

3º ESO

proyecto nova

Guía Didáctica

Matemáticas

ECIR EDITORIAL

© ES PROPIEDAD Editorial ECIR S.A, Rodolfo Esteve Arolas, Maribel Deusa Francés, Pascual Montesinos Estevan, Ernesto Veres Ferrer, Antonio J. Ramírez Fernández • Este libro corresponde al tercer curso de la Educación Secundaria Obligatoria, área de Matemáticas y forma parte de los materiales curriculares de Editorial ECIR • Ilustraciones: Salvador Ferrando, Diseño gráfico ECIR, Kino Garrido• Diseño de portada: Diseño Gráfico ECIR • Diseño de interior: Diseño gráfico ECIR

I.S.B.N.: 978-84-9826-623-8 • Impreso en España – Printed in Spain • Impresión: Editorial ECIR

Guía Didáctica

Matemáticas

3° ESO

Índice

Introducción

Justificación teórica del contenido del proyecto y de sus aspectos metodológicos y didácticos 2
Contribución de la materia a la adquisición de las Competencias Básicas 7
Objetivos generales 8
Contenidos 9
Temas transversales 10
Planteamiento de la atención a la diversidad del alumnado y organización de las actividades de refuerzo y ampliación 11
Criterios de evaluación para el primer curso de la E.S.O. 12

Programación de aula y por competencias. Guía didáctica

Tema 1. Los números reales 14
Tema 2. Potencias y raíces 44
Tema 3. Los polinomios 70
Tema 4. Ecuaciones de primer y segundo grado 98
Tema 5. Sistemas de ecuaciones 136
Tema 6. Sucesiones numéricas. Progresiones 164
Tema 7. Movimientos en el plano 188
Tema 8. El teorema de Tales. Figuras semejantes 220
Tema 9. Lugares geométricos 242
Tema 10. Cuerpos en el espacio 264
Tema 11. Funciones. Generalidades 296
Tema 12. Funciones lineales y afines 320
Tema 13. Tablas de frecuencias y gráficos estadísticos 352
Tema 14. Parámetros de centralización y dispersión 384
Tema 15. Experimentos aleatorios. Probabilidad 418

ECIR EDITORIAL
Villa de Madrid, 60 - 46988 - P. I. Fuente del Jarro - PATERNA (Valencia)
Tels: 96 132 36 25 - 96 132 36 55 - Móvil: 677 431 115 - Fax: 96 132 36 05
E-mail: ecir@ecir.com - http://www.ecir.com

▸ Justificación teórica del contenido del proyecto y de sus aspectos metodológicos y didácticos

1. Bases para la elaboración del proyecto

• Características de la etapa

La etapa educativa de la E.S.O., coincide aproximadamente con la adolescencia, estrechamente vinculada al hecho biológico de la pubertad, que en nuestra sociedad suele darse algo más tempranamente en las chicas que en los chicos. Entre los años doce y dieciséis se abandona la infancia y se comienza a ser adulto en todos los sentidos: biológicos, psicológico y social.

En este periodo evolutivo, además de los cambios biológicos, los adolescentes viven cambios afectivos, congnitivos, de valores y de relaciones sociales. Se produce en estos años una integración social más fuerte en el grupo de compañeros y compañeras de la misma edad y comienza el proceso de emancipación de la familia. El adolescente comienza a tener ideas propias, actitudes personales y valores propios. Se producen importantes cambios intelectuales y congnitivos. *A partir de los doce años se adquiere un tipo de pensamiento de carácter abstracto, que trabaja con operaciones lógico-formales, y que permite la resolución de problemas complejos*.

El pensamiento abstracto formal puede y debe ser educativamente alentado. Los alumnos han de ser ayudados y educados en el razonamiento hipotético-deductivo, en la asimilación de información verbal y no verbal de carácter complejo, en la construcción de hipótesis y de estrategias para la solución de problemas, en el reconocimiento de los elementos implicados y de las relaciones posibles entre datos de una situación de problema, en el control de variables y comprobación sistemática de hipótesis inicialmente establecidas. La educación del pensamiento y experiencias que el sujeto no ha conocido o experimentado de modo directo.

En esta estapa es posible y conveniente introducir a los alumnos en el método y el pensamiento científico. La curiosidad y el afán de saber, pueden despertar en el alumnado de esta etapa un enorme interés por el conocimiento de la naturaleza física y del medio social.

La educación para la convivencia, para la cooperación y la democracia, que ha comenzado anteriormente, debe alcanzar su plenitud en esta etapa. La E.S.O. ha de proporcionar a los alumnos el conocimiento social necesario y suficiente para desenvolverse como ciudadanos responsables, conscientes de sus derechos y de sus deberes, en una sociedad democrática y libre, participando en ella, en la producción de bienes materiales y en la creación de bienes culturales.

Un componente destacado de la realidad social lo constituyen los significados culturales. Los alumnos deben asimilar de manera personal, interiorizada y crítica, los significados y valores transmitidos por nuestra cultura.

En resumen, podríamos decir que *el horizonte educativo en esta etapa es el de propulsar la autonomía de las alumnas y los alumnos, y de hacer esto, no sólo en los aspectos cognitivos o intelectuales, sino también en su desarrollo moral y social*.

• Características del área

Las matemáticas han ocupado siempre un lugar importante en las propuestas curriculares de todos los niveles de la educación obligatoria, sin embargo, existen diferentes alternativas sobre el enfoque que se les debe dar y sobre el papel que juegan en el desarrollo global de los alumnos. La alternativa elegida debe descansar en una serie de consideraciones que giran básicamente en torno a los puntos siguientes: *el proceso de construcción del conocimiento matemático y las aportaciones de las matemáticas en el marco definido por la educación obligatoria*.

Desde una perspectiva histórica podemos afirmar que las matemáticas son un conjunto de conocimientos en evolución continua, y que en dicha evolución, desempeña a menudo un papel de primer orden su interrelación con otros conocimientos y la necesidad de resolver determinados problemas prácticos. Por ejemplo: la estadística tiene su origen en la elaboración de los primeros censos demográficos, los diferentes sistemas de numeración evolucionan paralelamente a la necesidad de buscar notaciones que permitan agilizar los cálculos elementales. En cierta medida, las matemáticas constituyen el armazón sobre el que se construyen los modelos científicos, toman parte en el propio proceso de modelización de la realidad, y en muchas ocasiones han servido como medio de validación de estos modelos. Los conceptos matemáticos han modificado su significado con el transcurso del tiempo, ampliándolo o revisándolo, adquiriendo relevancia o, por el contrario, siendo relegados a segundo plano.

Sería contradictorio con el camino seguido en su propia génesis histórica presentar las matemáticas a los alumnos bajo un aspecto monolítico, cerrado y alejado de la realidad. Hay que tener en cuenta que determinados conocimientos matemáticos permiten modelizar y resolver problemas de otros campos y, a menudo, estos problemas, no estrictamente matemáticos en su origen, proporcionan la base intuitiva sobre la que se elaboran nuevos conocimientos matemáticos.

La realidad de los alumnos incluye su propia percepción del entorno físico y social y componentes imaginadas y lúdicas que despiertan su interés en mayor medida que las situaciones reales desde el punto de vista adulto. En consecuencia, la activación del conocimiento matemático mediante la resolución de problemas reales no se consigue trasvasando de forma mecánica situaciones que pueden ser muy pertinentes y significativas para el adulto, pero

que pueden fácilmente no tener estas características para los alumnos.

Una consideración importante se deriva del uso, en el proceso histórico de construcción de las matemáticas, del razonamiento empírico-deductivo en grado no menor que el razonamiento deductivo, desempeñando incluso a menudo un papel mucho más activo en la elaboración de los conceptos que este último. Esta afirmación vale no sólo desde el punto de vista histórico, sino que describe cómo proceden los matemáticos en su trabajo. Los tanteos previos, los ejemplos y contraejemplos, la solución del caso particular, la posibilidad de modificar las condiciones iniciales y ver qué sucede, etc., son las auténticas pistas para elaborar proposiciones y teorías. En las propuestas curriculares no deben relegarse los procedimientos intuitivos curriculares a un segundo plano, ya que con esta tendencia se privaría a los alumnos del más poderoso instrumento de exploración y construcción del conocimiento matemático.

Lo que confiere un caracter distintivo al conocimiento matemático es su enorme poder como instrumento de comunicación concisa y sin ambigüedades. Gracias a la amplia utilización de diferentes sistemas de notación simbólica (números, letras, tablas, gráficos, etc.), las matemáticas son útiles para representar de forma precisa informaciones de naturaleza muy diversa, poniendo de relieve algunos aspectos y relaciones no directamente observables y permitiendo anticipar y predecir hechos, situaciones o resultados que todavía no se han producido.

Hay que tener en cuenta, en la planificación de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, el nivel de competencia congnitiva del alumnado, puesto que existe un estrecho vínculo entre las relaciones que los niños pueden establecer y manejar en un momento determinado y su nivel de desarrollo intelectual. El grado de abstracción que impone en ocasiones el pensamiento matemático está fuera del alcance de la mayoría de los alumnos durante la Educación Primaria e incluso durante gran parte de la Educación Secundaria Obligatoria.

El aprendizaje de la matemáticas es un medio excepcional para desarrollar las capacidades congnitivas que pueden transferirse con mayor facilidad a otros dominios de aprendizaje, por lo que la inclusión en el currículo es esencial para la formación intelectual de los alumnos.

La aparición y el uso generalizado en la sociedad actual de nuevos medios tecnológicos introduce otra dimensión en la finalidad utilitaria de las matemáticas escolares. Por una parte, el dominio funcional de estos medios tecnológicos precisa una preparación matemática cuyas bases han de ponerse en la Educación Primaria y Secundaria.

Los aspectos formativo y utilitario de las matemáticas escolares en la Educación Obligatoria no son en absoluto antagónicos, sino complementarios. La realización de un aprendizaje significativo exige que el alumno observe, se haga preguntas, formule hipótesis, relacione los conocimientos nuevos con los que ya posee, obtenga conclusiones lógicas y datos a su alcance, etc.

El enfoque adoptado por los proyectos curriculares debe partir de la consideración de las matemáticas como un poderoso instrumento que permite representar, analizar, explicar y predecir hechos y situaciones de una forma rigurosa, concisa y sin ambigüedades. *La enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas debe estar presidida por la preocupación de que los alumnos desarrollen y aprendan un conjunto de recursos eficaces para conocer mejor la realidad en la que viven y poder así actuar en y sobre ella.* El acento recaerá más en la adquisición de conceptos y procedimientos de tipo general, que sean aplicables a un amplio abanico de situaciones, que en la adquisición de conceptos y procedimientos de ámbito restringido, aunque sean más eficaces y rigurosos. *La construcción progresiva del conocimiento matemático transitará por una vía inductiva*, tomando como dato primigenio la propia actividad del alumno y utilizando sus intuiciones, tanteos y aproximaciones como punto de partida para una reflexión que conduzca, de forma progresiva, a planteamientos más formales y deductivos. La adquisición de una actitud positiva hacia las matemáticas, del gusto por ellas y de la confianza en la propia capacidad para aprenderlas y utilizarlas, es otro aspecto básico que debe tenerse en cuenta para lograr las funcionalidad del resto de los aprendizajes.

• Las matemáticas en la E.S.O.

Las matemáticas pueden contribuir decisivamente en la consecución de los objetivos generales de la Educación Secundaria Obligatoria. Mediante su aprendizaje, los alumnos desarrollan la capacidad de pensamiento y de reflexión lógica al mismo tiempo que adquieren un conjunto de instrumentos poderosísimos para explorar la realidad, representarla, explicarla y predecirla, en suma, para actuar en y sobre ella.

En el transcurso de la Etapa, los alumnos prosiguen el proceso de construcción del conocimiento matemático que ha alcanzado ya cotas de desarrollo considerables al término de la Educación Primaria. *En el largo camino que lleva desde las experiencias matemáticas intuitivas vinculadas a la acción propia hasta el conocimiento matemático altamente estructurado, la Educación Secundaria Obligatoria tiene la responsabilidad de asegurar jalones intermedios de abstracción, simbolización y formalización crecientes*.

En esta Etapa existe la posibilidad de abstraer relaciones y realizar inferencias no sólo a partir de la manipulación de objetos físicos, como en la etapa educativa anterior, sino también a partir de la manipulación de representaciones simbólicas referidas a dichos objetos. Esta posibilidad, directamente vinculada a las nuevas competencias congnitivas de los alumnos, permite avances sustanciales en la línea de una mayor abstracción, simbolización y formalización del conocimiento matemático y relacionado con lo anterior, la posibilidad de trascender las informaciones concretas sobre la realidad y los datos de la experiencia inmediata, dando entrada a las suposiciones, conjeturas y las hipótesis como objeto del pensamiento.

A pesar de que en las observaciones precedentes se aboga por un mayor nivel de abstracción, simbolización y formalización durante la Educación Secundaria Obligatoria, conviene subrayar que el *punto de partida para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas debe seguir siendo, al igual que en la Educación Primaria, la experiencia práctica de los alumnos y la reflexión sobre la misma*. Esta es

la razón por la que, en el transcurso de la Etapa, mantienen su validez los principios generales de conceder prioridad al trabajo práctico e intuitivo; potenciar el cálculo mental y la capacidad de estimar resultados y magnitudes; introducir las notaciones simbólicas y formalizaciones a partir de la comprensión y el interés por los conceptos y los procedimientos matemáticos; utilizar actividades grupales de aprendizaje que favorezcan los intercambios, la discusión y la reflexión sobre las experiencias matemáticas; prestar especial atención al desarrollo de estrategias personales de resolución de problemas; y, por último, utilizar los distintos ámbitos de actividad de los alumnos como fuente de experiencias matemáticas.

El nivel de competencia matemática es un criterio decisivo para determinar el grado de éxito o fracaso de los alumnos en el transcurso de la educación obligatoria y condiciona las posibilidades de acceso a las diversas modalidades de formación en la educación post-obligatoria. Más aún, existe el convencimiento generalizado, favorecido sin duda por el espectacular desarrollo tecnológico de las últimas décadas y por su influencia creciente sobre las formas de vida, de que los puestos de trabajo cualificados están fuera del alcance de los alumnos que no obtienen un buen nivel de conocimientos matemáticos al término de la educación obligatoria.

Los alumnos son objeto de una fuerte presión por parte de las familias y de la propia institución escolar con el fin de demostrar su valía mediante un buen rendimiento en el aprendizaje de las matemáticas, lo que produce a menudo un exceso de ansiedad, bloqueos, rechazo y frustración. Desde el punto de vista curricular, los programas de matemáticas se deben ampliar con el fin de dar cabida a todos los conocimientos supuestamente necesarios para poder cursar con garantías de éxito las diversas modalidades de la educación post-obligatoria. La enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas adquieren de este modo una preponderancia sobre otras áreas curriculares que no son juzgadas tan esenciales para el futuro de los alumnos.

Sin negar en absoluto el valor objetivo que tienen los conocimientos de matemáticas para el futuro escolar y profesional de los alumnos, un proyecto curricular debe partir de la consideración de que la *Educación Secundaria Obligatoria*, en tanto que última etapa de la educación obligatoria, *tienen un valor sobre todo terminal*. En consecuencia, la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas durante esta etapa educativa no puede estar presidida únicamente, ni siquiera prioritariamente, por la preocupación de proporcionar a los alumnos los conocimientos supuestamente necesarios para cursar las diferentes modalidades de la educación post-obligatoria. El objetivo debe ser más bien que todos los alumnos adquieran los conocimientos necesarios para desenvolverse como ciudadanos capaces de ejercer sus derechos y sus deberes, en una sociedad que incorpora cada vez más a su funcionamiento, a sus actividades y a su lenguaje ciertos aspectos matemáticos.

Por esta razón este Proyecto se mueve en el marco de conocimientos considerados imprescindibles para satisfacer las necesidades matemáticas habituales de un ciudadano adulto en la sociedad actual y futura. No obstante, su desarrollo debe garantizar en toda circunstancia un engarce adecuado con las opciones profesionales o académicas que se ofertan al término de la Educación Secundaria Obligatoria.

• Intenciones educativas

En el planteamiento de este Proyecto se ha considerado que el objetivo prioritario y fundamental de la educación es el de proporcionar a nuestros jóvenes, con independencia del sexo, una formación plena que les permita conformar su propia identidad, así como construir una concepción de la realidad que integre a la vez el conocimiento y la valoración ética y moral de la misma. La formación plena ha de ir dirigida al desarrollo de su capacidad para ejercer, de manera crítica y en una sociedad plural, la libertad, la tolerancia y la solidaridad.

Las intenciones educativas que proponemos coinciden con las expresadas por nuestra Constitución —Artículo 27.2—. Estas intenciones las podemos vertebrar en torno a los siguientes fines:

- *El pleno desarrollo de la personalidad del alumno.*
- *La formación en el respeto de los derechos y libertades fundamentales dentro de los principios democráticos.*
- *La adquisición de hábitos intelectuales y técnicas de trabajo, así como de conocimientos científicos y técnicos.*
- *La capacitación para el ejercicio de actividades profesionales.*
- *La preparación para participar activamente en la vida social y cultural.*

La actividad educativa se desarrollará atendiendo a los siguientes principios:

- *La formación personalizada, que propicie una educación integral en todos los ámbitos de la vida.*
- *La participación y colaboración de los padres o tutores para contribuir a la mejor consecución de los objetivos educativos.*
- *La efectiva igualdad de derechos entre los sexos y el respecto de todas las culturas.*
- *La autonomía pedagógica de los centros.*
- *La metodología activa.*
- *La evaluación de los diversos elementos del sistema.*
- *La formación en el respeto y defensa del medio ambiente.*

Las características mencionadas se concretan en la formulación de los objetivos de la etapa y de los dos ciclos que la componen.

2. Orientaciones metodológicas y didácticas

• Metodología

Las estrategias propuestas en este Proyecto son variadas y se complementan, ya que en el aprendizaje inciden, en mayor o menor magnitud, multitud de variables. Entre las más importantes podemos citar: la edad, la "diversidad"

del grupo-clase, los conocimientos previos, la motivación, el grado de compromiso del profesorado y los recursos.

En un currículum abierto, los métodos de enseñanza-aprendizaje son en amplia medida responsabilidad de los educadores, no obstante, parece aconsejable establecer un marco de referencia que posibilite el diálogo entre los equipos docentes con el fin de conseguir el consenso necesario sobre la línea metodológica a seguir.

A lo largo de la Educación Secundaria, los alumnos y las alumnas poseen unas características específicas, que se concretan de distinta manera en cada unos de ellos, y que es necesario tener en cuenta para cualquier planificación adecuada de la enseñanza de las matemáticas:

- Los alumnos han acumulado una gran experiencia, a lo largo de su vida escolar y de sus propios aprendizajes espontáneos, en cuanto a conceptos y habilidades matemáticas se refiere. Todos ellos poseen determinadas ideas sobre qué cosa son los números, cuándo dos figuras son semejantes, cómo hacer determinadas operaciones, y muchas otras. Estas auténticas "teorías personales" le proporcionan pautas de exploración, por lo que observa y formula en una situación dada sólo aquellos aspectos que considera relevantes. También los alumnos tienen sus propias ideas sobre aspectos más generales, como para qué sirven las matemáticas en la vida cotidiana, qué se espera de ellos cuando se les pide que resuelvan un problema o sus propios gustos y aptitud hacia la materia.
- Cada alumno posee un determinado nivel de competencia cognitiva general, cuyo desarrollo, aunque guarda estrecha conexión con los conocimientos anteriormente descritos, constriñe en algunos momentos la adquisición de otros. Así, muchos alumnos no superan hasta el final de la Etapa el nivel de las operaciones concretas, por lo que no cabe esperar de ellos que en años anteriores efectúen recuentos sistemáticos de casos, adquieran totalmente los conceptos de proporción o probabilidad o utilicen con cierta soltura el lenguaje algebraico para expresar relaciones entre variables.
- Los esquemas previos que poseen los alumnos no son en muchos casos suficientemente precisos, completos ni tan siquiera ajustados a la realidad. A veces se manifiestan en forma de "errores" al efectuar cálculos, resolver problemas o definir conceptos. Estos errores son, sin embargo, el punto de referencia obligado para el profesor, que debe analizar su significado más profundo y diseñar en consecuencia las actividades que permitan al alumno transformar un esquema insuficiente en otro más adecuado.

  Hay que dar una dimensión positiva a los errores y las ideas imprecisas del alumno. El conflicto entre sus conocimientos anteriores y determinadas situaciones nuevas que no encajan con ellos es un paso necesario para reorganizarlos, enriquecerlos y ajustarlos; en suma, para que se produzca un aprendizaje significativo. El profesor debe transmitir a sus alumnos la sensación de que lo que saben es adecuado para determinadas situaciones, aunque no lo es para otras diferentes o nuevas, y que progresar requiere reconocer estas contradicciones y superarlas.
- El pensamiento del profesor, y las actitudes que lo manifiestan, son factores básicos que facilitan o bloquean el aprendizaje global de los alumnos. Una concepción de las matemáticas como ciencia básicamente deductiva y jerarquizada, con poco espacio para la inexactitud y la aproximación, lleva al profesor a plantear preferentemente en el aula cuestiones cuya respuesta es única, o que se resuelven utilizando un determinado algoritmo que es preciso recordar, y toma poco en consideración otras conductas. En consecuencia, el alumno centra su interés en adivinar lo que espera oír el profesor, y no en explorar su propia solución, contrastarla con la de otros compañeros y animarse a buscar otra mejor.
- El aprendizaje es fruto de una intensa actividad del alumno. Como desencadenante de esta actividad puede actuar la manipulación de objetos y símbolos familiares, una pregunta o explicación del profesor, un debate entre alumnos, la resolución de un problema, siempre que se realicen en la ocasión y del modo oportunos.

  Cualquier actividad que se plantee, bien sea un problema a trabajar por el alumno, un tema a desarrollar por el profesor u otra, tiene que estar suficientemente cerca de los conocimientos del alumno como para que pueda enmarcarla en ellos.

