{120}{3000} = 0{,}04$

$f_3 = \dfrac{240}{6000} = 0{,}04; \qquad f_4 = \dfrac{600}{15000} = 0{,}04$

11. $\overline{x} = \dfrac{134+256+207+249+301}{5} =$

$= 249{,}4$ decenas de euros

$s^2 = \dfrac{(134-249{,}4)^2 + (256-249{,}4)^2 +}{5}$

$\dfrac{+(207-249{,}4)^2 + (349-249{,}4)^2 + (301-249{,}4)^2}{5} =$

$= 5548{,}24$ *decenas de euros*^{2}

12. Como la proporción muestral facilita estimaciones de la proporción poblacional, podremos suponer que el 31,4% de españoles están satisfechos con la programación de las televisiones públicas.

13. Cualquier función de los valores de una muestra es un estadístico. Además, es también un estimador del total poblacional, pues el factor $\frac{N}{n}$ que multiplica al sumatorio «eleva» el total muestral para acercarlo al total poblacional. Y así, con los datos del ejemplo 25 resultaría:

$$\frac{N}{n} \times \sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{11}{3} \times 31 = 113{,}6$$

que está más cercano al total poblacional (108), que el total muestral (31).

14. $VR_{10,4} = 10^4 = 10000$

15. $\mu = \dfrac{1+2+3}{3} = 2$

$$\sigma^2 = \frac{(1-2)^2 + (2-2)^2 + (3-2)^2}{3} = 0,$$

Las $3^2 = 9$ muestras con reposición de tamaño 2 posibles son:

(1,1) (1,2) (1,3) (2,1) (2,2) (2,3) (3,1) (3,2) (3,3)

La distribución en el muestreo de la media muestral es la siguiente:

$\overline{x}$	1	1,5	2	2,5	3
$P_{\overline{x}} = P(\overline{x} = x)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

a partir de la que deducimos

$$\mu_{\overline{x}} = 1 \times \frac{1}{9} + 1{,}5 \times \frac{2}{9} + 2 \times \frac{3}{9} + 2{,}5 \times \frac{2}{9} + 3 \times \frac{1}{9} = 2 = \mu$$

$$\sigma^2_{\overline{x}} = (1-2)^2 \times \frac{1}{9} + (1{,}5-2)^2 \times \frac{2}{9} +$$
$$+ (2-2)^2 \times \frac{3}{9} + (2{,}5-2)^2 \times \frac{2}{9} +$$
$$+ (3-2)^2 \times \frac{1}{9} = 0{,}\widehat{3} = \frac{0{,}\widehat{6}}{2} = \frac{\sigma^2}{n}$$

16. Siendo $\mu_p = \pi = 0{,}25$ y $n = 16$, el número esperado de industrias en la muestra de tamaño 16 dedicadas a la manipulación de la madera será igual a $0{,}25 \times 16 = 4$.

17. a) El tamaño de la muestra es:

$n = f \times N = 0{,}05 \times 100 = 50$ páginas

En una tabla de números aleatorios elegiría los primeros 50 números comprendidos entre 1 y 1000 (aunque estuvieran repetidos) y que constituirían la muestra de 50 páginas del libro.

b) El factor de elevación de la muestra es:

$$f_e = \frac{N}{n} = \frac{1000}{50} = 20$$

Elegiría al azar un número comprendido entre 1 y 20 como arranque aleatorio. Los elementos de la muestra serían los asociados a ese arranque aleatorio más incrementos sucesivos de 20 unidades, hasta superar las 1000 páginas del libro.

Este segundo procedimiento es más sencillo, en cuanto que tan sólo es necesario extraer una vez un número al azar (el arranque aleatorio). Sin embargo, es necesario que el listado de unidades del que se extrae la muestra no tenga ninguna ordenación, lo que implicaría la falta de aleatoriedad de la muestra sistemática. En nuestro caso puede aceptarse esta suposición, pues sería muy raro que, precisamente, los dibujos estuvieran concentrados, por ejemplo, en las páginas terminadas en 0, ó que sólo estuvieran en el tema IV, etc.

18. La opinión que recogen esos programas de televisión o de radio es la de las personas que, en esos momentos, son telespectadores o radioyentes y que, además, poseen teléfono. Por lo tanto, se trata de personas que están interesados en el programa o en el tema propuesto por el mismo. Quedan fuera todas aquellas personas que no disponen de teléfono –por tanto, de poder adquisitivo muy bajo–, y no seguidores al programa por diversos motivos: falta de interés, trabajo, desconocimiento, rechazo, etc. Hay, por tanto, muchos sesgos de selección que invalidan la representatividad de las opiniones expuestas en ese tipo de programas. Además, la falta de colaboración deliberada de ciertos espectadores u oyentes puede insinuar la existencia de sesgos de no respuesta.

19. Se trata de un sesgo derivado de la mentira deliberada al dar la respuesta. La calidad de los resultados de una encuesta están, en último término, ligados a la veracidad de las contestaciones recogidas. Un sociólogo daría interesantes interpretaciones a la mentira deliberada en las encuestas electorales.

20. En una misma vivienda suelen vivir unidades familiares. Por ello, es lógico pensar que si ha habido un traslado reciente de alguno de sus miembros es porque ha habido un traslado familiar que afecta a todos ellos. El diseño propuesto está claramente sesgado cuando el objetivo es determinar el número de *personas* que han variado su residencia en el último año. Sin embargo, y bajo ciertas correcciones, la investigación podría ser válida si el objetivo es conocer el número de *familias* que han cambiado de residencia.

21. La muestra no es aleatoria, puesto que estará formada por aquellos residuos cuya densidad los ha colocado, precisamente, en el punto medio del contenedor, por lo que no conoceré las características físico-químicas de los residuos situados más arriba o más abajo.