  El profesor debe propiciar un ambiente de trabajo grato y estimulante. Una atmósfera de éxito, en la que el profesor plantea preguntas constructivas y sugiere alternativas cuando sea pertinente, en la que se valoran positivamente los avances y se aprende de los errores, es un factor imprescindible para la motivación de los alumnos.
- El profesor debe proponer actividades diversas y utilizar técnicas de trabajo, de acuerdo con el momento en que se encuentre la tarea: sus propias intervenciones, la resolución de problemas, el ejercicio de rutinas básicas, etc. Sólo el convencimiento de que es el alumno el constructor de sus propios conocimientos, le llevará a intervenir de manera distinta a la habitual. La explicación del profesor es muy conveniente para centrar el propósito de las actividades que van a realizarse a continuación; puede incluir un resumen alusivo a cosas que ya conocen los alumnos, y que lleve a formular una pregunta nueva a la que no se sabe dar contestación. Es un buen momento para motivarles, para plantearles un reto atractivo. Al final de la tarea, el profesor puede intervenir facilitando la síntesis y la elaboración de conclusiones finales a partir de las que hayan podido obtener los alumnos aisladamente.
- Se utiliza con poca frecuencia el debate o el trabajo en grupo como técnica didáctica, pero hoy está fuera de toda duda la importancia que tienen las interacciones entre alumnos para la construcción de conceptos matemáticos. En algunas ocasiones, la opinión de un

alumno es más significativa para los demás que muchas de las explicaciones del profesor. *Los alumnos deben tener la oportunidad de hablar de matemáticas entre ellos y con el profesor. Tener que explicar a los demás sus ideas o cómo han resuelto un problema, les plantea la necesidad de ir perfilando un lenguaje común y preciso, que comunique exactamente lo que están pensando*.

Las actividades colectivas juegan un papel importante en el aprendizaje de actitudes y valores generales y sobre las matemáticas. Hay algunas tareas especialmente propicias a lo que comúnmente se llama trabajo en grupo. Por ejemplo: construir un plano del Centro. La tarea del profesor en este caso estará reservada a su papel de orientador y moderador del proceso.

La resolución de problemas debe contemplarse como una práctica habitual, que no puede tratarse de forma aislada, sino integrada en todas y cada una de las facetas que conforman el proceso de enseñanza y aprendizaje, pues por sus características generales la resolución de problemas constituye el núcleo central de las matemáticas. En ella se utiliza un gran número de capacidades básicas de las personas: leer atentamente, reflexionar, establecer un plan de trabajo que se va revisando durante el proceso, modificar el plan si no da resultado, comprobar la solución si se ha encontrado, comprobar su adecuación o no a las condiciones del problema, formular otros nuevos... La resolución de problemas de matemáticas es una tarea privilegiada para desarrollar métodos y estrategias útiles a la hora de abordar cualquier problema; a su vez, en el transcurso del trabajo, se ponen de manifiesto y se ejercitan, de manera especial, destrezas y procesos cognoscitivos generales. No quiere decir que en un tiempo del curso se dedique exclusivamente a resolver problemas para analizar sistemáticamente lo que ocurre al hacerlos, sino que se ha de tener en cuenta en el resto de los contenidos y en las programaciones de aula, como uno de los elementos importantes que merece la pena favorecer.

- La historia de las matemáticas proporciona contextos apropiados para introducir o afianzar determinados contenidos. En este sentido se pueden utilizar situaciones tradicionales especialmente relevantes, como los juegos de azar que suscitaron los primeros estudios sistemáticos acerca de la probabilidad, el legendario problema de la duplicación del cubo o la confección de calendarios a partir de cálculos astronómicos en Babilonia. Enunciados curiosos o poéticos, frutos de culturas donde resolver problemas era un arte y un placer, como la arábiga. Sistemas de numeración y algoritmos de cálculo distintos de los propios, para que el alumno investigue sus fundamentos. Problemas clásicos de la teoría de números sobre divisibilidad, números triangulares, rectangulares, cuadrados y muchos otros. El planteamiento de un número suficiente de contextos históricos a lo largo de la etapa debe permitir que los alumnos perciban que las matemáticas han evolucionado a lo largo del tiempo, y en paralelo a las formas de producción económica, a las necesidades de organización de las sociedad. Con ello se contribuye, además, a lograr una visión abierta y no dogmática de la materia.

• Orientaciones para la evaluación

La evaluación tienen que ser considerada como parte integrante y fundamental del proceso de enseñanza y aprendizaje. Su papel como diagnóstico continuo de los conocimientos de los alumnos es incuestionable. Por consiguiente, la evaluación permite al profesor diseñar actividades específicas de ayuda para cada uno de ellos, incluidas las de recuperación y profundización de contenidos. Evaluar la propia actuación permite al profesor controlarla y mejorarla. En el caso de los alumnos, la reflexión sobre sus logros y problemas les ayuda a controlar e implicarse en el proceso de aprendizaje. También es necesario un análisis de los materiales utilizados, de su adecuación a los objetivos propuestos, de la flexibilidad para usarlos con alumnos de niveles diferentes, del interés que despiertan. Finalmente, evaluar la marcha global del alumno es imprescindible en los últimos años de la Educación Obligatoria, para orientarle en las decisiones que sobre su futuro académico o laboral debe tomar al finalizar la misma.

La evaluación debe extenderse no sólo a la adquisición de rutinas y hechos aislados, sino que debe recoger otros contenidos, como los actitudinales y los procedimientos de tipo general. Tenerlos en cuenta modifica en gran manera la elección de técnicas e instrumentos aconsejables para la evaluación.

La evaluación no es un fin en sí misma, y sólo se justifica en la medida en que sirve de instrumento para mejorar globalmente el proceso de enseñanza y aprendizaje. Estas consideraciones implican una evaluación continua y diferenciada para cada uno de los alumnos, así como también, unos criterios en la realización de actividades específicas de evaluación.

La autoevaluación del alumno, como reflexión crítica sobre su propio proceso de aprendizaje, pretende que se corresponsabilice de su educación, que tome conciencia de sus avances y estancamientos, de la adecuación de su método de trabajo. La autoevaluación fomenta también la autoestima y la independencia.

- Instrumentos de observación y evaluación

El procedimiento de registro de las observaciones debe ser sencillo. Es útil disponer de una ficha para cada alumno donde se anoten las observaciones relativas a cómo se manifiestan en cada momento los objetivos de aprendizaje propuestos por el profesor. El periodo de registro debería abarcar al menos un año.

Es imposible observar diariamente de manera sistemática a todos los alumnos, pero sí es necesario hacerlo con una cierta regularidad. Cada profesor debe establecer un criterio que garantice esta regularidad de manera razonable.

En las discusiones, el alumno manifiesta, implícita o explícitamente, certezas, dudas y errores. Durante ellas

puede observarse el grado de dominio y precisión con que utiliza espontáneamente el vocabulario matemático, así como la corrección al argumentar sus opiniones y el respeto a las demás.

El **cuaderno de clase** es una excelente fuente de información sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje de cada alumno. En él deben quedar recogidas las actividades que realiza: ejercicios, problemas, resúmenes, etc. El cuaderno de clase proporciona información sobre el nivel de expresión escrita y gráfica del alumno, y sobre sus hábitos de trabajo. El cuaderno es un instrumento útil para el alumno, y el profesor debe dar ciertas pautas sobre su organización y presentación, para que efectivamente lo sea.

Una manera más de recoger información sobre la marcha del alumno es la realización de actividades específicas de evaluación. Pueden hacerse al finalizar un tema concreto, para observar los avances efectuados respecto al mismo, o en otro momento cualquiera si se pretende seguir la evolución de capacidades más generales, como la familiaridad con los números o la adquisición de actitudes frente a las matemáticas.

Los profesores disponen de una extensa variedad de tipos de pruebas, cada una de ellas con sus ventajas y limitaciones. Como criterio general deben seleccionarse aquellas que proporcionen al alumno un abanico amplio de posibilidades para demostrar su iniciativa y sus capacidades. Los problemas y las investigaciones sencillas, las cuestiones que requieren interpretar y relacionar varios conceptos, pueden servir para este propósito.

Para que la evaluación cumpla plenamente su papel orientador, el profesor debe comunicar a cada alumno las sucesivas valoraciones que va realizando sobre su proceso de aprendizaje, junto con las alternativas oportunas para reconducirlo en caso necesario, y poniendo siempre de relieve los logros y avances. En este espíritu, la corrección de las pruebas específicas de evaluación no debe limitarse a tachar las faltas y errores cometidos, ni hacer una simple valoración numérica de las mismas.

Haciendo uso de las anteriores orientaciones, se elaborará un informe escrito que será transmitido a las familias, y comentado con ellas en las entrevistas que se establezcan. La educación debe constituir una acción conjunta entre la familia y el centro para favorecer la formación que deseamos para nuestros jóvenes.

▸ Contribución de la materia a la adquisición de las Competencias Básicas

Puede entenderse que todo el currículo de la materia contribuye a la adquisición de la competencia matemática, puesto que la capacidad para utilizar distintas formas de pensamiento matemático, con objeto de interpretar y describir la realidad y actuar sobre ella, forma parte del propio objeto de aprendizaje. Todos los bloques de contenidos están orientados a aplicar aquellas destrezas y actitudes que permiten razonar matemáticamente, comprender una argumentación matemática y expresarse y comunicarse en el lenguaje matemático, utilizando las herramientas adecuadas, e integrando el conocimiento matemático con otros tipos de conocimiento para obtener conclusiones, reducir la incertidumbre y para enfrentarse a situaciones cotidianas de diferente grado de complejidad. Conviene señalar que no todas las formas de enseñar Matemáticas contribuyen por igual a la adquisición de la competencia matemática: el énfasis en la funcionalidad de los aprendizajes, su utilidad para comprender el mundo que nos rodea o la misma selección de estrategias para la resolución de un problema, determinan la posibilidad real de aplicar las Matemáticas a diferentes campos de conocimiento o a distintas situaciones de la vida cotidiana. La discriminación de formas, relaciones y estructuras geométricas, especialmente con el desarrollo de la visión espacial y la capacidad para transferir formas y representaciones entre el plano y el espacio contribuye a profundizar la competencia en el conocimiento y la interacción con el mundo físico. La modelización constituye otro referente en esta misma dirección. Elaborar modelos exige identificar y seleccionar las características relevantes de una situación real, representarla simbólicamente y determinar pautas de comportamiento, regularidades e invariantes, a partir de las que poder hacer predicciones sobre la evolución, la precisión y las limitaciones del modelo. Por su parte, la incorporación de herramientas tecnológicas como recurso didáctico para el aprendizaje y para la resolución de problemas, contribuye a mejorar el tratamiento de la información y competencia digital de los estudiantes, del mismo modo que la utilización de los lenguajes gráfico y estadístico ayuda a interpretar mejor la realidad expresada por los medios de comunicación. No menos importante resulta la interacción entre los distintos tipos de lenguaje: natural, numérico, gráfico, geométrico y algebraico como forma de ligar el tratamiento de la información con la experiencia de las alumnas yalumnos.

Las Matemáticas contribuyen a la competencia en comunicación lingüística ya que son concebidas como un área de expresión que utiliza continuamente la expresión oral y escrita en la formulación y expresión de las ideas. Por ello, en todas las relaciones de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas, y en particular en la resolución de problemas, adquiere especial importancia la expresión tanto oral como escrita de los procesos realizados y de los razonamientos seguidos, puesto que ayudan a formalizar el pensamiento. El propio lenguaje matemático es, en sí mismo, un vehículo de comunicación de ideas que destaca por la

precisión en sus términos y por su gran capacidad para transmitir conjeturas gracias a un léxico propio de carácter sintético, simbólico y abstracto.

Las Matemáticas contribuyen a la competencia cultural y artística porque el mismo conocimiento matemático es expresión universal de la cultura, siendo, en particular, la geometría parte integral de la expresión artística de la humanidad al ofrecer medios para describir y comprender el mundo que nos rodea y apreciar la belleza de las estructuras que ha creado. Cultivar la sensibilidad y la creatividad, el pensamiento divergente, la autonomía y el apasionamiento estético son objetivos de esta materia. Los propios procesos de resolución de problemas contribuyen de forma especial a fomentar la autonomía e iniciativa personal porque se utilizan para planificar estrategias, asumir retos y contribuyen a convivir con la incertidumbre controlando al mismo tiempo los procesos de toma de decisiones. También, las técnicas heurísticas que desarrolla constituyen modelos generales de tratamiento de la información y de razonamiento y consolida la adquisición de destrezas involucradas en la competencia de aprender a aprender tales como la autonomía, la perseverancia, la sistematización, la reflexión crítica y la habilidad para comunicar con eficacia los resultados del propio trabajo. La utilización de las Matemáticas para describir fenómenos sociales, fundamentalmente mediante el análisis funcional y de la estadística, contribuye a la competencia social y ciudadana aportando criterios científicos para predecir y tomar decisiones. También se contribuye a esta competencia enfocando los errores cometidos en los procesos de resolución de problemas con espíritu constructivo, lo que permite de paso valorar los puntos de vista ajenos en plano de igualdad con los propios como formas alternativas de abordar una situación.

▸ Objetivos generales

Los objetivos se entienden como las intenciones que sustentan el diseño y la realización de las actividades necesarias para la consecución de las grandes actividades educativas.

Los objetivos del Área de Matemáticas deben entenderse como aportaciones que se han de hacer a la consecución de los objetivos de la etapa.

La enseñanza de las Matemáticas en la Educación Secundaria se orientará a facilitar los aprendizajes necesarios para desarrollar en los alumnos y alumnas las capacidades siguientes:

1. Mejorar la capacidad de pensamiento reflexivo e incorporar al lenguaje y modos de argumentación las formas de expresión y razonamiento matemático, tanto en los procesos matemáticos o científicos como en los distintos ámbitos de la actividad humana, con el fin de comunicarse de manera clara, concisa y precisa.
2. Aplicar con soltura y adecuadamente las herramientas matemáticas adquiridas a situaciones de la vida diaria.
3. Reconocer y plantear situaciones susceptibles de ser formuladas en términos matemáticos, elaborar y utilizar diferentes estrategias para abordarlas y analizar los resultados utilizando los recursos más apropiados.
4. Detectar los aspectos de la realidad que sean cuantificables y que permitan interpretarla mejor: utilizar técnicas de recogida de la información y procedimientos de medida, realizar el análisis de los datos mediante el uso de distintas clases de números y la selección de los cálculos apropiados, todo ello de la forma más adecuada, según la situación planteada.
5. Identificar los elementos matemáticos (datos estadísticos, geométricos, gráficos, cálculos, etc.) presentes en los medios de comunicación, Internet, publicidad u otras fuentes de información, analizar críticamente las funciones que desempeñan estos elementos matemáticos y valorar su aportación para una mejor comprensión de los mensajes.
6. Identificar las formas planas o espaciales que se presentan en la vida diaria y analizar las propiedades y relaciones geométricas entre ellas; adquirir una sensibilidad progresiva ante la belleza que generan.
7. Utilizar de forma adecuada los distintos medios tecnológicos (calculadoras, ordenadores, etc.) tanto para realizar cálculos como para buscar, tratar y representar informaciones de índole diversa y también como ayuda en el aprendizaje.
8. Actuar ante los problemas que se plantean en la vida cotidiana de acuerdo con modos propios de la actividad matemática, tales como la exploración sistemática de alternativas, la precisión en el lenguaje, la flexibilidad para modificar el punto de vista o la perseverancia en la búsqueda de soluciones.
9. Elaborar estrategias personales para el análisis de situaciones concretas y la identificación y resolución de problemas, utilizando distintos recursos e instrumentos y valorando la conveniencia de las estrategias utilizadas en función del análisis de los resultados y de su carácter exacto o aproximado.
10. Manifestar una actitud positiva muy preferible a la actitud negativa ante la resolución de problemas y mostrar confianza en la propia capacidad para enfrentarse a ellos con éxito y adquirir un nivel de autoestima adecuado, que les permita disfrutar de los aspectos creativos, manipulativos, estéticos y utilitarios de las Matemáticas.
11. Integrar los conocimientos matemáticos en el conjunto de saberes que se van adquiriendo desde las

distintas materias de modo que puedan emplearse de forma creativa, analítica y crítica.

12. Valorar las Matemáticas como parte integrante de nuestra cultura: tanto desde un punto de vista histórico como desde la perspectiva de su papel en la sociedad actual y aplicar las competencias matemáticas adquiridas para analizar y valorar fenómenos sociales como la diversidad cultural, el respeto al medio ambiente, la salud, el consumo, la igualdad entre los sexos o la convivencia pacífica.

▸ Contenidos

Bloques de contenido de la etapa

Las matemáticas contemplan tres tipos de contenidos: actitudinales, procedimentales y conceptuales.

Por la dificultad para enmarcar alguno de los contenidos que se proponen, convienen incidir en que estos se concentran, sobre todo, en el vocabulario, las notaciones, las convenciones, los resultados y las estructuras conceptuales; las destrezas y las estrategias generales; la apreciación y la valoración positiva de las matemáticas, la disposición favorable hacia el trabajo, etc.

El objeto de estudio de las matemáticas en la escolaridad obligatoria constituye un conjunto de conceptos, procedimientos y actitudes fuertemente relacionados. Por ello, los contenidos que se presentan, consideran y atienen globalmente esos elementos, y aparecen agrupados en los siguientes bloques:"Contenidos comunes", "Números", "álgebra", "Geometría", "Funciones y gráficas", "Estadística y Probabilidad".

• Bloque 1. Contenidos communes

- Planificación y utilización de estrategias en la resolución de problemas, tales como el recuento exhaustivo, la inducción o la búsqueda de problemas afines, y comprobación del ajuste de la solución a la situación planteada.
- Descripción verbal de relaciones cuantitativas y espaciales y procedimientos de resolución mediante la terminología precisa.
- Interpretación de mensajes que contengan informaciones de carácter cuantitativo o simbólico o sobre elementos o relaciones espaciales.
- Confianza en las propias capacidades para afrontar problemas, comprender las relaciones matemáticas y tomar decisiones a partir de ellas.
- Perseverancia y flexibilidad en la búsqueda de soluciones a los problemas y en la mejora de las encontradas.
- Utilización de herramientas tecnológicas para facilitar los calculus de tipo numérico, algebraico o estadístico, las representaciones funcionales y la comprensión de propiedades geométricas.

• Bloque 2. Números

- Números racionales. Comparación, ordenación y representación sobre la recta.
- Decimales y fracciones. Transformación de fracciones en decimals y viceversa. Decimales exactos y decimales periódicos. Fracción generatriz.
- Operaciones con fracciones y decimales.
- Jerarquía de las operaciones y uso del paréntesis.
- Potencias de exponente entero. Significado y propiedades. Su aplicación para la expresión de números muy grandes y muy pequeños. Operaciones con números expresados en notación científica. Uso de la calculadora.
- Aproximaciones y errores. Error absoluto y error relativo. Utilización de aproximaciones y redondeos en la resolución de problemas de la vida cotidiana con la precisión requerida por la situación planteada.
- Resolución de problemas en los que interviene la proporcionalidad directa o inversa. Repartos proporcionales.
- Interés simple. Porcentajes encadenados.

• Bloque 3. Álgebra

- Sucesiones de números enteros y fraccionarios. Sucesiones recurrentes.
- Progresiones aritméticas y geométricas.
- Estudio de las regularidades, relaciones y propiedades que aparecen en conjuntos de números.
- Traducción de situaciones del lenguaje verbal al algebraico.
- Polinomios. Valor numérico. Operaciones elementales con polinomios.
- Resolución algebraica de ecuaciones de primer grado y de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.
- Resolución algebraica de ecuaciones de segundo grado. Soluciones exactas y aproximaciones decimales.
- Resolución de problemas mediante la utilización de ecuaciones y sistemas. Interpretación crítica de las soluciones.

• Bloque 4. Geometría

- Revisión de la geometría del plano.
- Lugar geométrico. Determinación de figuras a partir de ciertas propiedades.
- Teorema de Tales. División de un segmento en partes proporcionales.
- Aplicación de los teoremas de Tales y Pitágoras a la resolución de problemas geométricos y del medio físico.

– Traslaciones, giros y simetrías en el plano. Elementos invariantes de cada movimiento.
– Revisión de la geometría del espacio.
– Planos de simetría en los poliedros.
– Uso de los movimientos para el análisis y representación de figuras y configuraciones geométricas.
– Reconocimiento de los movimientos en la naturaleza, en el arte y en otras construcciones humanas.
– La esfera. Intersecciones de planos y esferas.
– El globo terráqueo. Coordenadas terrestres y husos horarios. Longitud y latitud de un lugar.
– Interpretación de mapas y resolución de problemas asociados.
– Estudio de formas, configuraciones y relaciones geométricas.
– Cálculo de áreas y volúmenes.

• **Bloque 5. Funciones y gráficas**

– Relaciones funcionales. Distintas formas de expresar una función.
– Construcción de tablas de valores a partir de enunciados, expresiones algebraicas o gráficas sencillas.
– Elaboración de gráficas continuas o discontinuas a partir de un enunciado, una tabla de valores o de una expresión algebraica sencilla.
– Estudio gráfico de una función: crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos, simetrías, continuidad y periodicidad. Análisis y descripción de gráficas que representan fenómenos del entorno cotidiano.
– Uso de las tecnologías de la información para el análisis y reconocimiento de propiedades de funciones.
– Formulación de conjeturas sobre el fenómeno representado por una gráfica y sobre su expresión algebraica.
– Estudio gráfico y algebraico de las funciones constantes, lineales y afines.
– Utilización de modelos lineales para estudiar situaciones provenientes de los diferentes ámbitos de conocimiento y de la vida cotidiana, mediante la confección de la tabla, la representación gráfica y la obtención de la expresión algebraica.

• **Bloque 6. Estadística y probabilidad**

– Estadística descriptiva unidimensional. Variables discretas y continuas.
– Interpretación de tablas de frecuencias y gráficos estadísticos.
– Agrupación de datos en intervalos. Histogramas y polígonos de frecuencias.
– Construcción de la gráfica adecuada a la naturaleza de los datos y al objetivo deseado.
– Cálculo e interpretación de los parámetros de centralización (media, moda, cuartiles y mediana) y dispersión (rango y desviación típica).
– Interpretación conjunta de la media y la desviación típica.
– Utilización de las medidas de centralización y dispersión para realizar comparaciones y valoraciones. Análisis y crítica de la información de índole estadístico y de su presentación.
– Utilización de la calculadora y la hoja de cálculo para organizar los datos y realizar cálculos.
– Experimentos aleatorios. Sucesos y espacio muestral. Utilización del vocabulario adecuado para describir y cuantificar situaciones relacionadas con el azar.
– Frecuencia y probabilidad de un suceso.
– Cálculo de probabilidades mediante la Ley de Laplace.
– Cálculo de la probabilidad mediante simulación o experimentación.
– Formulación y verificación de conjeturas sobre el comportamiento de fenómenos aleatorios sencillos.
– Utilización de la probabilidad para tomar decisiones fundamentadas en diferentes contextos. Reconocimiento y valoración de las Matemáticas para interpretar, describir y predecir situaciones inciertas.

▸ Temas transversales

Los temas transversales se refieren a contenidos que no son propios de ninguna área específica, pero que, dentro de lo posible, deben estar presentes en todas. En el área de Matemáticas es posible colaborar en mayor medida a alguno de ellos, pero indirectamente todos pueden aparecen en algún momento.