Una muestra aleatoria puede extraerse de diferentes maneras. Una de ellas consistiría en elegir aleatoriamente una profundidad entre 0 y 2 metros, para así sacar una muestra de residuos a esa profundidad. La elección aleatoria de la profundidad hace que la muestra del residuo también lo sea.

Pero, en este caso de graduación de residuos atendiendo a su densidad, parece mejor diseños estratificados o sistemáticos. Y así, podemos considerar la existencia de un número apropiado de estratos en el contenedor definidos por su profundidad. Por ejemplo: estrato 1 constituido por los residuos situados entre 0 y 20 cm de profundidad; estrato 2, constituido por los residuos situados entre los 20 y 40 cm de profundidad, etc. Bastará obtener muestras a profundidades aleatorias dentro de cada uno de los estratos, para así disponer de una muestra aleatoria estratificada.

22. Existe un sesgo de selección: la muestra de clientes que pagan con tarjeta tienen, lógicamente, comportamientos diferentes respecto los que no la poseen. Por ejemplo, las compras pagadas al contado suelen ser de menor cuantía que las pagadas con tarjeta; o suelen ser de no residentes en la ciudad, que no disponen de la tarjeta de compra, y cuya estructura de consumo difiere de la de los residentes, etc.

23. Como un estadístico es cualquier función definida sobre los valores de las unidades de una muestra, la expresión propuesta sí es un estadístico. Sin embargo, su misma expresión, muy alejada de la expresión de una media, da a entender que no tiene interés por acercarse al valor de la media poblacional. Por ello, no se trata de un estimador. Esta afirmación puede verse afianzada calculando el valor que toma el estadístico sobre los elementos de cualquiera de las muestras utilizadas en ejercicios anteriores.

24. $\bar{x} = \dfrac{6+4+7+5+9}{5} = 6{,}2$

25. $p = \dfrac{0+0+1+0+1+0+0+0+1+0+1+1+0+0+1}{15} = 0{,}4$

26. Los cuatro dígitos correspondientes a las unidades de millar, centenas, decenas y unidades de los números afortunados con el primer premio de la lotería, puestos uno a continuación de otro, irían formando una tabla de números aleatorios. Para formar la tabla, excluimos el dígito correspondiente a las decenas de millar, dado que el número total de billetes de ese sorteo es de 60 000 (números desde el 00000 hasta el 59 999, ambos inclusive), por lo que no pueden salir los dígitos 6, 7, 8 y 9.

27. $\mu_{\bar{x}} = \mu = 1{,}72$ m

$\sigma^2_{\bar{x}} = \dfrac{\sigma^2}{n} = \dfrac{0{,}29^2}{64} = 0{,}001314 \text{ m}^2$

28. Si se desea conocer la opinión de ambos sexos, y a fin de garantizar la presencia de ambos en la muestra, diseñaríamos una muestra estratificada en la que cada sexo constituiría un estrato. La muestra estaría formada por el mismo número de chicos que de chicas, si la afijación es uniforme, o con tamaños proporcionales al tamaño de los sexos, si la afijación es proporcional.

29. La selección final de las familias se ha hecho en tres etapas. Las unidades de primera etapa son provincias; las de segunda etapa, municipios; las de tercera etapa, las familias finalmente encuestadas. Se trata, pues, de un muestreo trietápico.

30. a) $\mu = 6$

b) $\sigma = 3{,}2863353$

c) Las $5^2 = 25$ posibles muestras con reposición de tamaño 2 son las siguientes:

(2,2) (2,3) (2,6) (2,8) (2,11)
(3,2) (3,3) (3,6) (3,8) (3,11)
(6,2) (6,3) (6,6) (6,8) (6,11)
(8,2) (8,3) (8,6) (8,8) (8,11)
(11,2) (11,3) (11,6) (11,8) (11,11)

d) $\mu_{\bar{x}} = \mu = 6$

e) $\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\dfrac{\sigma^2}{n}} = \dfrac{3{,}286333}{\sqrt{2}} = 2{,}32379$

31. a) $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = n_5 =$

$= \dfrac{0{,}05 \times (500 + 860 + 1200 + 700 + 740)}{5} =$

$= 40$ libros

b) $n_1 = 200 \times \dfrac{500}{4000} = 25$ libros

$n_2 = 200 \times \dfrac{860}{4000} = 43$ libros

$n_3 = 200 \times \dfrac{1200}{4000} = 60$ libros

$n_4 = 200 \times \dfrac{700}{4000} = 35$ libros

$n_5 = 200 \times \dfrac{740}{4000} = 37$ libros

32. a) $n_1 = n_6 = n_5 = n_4 = \dfrac{10000}{4} = 2500$

b) $n_1 = 10000 \times \dfrac{100000}{100000 + 175000 + 175000 + 50000} =$

$= 10000 \times \dfrac{100000}{500000} = 2000$

$n_2 = n_3 = 10000 \times \dfrac{175000}{500000} = 3500$

$n_4 = 10000 \times \dfrac{50000}{500000} = 1000$

33. $N_1 = \dfrac{n_1}{f_1} = \dfrac{100}{\frac{1}{10}} = 1000$; $\quad N_2 = \dfrac{300}{\frac{1}{10}} = 3000$

$N_3 = \dfrac{600}{\frac{1}{10}} = 6000$

34. a) Sólo es cierta la afirmación cuando los tamaños de los estratos son iguales.

b) Falso, la afijación proporcional proporciona iguales fracciones de muestreo en los estratos.

35. a) Si, pues de las 100 entrevistas, 48 serán a hombres y 52 a mujeres, y de éstas, 26 (el 50%) a mujeres entre 25 y 50 años de edad.

b) Sí existe un problema inicial. El producto –un pintalabios– es usado únicamente por mujeres. Al entrevistador habría que haberle indicado que sólo entrevistara a mujeres, por lo que el dato del 48% de hombres es irrelevante y puede inducir a error. Al haber respetado las cuotas, el entrevistador habrá preguntado a 52 mujeres, por lo que el resultado debería recalcularse así:

$$\frac{12}{52} \times 100 = 23\%$$

que es el porcentaje de mujeres que no utilizan ese pintalabios.

Tema 12 INFERENCIA ESTADÍSTICA (II). ESTIMACION PUNTUAL Y POR INTERVALOS

1. a) Estimación puntual: estimar el valor de un parámetro poblacional

b) Estimación por intervalos: los límites mínimo y máximo son los extremos del intervalo

c) Contrastación paramétrica: decidir sobre un posible porcentaje de votos

d) Contraste no parámetrico: decidir si la edad al adquirir un coche y la marca de éste son independientes

2. $N(15,\ 0{,}05)$

3. $N(0{,}12\ ,\ 0{,}0108)$

4. $N(10, \sqrt{8})$

5. Confiamos que el intervalo $[3{,}15 - 0{,}25\ ,\ 3{,}15 + 0{,}25] = [2{,}90\ ,\ 3{,}40]$ sea uno de los 90% de intervalos construidos con una muestra de 1000 familias, que contienen al verdadero tamaño medio de las mismas.

6. Al solicitar unos límites mínimo y máximo, se está indicando una estimación por intervalo.

7. $n = \dfrac{z^2_{\alpha/2} \cdot p \cdot (1 - p)}{(\text{error})^2} = \dfrac{2^2 \times 0{,}313 \times (1 - 0{,}313)}{0{,}02^2} =$

$= 2150{,}31$ esto es, 2151 entrevistas.

8. El intervalo obtenido es [5,83 , 6,37]: confiamos que ese intervalo sea uno de los 95% de intervalos construidos con una muestra de 250 alumnos, que contienen a la verdadera nota media del ejercicio de Matemáticas de selectividad. La población está constituida por las notas de todos los alumnos presentados al ejercicio de Matemáticas en esa convocatoria de selectividad. La varianza poblacional desconocida se ha sustituido por la varianza muestral, al ser el tamaño de la muestra suficientemente grande.

9. $\bar{x} = N\left(\mu, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(\hat{\mu}, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(4, \dfrac{5}{\sqrt{9}}\right) = N\left(4, \dfrac{5}{3}\right)$

10. $n = 129{,}23 \rightarrow 130$ datos

11. $n = 384{,}16 \Rightarrow 385$ familias

12. a) $n = 839{,}48 \rightarrow 840$ personas

b) $\left[0{,}35 - 2{,}58\sqrt{\dfrac{0{,}35 \times 0{,}65}{64}},\ 0{,}35 + \right.$

$\left. + 2{,}58\sqrt{\dfrac{0{,}35 \times 0{,}65}{64}}\right] = [0{,}1962,\ 0{,}5038]$

13. $\left[\bar{x} - z_{\alpha/2}\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + z_{\alpha/2}\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] =$

$= \left[1 - 1{,}645 \times \dfrac{0{,}05}{\sqrt{25}},\ 1 + 1{,}645 \times \dfrac{0{,}05}{\sqrt{25}}\right] =$

$= [0{,}98355,\ 1{,}01645]$ Kg.

14. a) $n_{\text{máximo}} = \dfrac{z^2_{\alpha/2}\cdot 0{,}25}{(\text{error})^2} = \dfrac{1{,}645^2 \times 0{,}25}{0{,}03^2} = 751{,}67$

esto es, 752 unidades. Se ha supuesto que $p = 1 - p = 0{,}5$

b) $n = \dfrac{z^2_{\alpha/2}\cdot p\cdot(1-p)}{(\text{error})^2} = \dfrac{1{,}645^2 \times 0{,}25 \times (1 - 0{,}25)}{0{,}03^2}$

$= 563{,}75$ esto es, 564 unidades

15. $n = \dfrac{z^2_{\alpha/2}\cdot\sigma^2}{(\text{error})^2} = \dfrac{2^2 \times 5}{0{,}2^2} = 500$ unidades

16. $\left[p - z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\dfrac{p\cdot(1-p)}{n}},\ p + z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\dfrac{p\cdot(1-p)}{n}}\right] =$

$= \left[\dfrac{456}{1200} - 1{,}96\cdot\sqrt{\dfrac{\frac{456}{1200}\cdot\left(1 - \frac{456}{1200}\right)}{1200}},\right.$

$\left.\dfrac{456}{1200} + 1{,}96\cdot\sqrt{\dfrac{\frac{456}{1200}\cdot\left(1 - \frac{456}{1200}\right)}{1200}}\right] =$

$= [0{,}3525,\ 0{,}4075]$

17. Para una confianza del 99%:

$n = \dfrac{z^2_{\alpha/2}\cdot\sigma^2}{(\text{error})^2} = \dfrac{2{,}58^2 \times 10^2}{1^2} = 665{,}64$

esto es, 666 habitantes

Para una confianza del 95%:

$n = \dfrac{z^2_{\alpha/2}\cdot\sigma^2}{(\text{error})^2} = \dfrac{1{,}96^2 \times 10^2}{1^2} = 384{,}16$

esto es, 385 habitantes

Obsérvese que conforme disminuye la confianza también disminuye el tamaño muestral.