A la **Educación moral y cívica** contribuyen, sin duda, buena parte de los contenidos actitudinales. Tienen que ver con ella todas aquellas actitudes que se refieren al rigor, orden, precisión y cuidado con la elaboración y presentación y cuidado con la elaboración y presentación de tareas y en el uso de instrumentos, la curiosidad, el interés y el gusto por la exploración; la perseverancia y tenacidad en la búsqueda de soluciones a los problemas y la posición crítica ante las informaciones que utilizan las matemáticas.

A través de la actuación cotidiana del profesor, su forma de valorar los trabajos o la elección de las situación que plantea a sus alumnos, pueden estar presentes estas actitudes en el aula.

La **Educación del consumidor** es un tema transversal en el que las matemáticas tienen una incidencia importante.

La formación para una actitud crítica ante el consumo, requiere a menudo poner en juego ideas y formas de expresión matemáticas. Algunos aspectos del consumo sobre los que puede inducirse son los siguientes:

– *Publicidad*. En particular la interpretación y valoración adecuada de la utilización de representaciones gráficas, así como de datos numéricos de diversos tipos.
– *Aspectos económicos* (cuantitativos) presentes en el

consumo de cualquier tipo de bienes o servicios. El manejo de la relación de proporcionalidad y sus diferentes formas de expresión es esencialmente importante en este sentido.

Algunos servicios, como los créditos y seguros, aunque alejados de la experiencia directa de los alumnos de la etapa, ofrecen buenas situaciones para la aplicación de algunos contenidos.

- La medida es esencial en el ámbito del *consumo*. Todos los contenidos relacionados con la estimación de medidas, la medición y el uso de los sistemas métricos están directamente relacionados con este tema transversal.
- Es importante por último, el consumo relacionado con el *ocio*. Dentro de él, el azar está presente a menudo. Los contenidos que tienen que ver con el tratamiento del azar contribuyen a hacer su consumo más «inteligente».

Educación para la igualdad de oportunidad entre sexos.

Desde el punto de vista metodológico las indicaciones que se hacen se pueden resumir en la necesidad de fomentar el conocimiento y reconocimiento de la capacidad de cada uno de los compañeros y compañeras en el ámbito de las matemáticas y por extensión de los hombres y las mujeres en general. Está relacionado con ello el contenido actitudinal que se refiere al *respeto y valoración* de las soluciones ajenas.

El profesor puede jugar con las distintas formas de agrupación de los alumnos para fomentar, por una parte, la autoestima de unos y otros y, por otra, el conocimiento mutuo.

El **resto de temas transversales** pueden estar presentes en la clase de matemáticas a través de los contextos de los problemas y ejercicios de las situaciones a las que se aplican las matemáticas.

En igual condiciones, puede ser conveniente a veces que los problemas se refieran a cuestiones relacionadas con la educación ambiental, la educación para la salud, etc... de manera que, además de facilitar aprendizajes estrictamente matemáticos, permitan el conocimiento y análisis de estos temas desde el punto de vista cuantitativo.

▸ Planteamiento de la atención a la diversidad del alumnado y organización de las actividades de refuerzo y ampliación

1. Planteamiento de la atención a la diversidad

La estructura del área, entendida como conjunto de contenidos que incluye las aportaciones de las disciplinas que la forman, deja abierta, por una parte, la posibilidad de que los proyectos curriculares puedan optar por planteamientos más o menos integradores de esas disciplinas y, sobre todo, permite articular mejor los planteamientos de opcionalidad interna a las áreas y de atención a la diversidad en la medida en que facilita la profundización en uno u otro sentido de los contenidos seleccionados.

Dentro de un mismo grupo-clase y recurriendo a agrupaciones flexibles pueden trabajarse diferentes aspectos del área, o los mismos aspectos con niveles de detalle y profundidad diferentes, según las características del alumnado. O, en un momento determinado, producir de forma temporal una cierta diversificación de las actividades de aprendizaje en torno a unos contenidos opcionales susceptibles de contribución a la consecución de los mismos Objetivos Generales del área.

La lectura de textos matemáticos, determinadas fases de la resolución de un problema, el afianzamiento de destrezas numéricas y gráficas, y otras muchas actividades, requieren del trabajo individual y reposado del alumnado. Es un momento adecuado para que el profesor atienda las peculiaridades de cada uno de ellos. Los alumnos de rendimiento más bajo, que se pierden ante una actividad que precisa utilizar varios conceptos, tomar decisiones en cadena, emitir hipótesis complementarias o tener en cuenta varios factores, requieren un parcelamiento de dicha actividad para ajustarla a sus posibilidades reales de avance. Otras veces tienen carencias específicas en algún concepto o destreza fundamental que los demás ya dominan, en cuyo caso el profesor puede proponerle actividades de recuperación que cubran esa laguna.

2. Organización de las actividades de refuerzo y ampliación

• Actividades de refuerzo

En cada una de las Unidades Didácticas presentamos una serie de actividades **por parte del alumno** que constituyen uno de los principios del aprendizaje significativo. Tales actividades pretenden establecer relaciones entre el nuevo contenido y los esquemas de conocimiento ya existente y dentro de ellas. El profesorado podrá distinguir claramente las destinadas a conectar ambas líneas.

En los ejercicios finales se dedica especial atención a los de consolidación, en número considerable para que el profesor pueda seleccionar los que considere oportunos.

• Actividades de ampliación

Dentro del grupo-clase el alumnado que posee mayor rendimiento en el aprendizaje encontrará en cada una de las **actividades** material adecuado a su desarrollo.

En los **ejercicios** finales se han incluido actvidades destinadas a aquellos alumnos que a juicio del profesor, estén en condiciones de profundizar en los contenidos.

▸ Criterios de evaluación para el tercer curso de la E.S.O.

1. Planificar y utilizar estrategias y técnicas de resolución de problemas, tales como el recuento exhaustivo, la inducción o la búsqueda de problemas afines y comprobar el ajuste de la solución a la situación planteada.
2. Expresar verbalmente con precisión razonamientos, relaciones cuantitativas e informaciones que incorporen elementos matemáticos; valorar la utilidad y simplicidad del lenguaje matemático.
3. Calcular expresiones numéricas sencillas de números racionales (basadas en las cuatro operaciones elementales y las potencias de exponente entero, que contengan, como máximo, dos operaciones encadenadas y un paréntesis), aplicar correctamente las reglas de prioridad y hacer uso adecuado de signos y paréntesis.
4. Utilizar convenientemente las aproximaciones decimales, las unidades de medida usuales y las relaciones de proporcionalidad numérica (factor de conversión, regla de tres simple, porcentajes, repartos proporcionales, intereses, etc.) para resolver problemas relacionados con la vida cotidiana o enmarcados en el contexto de otros campos de conocimiento.
5. Expresar mediante el lenguaje algebraico una propiedad o relación dada en un enunciado.
6. Observar regularidades en secuencias numéricas obtenidas de situaciones reales mediante la obtención de la ley de formación y la fórmula correspondiente en casos sencillos.
7. Resolver problemas de la vida cotidiana en los que se precise el planteamiento y resolución de ecuaciones de primer y segundo grado o de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.
8. Reconocer y describir los elementos y propiedades características de las figuras planas, los cuerpos elementales y sus configuraciones geométricas.
9. Calcular las dimensiones reales de figuras representadas en mapas o planos y dibujar croquis a escalas adecuadas.
10. Utilizar los teoremas de Tales, de Pitágoras y las fórmulas usuales para realizar medidas indirectas de elementos inaccesibles y para obtener las medidas de longitudes, áreas y volúmenes de los cuerpos elementales por medio de ilustraciones, de ejemplos tomados de la vida real o en la resolución de problemas geométricos.
11. Aplicar traslaciones, giros y simetrías a figuras planas sencillas utilizando los instrumentos de dibujo habituales; reconocer el tipo de movimiento que liga dos figuras iguales del plano que ocupan posiciones diferentes; determinar los elementos invariantes y los centros y ejes de simetría en formas y configuraciones geométricas sencillas.
12. Reconocer las transformaciones que llevan de una figura geométrica a otra mediante los movimientos en el plano y utilizar dichos movimientos para crear sus propias composiciones; analizar, desde un punto de vista geométrico, diseños cotidianos, obras de arte y configuraciones presentes en la naturaleza.
13. Reconocer las características básicas de las funciones constantes, lineales y afines en su forma gráfica o algebraica y representarlas gráficamente cuando vengan expresadas por un enunciado, una tabla o una expresión algebraica.
14. Obtener información práctica a partir de una gráfica referida a fenómenos naturales, a la vida cotidiana o en el contexto de otras áreas de conocimiento.
15. Elaborar e interpretar tablas y gráficos estadísticos (diagramas de barras o de sectores, histogramas, etc.), así como los parámetros estadísticos más usuales (media, moda, mediana y desviación típica), correspondientes a distribuciones sencillas y utilizar, si es necesario, una calculadora científica.
16. Hacer predicciones cualitativas y cuantitativas sobre la posibilidad de que un suceso ocurra a partir de información previamente obtenida de forma empírica o como resultado del recuento de posibilidades, en casos sencillos.
17. Determinar e interpretar el espacio muestral y los sucesos asociados a un experimento aleatorio sencillo y asignar probabilidades en situaciones experimentales equiprobables, utilizando adecuadamente la Ley de Laplace y los diagramas de árbol.

▸ Programación de aula y por competencias.

▸ Guía didáctica

Tema 1

Los números reales

▸ Programación de aula

Objetivos

- Definir la equivalencia entre fracciones: los números racionales.
- Reducir fracciones a común denominador.
- Comparar fracciones.
- Operar con fracciones.
- Definir la recta racional.
- Pasar de fracción a decimal y viceversa.
- Considerar los números irracionales como unos nuevos números decimales.
- Definir la recta real: los números reales.
- Definir intervalos en la recta real.
- Aproximarse a un número real considerando el error cometido en la aproximación.

Criterios de evaluación

- Usar adecuadamente del vocabulario matemático.
- Identificar un número racional.
- Identificar fracciones equivalentes.
- Reducir fracciones a común denominador.
- Comparar fracciones.
- Calcular las operaciones básicas con fracciones.
- Adquirir hábitos automáticos de cálculo con fracciones.
- Localizar un número en la recta racional.
- Convertir una fracción a decimal y viceversa.
- Identificar un número irracional.
- Definir intervalos en la recta real.
- Aproximar un número real considerando el error cometido en la misma.
- Redondear decimales.

Contenidos

- **Conceptos** ("saber")
  - Los números naturales y enteros.
  - Simplificación de fracciones. La fracción irreducible.
  - Operaciones con números racionales
  - Propiedades de las operaciones con números racionales.
  - Representación gráfica de un número racional.
  - Expresión decimal de un número racional
  - Expresión fraccionaria de un número decimal.
  - Unos nuevos decimales: los irracionales.
  - La recta real.
  - Intervalos.
  - Valores aproximados: errores.
- **Procedimientos** ("Saber hacer")
  - Utilización de los algoritmos tradicionales de las operaciones de números naturales, enteros y racionales.
  - Utilización de la jerarquía y propiedades de las operaciones y de las reglas de uso de paréntesis en los cálculos escritos.
  - Utilización de la propiedad distributiva para sacar factor común.
  - Comparación de números racionales por reducción a denominador común.
  - Obtención de fracciones equivalentes:
    a) por ampliación
    b) por simplificación.
  - Utilización de los algoritmos tradicionales de las operaciones con números decimales.
  - Sustitución de un número por otro más sencillo, de acuerdo con la precisión que requiera su uso.
  - Cálculo y uso de fracciones generatrices.
  - Búsqueda y expresión de números irracionales.
  - Utilización de diferentes recursos (paso de decimal a fracción o viceversa, expresión de los datos con las unidades más adecuadas ...) para la simplificación de los cálculos.
  - Valoración de la conveniencia y el empleo de aproximaciones de números, con conocimiento de la magnitud del error cometido.
- **Actitudes** ("Saber ser")
  - Confianza en las propias capacidades para afrontar problemas y realizar cálculos con números racionales.
  - Sensibilidad y gusto por la presentación ordenada y clara del proceso de cálculo seguido y de los resultados obtenidos.
  - Valoración de la precisión, simplicidad y utilidad del lenguaje numérico para resolver situaciones reales.
  - Disposición favorables a la revisión y mejora del resultado de cualquier cálculo o problema numérico.

▸ Programación por competencias

COMPETENCIA MATEMÁTICA

PENSAMIENTO Y RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

Descriptores

1. Entender la extensión y las limitaciones del cálculo con números reales.
2. Conocer la posible relación de inclusión entre los números naturales, enteros, racionales e irracionales.

Desempeño

1. Realiza los cálculos atendiendo a la tipología de los números.	- Realiza las operaciones con expresiones semejantes. - Generaliza los resultados de las propiedades aplicadas.	- **Ejemplos y ejercicios del tema** (pág. 10 a 24)
2. Comprende la utilidad de los algoritmos de cálculo numérico.	- Obtiene el común denominador. - Suma, resta, multiplica y divide fracciones. - Transforma una fracción a decimal y viceversa. - Automatiza los cálculos.	

ARGUMENTAR MATEMÁTICAMENTE

Descriptores

1. Utilizar la jerarquía y propiedades de las operaciones y de las reglas de uso de paréntesis en los cálculos numéricos.
2. Sustituir un número por otro más sencillo, de acuerdo con la precisión que requiera su uso.

Desempeño

1. Compara números estableciendo un orden entre ellos.	- Obtiene fracciones equivalentes. - Compara números racionales por reducción a denominador común. - Compara números reales y construye intervalos dentro de la recta real.	- **Ejemplos 1 y 2** (pág. 10 y 11) - **Ejercicios 1 a 5, 11, 16 a 26, 32, 33, 62 y 63** (pág. 10, 11, 16, 20 a 22 y 24)
2. Representa números gráficamente.	- Representa números en la recta racional. - Representa números en la recta real. - Representa intervalos en la recta real.	- **Ejemplo 5** (pág. 15) - **Ejercicios 8, 11, 42, 62 y 63** (pág. 13, 16, 22 y 24)
3. Utiliza diferentes recursos para simplificar los cálculos y resultados.	- Pasa de decimal a fracción o viceversa.	- **Ejercicios 9 y 55 a 59** (pág. 14 y 23)
4. Realiza aproximaciones numéricas.	- Valora la conveniencia y el empleo de aproximaciones numéricas. - Expresa los datos con el número de decimales más adecuado. - Determina la magnitud del error cometido en una aproximación.	- **Ejemplo 6** (pág. 17) - **Ejercicios 64 a 67** (pág. 24)

PLANTEAR Y RESOLVER PROBLEMAS MATEMÁTICOS	**Descriptores**		
	1. Reducir problemas complejos a otros más sencillos para facilitar la comprensión y solución de los mismos. 2. Reflexionar sobre la validez de las soluciones obtenidas.		
	Desempeño		
	1. Identifica la tipología de los números que intervienen en el ejercicio.	- Adapta el algoritmo de cálculo a la tipología numérica. - Simplifica, si es posible, el proceso de cálculo propuesto.	- **Plantear y resolver problemas matemáticos** (pág. 10 a 24)
	2. Resuelve la cuestión planteada.	- Elige el sistema de resolución. - Obtiene, valora y verifica la solución.	
LENGUAJE MATEMÁTICO	**Descriptores**		
	1. Utilizar los símbolos, las operaciones y el lenguaje técnico formal.		
	Desempeño		
	1. Valora la precisión, simplicidad y utilidad del lenguaje numérico para resolver situaciones reales.	- Interpreta el lenguaje formal y simbólico de las matemáticas. - Trabaja con expresiones simbólicas y fórmulas.	- **Ejemplo 1** (pág. 167)
	2. Traduce el lenguaje natural a lenguaje formal y matemático.	- Entiende las equivalencias entre un lenguaje y otro. - Es crítico en la exactitud del lenguaje formal.	- **Ejemplos y ejercicios del tema** (pág. 10 a 24)

COMPETENCIA LINGÜÍSTICA

COMPETENCIA LINGÜÍSTICA	**Descriptores**		
	1. Comprender el enunciado de un problema de cálculo numérico. 2. Aportar vocabulario específico y preciso relacionado con el cálculo numérico. 3. Describir verbalmente el proceso seguido en la resolución de un problema de cálculo numérico, confrontándolo con otros posibles.		
	Desempeño		
	1. Comprende lo que lee.	- Identifica la pregunta que se le hace. - Identifica los elementos esenciales en el cálculo propuesto. - Discrimina e interpreta correctamente la información facilitada.	- **Ejemplos y ejercicios del tema** (pág. 10 a 24)
	2. Se expresa por escrito de manera adecuada y correcta, con claridad y coherencia, utilizando un lenguaje preciso.	- Presenta el texto con la solución del problema de forma adecuada y correcta. - Selecciona la información adecuada.	

COMPETENCIA SOCIAL Y CIUDADANA

COMPETENCIA SOCIAL Y CIUDADANA

Descriptores

1. Plantear en grupo problemas de cálculo numérico, valorando la rapidez de cálculo mental.

Desempeño

1. Desarrolla habilidades para la competición en sociedad.	- Respeta las reglas de juego. - Acepta los resultados.	- **Ejercicios 1, 3 a 7, 10, 12 a 14, 16 a 41** (pág. 10 a 12, 15, 20 a 22)

COMPETENCIA EN EL CONOCIMIENTO E INTERACCIÓN CON EL MEDIO FÍSICO

COMPETENCIA EN CONOCIMIENTO E INTERACCIÓN...

Descriptores

1. Advertir con ejemplos el uso de los números reales en la resolución de situaciones de la vida cotidiana y del entorno y medio físicos.

Desempeño

1. Interpreta situaciones del mundo físico con ayuda del cálculo numérico.	- Utiliza el cálculo numérico en las mediciones del mundo físico y real.	- **Introducción** (pág. 8) - **Ejercicios 44 a 51 y 68 a 71** (pág. 22 a 24)

COMPETENCIA DIGITAL Y TRATAMIENTO DE LA INFORMACION

COMPETENCIA DIGITAL Y TRATAMIENTO DE LA INFORMACION

Descriptores

1. Confeccionar esquemas lógicos de cálculo, tanto mental como para la resolución por escrito.
2. Reconocer y valorar el uso de la calculadora para la realización de cálculos e investigaciones numéricas.

Desempeño

1. Interpreta, organiza y contrasta la información recibida.	- Resume y sintetiza la información. - Realiza actividades que requieren organización, relación o análisis de la información. - Elabora algoritmos para simplificar los cálculos numéricos.	- **Ejemplos y ejercicios del tema** (pág. 10 a 24)
2. Expone y presenta los resultados de manera ordenada y clara, transmitiéndola así oralmente o por escrito.	- Presenta los resultados de forma clara y ordenada. - Respeta y cumple el lenguaje matemático.	
3. Codifica el lenguaje matemático.	- Reconoce que el lenguaje matemático supone codificar la información que nos proporciona la realidad. - Valora el uso de la calculadora en los cálculos numéricos.	- **Ejercicios 27, 43 a 54 y 68 a 71** (pág. 21 a 24)

COMPETENCIA APRENDER A APRENDER

COMPETENCIA APRENDER A APRENDER

Descriptores

1. Adquirir conciencia y hacer uso de las propias capacidades y conocimientos para iniciarse en el cálculo numérico, capacitándose para continuar aprendiendo de manera cada vez más eficaz y autónoma de acuerdo a los propios objetivos y necesidades.
2 Desarrollar la curiosidad de plantearse preguntas, formalizarlas y resolverlas con la metodología estudiada.
3. Utilizar estrategias de aprendizaje, en especial de automatismo en el cálculo.

Desempeño

1. Desarrolla habilidades de obtención, análisis y elaboración de la información.	- Lee los enunciados de los ejercicios con la intención de comprender, relacionar y sintetizar contenidos. - Maneja adecuadamente recursos y técnicas de aprendizaje individual.	- **Ejemplos y ejercicios del tema** (pág. 10 a 24)
2.Mejora la atención y motivación.	- Se fija en cada paso y lo analiza, afianzando el proceso de aprendizaje. - Cuida la expresión y la presentación de los trabajos.	
3. Mejora la motivación	- Reflexiona sobre el interés puesto en la ejecución de los ejercicios. - Cuida la expresión y la presentación.	

COMPETENCIA CULTURAL Y ARTÍSTICA

COMPENTENCIA CULTURAL Y ARTÍSTICA

Descriptores

1. Mostrar hechos históricos relacionados con los conceptos desarrollados en el tema y presentar figuras destacadas de la historia de las matemáticas.

Desempeño

1. Relaciona los conceptos matemáticos con un hecho y/o autor históricos.	- Muestra un hecho y/o autor relacionado con el cálculo numérico.	- **Introducción** (pág. 8) - **Ejemplo 5** (pág. 15) - **Ejercicio 30** (pág. 21)

COMPETENCIA AUTONOMÍA E INICIATIVA PERSONAL

COMPETENCIA AUTONOMÍA E INICIATIVA PERSONAL

Descriptores

1. Confiar en las propias capacidades y gusto por la elaboración y uso de estrategias personales de cálculo.
2. Tener tenacidad y perseverancia en la búsqueda de solución a los problemas de cálculo numérico.

Desempeño

1. Idea y planifica el desarrollo de un ejercicio.	- Elige la opción adecuada para la resolución de los ejercicios. - Mantiene la opción hasta llegar a la conclusión final.	- **Ejemplos y ejercicios del tema** (pág. 10 a 24)
2. Evalúa la solución obtenida.	- Valora el resultado y lo pone en relación con su enunciado del problema resuelto. - Está dispuesto a revisar y mejorar el resultado de cualquier cálculo o problema numérico	
3. Toma decisiones en función del resultado obtenido.	- Decide en función del resultado.	

▶ Pág. 8 - 9. Los números reales



SOLUCIONARIO

Halla el m.c.d. y el m.c.m. de:

a) m.c.d. (15, 25) = 5; m.c.m (15, 25) = 75

b) m.c.d. (10, 30) = 5; m.c.m. (10, 30) = 30

c) m.c.d. (3, 6, 8) = 1; m.c.m. (3, 6, 8) = 24

d) m.c.d. (24, 40, 60) = 4; m.c.m. (24, 40, 60) = 120

LAS FRACCIONES

Completa las igualdades siguientes:

a) $\frac{3}{5} = \frac{3 \times 4}{5 \times 4} = \frac{12}{20}$;

b) $\frac{7}{3} = \frac{7 \times 5}{3 \times 5} = \frac{35}{15}$;

c) $\frac{54}{42} = \frac{54 : 6}{42 : 6} = \frac{9}{7}$;

d) $\frac{5}{9} = \frac{25}{45} = \frac{30}{54}$;

e) $\frac{3}{5} + \frac{8}{5} = \frac{3+8}{5} = \frac{11}{5}$;

f) $\frac{9}{5} - \frac{2}{5} = \frac{9-2}{5} = \frac{7}{5}$;

g) $\frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} + \frac{1 \times 2}{2 \times 2} = \frac{3}{4} + \frac{2}{4} = \frac{5}{4}$;

h) $\frac{4}{5} \times \frac{7}{2} = \frac{4 \times 7}{5 \times 2} = \frac{28}{10}$;

i) $\frac{6}{5} : \frac{2}{3} = \frac{6 \times 3}{5 \times 2} = \frac{18}{10}$;

j) $2 \times \frac{7}{3} = \frac{2 \times 7}{3} = \frac{14}{3}$

LOS DECIMALES

1 Escribe la fracción y el decimal que representa el 30%.

$\frac{3}{10}$ y 0,3

2 Continúa la serie: 2,5 ; 0 ; –2,5; –5; –7,5; –10; –12,5.



DE 2º A 3º

RECUERDA: M.C.D. Y M.C.M.

Sabes que estas siglas corresponden al **máximo común divisor** y **mínimo común múltiplo**, respectivamente, de dos o más números.

EJEMPLO

$12 = 2^2 \times 3$ y $30 = 2 \times 3 \times 5$. Por tanto:

m.c.d $(12, 30) = 2 \times 3 = 6$ (producto de los factores comunes elevados al menor exponente).

m.c.m $(12, 30) = 2^2 \times 3 \times 5 = 60$ (producto de los factores comunes, y no comunes, elevados al mayor exponente).

PRACTICA

Halla el m.c.d y el m.c.m de:

a) 18 y 25 b) 10 y 30 c) 3, 6 y 8 d) 24, 40 y 60

LAS FRACCIONES

Completa las igualdades siguientes:

a) $\frac{5}{3} = \frac{3}{5} = \frac{12}{\ldots}$ b) $\frac{7}{3} = \frac{7\times\ldots}{3\times\ldots} = \frac{\ldots}{15}$ c) $\frac{54}{42} = \frac{54:\ldots}{42:\ldots} = \frac{\ldots}{7}$ d) $\frac{5}{9} = \frac{\ldots}{45} = \frac{30}{\ldots}$

e) $\frac{5}{8} = \frac{8}{\ldots} = \frac{\ldots}{\ldots}$ f) $\frac{9}{6} = \frac{3}{\ldots} = \frac{\ldots}{\ldots}$ g) $\frac{5}{4} = \frac{1}{2} = \frac{3}{4} = \frac{1+\ldots}{2\times\ldots} = \frac{5}{4} = \frac{\ldots}{4} = \frac{\ldots}{4}$

h) $\frac{4}{3} = \frac{7}{2} = \frac{\ldots}{\ldots} = \ldots$ i) $\frac{6}{3} = \frac{3}{2} = \frac{\ldots}{\ldots} = \ldots$ j) $2\frac{7}{3} = \frac{\ldots}{3}$

LOS DECIMALES

1 Escribe la fracción y el decimal que representa el 30%.

2 Construye la serie 2,5 ; 0 ; −2,5 ; −5 ; ...

3 Completa:

a) $1,02 = 1 + \frac{\ldots}{100}$ b) $7 + \frac{3}{1000} = \ldots$ c) $\frac{49}{10000} = 0,\ldots$ d) $5\times100 + 2\times10 + \frac{1}{100} + \frac{4}{1000} = \ldots$

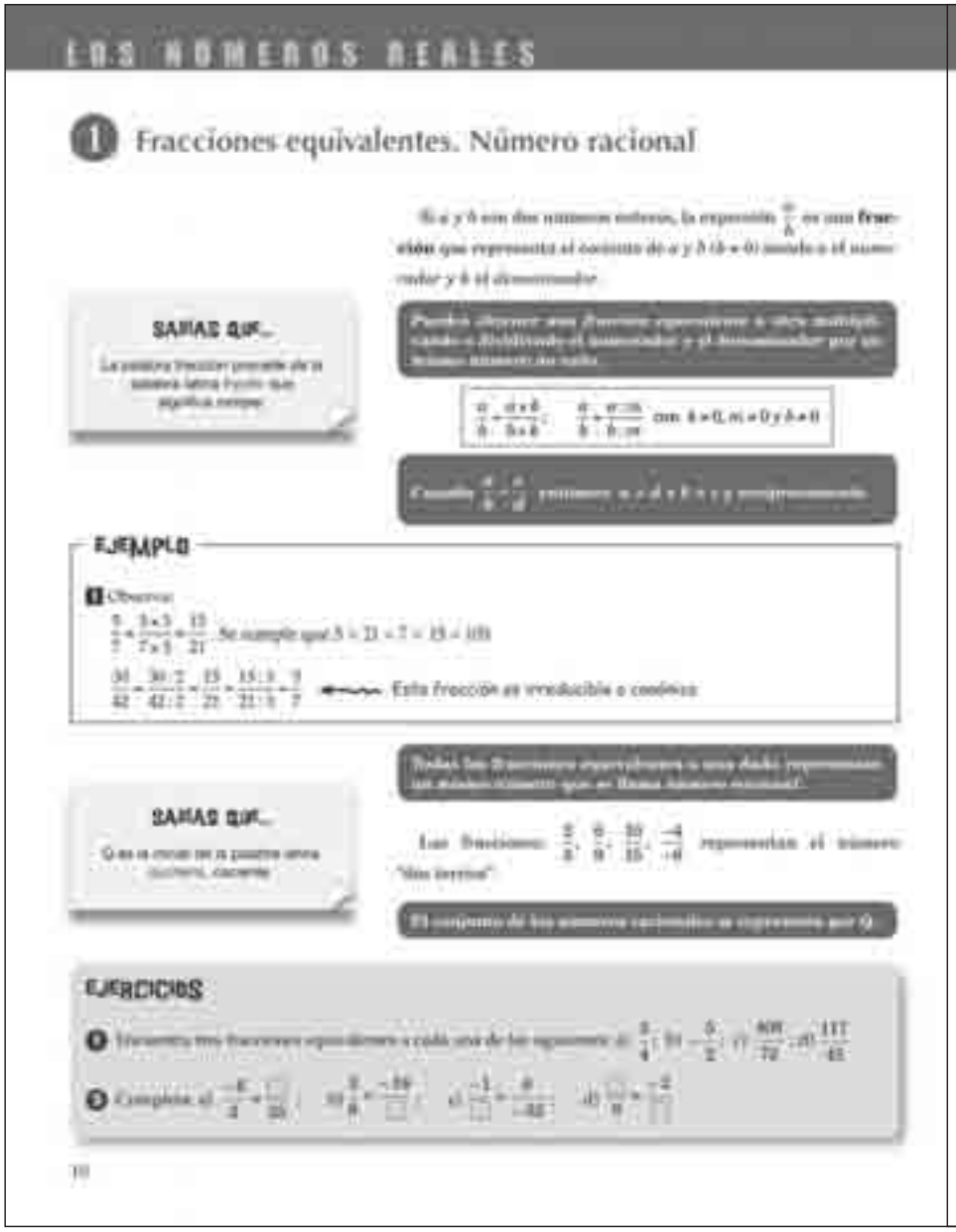
3 Completa:

a) $1,02 = 1 + \dfrac{2}{100}$ **b)** $7 + \dfrac{3}{1000} = 7,003$

c) $\dfrac{49}{10000} = 0,0049$

d) $5\times100 + 2\times10 + \dfrac{1}{100} + \dfrac{4}{1000} = 520,014$

▶ Pág. 10. 1 Fracciones equivalentes. Número racional


LOS NÚMEROS REALES

1 Fracciones equivalentes. Número racional

SABÍAS QUE...

EJEMPLO

SABÍAS QUE...

EJERCICIOS

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS

Recordar que una fracción es un cociente indicado; esto es, representa un cociente.

Dos o más fracciones pueden representar un mismo número.

Fracción irreducible: el numerador y el denominador son primos entre sí.

Signo de una fracción: $-\frac{a}{b}=\frac{-a}{b}=\frac{a}{-b}$ aunque esta última es la menos utilizada.

El ejercicio 2 puede dar pie a que el alumno haga sus propias propuestas.

SOLUCIONARIO

1. Encuentra tres fracciones equivalentes a cada una de las siguientes:

Entre otras pueden ser:

a) $\frac{3}{4}=\frac{6}{8}=\frac{12}{16}=\frac{18}{24}$ **b)** $-\frac{5}{2}=\frac{-10}{4}=\frac{-15}{6}=\frac{-30}{12}$

c) $\frac{408}{72}=\frac{204}{336}=\frac{102}{18}=\frac{51}{9}$ **d)** $\frac{117}{45}=\frac{39}{15}=\frac{13}{5}=\frac{26}{10}$

2. Completa:

a) $-\frac{6}{5}=\frac{x}{35}\Rightarrow -6\cdot 35=5x\Rightarrow x=\frac{-6\cdot 35}{5}=-42$

b) $\frac{3}{8}=\frac{-18}{x}\Rightarrow 3x=-18\cdot 8\Rightarrow x=\frac{-18\cdot 8}{3}=-48$

c) $\frac{-1}{x}=\frac{8}{-32}\Rightarrow (-1)\cdot(-32)=8x\Rightarrow x=\frac{(-1)\cdot(-32)}{8}=4$

d) $\frac{x}{6}=\frac{-2}{y}\Rightarrow xy=-12\Rightarrow$ hay infinitas soluciones.

Por ejemplo: $x=1, y=-12$; $x=3, y=-6$; $x=-4, y=3$; etc.

▶ Pág. 11. 2 Reducción de fracciones común denominador. Comparación



TEMA 1

2 Reducción de fracciones a común denominador. Comparación

Reducir dos o más fracciones a común denominador es obtener fracciones equivalentes a las dadas pero con el mismo denominador. Aunque el denominador común buscado puede ser un múltiplo cualquiera de los denominadores es deseable que sea el mínimo común múltiplo (m.c.m.) de ellos.

EJEMPLO

1 Reducir a común denominador las fracciones: $\frac{2}{3}$, $\frac{-5}{8}$, $\frac{7}{12}$

Como m.c.m. (3, 8, 12) = 24 escribimos fracciones equivalentes a las dadas con este denominador.

Como regla práctica para obtener el nuevo numerador, dividimos 24 entre cada denominador y el resultado lo multiplicamos por el numerador y el denominador.

$24:3=20 \Rightarrow \frac{2}{3}=\frac{2\cdot 20}{3\cdot 20}=\frac{40}{60}$; $24:8=12 \Rightarrow \frac{-5}{8}=\frac{-5\cdot 12}{8\cdot 12}=\frac{-36}{60}$; $24:12=5 \Rightarrow \frac{7}{12}=\frac{7\cdot 5}{12\cdot 5}=\frac{35}{60}$

Por tanto, las fracciones $\frac{2}{3}$, $\frac{-5}{8}$ y $\frac{7}{12}$ son equivalentes a $\frac{40}{60}$, $\frac{-36}{60}$ y $\frac{35}{60}$ respectivamente.

Comparación de fracciones

Si dos fracciones tienen el mismo denominador, la mayor es la que tiene mayor numerador.

Si $a>b$ entonces $\frac{a}{k}>\frac{b}{k}$ con $k>0$

Para comparar fracciones con distinto denominador, debemos reducirlas previamente a común denominador.

EJERCICIOS

1 Reducir a común denominador las fracciones:

a) $\frac{5}{3}$ y $\frac{7}{12}$; b) $\frac{3}{16}$ y $\frac{5}{8}$; c) $\frac{2}{3}$ y $\frac{1}{4}$; d) $\frac{-5}{3}$ y $\frac{7}{16}$.

2 Reducir a común denominador y luego ordena de menor a mayor las fracciones: $\frac{7}{6}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{4}{9}$

3 Mismo ejercicio con las fracciones: $\frac{1}{10}$, $\frac{-5}{3}$, $\frac{6}{5}$ y $\frac{-7}{20}$.

11

c) $\frac{2}{3}$ y $\frac{1}{4}$

m.c.m. (3, 4) = 12 ⇒

$\frac{2}{3}=\frac{2\times 4}{3\times 4}=\frac{8}{12}$ y $\frac{1}{4}=\frac{1\times 3}{4\times 3}=\frac{3}{12}$

d) $\frac{-5}{3}$ y $\frac{7}{16}$

m.c.m. (3, 16) = 48 ⇒ $\frac{-5}{3}=\frac{-5\times 16}{3\times 16}=\frac{-80}{48}$ y $\frac{7}{16}=\frac{7\times 3}{16\times 3}=\frac{21}{48}$

4. Reduce a común denominador y luego ordena de menor a mayor las fracciones: $\frac{7}{6}, \frac{5}{4}, \frac{1}{5}, \frac{4}{9}$

m.c.m. (6, 4, 5, 9) = 180

$180:6=30 \Rightarrow \frac{7}{6}=\frac{7\times 30}{6\times 30}=\frac{210}{180}$

$180:4=45 \Rightarrow \frac{5}{4}=\frac{5\times 45}{4\times 45}=\frac{225}{180}$

$180:5=36 \Rightarrow \frac{1}{5}=\frac{1\times 36}{5\times 36}=\frac{36}{180}$

$180:5=36 \Rightarrow \frac{1}{5}=\frac{1\times 36}{5\times 36}=\frac{36}{180}$

$\frac{36}{180}<\frac{80}{180}<\frac{210}{180}<\frac{225}{180}$

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS

La reducción a común denominador permite comparar fracciones.

Puede ser necesaria la revisión del concepto de mínimo común múltiplo.

SOLUCIONARIO

3. Reduce a común denominador las fracciones:

a) $\frac{5}{3}$ y $\frac{7}{12}$;

m.c.m. (3, 12) = 12 ⇒ $\frac{5}{3}=\frac{5\times 4}{3\times 4}=\frac{20}{12}$ y $\frac{7}{12}$

b) $\frac{3}{16}$ y $\frac{5}{8}$

m.c.m. (16, 8) = 16 ⇒ $\frac{3}{16}$ y $\frac{5}{8}=\frac{5\times 2}{8\times 2}=\frac{10}{16}$

5. Mismo ejercicio con las fracciones: $\frac{1}{10}, \frac{-5}{3}, \frac{6}{5}$ y $\frac{-7}{20}$:

m.c.m. (10, 3, 5, 20) = 60

$60:10=6 \Rightarrow \frac{1}{10}=\frac{1\times 6}{10\times 6}=\frac{6}{60}$

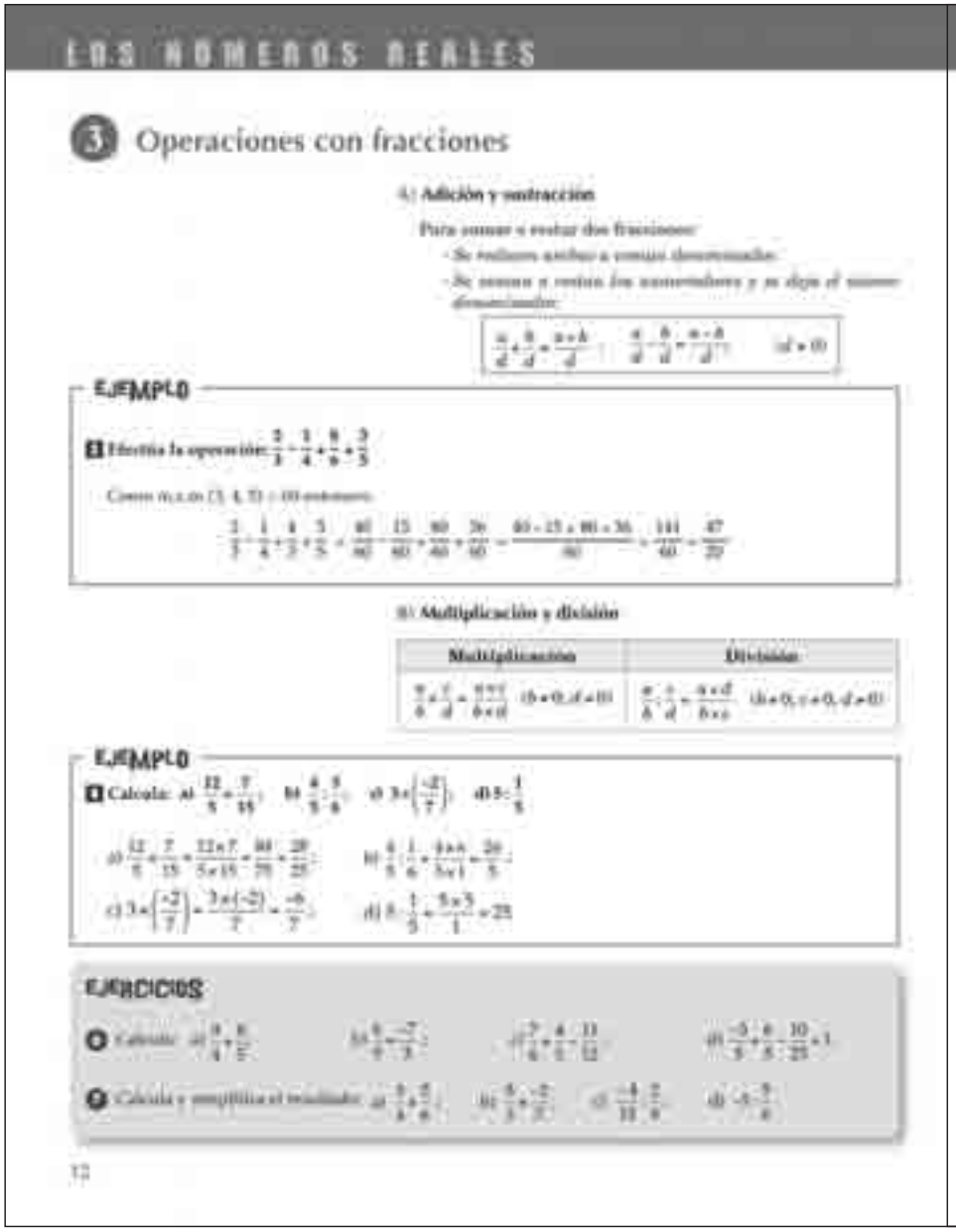
$60:3=20 \Rightarrow \frac{-5}{3}=\frac{-5\times 20}{3\times 20}=\frac{-100}{60}$

$60:5=12 \Rightarrow \frac{6}{5}=\frac{6\times 12}{5\times 12}=\frac{72}{60}$

$60:20=3 \Rightarrow \frac{-7}{20}=\frac{-7\times 3}{20\times 3}=\frac{-21}{60}$

$\frac{-100}{60}<\frac{-21}{60}<\frac{6}{60}<\frac{72}{60}$

▶ Pág. 12. 3 Operaciones con fracciones


LOS NÚMEROS REALES

3 Operaciones con fracciones

a) Adición y sustracción

EJEMPLO

b) Multiplicación y división

Multiplicación	División

EJEMPLO

EJERCICIOS

12

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS

Revisión de conceptos.

Como algunas calculadoras dan una expresión tipo *a/b/c* en los resultados puede ser conveniente la realización del ejercicio 27 (página21)

SOLUCIONARIO

6. Calcula:

a) $\frac{9}{4}+\frac{8}{5}=\frac{45}{20}+\frac{32}{20}=\frac{77}{20}$

b) $\frac{6}{5}+\frac{-7}{3}=\frac{18}{15}+\frac{-35}{15}=\frac{-17}{15}$

c) $\frac{7}{6}+\frac{4}{3}-\frac{11}{12}=\frac{14}{12}+\frac{16}{12}-\frac{11}{12}=\frac{14+16-11}{12}=\frac{9}{12}$

d) $\frac{-3}{5}+\frac{6}{5}-\frac{10}{25}+3=\frac{-15}{25}+\frac{30}{25}-\frac{10}{25}+\frac{75}{25}=\frac{80}{25}=\frac{16}{5}$

7. Calcula y simplifica el resultado:

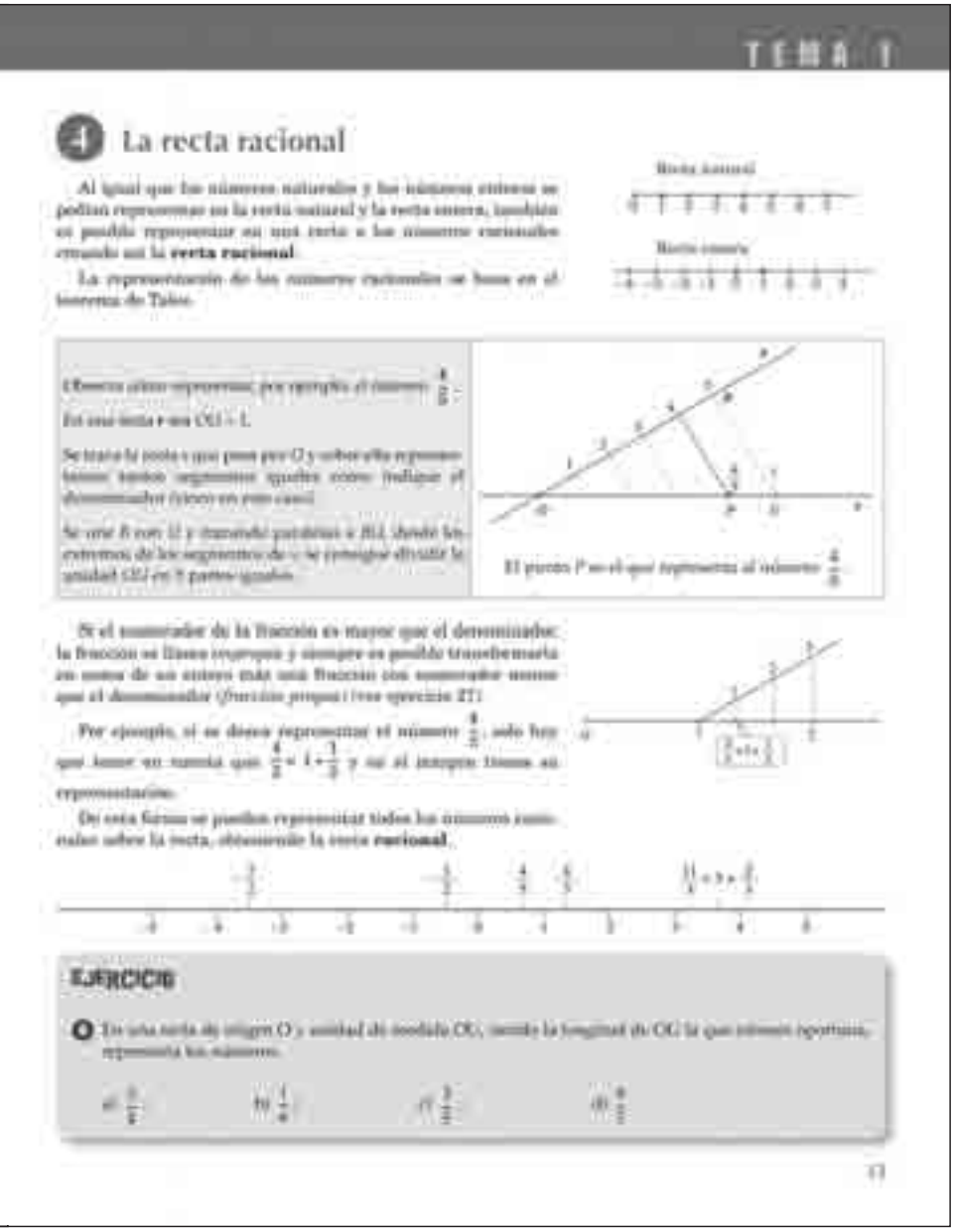
a) $\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}=\frac{3\times5}{4\times6}=\frac{15}{24}=\frac{5}{8}$

b) $\frac{5}{3}\times\frac{-2}{7}=\frac{5\times(-2)}{3\times7}=\frac{-10}{21}$

c) $\frac{-4}{15}:\frac{2}{9}=\frac{(-4)\times9}{15\times2}=\frac{-36}{30}=\frac{-6}{5}$

d) $-5:\frac{5}{6}=\frac{-5}{1}:\frac{5}{6}=\frac{(-5)\times6}{1\times5}=\frac{-30}{5}=-6$

▶ Pág. 13. 4 La recta racional



TEMA 1

4 La recta racional

Al igual que los números naturales y los números enteros se podían representar en la recta natural y la recta entera, también es posible representar en una recta a los números racionales creando así la **recta racional**.