18. Como el tamaño muestral es grande puede aceptarse la normalidad de la media muestral:

$\left[\bar{x} - z_{\alpha/2}\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + z_{\alpha/2}\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] =$

$= \left[68 - 2{,}58 \times \dfrac{9}{\sqrt{100}},\ 68 + 2{,}58 \times \dfrac{9}{\sqrt{100}}\right] =$

$= [65{,}678,\ 70{,}322]$ pulsaciones

19. $n = \dfrac{z^2_{\alpha/2}\cdot\sigma^2}{(\text{error})^2} = \dfrac{1{,}96^2 \times 250^2}{40^2} = 150{,}06$

esto es, 151 lámparas

20. $\left[\bar{x} - z_{\alpha/2}\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + z_{\alpha/2}\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] =$

$= \left[156 - 2 \times \dfrac{25}{\sqrt{64}},\ 156 + 2 \times \dfrac{25}{\sqrt{64}}\right] =$

$= [149{,}75,\ 162{,}25]$ semanas

21. a) Error $= \pm\, 6{,}25$

$n = \dfrac{z^2_{\alpha/2}\cdot\sigma^2}{(\text{error})^2} = \dfrac{1{,}645^2 \times 25^2}{6{,}25^2} = 43{,}29$

esto es, 44 clientes

b) $n = \dfrac{z^2_{\alpha/2}\cdot\sigma^2}{(\text{error})^2} = \dfrac{2^2 \times 25^2}{10^2} = 25$ clientes

22. $\left[p - z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\dfrac{p\cdot(1-p)}{n}},\ p + z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\dfrac{p\cdot(1-p)}{n}}\right] =$

$= \left[\dfrac{140}{324} - 1{,}96\cdot\sqrt{\dfrac{\frac{140}{324}\cdot\left(1 - \frac{140}{324}\right)}{324}},\right.$

$\left.\dfrac{140}{324} + 1{,}96\cdot\sqrt{\dfrac{\frac{140}{324}\cdot\left(1 - \frac{140}{324}\right)}{321}}\right] =$

$= [0{,}3782,\ 0{,}4860]$

23. No, pues $n = \dfrac{1{,}96^2 \times 0{,}25}{0{,}02^2} = 2401 > 100$

24. $P(p < 0{,}6) = P\left[N\left(0{,}7,\ \dfrac{\sqrt{0{,}7 \times 0{,}3}}{\sqrt{64}} = 0{,}05728\right) < 0{,}6\right] =$

$= P\left[Z < \dfrac{0{,}6 - 0{,}7}{0{,}05728} = -1{,}75\right] = 0{,}0401$

25. $\left[\dfrac{75}{350} \pm 1{,}96\sqrt{\dfrac{\frac{75}{350} \times \left(1 - \frac{75}{350}\right)}{350}}\right] = [0{,}1713,\ 0{,}2573]$

26. $n = 0{,}15 \times 800 = 120$ alumnos

a) $p = \dfrac{120 - 24}{120} = 0{,}8$

b) error $= \pm \dfrac{2{,}58 \times \sqrt{0{,}8 \times 0{,}2}}{\sqrt{120}} = \pm 0{,}0942$

27. $[0{,}3965\,,\ 0{,}4835]$

28. $\bar{x} = 110$

$$\left[110 - 1{,}96\,\frac{12}{\sqrt{9}},\ 110 + 1{,}96\,\frac{12}{\sqrt{9}}\right] = [102{,}16,\ 117{,}84]$$

29. a) $\left[160 \pm 1{,}96 \times \dfrac{10}{\sqrt{144}}\right] = [158{,}37,\ 161{,}63]$

b) $\left[160 \pm 1{,}645 \times \dfrac{10}{\sqrt{144}}\right] = [158{,}73,\ 161{,}37]$

c) $n = 266{,}77 \Rightarrow 267$ observaciones $\Rightarrow$ habrá que tomar $267 - 144 = 123$ observaciones más

30. a) $\bar{x} = \dfrac{372{,}6 + 392{,}2}{2} = 382{,}4$ m

$$\left[382{,}4 - 1{,}96\,\frac{60}{\sqrt{n}},\ 382{,}4 + 1{,}96\,\frac{60}{\sqrt{n}}\right] =$$

$$= [372{,}6,\ 392{,}2] \rightarrow 1{,}96\,\frac{60}{\sqrt{n}} = 9{,}8 \rightarrow n = 144$$

b) $1 - \alpha = 0{,}869 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}51 \rightarrow$ error $=$

$$= \pm 1{,}51\,\frac{60}{\sqrt{225}} = 6{,}04$$

31. $\left[8{,}41 \pm 1{,}96 \times \dfrac{9}{\sqrt{800}}\right] = [7{,}5,\ 8{,}7]$

32. $p = \dfrac{700}{1500} = 0{,}467$

$$\left[0{,}467 - 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}467 \times 0{,}533}{1500}},\right.$$

$$\left. 0{,}467 + 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}467 \times 0{,}533}{1500}}\right] = [0{,}442\ ,\ 0{,}492]$$

33. a) $\bar{x} = N(104,\ 1{,}25)$

b) $[10{,}4 \pm 1{,}96 \times 1{,}25] = [101{,}55,\ 106{,}45]$

34. $n = (2{,}17)^2\,\dfrac{9^2}{3^2} = 42{,}38 \rightarrow$ tamaño mínimo 43

35. $\left[0{,}3 \pm 2{,}575 \times \sqrt{\dfrac{0{,}3 \times 0{,}7}{2100}}\right] = [0{,}274,\ 0{,}326]$

36. a) $\left[0{,}3 - 2\sqrt{\dfrac{0{,}3 \times 0{,}7}{800}},\ 0{,}3 + 2\sqrt{\dfrac{0{,}3 \times 0{,}7}{800}}\right] =$

$= [0{,}268,\ 0{,}332]$

b) Si se quiere aumentar el nivel de confianza, también aumentará $z_{\alpha/2}$, por lo que el intervalo se agranda.

37. $n = \dfrac{2{,}33^2 \times 12^2}{10^2} = 7{,}81 \Rightarrow$ mínimo 8 elementos

38. $\left[172 - 1{,}96\,\dfrac{5}{\sqrt{400}},\ 172 + 1{,}96\,\dfrac{5}{\sqrt{400}}\right] =$

$= [171{,}51,\ 172{,}49]$

39. $B(100,\ 0{,}2) \simeq N(20,\ 4) \Rightarrow P(X \geq 25) = 0{,}1303$

40. 385 familias.