La representación de los números racionales se basa en el teorema de Tales.

Recta natural

Recta entera

¿Somos capaces de representar, por ejemplo, el número $\frac{4}{3}$?

En una recta r con $OU = 1$.

Se traza la recta s que pasa por O y sobre ella se representan tantos segmentos iguales como indique el denominador (tres en este caso).

Se une 3 con U y trazando paralelas a 3U, desde los extremos de los segmentos de s, se consigue dividir la unidad OU en 3 partes iguales.

El punto P es el que representa al número $\frac{4}{3}$

Si el numerador de la fracción es mayor que el denominador, la fracción se llama impropia y siempre es posible transformarla en suma de un entero más una fracción con numerador menor que el denominador (*fracción propia*) (ver ejercicio 27).

Por ejemplo, si se desea representar el número $\frac{8}{3}$, solo hay que tener en cuenta que $\frac{8}{3} = 1 + \frac{5}{3}$ y ya el proceso lleva su representación.

De esta forma se pueden representar todos los números racionales sobre la recta, obteniendo la recta **racional**.

$-\frac{3}{2}$ $-\frac{1}{2}$ $\frac{4}{5}$ $\frac{6}{5}$ $\frac{11}{4} = 2 + \frac{3}{4}$

EJERCICIO

O En una recta de origen O y unidad de medida OU, siendo la longitud de OU la que estimes oportuna, representa los números.

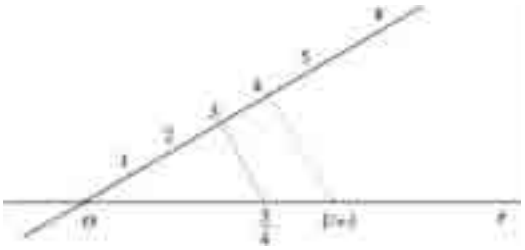
a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{1}{6}$ c) $\frac{3}{5}$ d) $\frac{8}{3}$

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS

Diferenciar la representación de fracción propia o impropia.

SOLUCIONARIO

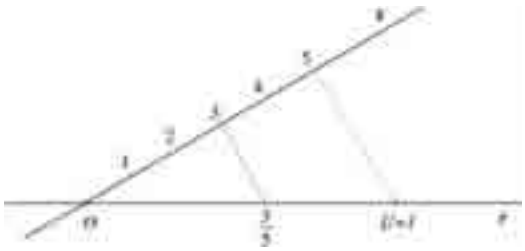
8. En una recta de origen O y unidad de medida OU, siendo la longitud de OU la que estimes oportuna, representa los números. a) $\frac{3}{4}$; b) $\frac{1}{6}$; c) $\frac{3}{5}$; d) $\frac{8}{3}$



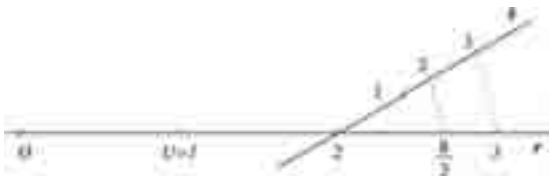
b)



c)



d)



▶ Pág. 14. 5 Cómo pasar de fracción a decimal y de decimal a fracción



LOS NÚMEROS REALES

5 Cómo pasar de fracción a decimal y de decimal a fracción

A) De fracción a decimal

Exacto	Periódico puro	Periódico mixto
$\frac{43}{25} = 1,72$	$\frac{11}{3} = 3,666\ldots = 3,\widehat{6}$	$\frac{11}{6} = 1,833\ldots = 1,8\widehat{3}$

B) De decimal a fracción

Decimal exacto	Decimal periódico puro	Decimal periódico mixto
El numerador es todo el número sin la coma, y el denominador es la unidad seguida de tantos ceros como cifras tenga la parte decimal	El numerador es la diferencia entre el número decimal sin la coma y la parte entera, y el denominador son tantos nueves como cifras decimales tenga el periodo.	El numerador es la diferencia entre el número decimal sin la coma y la parte no periódica, cambiado de la otra, y el denominador la primera tantos nueves como cifras tenga el periodo seguidas de tantos ceros como cifras no tenga el anteperiodo.
Ejemplo $0,225 = \frac{225}{1000} = \frac{9}{40}$	Ejemplo $3,\widehat{14} = \frac{314-3}{99} = \frac{311}{99}$	Ejemplo $5,0\widehat{24} = \frac{5024-50}{900} = \frac{4974}{900} = \frac{829}{150}$

EJERCICIOS

14

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS

Todo decimal exacto o periódico puede escribirse como un cociente de enteros y recíprocamente.

Puede ser interesante debatir acerca de los decimales con periodo 9

SOLUCIONARIO

9. Obtén de cada fracción su expresión decimal y de cada decimal su expresión fraccionaria:

a) $\frac{8}{5} = 1,6$

b) $\frac{-1}{15} = -0,0\widehat{6}$

c) $\frac{809}{9} = 89,\widehat{8}$

d) $0,85 = \frac{85}{100} = \frac{17}{20}$

e) $0,\widehat{7} = \frac{7-0}{9} = \frac{7}{9}$

f) $0,30\widehat{63} = \frac{3063-30}{9900} = \frac{3033}{9900} = \frac{337}{1100}$

,

▶ Pág. 15. 6 Unos nuevos decimales: los irracionales



TEMA 1

6 Unos nuevos decimales: los irracionales

Ya sabes de ejemplos que:

1) *A toda fracción le corresponde un decimal que puede ser exacto o periódico.*

2) *A todo número decimal exacto o periódico le corresponde una única fracción.*

Sin embargo, es evidente que existen decimales que no son ni exactos ni periódicos. Por ejemplo, los del margen.

Estos números se llaman **números irracionales.**

Los números decimales son: enteros, fraccionarios periódicos y números irracionales y se designan de todos ellos se representa por R.

Los números racionales junto con los irracionales forman el conjunto de los números reales y se representan por R.

EJEMPLO

1 Hay un número irracional especialmente famoso, el número $\pi = 3,14159265\ldots$ que expresa la relación entre la longitud de una circunferencia y su diámetro; pero hay infinitos números irracionales, y uno de ellos es $\sqrt{2}$, que corresponde a la longitud de la diagonal de un cuadrado de lado 1.

Este número, cuyo valor aproximado es $\sqrt{2} = 1,41421356\ldots$, ya fue estudiado por los griegos en el siglo VI a.C. al comprobar que la diagonal de un cuadrado no era conmensurable con el lado.

Otros irracionales son $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$ y en general también lo son las raíces no exactas de los números naturales así como el resultado de sumar, restar, multiplicar o dividir un número irracional con uno racional.

Dado que los números irracionales no son ni exactos ni periódicos, **los números irracionales no pueden escribirse como una fracción**, es decir, **la división de dos números enteros no genera nunca un número irracional.**

El esquema del margen refleja las sucesivas ampliaciones de los conjuntos numéricos.

EJERCICIO

Clasifica los siguientes números en racionales o irracionales:

a) $\frac{7}{9}$ b) 3,45 c) $\sqrt{7}$ d) 1,23232323... e) -7 f) 2,30300300030000...

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS

"Prueban que la diagonal del cuadrado es inconmensurable con su lado, mostrando que si se admite que es conmensurable, un número impar sería igual que uno par"(Aristóteles. Analíticos posteriores, I, 23).

En el Teeteto de Platón (147d-148b) se cuenta cómo Teodoro había demostrado que las raíces de los enteros no cuadrados perfectos son irracionales

SOLUCIONARIO

10. Clasifica los siguientes números en racionales o irracionales:

a) $\frac{7}{9}$ es racional

b) 3,45 es racional

c) $\sqrt{7}$ es irracional

d) 1,23232323…= $1,2\widehat{3}$ es racional.

e) –7 es racional

f) 2,30300300030000... es irracional

▶ Pág. 16. 7 La recta real: intervalos



LOS NÚMEROS REALES

5 Cómo pasar de fracción a decimal y de decimal a fracción

A) De fracción a decimal

Exacto | Periódico puro | Periódico mixto

B) De decimal a fracción

Decimal exacto | Decimal periódico puro | Decimal periódico mixto

EJERCICIO

14

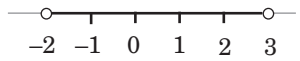
ORIENTACIONES DIDÁCTICAS

Revisión del teorema de Pitágoras.

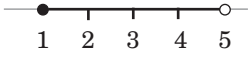
SOLUCIONARIO

11. Representa como un intervalo y sobre la recta real los números x definidos como:

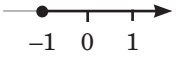
a) $-2 < x < 3 \Rightarrow]-2, 3[$



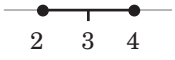
b) $1 \leq x < 5 \Rightarrow [1, 5[$



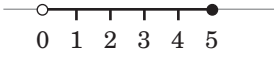
c) $x \geq -1 \Rightarrow [-1, +\infty[$



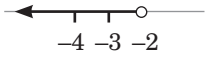
d) $2 \leq x \leq 4 \Rightarrow [2, 4]$



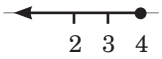
e) $0 < x \leq 5 \Rightarrow]0, 5]$



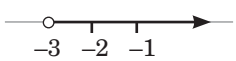
f) $x < -2 \Rightarrow]-\infty, -2[$



g) $x \leq 4 \Rightarrow]-\infty, 4]$



h) $x > -3 \Rightarrow]-3, +\infty[$



▶ Pág. 17. 8 Aproximaciones: errores



TEMA 1

6 Unos nuevos decimales: los irracionales

Ejemplo

Ejercicio

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS

Proponer situaciones para que el alumno valore qué tipo de aproximación o redondeo sería adecuada.

a) Valor de una vivienda

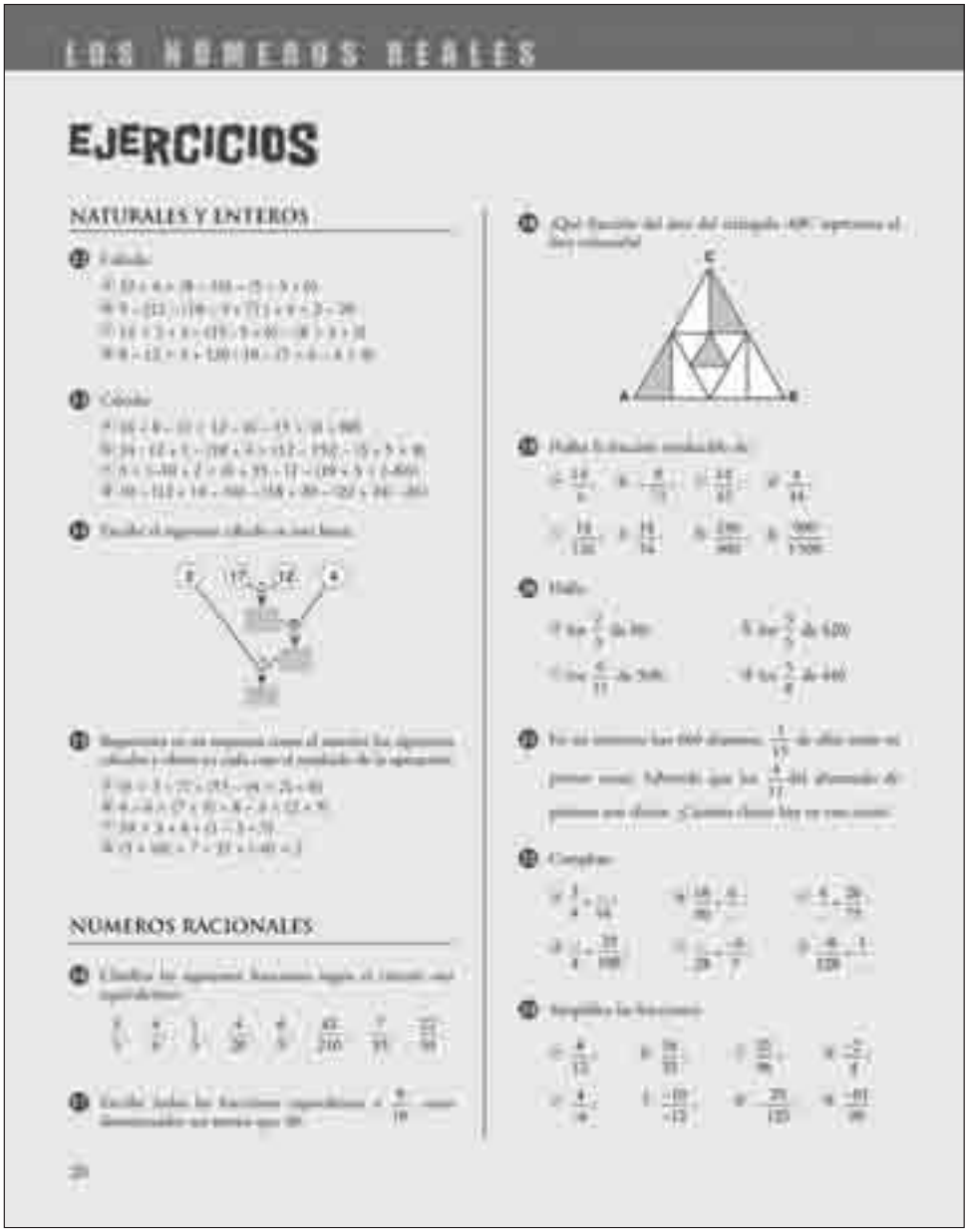
b) Número de alumnos de un centro.

c) Asistentes a un partido de fútbol.

d) Longitud de un lápiz.

e) Grosor de un folio.

▶ Pág. 20. Ejercicios


LOS NÚMEROS REALES

EJERCICIOS

NATURALES Y ENTEROS

NÚMEROS RACIONALES

SOLUCIONARIO

12. Calcula:

a) $32 + 4 \times (8 - 16) - (5 - 3 + 6) = 32 + 4 \times (-8) - 8 =$
$= 32 - 32 - 8 = -8$

b) $9 - [12 - (10 - 3 + 7)] + 4 \times 2 - 20 = 9 - [12 - 14] +$
$+ 8 - 20 = 9 + 2 + 8 - 20 = -1$

c) $12 \times 2 + 3 - (15 : 5 + 6) - (8 \times 3 + 2) = 24 + 3 -$
$- 9 - 26 = -8$

d) $8 - 12 \times 3 + 120 : 10 - (7 \times 6 - 4 \times 8) = 8 - 36 +$
$+ 12 - 10 = -26$

13. Calcula:

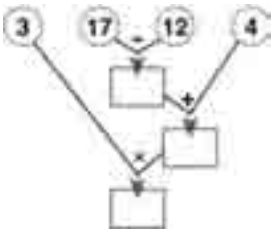
a) $16 + 8 - [3 \times 12 - (6 - 15 \times 4) + 80] = 16 + 8 -$
$-[36 + 54 + 80] = 24 - 170 = -146$

b) $24 : 12 + 1 - [10 + 4 \times (12 - 15)] - (3 + 5 \times 8) = 2$
$+ 1 - [10 - 12] - (3 + 40) = 3 + 2 - 43 = -37$

c) $3 \times (-10 + 2 \times 4) + 35 - (1 - (10 + 3 \times (-8))) =$
$= 3 \times (-2) + 35 - (1 - (-14)) = -6 + 35 - 15 = 14$

d) $10 - (12 + 14 - 16) - [18 + 20 - (22 + 24) - 26] =$
$= 10 - 10 - [18 + 20 - 46 - 26] = 34$

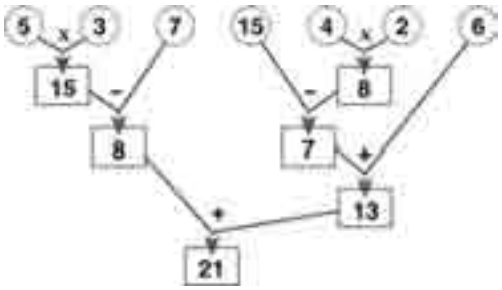
14. Escribe el siguiente cálculo en una línea:



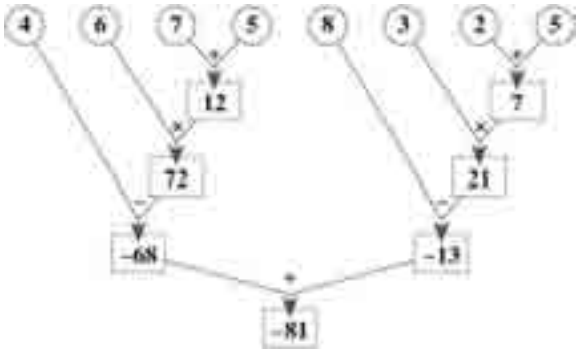
$3 \times [(17 - 12) + 4]$

15. Representa en un esquema como el anterior los siguientes cálculos y obtén en cada caso el resultado de la operación:

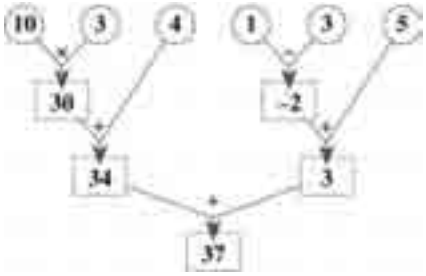
a) (5 × 3 – 7) + (15 – (4 × 2) + 6)



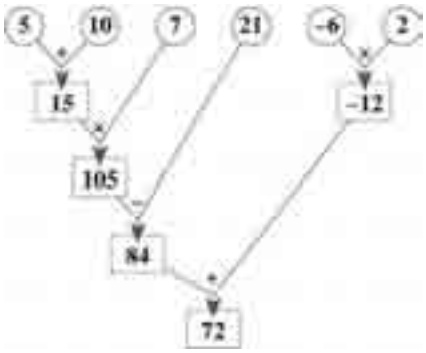
b) 4 – 6 × (7 + 5) + 8 – 3 × (2 + 5)



c) 10 × 3 + 4 + (1 – 3 + 5)



d) (5 + 10) × 7 – 21 + (–6) × 2



16. Clasifica las siguientes fracciones según el criterio «ser equivalentes»

$\frac{3}{5}, \frac{4}{6}, \frac{1}{5}, \frac{4}{20}, \frac{6}{9}, \frac{42}{210}, \frac{7}{35}, \frac{22}{33}$.

$\frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{22}{33}$

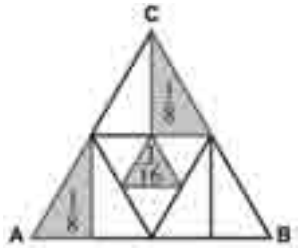
$\frac{1}{5} = \frac{4}{20} = \frac{42}{210} = \frac{7}{35}$

$\frac{3}{5}$

17. Escribe todas las fracciones equivalentes a $\frac{8}{10}$, cuyo denominador sea menor que 40.

$\frac{4}{5} = \frac{8}{10} = \frac{12}{15} = \frac{16}{20} = \frac{20}{25} = \frac{24}{30} = \frac{28}{35}$

18. ¿Qué fracción del área del triángulo *ABC* representa el área coloreada?



$\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{2}{8} : 4 = \frac{2}{8} + \frac{2}{32} = \frac{4}{16} + \frac{1}{16} = \frac{5}{16}$

19. Hallar la fracción irreducible de:

a) $\frac{14}{4} = \frac{7}{2}$ **b)** $-\frac{8}{72} = \frac{-1}{9}$

c) $\frac{14}{42} = \frac{1}{3}$ **d)** $\frac{4}{44} = \frac{1}{11}$

e) $\frac{18}{126} = \frac{1}{7}$ **f)** $\frac{18}{54} = \frac{1}{3}$

g) $\frac{240}{300} = \frac{4}{5}$ **h)** $\frac{900}{1500} = \frac{3}{5}$

20. Halla:

a) $\frac{2}{3} \times 60 = \frac{2 \times 60}{3} = 40$

b) $\frac{3}{5} \times 420 = \frac{3 \times 420}{5} = 252$

c) $\frac{6}{11} \times 308 = \frac{6 \times 308}{11} = 168$

d) $\frac{5}{8} \times 440 = \frac{5 \times 440}{8} = 275$

21. En un instituto hay 660 alumnos, $\frac{1}{5}$ de ellos están en primer curso. Sabiendo que los $\frac{4}{11}$ del alumnado de primero son chicos. ¿Cuántas chicas hay en este curso?

$\frac{1}{5} \times 660 = 44$ alumnos hay en primer curso. De esos son $\left(1 - \frac{4}{11}\right) \times 44 = \frac{7}{11} \times 44 = 28$ chicas.