Tema 13 INFERENCIA ESTADÍSTICA (II). INTRODUCCIÓN AL CONTRASTE DE HIPÓTESIS

1. a) Hipótesis nula: afirmación cuya veracidad se intenta contrastar; hipótesis alternativa: negación de la hipótesis nula. El contraste se construye en función de la hipótesis nula.
b) Hipótesis simple: afirmación que afecta a un único valor posible de un parámetro poblacional; hipótesis compuesta: afirmación que afecta a dos ó más valores posibles de un parámetro poblacional.
c) Alternativa unilateral: afirmación efectuada en un único sentido respecto lo afirmado en la hipótesis nula; alternativa bilateral: afirmación efectuada en ambos sentidos respecto lo afirmado en la hipótesis nula.

2. Ambos conceptos expresan probabilidades. El nivel de significación mide probabilísticamente el riesgo de tipo I: probabilidad de rechazar la hipótesis nula, cuando ésta es cierta. La potencia es la probabilidad complementaria del riesgo de tipo II: probabilidad de rechazar la hipótesis nula, cuando ésta es falsa. En un contraste interesa que el nivel de significación sea pequeño y, por el contrario, que la potencia sea grande. Potencia y nivel de significación no son probabilidades complementarias.

3. a) Se trata de un contraste en el que la hipótesis nula es simple; la alternativa es compuesta y unilateral:
H_0: $\mu = 16$
H_1: $\mu > 16$
b) 6,5%
c) 95%

4. Los contrastes se configuran en torno a la hipótesis nula, por lo que ésta es la que suele centrar el mayor interés. Tal como se formulan en el enunciado, deberíamos minimizar el error de «no perderemos dinero». Sin embargo, en la mayoría de las ocasiones nuestro comportamiento económico es conservador, estando preocupados más por perder dinero que por ganarlo (no perderlo). Por lo tanto, en estos casos deberíamos intercambiar las hipótesis nula y alternativa, por lo que centraríamos nuestro interés en minimizar el riesgo de «sí perderemos dinero».

5. 1° Formulación de las hipótesis (contraste unilateral):
H_0: $\pi_0 = 0{,}321$
H_1: $\pi_0 = 0{,}36$
2° Región crítica:

$$p > 0{,}32 + 2{,}33\sqrt{\frac{0{,}32 \times 0{,}68}{100}} = 0{,}429$$

3° Decisión:
0,36 <0,429 $\Rightarrow$ se acepta la hipótesis nula H_0

6. 1° Formulación de las hipótesis (contraste bilateral):
H_0: $\pi_0 = 0{,}7$
H_1: $\pi_0 \neq 0{,}7$
2° Región crítica:

$$p \neq \left[0{,}7 - 2{,}24\sqrt{\frac{0{,}7 \times 0{,}3}{81}}, 0{,}7 + 2{,}24\sqrt{\frac{0{,}7 \times 0{,}3}{81}}\right] =$$
$$= [0{,}586,\ 0{,}814]$$

3° Decisión:
Como0,65 $\in$ [0,586, 0,814] se acepta la hipótesis nula, por lo que la afirmación del responsable de la biblioteca es correcta.

7. 1° Formulación de las hipótesis:
H_0: $\mu = 250$
H_1: $\mu < 250$
2° Región crítica (tamaño de la muestra grande, la varianza muestral se utiliza como estimador de la varianza poblacional):

$$\bar{x} < \mu_0 - z_\alpha \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 240 < 250 - z_\alpha \cdot \frac{50}{\sqrt{100}} \Rightarrow z_\alpha < 2$$

que tiene asociada un nivel de significación (probabilidad de la cola izquierda) de 0,0227.

8. a) 1° Formulación de las hipótesis:
H_0: $\mu = 40$
H_1: $\mu > 40$
2° Región crítica (tamaño de la muestra grande):

$$\bar{x} > \mu_0 + z_\alpha \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow \bar{x} > 40 + 1{,}645 \cdot \frac{10}{\sqrt{10}} = 45{,}2$$

3° Decisión:
Como

$$\bar{x} = \frac{38 + 35 + 46 + 57 + 28 + 39 + 55 + 42 + 49 + 61}{10} =$$

= 45 $\leq$ 45,2 no se rechaza la hipótesis nula, por lo que aceptamos que por término medio un alumno dedica 40 horas en la preparación de sus exámenes finales.

b) Siendo $45 > 40 + z_\alpha \cdot \dfrac{10}{\sqrt{10}} \Rightarrow z_\alpha < 1{,}58$ que tiene asociada un nivel de significación (probabilidad de la cola derecha) de 0,0571.

9. a) 1° Formulación de las hipótesis (contraste unilateral):
H_0: $\mu = 0$
H_1: $\mu < 0$
2° Región crítica:

$$\bar{x} < \mu_0 - z_\alpha \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow \bar{x} < 0 - 1,645 \cdot \frac{10}{\sqrt{25}} = -3,29$$

3º Decisión:

Como $\bar{x} = -5 < -3,29$ se rechaza la hipótesis nula, por lo que aceptamos que la publicidad del fabricante es engañosa.

b) 1º Formulación de las hipótesis (contraste unilateral):

H_0: $\mu = 0$

H_1: $\mu > 0$

2º Región crítica:

$$\bar{x} < \mu_0 + z_\alpha \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow \bar{x} > 0 + 1,645 \cdot \frac{10}{\sqrt{25}} = -3,29$$

3º Decisión:

Como $\bar{x} = 2,3 < 3,29$ no se rechaza la hipótesis nula, por lo que aceptamos que la publicidad del fabricante es correcta.

c) 1º Formulación de las hipótesis (contraste bilateral):

H_0: $\mu = 0$

H_1: $\mu \neq 0$

2º Región de aceptación:

$$\left[\mu_0 \pm z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] \Rightarrow \left[0 \pm 1,96 \cdot \frac{10}{\sqrt{25}}\right] = [\pm 3,92]$$

3º Decisión:

Como $\bar{x} = 3,5 \in [-3,92,\ 3,92]$ se acepta la hipótesis nula, por lo que aceptamos que la publicidad del fabricante es correcta.