22. Completa:

a) $\frac{3}{4} = \frac{x}{16} \Rightarrow 3 \times 16 = 4x \Rightarrow x = 12$

b) $\frac{18}{30} = \frac{6}{x} \Rightarrow 18x = 6 \times 30 \Rightarrow x = 10$

c) $\frac{4}{x} = \frac{20}{75} \Rightarrow 4 \times 75 = 20x \Rightarrow x = 15$

d) $\frac{x}{4} = \frac{25}{100} \Rightarrow 100x = 4 \times 25 \Rightarrow x = 1$

e) $\frac{x}{28} = \frac{-6}{7} \Rightarrow 7x = -6 \times 28 \Rightarrow x = -24$

f) $\frac{-8}{128} = \frac{1}{x} \Rightarrow -8x = 128 \Rightarrow x = -16$

23. Simplifica las fracciones:

a) $\frac{8}{12} = \frac{8:4}{12:4} = \frac{2}{3}$

b) $\frac{18}{33} = \frac{18:3}{33:3} = \frac{6}{11}$

c) $\frac{32}{96} = \frac{32:32}{96:32} = \frac{1}{3}$

d) $\frac{-2}{4} = \frac{-2:2}{4:2} = \frac{-1}{2}$

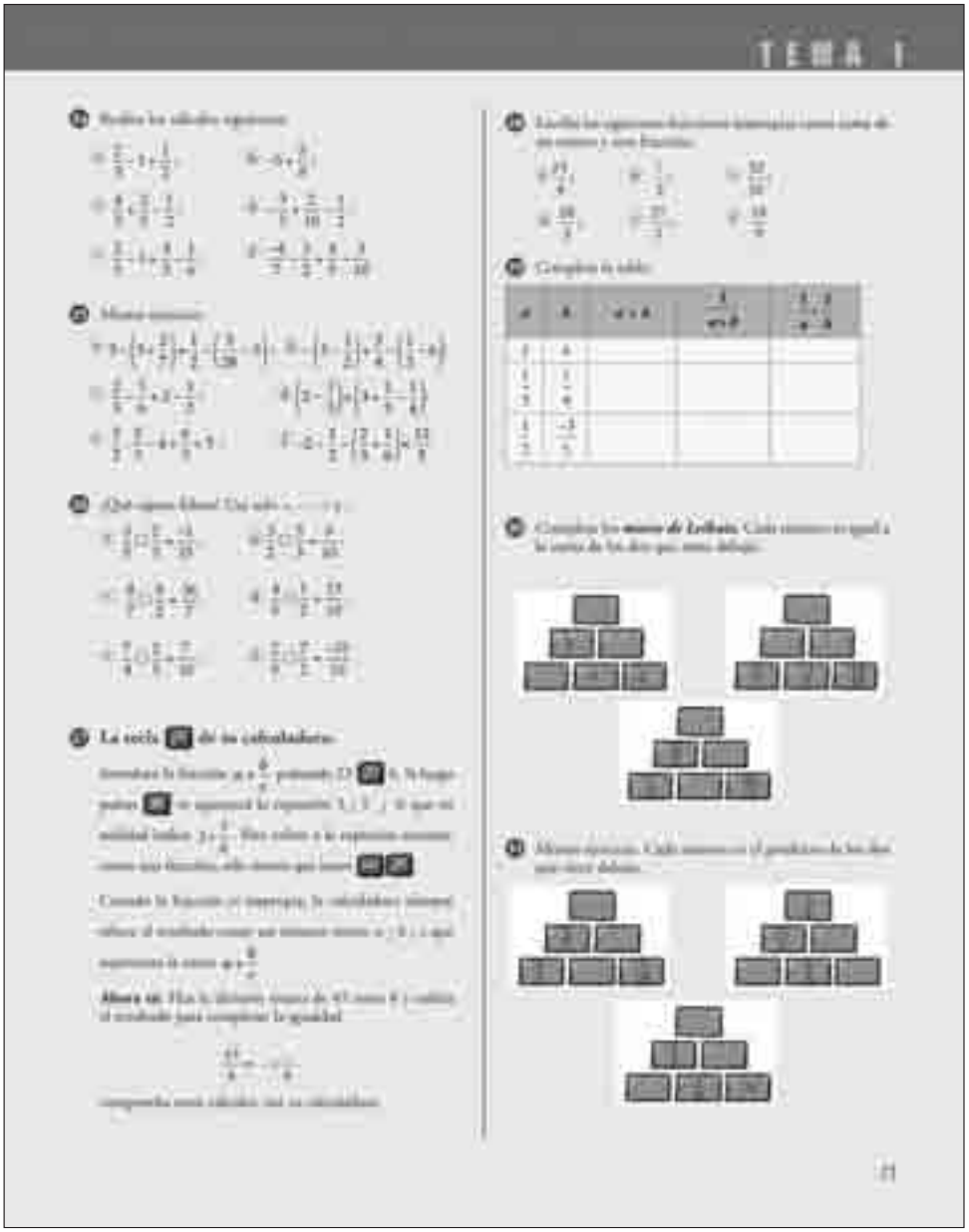
e) $\frac{4}{-6} = \frac{4:2}{-6:2} = -\frac{2}{3}$

f) $\frac{-10}{-12} = \frac{-10:2}{-12:2} = \frac{5}{6}$

g) $\frac{-25}{125} = \frac{-25:25}{125:25} = \frac{-1}{5}$

h) $\frac{-81}{90} = \frac{-81:9}{90:9} = \frac{-9}{10}$

▶ Pág. 21. Ejercicios


TEMA 1

24. Realiza los cálculos siguientes:

a) $\frac{2}{3}-1+\frac{1}{2}=\frac{4}{6}-\frac{6}{6}+\frac{3}{6}=\frac{4-6+3}{6}=\frac{1}{6}$

b) $-5+\frac{5}{8}=\frac{-40}{8}-\frac{5}{8}=\frac{-35}{8}$

c) $\frac{4}{3}+\frac{2}{5}-\frac{1}{2}=\frac{40}{30}+\frac{12}{30}-\frac{15}{30}=\frac{40+12-15}{30}=\frac{37}{30}$

d) $-\frac{3}{5}+\frac{12}{10}-\frac{1}{2}=\frac{-6}{10}+\frac{2}{10}-\frac{5}{10}=\frac{-6+2-5}{10}=\frac{-9}{10}$

e) $\frac{2}{5}-3+\frac{4}{3}-\frac{1}{6}=\frac{12}{30}-\frac{90}{30}+\frac{40}{30}-\frac{5}{30}=$

$=\frac{12-90+40-5}{30}=\frac{-43}{30}$

f) $-\frac{4}{7}-\frac{3}{2}+\frac{4}{5}-\frac{3}{10}=\frac{-40}{70}-\frac{105}{70}+\frac{56}{70}-\frac{21}{70}=$

$=\frac{-40-105+56-21}{70}=\frac{-110}{70}=\frac{-11}{7}$

25. Mismo ejercicio:

a) $3-\left(5+\frac{2}{7}\right)+\frac{1}{2}-\left(\frac{3}{28}-3\right)=$

$=3-\left(\frac{35}{7}+\frac{2}{7}\right)+\frac{1}{2}-\left(\frac{3}{28}-\frac{84}{28}\right)=$

$=3-\frac{37}{7}+\frac{1}{2}+\frac{81}{28}=\frac{84}{28}-\frac{148}{28}+\frac{14}{28}+\frac{81}{28}=$

$=\frac{84-148+14+81}{28}=\frac{31}{28}$

b) $-\left(3+\frac{1}{2}\right)+\frac{3}{4}-\left(\frac{1}{3}-6\right)=-\left(\frac{6}{2}-\frac{1}{2}\right)+\frac{3}{4}-\left(\frac{1}{3}-\frac{18}{4}\right)=$

$=\frac{-5}{2}+\frac{3}{4}+\frac{17}{3}=\frac{30}{12}+\frac{9}{12}+\frac{68}{12}=\frac{-30+9+68}{12}=\frac{47}{12}$

c) $\frac{2}{3}-\frac{5}{6}+2-\frac{1}{2}=\frac{4}{6}-\frac{5}{6}+\frac{12}{6}-\frac{3}{6}=\frac{4-5+12-3}{6}=$

$=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$

d) $\left(2-\frac{1}{3}\right)\times\left(3+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)=\left(\frac{6}{3}-\frac{1}{3}\right)\times\left(\frac{36}{12}+\frac{4}{12}-\frac{3}{12}\right)=$

$=\frac{5}{3}\times\frac{37}{12}=\frac{5\times37}{3\times12}=\frac{185}{36}$

e) $\frac{5}{2}:\frac{5}{3}-4\times\frac{6}{5}+5=\frac{3\times5}{2\times5}-\frac{4\times6}{5}+5=\frac{15}{10}-\frac{24}{5}+5=$

$=\frac{15}{10}-\frac{48}{10}+\frac{50}{10}=\frac{15-48+50}{10}=\frac{17}{10}$

f) $-2-\frac{1}{2}-\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{6}\right)\times\frac{12}{5}=-2-\frac{1}{2}-\left(\frac{4}{6}+\frac{1}{6}\right)\times\frac{12}{5}=$

$=-2-\frac{1}{2}-\frac{5}{6}\times\frac{12}{5}=-2-\frac{1}{2}-2=-4-\frac{1}{2}=$

$=-\frac{8}{2}-\frac{1}{2}=\frac{-9}{2}$

26. ¿Qué signos faltan? Usa solo +, – , × y :

a) $\frac{3}{5}-\frac{2}{3}=\frac{-1}{15}$; **b)** $\frac{3}{2}:\frac{5}{3}=\frac{9}{10}$;

c) $\frac{8}{7}\times\frac{9}{2}=\frac{36}{7}$; **d)** $\frac{4}{5}+\frac{1}{2}=\frac{13}{10}$;

e) $\frac{7}{4}\times\frac{2}{5}=\frac{7}{10}$; **f)** $\frac{2}{5}-\frac{7}{2}=\frac{-31}{10}$

27. La tecla de tu calculadora:

Introduce la fracción $\frac{23}{6}$ pulsando 23 6.

Si luego pulsas te aparecerá la expresión 3 ⌟ 5 ⌟ 6 que en realidad indica $3+\frac{5}{6}$. Para volver a la expresión anterior, como una fracción, sólo tienen que hacer .

Cuando la fracción es impropia, la calculadora siempre ofrece el resultado como un número mixto *a* ⌟ *b* ⌟ *c* que representa la suma $a+\frac{b}{c}$.

Ahora tú: Haz la división entera de 45 entre 8 y utiliza el resultado para completar la igualdad

$$\frac{45}{8}=\ldots+\frac{\ldots}{8}$$

comprueba estos cálculos con tu calculadora.

$$\frac{45}{8}=5+\frac{5}{8}$$

28. Escribe las siguientes fracciones impropias como suma de un entero y una fracción:

a) $\frac{15}{4}$; **b)** $\frac{7}{2}$; **c)** $\frac{52}{16}$; **d)** $\frac{28}{3}$; **e)** $\frac{27}{5}$; **f)** $\frac{10}{9}$

$\frac{15}{4}=3+\frac{3}{4}$; $\frac{7}{2}=3+\frac{1}{2}$; $\frac{52}{16}=3+\frac{4}{16}=3+\frac{1}{4}$;

$\frac{28}{3}=9+\frac{1}{3}$; $\frac{27}{5}=5+\frac{2}{5}$; $\frac{10}{9}=1+\frac{1}{9}$

29. Completa la tabla:

a	b	$a+b$	$\frac{1}{a+b}$	$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$
3	4	7	$\frac{1}{7}$	$\frac{7}{12}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{12}{7}$	7
$\frac{1}{2}$	$\frac{-3}{5}$	$\frac{-1}{10}$	–10	$\frac{1}{3}$

30. Completa los *muros de Leibniz*. Cada número es igual a la suma de los dos que tiene debajo.

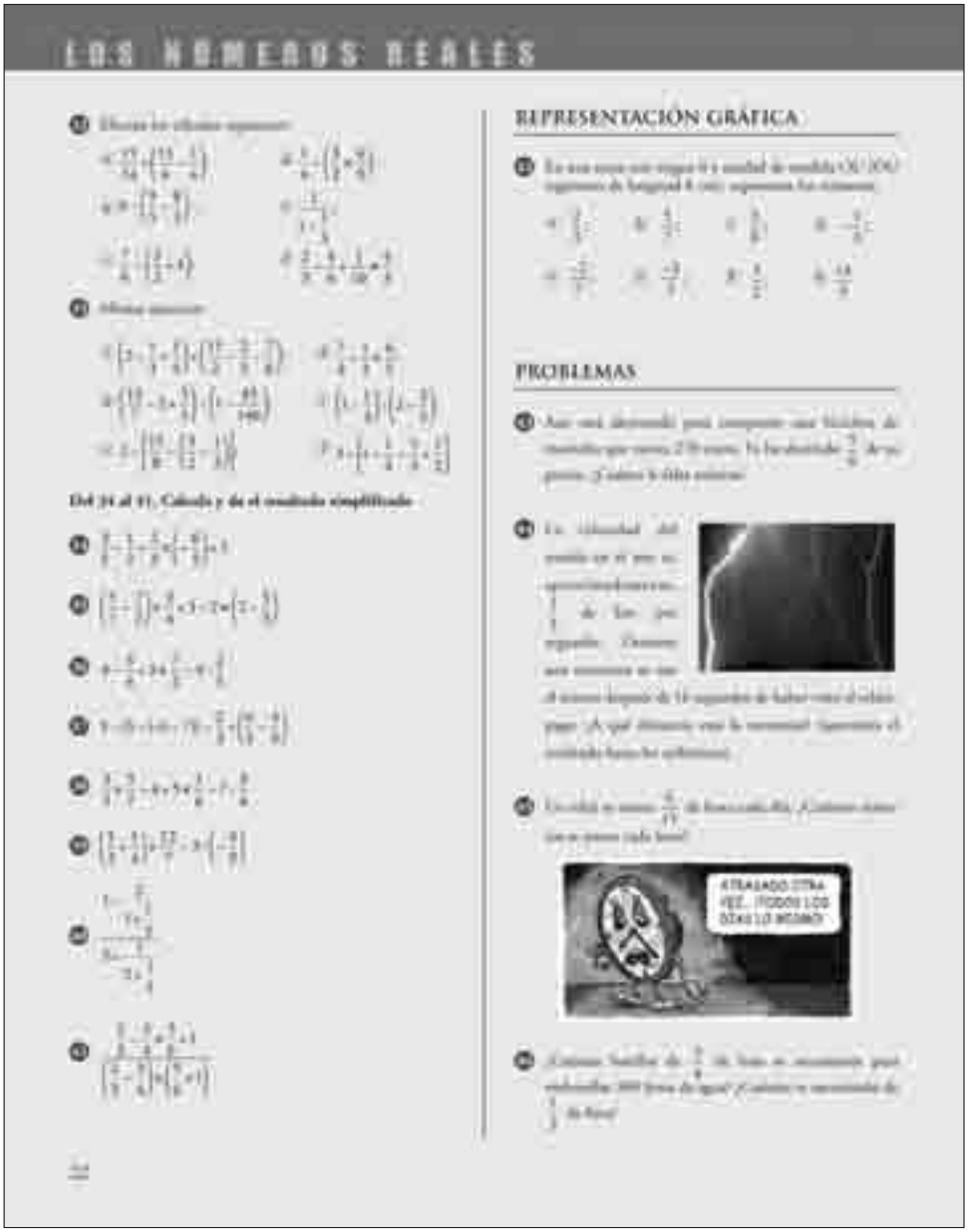


31. Mismo ejercicio. Cada número es el producto de los dos que tiene debajo.





▶ Pág. 22. Ejercicios


LOS NÚMEROS REALES

REPRESENTACIÓN GRÁFICA

PROBLEMAS

32. Efectúa los cálculos siguientes:

a) $\frac{15}{24}+\left(\frac{13}{6}-\frac{1}{4}\right)=\frac{15}{24}+\left(\frac{52}{24}-\frac{6}{24}\right)=\frac{15}{24}+\frac{46}{24}=\frac{61}{24}$

b) $6-\left(\frac{9}{5}-\frac{8}{3}\right)=6-\left(\frac{27}{15}-\frac{40}{15}\right)=6+\frac{13}{15}=\frac{90}{15}+\frac{13}{15}=\frac{103}{15}$

c) $\frac{7}{6}-\left(\frac{3}{2}+4\right)=\frac{7}{6}-\left(\frac{3}{2}-\frac{8}{2}\right)=\frac{7}{6}-\frac{11}{2}=\frac{7}{6}-\frac{33}{6}=\frac{-26}{6}=$

$=\frac{-13}{3}$

d) $\frac{1}{4}-\left(\frac{3}{2}\times\frac{6}{9}\right)=\frac{1}{4}-\frac{18}{18}=\frac{1}{4}-1=\frac{1}{4}-\frac{4}{4}=\frac{-3}{4}$

e) $\frac{1}{1-1/3}=\frac{1}{\frac{3}{3}-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2/3}=1:\frac{2}{3}=\frac{3}{2}$

f) $\frac{2}{3}-\frac{4}{6}+\frac{1}{10}\times\frac{4}{3}=\frac{2}{3}-\frac{4}{6}+\frac{1\times4}{10\times3}=\frac{2}{3}-\frac{4}{6}+\frac{4}{30}=$

$=\frac{20}{30}-\frac{20}{30}+\frac{4}{30}=\frac{4}{30}=\frac{2}{15}$

33. Mismo ejercicio:

a) $\left(2-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{15}{2}-\frac{2}{3}-\frac{7}{6}\right)=$

$=\left(\frac{24}{12}-\frac{4}{12}+\frac{3}{12}\right)+\left(\frac{45}{6}-\frac{4}{6}-\frac{7}{6}\right)=$

$=\frac{24-4+3}{12}+\frac{45-4-7}{6}=\frac{23}{12}+\frac{34}{6}=\frac{23}{12}+\frac{68}{12}=\frac{91}{12}$

b) $\left(\frac{15}{7}-2+\frac{3}{5}\right)-\left(1-\frac{43}{140}\right)=$

$=\left(\frac{75}{35}-\frac{70}{35}+\frac{21}{35}\right)-\left(\frac{140}{140}-\frac{43}{140}\right)=$

$=\frac{75-70+21}{35}-\frac{140-43}{140}=\frac{26}{35}-\frac{97}{140}=$

$=\frac{104}{140}-\frac{97}{140}=\frac{104-97}{140}=\frac{7}{140}=\frac{1}{20}$

c) $2-\left[\frac{15}{8}-\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{3}\right)\right]=2-\left[\frac{15}{8}-\left(\frac{9}{6}-\frac{2}{6}\right)\right]=$

$=2-\left[\frac{15}{8}-\frac{7}{6}\right]=2-\left[\frac{45}{24}-\frac{28}{24}\right]=2-\frac{17}{24}=$

$=\frac{48}{24}-\frac{17}{24}=\frac{31}{24}$

d) $\frac{7}{4}+\frac{1}{3}\times\frac{6}{5}=\frac{7}{4}+\frac{1\times 6}{3\times 5}=\frac{7}{4}+\frac{6}{15}=\frac{105}{60}+\frac{24}{60}=\frac{129}{60}=\frac{43}{20}$

e) $\left(1-\frac{1}{4}\right):\left(2-\frac{3}{5}\right)=\left(\frac{4}{4}-\frac{1}{4}\right):\left(\frac{10}{5}-\frac{3}{5}\right)=\frac{3}{4}:\frac{7}{5}=$

$=\frac{3\times 5}{4\times 7}=\frac{15}{28}$

f) $3-\left[1-\frac{1}{4}-\frac{5}{3}+\frac{1}{2}\right]=3-\left[\frac{12}{12}-\frac{3}{12}-\frac{20}{12}+\frac{6}{12}\right]=$

$=3-\frac{12-3-20+6}{12}=3+\frac{5}{12}=\frac{36}{12}+\frac{5}{12}=\frac{41}{12}$

Del 34 al 41. Calcula y da el resultado simplificado

34. $\frac{3}{5}-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\times\left(-\frac{6}{5}\right)+3=\frac{3}{5}-\frac{1}{2}+\frac{2\times(-6)}{3\times 5}+3=$

$=\frac{3}{5}-\frac{1}{2}-\frac{12}{15}+3=\frac{18}{30}-\frac{15}{30}-\frac{24}{30}+\frac{90}{30}=$

$=\frac{18-15-24+90}{30}=\frac{69}{30}=\frac{23}{10}$

35. $\left(\frac{5}{7}-\frac{7}{2}\right)\times\frac{3}{4}+3-2\times\left(2-\frac{5}{3}\right)=$

$=\left(\frac{10}{14}-\frac{49}{14}\right)\times\frac{3}{4}+3-2\times\left(\frac{6}{3}-\frac{5}{3}\right)=\frac{-39}{14}\times\frac{3}{4}+3-2\times\frac{1}{3}=$

$=\frac{-117}{56}+3-\frac{2}{3}=\frac{-351}{168}+\frac{504}{168}-\frac{112}{168}=\frac{41}{168}$

36. $4-\frac{3}{4}+3\times\frac{7}{2}-4:\frac{2}{3}=4-\frac{3}{4}+\frac{21}{2}-\frac{12}{2}=$

$=\frac{16}{4}-\frac{3}{4}+\frac{42}{4}-\frac{24}{4}=\frac{16-3+42-24}{4}=\frac{31}{4}$

37. $5-3\left(3-\left(-6-7\right)\right)-\frac{2}{3}+\left(\frac{6}{5}-\frac{4}{9}\right)=$

$=5-\left(3-13\right)-\frac{2}{3}+\left(\frac{54}{45}-\frac{20}{45}\right)=5-16-\frac{2}{3}+\frac{34}{45}=$

$=\frac{225}{45}-\frac{720}{45}-\frac{30}{45}+\frac{34}{45}=\frac{225-720-30+34}{45}=\frac{-491}{45}$

38. $\frac{3}{5}\times\frac{5}{7}-4+5\times\frac{1}{6}-7:\frac{3}{4}=\frac{3\times 5}{5\times 7}-4+\frac{5\times 1}{6\times 1}-\frac{7\times 4}{3\times 1}=$

$=\frac{15}{35}-4+\frac{5}{6}-\frac{28}{3}=\frac{90}{210}-\frac{840}{4}+\frac{175}{210}-\frac{1960}{210}=$

$=\frac{90-840+175-1960}{210}=\frac{-2535}{210}=\frac{-169}{14}$

39. $\left(\frac{5}{3}+\frac{1}{4}\right)\times\frac{12}{7}-3:\left(-\frac{4}{9}\right)=\left(\frac{20}{12}+\frac{3}{12}\right)\times\frac{12}{7}-\frac{3\times 9}{(-4)\times 1}=$

$=\frac{23}{12}\times\frac{12}{7}+\frac{27}{4}=\frac{23\times 12}{12\times 7}+\frac{27}{4}=\frac{276}{84}+\frac{27}{4}=$

$=\frac{276}{84}+\frac{567}{84}=\frac{276+567}{84}=\frac{843}{84}=\frac{281}{28}$

40. $1-\cfrac{2}{1+\cfrac{1}{3}}=\cfrac{1-\cfrac{2}{4}}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{5}}}=\cfrac{1-\cfrac{2}{4}}{3+\cfrac{1}{\cfrac{11}{5}}}=\cfrac{1-\cfrac{2\times 3}{4}}{3+\cfrac{1\times 5}{11}}=\cfrac{1-\cfrac{6}{4}}{3+\cfrac{5}{11}}=\cfrac{\cfrac{4-6}{4}}{\cfrac{33+5}{11}}=$

$=\cfrac{\cfrac{-2}{4}}{\cfrac{38}{11}}=\frac{2\times 11}{38\times 4}=\frac{-22}{152}=\frac{-11}{76}$

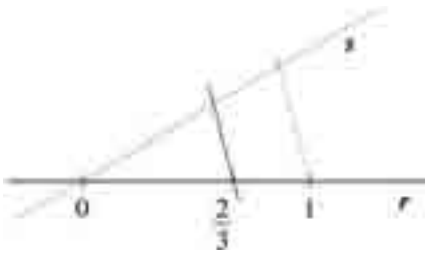
41.

$$\frac{\frac{2}{3}-\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}+1}{\left(\frac{2}{3}-\frac{3}{4}\right)\times\left(\frac{5}{6}+1\right)}=\frac{\frac{2}{3}-\frac{15}{24}+1}{\left(\frac{8}{12}-\frac{9}{12}\right)\times\left(\frac{5}{6}+\frac{6}{6}\right)}=\frac{\frac{16}{24}-\frac{15}{24}+\frac{24}{24}}{\frac{-1}{12}\times\frac{11}{6}}=$$

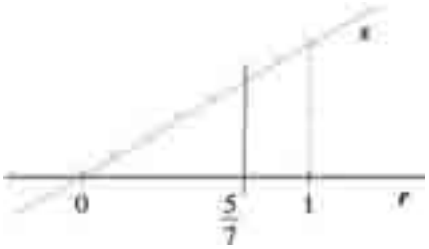
$$=\frac{\frac{25}{24}}{\frac{-11}{72}}=\frac{25\times 72}{(-11)\times 24}=\frac{1800}{-264}=\frac{-75}{11}$$

42. En una recta con origen 0 y unidad de medida OU (OU segmento de longitud 8 cm), representa los números:

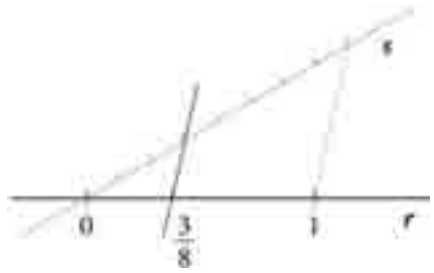
a) $\frac{2}{3}$;



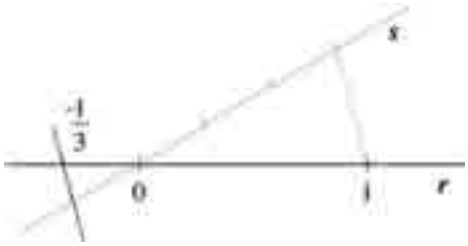
b) $\frac{5}{7}$;



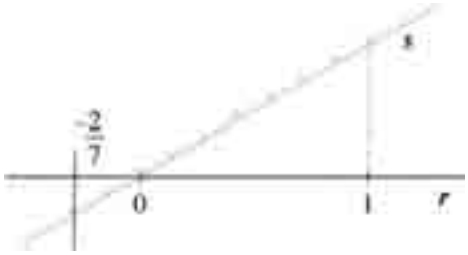
c) $\frac{3}{8}$;



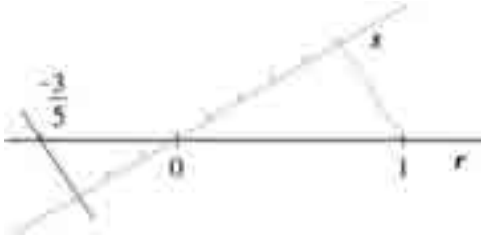
d) $-\frac{1}{3}$;



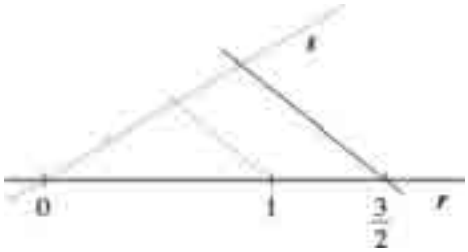
e) $\frac{-2}{7}$;



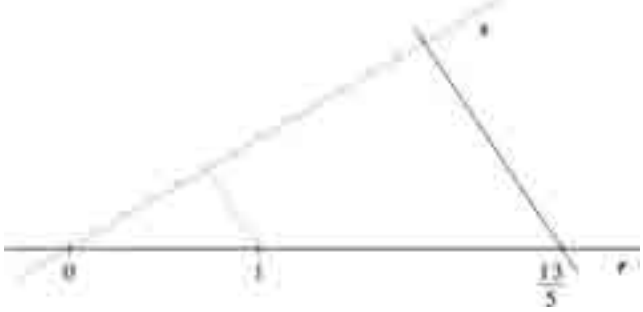
f) $\frac{-3}{5}$;



g) $\frac{3}{2}$;



h) $\frac{13}{5}$



43. Ana está ahorrando para comprarse una bicicleta de montaña que cuesta 270 euros. Ya ha ahorrado $\frac{5}{8}$ de su precio. ¿Cuánto le falta todavía?

$\left(1-\frac{5}{8}\right)\times 270 = \frac{3}{8}\times 270 = 101,25\ €$

44. La velocidad del sonido en el aire es, aproximadamente, $\frac{1}{3}$ de km por segundo. Durante una tormenta se oye el trueno después de 16 segundos de haber visto el relámpago. ¿A qué distancia está la tormenta? (aproxima el resultado hasta las milésimas).

$\frac{1}{3}\times 16 = \frac{16}{3} = 5,\hat{3}\ \text{km}$

45. Un reloj se atrasa $\frac{6}{15}$ de hora cada día. ¿Cuántos minutos se atrasa cada hora?

$\frac{6}{15} : 24 = \frac{6}{15\times 24} = \frac{6}{360} = \frac{1}{60}\ \text{horas} \Rightarrow$

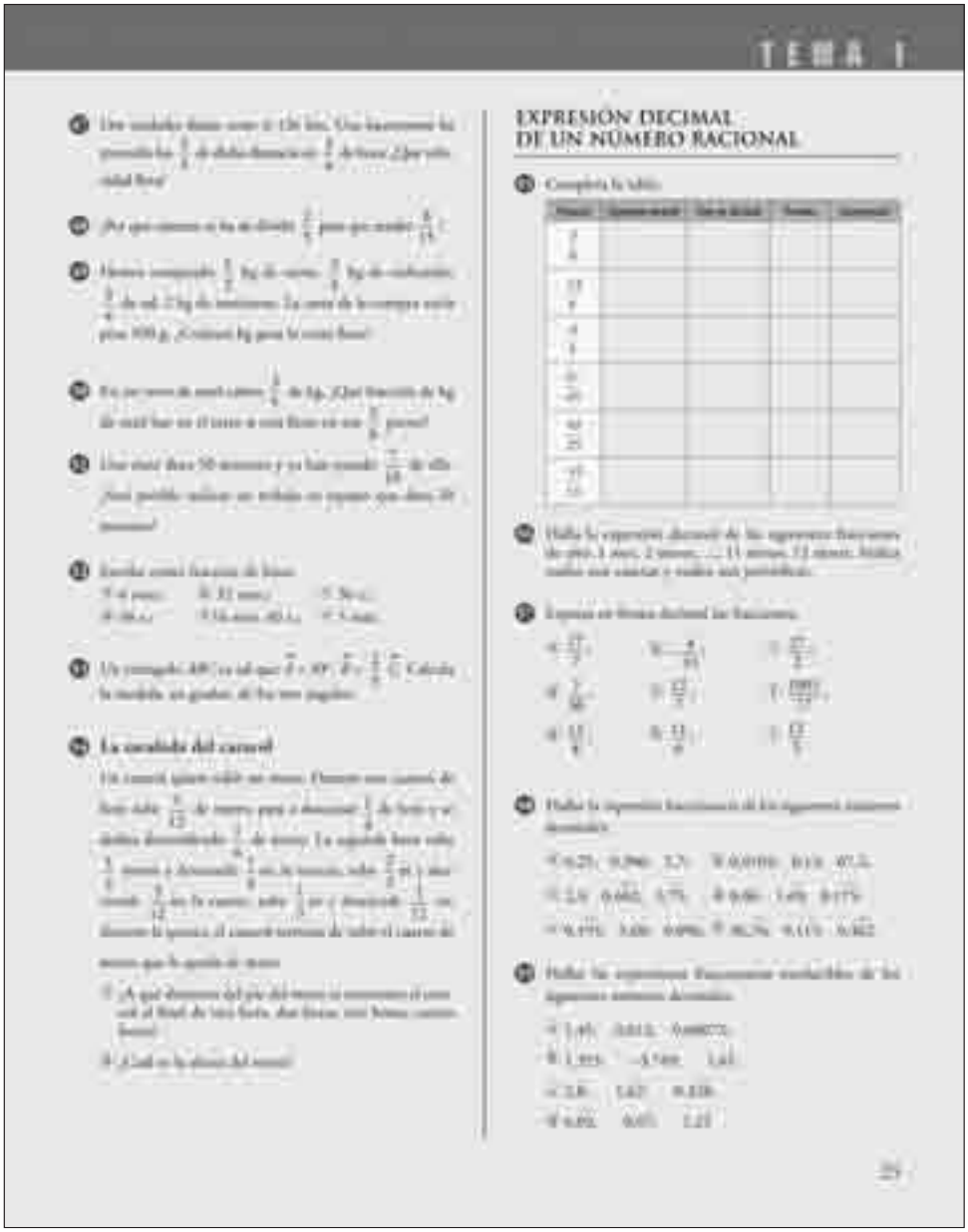
$\Rightarrow 60\times\frac{1}{60} = 1\ \text{minuto / hora}$

46. ¿Cuántas botellas de $\frac{3}{4}$ de litro se necesitarán para embotellar 360 litros de agua? ¿Cuántas se necesitarán de $\frac{1}{3}$ de litro?

$360 : \frac{3}{4} = \frac{360\times 4}{3} = 480\ \text{botellas de } {}^{3}\!/_{4}$

$360 : \frac{1}{3} = \frac{360\times 3}{1} = 1080\ \text{botellas de } {}^{1}\!/_{3}$

▶ Pág. 23. Ejercicios



TEMA 1

EXPRESIÓN DECIMAL DE UN NÚMERO RACIONAL

SOLUCIONARIO

47. Dos ciudades distan entre sí 126 km. Una locomotora ha recorrido los $\frac{2}{3}$ de dicha distancia en $\frac{3}{4}$ de hora. ¿Qué velocidad lleva?

$$\text{velocidad} = \frac{\text{espacio}}{\text{tiempo}} \Rightarrow v = \frac{\frac{2}{3}\times 126}{\frac{3}{4}} = \frac{\frac{252}{3}}{\frac{3}{4}} = \frac{252\times 4}{3\times 3} =$$

$$= \frac{1008}{9} = 112 \text{ km / h}$$

48. ¿Por qué número se ha de dividir $\frac{2}{5}$ para que resulte $\frac{8}{15}$?

$$\frac{2}{5} : x = \frac{8}{15} \qquad x = \frac{2}{5} : \frac{8}{15} = \frac{15\times 2}{8\times 5} = \frac{30}{40} = \frac{3}{4}$$

49. Hemos comprado $\frac{1}{2}$ kg de carne, $\frac{3}{4}$ kg de embutido, $\frac{3}{4}$ de sal, 2 kg de manzanas. La cesta de la compra vacía pesa 500 g. ¿Cuántos kg pesa la cesta llena?

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + 2 + 0{,}5 = \frac{2}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + 2{,}5 = \frac{8}{4} + 2{,}5 =$$

$$= 2 + 2{,}5 = 4{,}5 \text{ kg} = \frac{9}{2} \text{ kg}$$

50. En un tarro de miel caben $\frac{3}{5}$ de kg. ¿Qué fracción de kg de miel hay en el tarro si está lleno en sus $\frac{3}{8}$ partes?

$\frac{3}{5} \times \frac{3}{8} = \frac{9}{40}$ kg de miel

51. Una clase dura 50 min. y ya han pasado $\frac{7}{10}$ de ella. ¿Será posible realizar un trabajo en equipo que dura 20 min.?

El tiempo que resta de clase es:

$\left(1 - \frac{7}{10}\right) \times 50 = \frac{3}{10} \times 50 = 15\ m \Rightarrow$ no es posible, sólo quedan 15 minutos de clase

52. Escribe como fracción de hora:

a) 6 min $\Rightarrow \frac{6}{60} = \frac{1}{10}$ h.

b) 32 min $\Rightarrow \frac{32}{60} = \frac{8}{15}$ h.

c) 36 s. $\Rightarrow \frac{36}{3600} = \frac{1}{100}$ h.

d) 48 s. $\Rightarrow \frac{48}{3600} = \frac{1}{75}$ h.

e) 16 min. 40s. $\Rightarrow 16 \times 60 + 40$ s $= 100$ s; $\frac{1000}{3600} = \frac{5}{18}$

f) 5 min. $\Rightarrow \frac{5}{60} = \frac{1}{12}$ h.

53. Un triángulo *ABC* es tal que $\hat{A} = 30°$, $\hat{B} = \frac{2}{3}\hat{C}$. Calcula la medida, en grados, de los tres ángulos.

$A + B + C = 180° \Rightarrow 30° + \frac{2}{3}C + C = 180° \Rightarrow \frac{5}{3}C = 150° \Rightarrow$

$C = \frac{3}{5} \times 150° = 90° \Rightarrow B = \frac{2}{3} \times 90° = 60° \Rightarrow$ los ángulos son :

$A = 30°, B = 60°$ y $C = 90°$

54. Un caracol quiere subir un muro. Durante tres cuartos de hora sube $\frac{5}{12}$ de metro; para a descansar $\frac{1}{4}$ de hora y se desliza descendiendo $\frac{1}{6}$ de metro. La segunda hora sube $\frac{1}{2}$ metro y desciende $\frac{1}{4}$ m; la tercera, sube $\frac{2}{3}$ m y desciende $\frac{5}{12}$ m; la cuarta, sube $\frac{1}{3}$ m y desciende $\frac{1}{12}$ m; durante la quinta, el caracol termina de subir el cuarto de metro que le queda de muro.

a) ¿A qué distancia del pie del muro se encuentra el caracol al final de una hora, dos horas, tres horas, cuatro horas?

b) ¿Cuál es la altura del muro?

a) En la 1ª hora sube 5/12 – 1/6 = 1/4 m. Está, por tanto a 1/4 m del suelo.

En la segunda hora sube 1/2 – 1/4 = 1/4 m. Está a 1/4 + 1/4 = 1/2 m del suelo.

En la tercera hora sube 2/3 – 5/12 = 1/4 m. Está a 1/2 + 1/4 = 3/4 m. del suelo.

En la cuarta hora sube 1/3 – 1/12 = 1/4 m. Está a 3/4 + 1/4 = 1 m del suelo.

b) Como en la quinta hora sube el cuarto de metro que le queda, el muro mide 1 m 25 cm.

55. Completa la tabla:

Número	Expresión decimal	Tipo de decimal	Período	Anteperíodo
$\frac{3}{8}$	0,375	Exacto	No tiene	No tiene
$\frac{-13}{6}$	$-2,16\widehat{\ }$	Periódico mixto	6	1
$\frac{-5}{3}$	$-1,\widehat{6}$	Periódico puro	6	No tiene
$\frac{67}{45}$	$1,48\widehat{\ }$	Periódico mixto	8	4
$\frac{43}{25}$	1,72	Exacto	No tiene	No tiene
$\frac{-15}{13}$	$-1,\widehat{153846}$	Periódico puro	153 846	No tiene

56. Halla la expresión decimal de las siguientes fracciones de año: 1 mes, 2 meses, ..., 11 meses, 12 meses. Indica cuáles son exactas y cuáles son periódicas.

1 mes → $0,08\widehat{3}$ es periódica mixta
2 meses → $0,16\widehat{\ }$ es periódica mixta
3 meses → 0,25 es exacta
4 meses → $0,\widehat{3}$ es periódica pura
5 meses → $0,416\widehat{\ }$ es periódica mixta
6 meses → 0,5 es exacta
7 meses → $0,58\widehat{3}$ es periódica mixta
8 meses → $0,\widehat{6}$ es periódica pura
9 meses → 0,75 es exacta
10 meses → $0,83\widehat{\ }$ es periódica mixta
11 meses → $0,916\widehat{\ }$ es periódica mixta
12 meses → 1 es exacta

57. Expresa en forma decimal las fracciones:

a) $\frac{17}{7} = 2,\widehat{428571};$

b) $-\frac{4}{33} = -0,12$

c) $\frac{27}{2} = 13,5$

d) $\frac{7}{30} = 0,2\widehat{3}$

e) $\frac{12}{7} = 1,\widehat{714285}$

f) $\frac{1001}{77} = 13$

g) $\frac{13}{8} = 1,625$

h) $\frac{11}{6} = 1,83$

i) $\frac{12}{5} = 2,4$

58. Hallar la expresión fraccionaria de los siguientes números decimales:

a) 6,25; 0,306; 5,7;

$6,25 = \frac{625}{100} = \frac{25}{4}$; $0,306 = \frac{306}{1000} = \frac{153}{500}$; $5,7 = \frac{57}{10}$;

b) 0,0102; 0,13; 67,2;

$0,0102 = \frac{102}{10000} = \frac{51}{5000}$; $0,13 = \frac{13}{10}$; $67,2 = \frac{672}{10} = \frac{336}{5}$

c) 2,3; $0,\widehat{602}$; $3,\widehat{75}$;

$2,3 = \frac{23}{10}$; $0,\widehat{602} = \frac{602-0}{999} = \frac{602}{999}$; $3,\widehat{75} = \frac{375-3}{99} = \frac{124}{33}$;

d) $0,0\hat{6}$; $1,\hat{69}$; $0,1\widehat{75}$;

$0,0\hat{6} = \frac{6-0}{90} = \frac{6}{90} = \frac{1}{15}$; $1,\hat{69} = \frac{169-1}{99} = \frac{168}{99} = \frac{56}{33}$; $0,1\widehat{75}$

$0,1\widehat{75} = \frac{175-1}{990} = \frac{174}{990}$

e) $0,\widehat{193}$; $3,\hat{68}$; $0,09\hat{6}$

$0,193 = \frac{193-0}{999} = \frac{193}{999}$; $3,\hat{68} = \frac{368-36}{90} = \frac{332}{90} = \frac{166}{45}$;

$0,9\hat{6} = \frac{96-9}{900} = \frac{87}{900} = \frac{29}{300}$

f) $36,\widehat{76}$; $9,11\widehat{5}$; $0,3\widehat{62}$

$36,\widehat{76} = \frac{3676-36}{99} = \frac{3640}{99}$; $9,11\widehat{5} = \frac{9115-91}{990} = \frac{9024}{990} = \frac{1504}{165}$;

$0,3\widehat{62} = \frac{362-3}{990} = \frac{359}{999}$

59. Hallar las expresiones fraccionarias irreducibles de los siguientes números decimales:

a) 1,45; 0,012; 0,00072

$1,45 = \frac{145}{100} = \frac{29}{20}$ $0,012 = \frac{12}{1000} = \frac{3}{250}$

$0,00072 = \frac{72}{100000} = \frac{9}{12500}$

b) 1,325; –3,749; $1,6\hat{1}$

$1,325 = \frac{1325}{1000} = \frac{53}{40}$; $-3,749 = \frac{-3749}{1000}$

$1,6\hat{1} = \frac{161-16}{90} = \frac{145}{90} = \frac{29}{18}$

c) $2,\hat{8}$; $1,6\hat{2}$; $0,3\hat{28}$;

$2,\hat{8} = \frac{28-2}{9} = \frac{26}{9}$ $1,6\hat{2} = \frac{162-16}{90} = \frac{146}{90} = \frac{73}{45}$

$0,3\widehat{28} = \frac{328-3}{990} = \frac{325}{990} = \frac{65}{198}$

d) $6,\widehat{02}$; $0,\hat{07}$; $1,2\hat{3}$

$6,\widehat{02} = \frac{602-6}{99} = \frac{596}{99}$ $0,\hat{07} = \frac{7-0}{90} = \frac{7}{90}$

$1,2\hat{3} = \frac{123-12}{90} = \frac{111}{90} = \frac{37}{30}$

▶ Pág. 24. Ejercicios



LOS NÚMEROS REALES

CONJUNTOS NUMÉRICOS

INTERVALOS

VALORES APROXIMADOS. ERRORES

PROBLEMAS

24

60. ¿A qué conjuntos [N, Z, Q, I], pertenecen los siguientes números:

a) 2,00 ∈ N, Z, Q

b) 7,06 ∈ Q

c) 6,0101... ∈ Q

d) 2,494494449... ∈ I

e) 3,162162216222... ∈ I

f) $\frac{-4}{2}$ ∈ Z, Q

g) –3,000 ∈ Z, Q

h) –6,09 ∈ Q

i) 3,6410161... ∈ I

61. Indica razonadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

a) –63 ∈ Z. Verdadero

b) 3,05 ∈ Q. Verdadero pues se puede expresar como $\frac{61}{20}$

c) 1,414235... ∈ I. Verdadero

d) 0,06 ∈ Q. Verdadero pues se puede expresar como $\frac{3}{50}$

e) $\frac{4}{3}$ **∈ I.** Falso, pertenece a Q.

f) 2,6457513 ∈ Q. Verdadero, es un número decimal exacto.

g) 6,0303... ∈ I. Falso, es el número racional $\frac{199}{33}$

h) –1,622... ∈ Q. Verdadero, pues se puede expresar como $\frac{-73}{45}$

i) –3 ∈ N. Falso, en un número entero no natural, al ser negativo: –3 ∈ Z

62. Indica el intervalo que corresponde a cada desigualdad.

a) $-1 \leq x < 7$ [–1, 7[

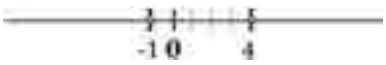
b) $-5 < x < 0$]–5, 0[

c) $3 < x \leq 14$]3, 14]

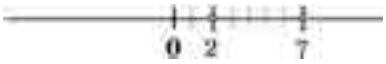
d) $0 \leq x \leq 8$ [0, 8]

63. Indica qué desigualdad cumplen los puntos que pertenecen a los intervalos siguientes. Haz su representación en la recta real.

a)]–1, 4[$-1 < x < 4$



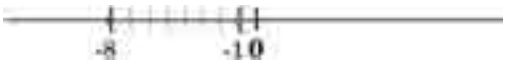
b) [2, 7] $2 \leq x \leq 7$



c)]4, 23] $4 < x \leq 23$



d) [–8, –1[$-8 \leq x < -1$



64. Dado el número 56,23456781, cuál es su error absoluto si se toma como valor aproximado:

a) 56,23 $|\ 56{,}23456781 - 56{,}23\ | = 0{,}00456781$

b) 56,2345 $|\ 56{,}23456781 - 56{,}2345\ | = 0{,}00006781$

c) 56,23456 $|\ 56{,}23456781 - 56{,}23456\ | = 0{,}00000781$

65. Calcula el error relativo en cada uno de los casos del ejercicio anterior.

a) $\dfrac{0{,}00456781}{56{,}23456781} = 0{,}0000812277 \simeq 0{,}008\,\%$

b) $\dfrac{0{,}00006781}{56{,}23456781} = 0{,}000001205841 \simeq 0{,}00012\,\%$

c) $\dfrac{0{,}00000781}{56{,}23456781} = 0{,}0000001388825 \simeq 0{,}000014\,\%$

66. Se emplea a menudo el valor 3,14 como una aproximación de π. ¿Qué tipo de aproximación es? ¿es un redondeo a centésimas?