10. 1º Formulación de las hipótesis (contraste bilateral):

H_0: $\mu = 275$

H_1: $\mu \neq 275$

2º Región crítica:

$$\bar{x} \notin \left[\mu - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \mu + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] =$$

$$\left[275 - 1,96 \frac{20}{\sqrt{100}}, 275 + 1,96 \frac{20}{\sqrt{100}}\right] =$$

$$= [271,08,\ 278,92]$$

3º Decisión:

Como $272 \in [271,08,\ 278,92]$ se acepta la hipótesis nula de que el peso medio es 275 g.

11. 1º Formulación de las hipótesis (contraste bilateral):

H_0: $\mu_A = \mu_B$

H_1: $\mu_A \neq \mu_B$

2º Región crítica:

$$\bar{x}_A - \bar{x}_B \notin \left[\pm 1,96 \sqrt{\frac{0,0081}{45} + \frac{0,0049}{40}}\right] =$$

$$= [-0,034,\ 0,034]$$

3º Decisión:

$0,980 - 0,950 = 0,03 \in [-0,034,\ 0,034] \Rightarrow$ se acepta la hipótesis nula H_0.

12. No. Rechazar la hipótesis nula a un nivel de significación del 5% supone que el resultado muestral obtenido, suponiendo que la hipótesis nula fuera cierta, tiene asociado una probabilidad no superior al 5%. Es decir, se trata de una muestra «rara». En Inferencia estadística no se acepta que se produzcan resultados raros: se prefiere aceptar que las hipótesis de partida —en nuestro caso, la hipótesis nula— no son ciertas.

13. a) Si. El nivel de significación es la probabilidad de que un resultado muestral pertenezca a la región crítica o de rechazo, siendo cierta la hipótesis nula. Por lo que el resultado puede pertenecer a una región crítica de cierto tamaño y, por el contrario, no pertenecer a una de menor tamaño incluida en la anterior. Siempre a igualdad de los demás elementos que forman parte de un contraste.

b) No. Es la situación contraria a la anterior. Si el resultado muestral pertenece a la región de aceptación una vez excluida la de rechazo de tamaño 5%, con mayor motivo pertenecerá a la de aceptación del 97,5%. Siempre a igualdad de los demás elementos que forman parte de un contraste.

c) No.

d) No. Tanto el nivel de significación como la potencia de un test son probabilidades condicionadas asociadas a decisiones tomadas por el contraste.

14. a) Sí.

b) No.

c) Sí.

d) No.

e) No.

15. Sí.

16. 1º Formulación de las hipótesis (contraste bilateral):

H_0: $\mu = 200$

H_1: $\mu \neq 200$

2º Región de aceptación:

$$\left[\mu_0 \pm z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] \Rightarrow \left[200 \pm 1,96 \cdot \frac{15}{\sqrt{10000}}\right] =$$

$$[200 \pm 0,294] = [199,706,\ 200,294]$$

3º

Decisión:

Como $\bar{x} = 190 \notin [199,706,\ 200,294]$ se rechaza la hipótesis nula, por lo que aceptamos que el peso medio de las naranjas producidas en esa región no es de 200 gramos.

17. 1° Formulación de las hipótesis (contraste unilateral):

H_0: $\mu = 185000$

H_1: $\mu < 185000$

2° Región crítica:

$$\bar{x} < \mu 0 - z\alpha \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow \bar{x} < 185000 - 1{,}645 \cdot \frac{25000}{\sqrt{100}} =$$
$$= 180887{,}5$$

3° Decisión:

Como $\bar{x} = 152000 < 180887{,}5$ se rechaza la hipótesis nula, por lo que aceptamos que el salario medio de los trabajadores jóvenes difiere del salario medio del conjunto de trabajadores de la construcción.

18. 1° Formulación de las hipótesis (contraste bilateral):

H_0: $\mu = 50$

H_1: $\mu \neq 50$

2° Región de aceptación:

$$\left[\mu 0 \pm z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] \Rightarrow \left[50 \pm 2{,}58 \cdot \frac{12}{\sqrt{10}}\right] =$$
$$= [50 \pm 9{,}79] = [40{,}21,\ 59{,}79]$$

19. 1° Formulación de las hipótesis (contraste unilateral):

H_0: $\mu = 12{,}5$

H_1: $\mu > 12{,}5$

2° Región crítica:

$$\bar{x} > \mu_0 + z_\alpha \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow \bar{x} > 12{,}5 + 1{,}645 \cdot \frac{3{,}5}{\sqrt{64}} = 13{,}22$$

3° Decisión:

Como $\bar{x} = 17 > 13{,}22$ se rechaza la hipótesis nula, por lo que aceptamos que ese mes sí ha habido un incremento de accidentes estadísticamente significativo.

20. 1° Formulación de las hipótesis (contraste bilateral):

H_0: $\mu = 300$

H_1: $\mu \neq 300$

2° Región de aceptación:

$$\left[\mu_0 \pm z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left[300 \pm 1{,}96 \cdot \frac{150}{\sqrt{100}}\right] =$$
$$[300 \pm 29{,}4] = [270{,}6; 329{,}4]$$

3° Decisión:

Como $\bar{x} = 250 \notin [270{,}6;\ 329{,}4]$ se rechaza la hipótesis nula, por lo que aceptamos que el gasto medio semanal en ocio de los jóvenes andaluces es diferente del gasto medio en ocio de los jóvenes valencianos.

21. 1° Formulación de las hipótesis (contraste unilateral):

H_0: $\mu = 4000$

H_1: $\mu < 4000$

2° Región crítica:

$$\bar{x} < \mu_0 - z_\alpha \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow \bar{x} < 4000 + 1{,}645 \cdot \frac{2000}{\sqrt{100}} = 3671$$

Decisión:

Como $\bar{x} = 3500 < 3671$ se rechaza la hipótesis nula, por lo que aceptamos que el gasto medio semanal en ocio de los jóvenes andaluces es menor que el gasto medio en ocio de los jóvenes valencianos.

22. 1° Formulación de las hipótesis

H_0: $\mu = 38$

H_1: $\mu \neq 38$

2° Región crítica

$$\bar{x} \notin \left[38 - 1{,}96 \times \frac{4}{\sqrt{150}},\ 38 + 1{,}96 \times \frac{4}{\sqrt{150}}\right] =$$
$$= [37{,}36,\ 38{,}64]$$

3° Decisión

Como $38{,}3 \in [37{,}36,\ 38{,}64]$ se acepta la hipótesis nula de que la edad media del comprador español es la misma que la del europeo.

23. a) 1° Formulación de las hipótesis (contraste unilateral)

H_0: $\pi_0 = 0{,}25$

H_1: $\pi_0 < 0{,}25$

2° Región crítica

$$p < 0{,}25 - 1{,}555\sqrt{\frac{0{,}25 \times 0{,}75}{450}} = 0{,}2296$$

3° Decisión

$p = 1 - \dfrac{345}{450} = 0{,}23 > 0{,}2296 \Rightarrow$ se acepta la hipótesis nula H_0.

b) Confianza del 99%, $z_\alpha = 2{,}33$, y la región crítica es

$$p < 0{,}25 - 2{,}33\sqrt{\frac{0{,}25 \times 0{,}75}{450}} = 0{,}2024$$

Como $0{,}23 > 0{,}2024 \Rightarrow$ tampoco se rechaza H_0

24. a) H_0: $\mu = 26$

H_1: $\mu \neq 26$ (contraste bilateral)

b) $\mu \notin \left(26 - 1{,}96\,\dfrac{5}{\sqrt{9}},\ 26 + 1{,}96\,\dfrac{5}{\sqrt{9}}\right) =$

$= (22{,}733,\ 29{,}267)$

c) Como $\bar{x} = 28 \in (22{,}733,\ 29{,}267) \rightarrow$ se acepta H_0

25. a) 10

b) 1° Formulación de las hipótesis (contraste bilateral)

H_0: $\mu = 4000$
H_1: $\mu \neq 4000$
2º Región crítica

$$\bar{x} \notin \left[4000 \pm 1{,}96\sqrt{\frac{1000}{100}}\right] = [3993{,}8,\ 4006{,}2]$$

3º Decisión
$4008 \in [3993{,}8,\ 4006{,}2] \Rightarrow$ se rechaza la hipótesis nula H_0.

26. 1º Formulación de las hipótesis (contraste unilateral)
H_0: $\pi = 0{,}9$
H_1: $\pi < 0{,}9$
2º Región crítica

$$p < 0{,}9 - 2{,}33\sqrt{\frac{0{,}9 \times 0{,}1}{49}} = 0{,}8$$

3º Decisión
Como $p = \dfrac{37}{49} = 0{,}755 < 0{,}8 \to$ se rechaza H_0

27. a) H_0: las ventas no han variado
H_1: las ventas han disminuido (contraste unilateral)
b) Error tipo I: rechazar H_0 siendo cierta (nivel de significación)
Error tipo II: aceptar H_0 siendo falsa
c) Debe matizar más su afirmación, cuantificándola con un nivel de significación concreto.

28. 1º Formulación de las hipótesis (contraste unilateral)
H_0: $\pi = 0{,}05$
H_1: $\pi < 0{,}05$
2º Región crítica

$$p < 0{,}05 - 1{,}645\sqrt{\frac{0{,}036 \times 0{,}964}{1000}} = 0{,}04$$

3º Decisión
Como $p = \dfrac{36}{1000} = 0{,}036 < 0{,}04 \to$ se rechaza H_0 y, en consecuencia, se concluye que no tendrá representación parlamentaria.
Para un nivel de significación del 1%, la región crítia es $p < 0{,}05 - 2{,}33\sqrt{\dfrac{0{,}036 \times 0{,}964}{1000}} = 0{,}363$ de forma que tampoco puede aceptarse H_0.

29. a) 1ºFormulación de las hipótesis (contraste unilateral)
H_0: $\mu = 5$
H_1: $\mu > 5$
2º Región crítica

$$\bar{x} > 5 + 1{,}96 \times \frac{0{,}6}{\sqrt{36}} = 5{,}196$$

3º Decisión:
$\bar{x} = 5{,}5 > 5{,}196 \Rightarrow$ se rechaza la hipótesis nula H_0

b) $\left[5{,}5 \pm 1{,}96 \times \dfrac{0{,}6}{\sqrt{36}}\right] = [5{,}304,\ 5{,}696]$

30. 1º Formulación de las hipótesis (contraste bilateral)
H_0: $\pi = 0{,}2$
H_1: $\pi \neq 0{,}2$
2º Región crítica

$$p \notin \left(0{,}2 \pm 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}2 \times 0{,}8}{256}}\right) = (0{,}151, 0{,}249)$$

3º Decisión

Como $p = \dfrac{48}{256} = 0{,}1875 \in (0{,}151,\ 0{,}249)$ se acepta H_0.

31. a) 1º Formulación de las hipótesis (contraste unilateral)
H_0: $\mu = 320$
H_1: $\mu > 320$
2º Región crítica

$$\bar{x} > 320 + 1{,}28 \times \frac{80}{\sqrt{25}} = 340{,}28$$

3º Decisión:
$\bar{x} = 350 > 340{,}28 \Rightarrow$ se rechaza la hipótesis nula H_0

b) $n = 1{,}645^2 \times \dfrac{80^2}{6^2} = 481{,}07 \Rightarrow 482$ viviendas.

32. 1º Formulación de las hipótesis (contraste bilateral)
H_0: $\pi = 0{,}5$
H_1: $\pi \neq 0{,}5$
2º Región crítica

$$p \notin \left(0{,}5 \pm 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}5 \times 0{,}5}{80}}\right) = (0{,}39, 0{,}61)$$

3º Decisión

Como $p = \dfrac{45}{80} = 0{,}565 \in (0{,}39,\ 0{,}61)$ se acepta H_0

$\to$ la moneda no está trucada.

33. a) H_0: $\mu = 1{,}45$
H_1: $\mu > 1{,}45$
b) $\bar{x} > 1{,}45 + 1{,}645 \times \dfrac{0{,}24}{4} = 1{,}5487$
c) $\bar{x} = 1{,}6 > 1{,}5487 \Rightarrow$ se rechaza la hipótesis nula H_0

34. a) 1ºFormulación de las hipótesis (contraste unilateral)

H_0: $\pi = 0,35$
H_1: $\pi < 0,35$

2º Región crítica

$$p < 0,35 - 1,645\sqrt{\frac{0,35 \times 0,65}{225}} = 0,298$$

3º Decisión

Como $p = \frac{65}{225} = 0,289 < 0,298 \rightarrow$ se rechaza H_0

b) La región crítica sería

$$p < 0,35 - 2,33\sqrt{\frac{0,35 \times 0,65}{225}} = 0,276$$

Como $0,298 > 0,276 \rightarrow$ se acepta H_0

35. 1º Formulación de las hipótesis (contraste bilateral)
H_0: $\mu = 300$
H_1: $\mu \neq 300$
2º Región crítica

$$\bar{x} \notin \left[300 \pm 1,96 \times \frac{4}{\sqrt{100}}\right] = [299,216,\ 300,784]$$

3º Decisión
$297 \notin [299,216,\ 300,784] \Rightarrow$ se rechaza la hipótesis nula H_0

36. a) $2,575\ \frac{13}{\sqrt{81}} = 3,719$

b) 1º Formulación de las hipótesis (contraste bilateral)
H_0: $\mu = 160$
H_1: $\mu \neq 160$

2º Región crítica

$$\bar{x} \notin \left[160 \pm 1,96 \cdot \frac{12,92}{\sqrt{81}}\right] = [157,19, 162,81]$$

3º Decisión
Como $\bar{x} = 159 \in [157,19\ ,\ 162,81]$ se acepta H_0.

37. a) 1º Formulación de las hipótesis (contraste bilateral)
H_0: $\pi_0 = 0,06$
H_1: $\pi_0 \neq 0,06$
2º Región crítica

$$p = \frac{21}{300} = 0,07 \in [0,0246,\ 0,0954]$$

3º Decisión

$$p = \frac{21}{300} = 0,07 \in [0,0246,\ 0,0954] \Rightarrow \text{se}$$

acepta la hipótesis nula H_0

b) $n = 1,96^2 \times \frac{0,07 \times 0,93}{0,01^2} = 2500,9 \Rightarrow 2501$

38. a) 1ºFormulación de las hipótesis (contraste unilateral)
H_0: $\mu = 29$
H_1: $\mu < 29$

2º Región crítica

$$\bar{x} < 29 - 2,33 \cdot \frac{3}{10} = 28,301$$

3º Decisión
Como $\bar{x} = 28,1 < 28,301 \rightarrow$ se rechaza H_0

b) Error tipo I: decidir que la edad ha disminuido cuando esto no es cierto.
Error tipo II: decidir que la edad no ha disminuido cuando esto no es cierto.

39. a) 1ºFormulación de las hipótesis (contraste unilateral)
H_0: $\pi_0 = 0,4$
H_1: $\pi_0 > 0,4$
2º Región crítica

$$p > 0,4 + 1,28\sqrt{\frac{0,4 \times 0,6}{78}} = 0,471$$

3º Decisión

$p = \frac{38}{78} = 0,487 > 0,471 \Rightarrow$ se rechaza la hipótesis nula H_0

40. 1º Formulación de las hipótesis (contraste unilateral)
H_0: $\mu = 40$
H_1: $\mu > 40$

2º Región crítica

$$\bar{x} > 40 + 1,645\ \frac{5}{\sqrt{25}} = 41,645$$

3º Decisión
Como $\bar{x} = 41,35 < 41,645$ se acepta la hipótesis nula.

41. La misma.

42. a) $p(Z > 1,25) = 0,8944$
b) 1º Formulación de las hipótesis (contraste bilateral)
H_0: $\mu = 500$
H_1: $\mu \neq 500$

2º Región crítica

$$\bar{x} \notin \left[500 \pm 1,645\ \frac{40}{\sqrt{49}}\right] = [490,6, 509,4]$$

3º Decisión

Como $\overline{x} = 492 \in [490{,}6,\ 509{,}4]$ se acepta la hipótesis nula.

43. 1ºFormulación de las hipótesis (contraste unilateral)

H_0: $\mu_E = \mu_F$

H_1: $\mu_E \neq \mu_F$

2º Región crítica

$$\overline{x}_E - \overline{x}_F \notin \left[\pm 1{,}96\sqrt{\frac{1{,}69}{64} + \frac{2{,}56}{81}}\right] =$$

$= [-0{,}472,\ 0{,}472]$

3º Decisión

$-0{,}5 \notin [-0{,}472,\ 0{,}472] \Rightarrow$ se rechaza la hipótesis nula H_0