3,14 es una aproximación a centenas *por defecto*. Dado que el tercer decimal es 1 < 5, es también *redondeo* a centenas, por tanto no es redondeo a centésimas.

67. Encuentra un número *x*, sabiendo que:

a) Su aproximación por defecto es 5,24.

b) Su parte decimal tiene cuatro cifras.

c) Su redondeo a milésimas es 5,25.

a) 5,24 es una aproximación por defecto a centenas del número 5,2498

b) La parte decimal tiene cuatro cifras

c) El redondeo a milésimas de x puede ser, por ejemplo, 5,2498 pues es 5,25.

68. Una tela, después de lavada, se reduce $\frac{1}{21}$ de su longitud y $\frac{1}{12}$ de su anchura. ¿Qué longitud debe comprarse de una pieza de 0,60 m de ancho para tener después de lavada 55 metros cuadrados de tela?

Una vez lavada la tela tendrá una anchura de $0{,}60 - 0{,}60 \times \dfrac{1}{12} = 0{,}55$ m.

La longitud de la tela, *x*, se convierte una vez lavada en los $\dfrac{20x}{21}$

Así: $\dfrac{20x}{21} \times 0{,}55 = 55$.

Despejando $x = \dfrac{55 \cdot 21}{20 \cdot 0{,}55} = 105$ m.

69. Se sirvieron 50 l de aceite pero se ha comprobado que la medida de litro con que se ha medido tenía 4,5 cl menos de los que debía. ¿Qué cantidad de aceite se sirvió?

En cada «litro» se sirvió 0,955 *l*. Así, se sirvieron: $0{,}955 \times 50 = 47{,}75l$.

70. Si se suprime la coma de un número decimal expresado en centésimas se aumenta dicho número en 6714,18 ¿Cuál es ese número?

$100x - x = 6714{,}18 \rightarrow 99x = 6714{,}18 \rightarrow \dfrac{6714{,}18}{99} = 67{,}82$

pues si le quito la coma: 6782 – 67,82 = 6714,18

71. De un «viejo libro»:

Carlos Lindberg fue el primero en hacer la travesía del Atlántico sin escala, partiendo de Nueva York con 2 000 litros de combustible. Después de recorrer 5 836 km en 33 horas llegó a París, quedándole aún 80 litros de combustible. Calcula:

a) La velocidad media del aparato

b) El gasto de combustible por hora

c) ¿Cuántos kilómetros hubiera podido volar aún con la gasolina que le quedó?

a) $\dfrac{5836}{33} = 176{,}84$ km/h **b)** $\dfrac{2000 - 80}{33} = 58{,}18$ l/h

c) $\dfrac{80}{58{,}18} \times 176{,}84\ \text{km/h} = 243{,}16\text{km}$

Tema 2

Potencias y raíces

▸ Programación de aula

Objetivos

- Definir las potencias de exponente entero.
- Operar con potencias.
- Trabajar con potencias de 10.
- Trabajar con notaciones especiales: la notación científica y la de ingeniero.
- Considerar la raíz cuadrada como potencia.
- Relacionar otras raíces con las potencias.
- Operar con raíces.

Criterios de evaluación

- Realizar cálculos con potencias de exponente entero.
- Considerar propiedades algebraicas para simplificar los cálculos con potencias de exponente entero.
- Expresr grandes o pequeños números con notación científica y de ingeniero.
- Realizar cálculos en los que intervienen raíces.
- Considerar propiedades algebraicas para simplificar los cálculos en los que intervienen raíces.
- Usar la calculadora.

Contenidos

- **Conceptos** ("saber")
  - Potencias de exponente entero.
  - Potencia de una fracción.
  - Operaciones con potencias.
  - Potencias de 10.
  - La raíz cuadrada.
  - Transformaciones
- **Procedimientos** ("Saber hacer")
  - Realización de desarrollos con potencias de exponente natural y entero.
  - Significado y uso del vocabulario específico: base, exponente.
  - Utilización de las propiedades de las operaciones con potencias para facilitar los cálculos.
  - Presentar las potencias de 10 y la notación científica como algo cercano al entorno del alumno.
  - Uso de la notación científica como forma de expresar números muy grandes o muy pequeños.
  - Uso de la calculadora.
- **Actitudes** ("Saber ser")
  - Valoración de la simplicidad de la notación en forma de potencia.
  - Comprensión de la necesidad del uso de las potencias, como forma de expresión matemática, en el manejo y presentación de datos o resultados.
  - Valoración crítica de la ayuda que pueda ofrecer el uso de la calculadora.

▸ Programación por competencias

COMPETENCIA MATEMÁTICA

PENSAMIENTO Y RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

Descriptores

1. Entender la extensión y las limitaciones de los conceptos matemáticos y saber utilizarlos.
2. Transformar al lenguaje algebraico situaciones resolubles mediante potencias y raíces.

Desempeño

1. Comprende la utilidad de las potencias y raíces.	- Formaliza expresiones algebraicas en las que intervienen potencias y raíces. - Valora la simplicidad de la notación en forma de potencia.	- **Ejemplos y ejercicios del tema** (pág. 28 a 40)
2. Opera con potencias y raíces.	- Utiliza las propiedades de las operaciones con potencias y raíces para facilitar los cálculos.	

ARGUMENTAR MATEMÁTICAMENTE

Descriptores

1. Realizar desarrollos con potencias y raíces.
2. Presentar las potencias de 10 y la notación científica como algo cercano en el entorno.
3. Usar la notación científica como forma de expresar números muy grandes o muy pequeños.

Desempeño

1. Desarrolla una potencia.	- Calcula el desarrollo de una potencia de exponente natural. - Aprecia la utilidad de las potencias de 10 como notación para magnitudes habituales. - Calcula desarrollos en los que intervienen raíces.	- **Ejemplos y ejercicios del tema** (pág. 28 a 40)
2. Valora la utilidad de la notación científica y de ingeniero para la representación de números muy grandes o pequeños.	- Aplica la notación científica o de ingeniero. - Distingue entre las notación científica y de ingeniero.	- **Introducción** (pág. 26) - **Ejemplo 4** (pág. 30) - **Ejercicios 8, 30 a 40 y 59 a 67** (pág. 30, 37, 38 y 40)
3. Advierte en la calculadora la presencia de teclas para cálculos de potencias y raíces y para expresar números en notación científica.	- Utiliza la calculadora en notación científica. - Usa la calculadora en cálculos de potencias y raíces.	- **"Recuerda que..."** (pág. 28, 30 y 31) - **"Calculadora"** (pág. 32) - **Ejemplos y ejercicios del tema** (pág. 28 a 40)

PLANTEAR Y RESOLVER PROBLEMAS MATEMÁTICOS

Descriptores

1. Formular problemas o situaciones en las que intervienen potencias y raíces.
2. Reducir problemas complejos a otros más sencillos para facilitar la comprensión y solución de los mismos.
3. Reflexionar sobre la validez de las soluciones obtenidas.

Desempeño

1. Plantea una situación concreta utilizando potencias y raíces.	- Describe la expresión de una potencia o raíz.	- **Ejemplos y ejercicios del tema** (pág. 28 a 40)
2. Resuelve la cuestión planteada.	- Elige el sistema de resolución. - Obtiene la solución. - Valora la solución obtenida.	

LENGUAJE MATEMÁTICO

Descriptores

1. Adoptar el significado y uso del vocabulario específico: base, exponente, índice y radicando.
2. Comprender la necesidad del uso de las potencias, como forma de expresión matemática, en el manejo y presentación de datos o resultados.

Desempeño

1. Conoce el lenguaje matemático.	- Interpreta el lenguaje formal y simbólico de las matemáticas. - Trabaja con expresiones simbólicas y fórmulas.	- **Ejemplos y ejercicios del tema** (pág. 28 a 40)
2. Traduce el lenguaje natural a lenguaje formal y matemático.	- Entiende las equivalencias entre un lenguaje y otro. - Es crítico en la exactitud del lenguaje formal.	

COMPETENCIA LINGÜÍSTICA

COMPETENCIA LINGÜÍSTICA

Descriptores

1. Comprender el enunciado de un problema en el que intervienen potencias y raíces y diferenciar las ideas fundamentales que nos permitan expresarlo en lenguaje matemático.
2. Aportar vocabulario específico y preciso relacionado con las potencias y raíces.
3. Describir verbalmente el proceso seguido en la resolución de un problema, confrontándolas con otras posibles.

Desempeño

1. Comprende lo que lee.	- Identifica la pregunta que se le hace. - Identifica los elementos matemáticos esenciales que intervienen.	- **Ejemplos y ejercicios del tema** (pág. 28 a 40)
2. Se expresa por escrito de manera adecuada y correcta, con claridad y coherencia, utilizando un lenguaje preciso.	- Presenta el texto con la solución del problema de forma adecuada y correcta. - Selecciona la información adecuada.	

COMPETENCIA SOCIAL Y CIUDADANA

COMPETENCIA SOCIAL Y CIUDADANA

Descriptores

1. Plantear y valorar en grupo situaciones en las que puede utilizarse la notación científica o de ingeniero como expresión de su medida.

Desempeño

1. Desarrolla habilidades de trabajo en grupo.	- Respeta el trabajo en grupo. - Acepta los criterios fundados de los demás.	- **Ejercicios 59 a 67** (pág. 40)

COMPETENCIA EN EL CONOCIMIENTO E INTERACCIÓN CON EL MEDIO FÍSICO

COMPETENCIA EN CONOCIMIENTO E ...

Descriptores

1. Advertir el papel de potencias y raíces y su aplicación a la resolución de situaciones de la vida cotidiana y del entorno y medio físicos.

Desempeño

1. Interpreta situaciones del mundo físico y las conceptualiza en términos de medida empleando potencias y raíces.	- Utiliza potencias y raíces para expresar mediciones del mundo físico y real.	- **Introducción** (pág. 26) - **Ejercicios 60 a 67** (pág.40)

COMPETENCIA DIGITAL Y TRATAMIENTO DE LA INFORMACION

COMPETENCIA DIGITAL Y TRATAMIENTO DE LA INFORMACION

Descriptores

1. Confeccionar esquemas lógicos de cálculo aplicables a la resolución de potencias y raíces.
2. Valorar críticamente la ayuda que pueda ofrecer el uso de la calculadora.

Desempeño

1. Interpreta, organiza y contrasta la información recibida.	- Resume y sintetiza la información. - Realiza actividades que requieren organización, relación o análisis de la información. - Diseña esquemas automatizados de cálculo de potencias y raíces. - Expone y presenta los resultados de manera ordenada y clara, transmitiéndola así oralmente o por escrito.	- **Ejemplos y ejercicios del tema** (pág. 28 a 40)
2. Valora la utilidad de la calculadora.	- Respeta y cumple el lenguaje matemático en el uso de la calculadora. - Respeta el automatismo de cálculo al usar la calculadora.	
3. Codifica el lenguaje algebraico.	- Reconoce que el lenguaje algebraico supone codificar la información que nos proporciona la realidad.	- **Ejercicios 42 a 60** (pág. 95 y 96)

COMPETENCIA APRENDER A APRENDER

COMPETENCIA APRENDER A APRENDER

Descriptores

1. Adquirir conciencia y hacer uso de las propias capacidades y conocimientos para iniciarse en el cálculo de potencias y raíces, capacitándose para continuar aprendiendo de manera cada vez más eficaz y autónoma de acuerdo a los propios objetivos y necesidades.
2. Desarrollar la curiosidad de plantearse preguntas, formalizarlas y resolverlas con la metodología estudiada.
3. Utilizar estrategias de aprendizaje, utilizando técnicas de apoyo diversas y la automatización de esquemas mentales de cálculo, para afrontar la toma de decisiones.

Desempeño

1. Desarrolla habilidades de obtención, análisis y elaboración de la información.	- Lee los enunciados de los ejercicios con la intención de comprender, relacionar y sintetizar contenidos. - Maneja adecuadamente recursos y técnicas de aprendizaje individual.	- **Ejemplos y ejercicios del tema** (pág. 28 a 40)
2. Mejora la atención y motivación.	- Se fija en cada paso y lo analiza, afianzando el proceso de aprendizaje. - Cuida la expresión y la presentación de los trabajos.	

COMPETENCIA AUTONOMÍA E INICIATIVA PERSONAL

COMPETENCIA AUTONOMÍA E INICIATIVA PERSONAL

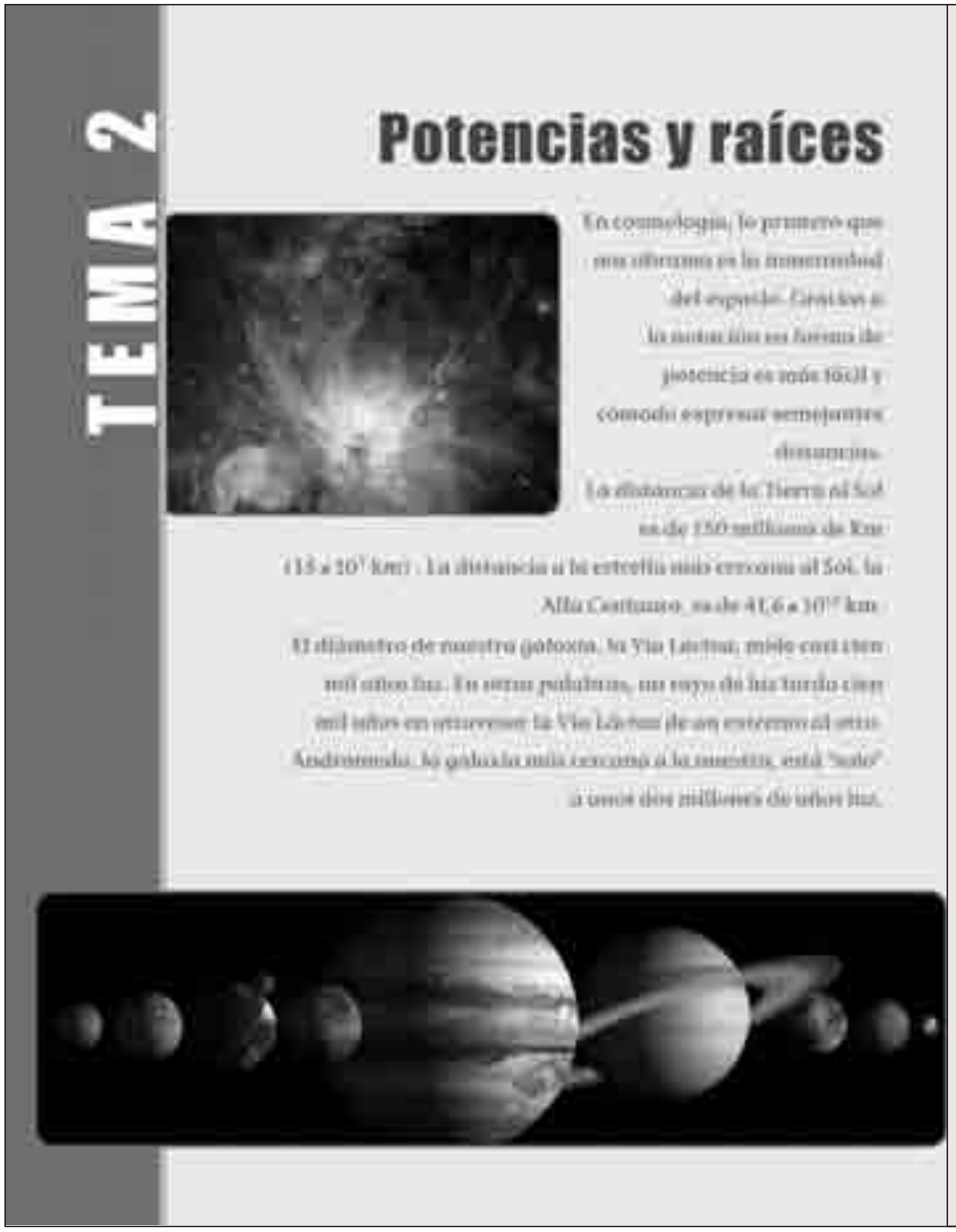
Descriptores

1. Confiar en las propias capacidades y gusto por la elaboración y uso de estrategias personales de cálculo.
2. Tener tenacidad y perseverancia en la búsqueda de solución a los problemas de cálculo en los que intervienen potencias y raíces.

Desempeño

1. Idea y planifica el desarrollo de un ejercicio.	- Elige la opción adecuada para la resolución de los ejercicios. - Mantiene la opción hasta llegar a la conclusión final.	- **Ejemplos y ejercicios del tema** (pág. 28 a 40)
2. Evalúa la solución obtenida.	- Valora el resultado y lo pone en relación con su enunciado del problema resuelto.	
3. Toma decisiones en función del resultado obtenido.	- Decide en función del resultado.	

▶ Pág. 26 - 27. Potencias y raíces



SOLUCIONARIO

¿VERDADERO O FALSO?

A = falso

B = verdadero

C= falso

D = falso

CUADRADOS MÁGICOS PARA EL PRODUCTO

¿Es mágico? Sí

Completa para que sea mágico

5^2	5^{-5}	5^0
5^{-3}	5^{-1}	5
5^{-2}	5^3	5^{-4}



DE 2º A 3º

¿VERDADERO O FALSO?

CUADRADOS MÁGICOS PARA EL PRODUCTO

En un cuadrado mágico para el producto se cumple que el producto de los números de cada fila, de cada columna y de cada diagonal es el mismo.

¿Es mágico?

Completa para que sea mágico

ENCUENTRA LOS ERRORES

CUESTIONES

1 ¿Puedes encontrar un número cuyo cuadrado sea -4? ¿por qué?

2 ¿Dos números diferentes pueden tener el mismo cuadrado?

3 ¿Existen números que son iguales que su cuadrado?

4 ¿Hay algún número cuyo cuadrado sea 7?

ENCUENTRA LOS ERRORES

Los errores son: a), c), d), f) y g).

CUESTIONES

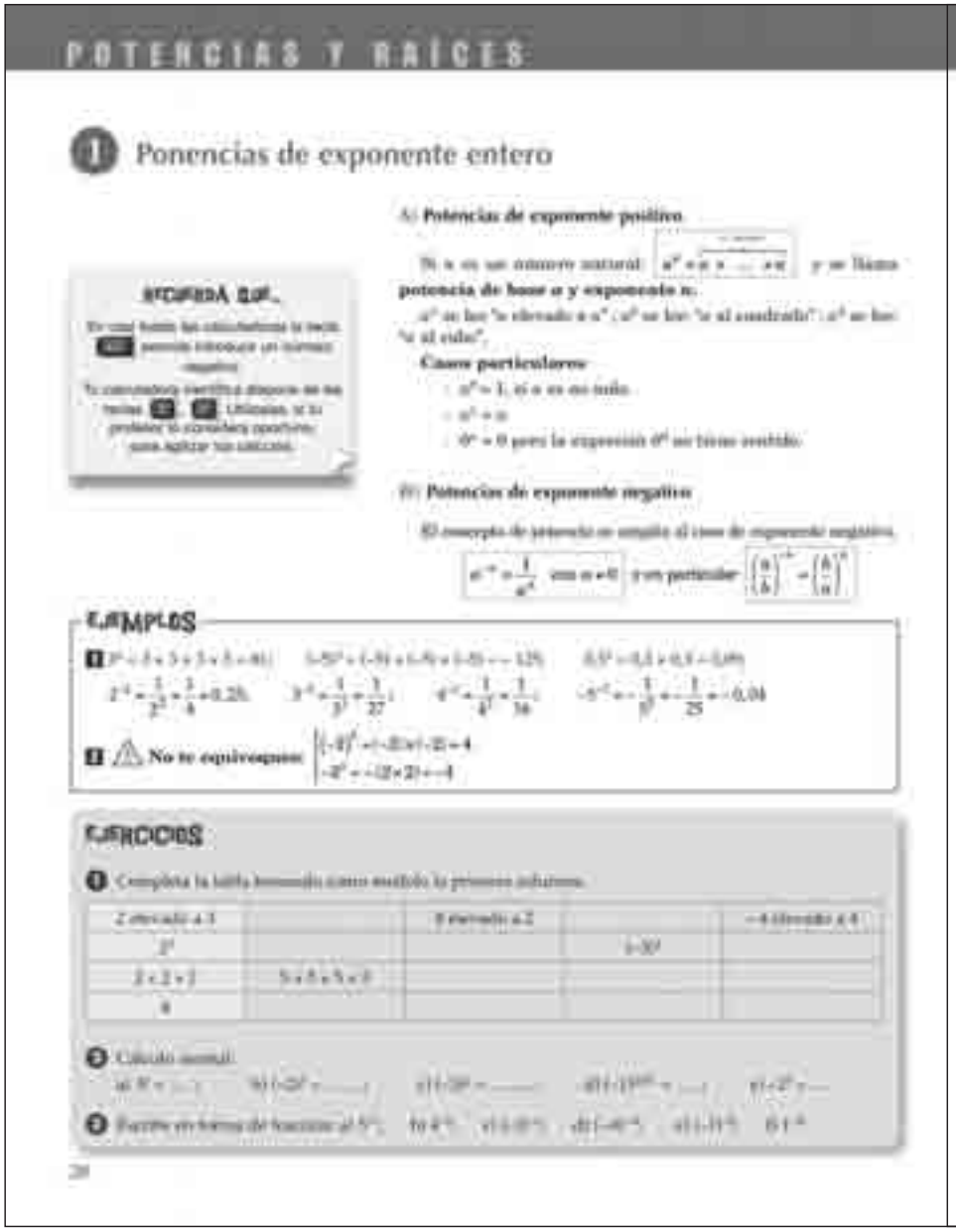
1 ¿Puedes encontrar un número cuyo cuadrado sea –9? , ¿por qué? No, porque el cuadrado de un número siempre es positivo.

2 ¿Dos números diferentes pueden tener el mismo cuadrado? Sí, por ejemplo $3^2 = (-3)^2$

3 ¿Existen números que son iguales que su cuadrado? Sí, el 0 y el 1

4 ¿Hay algún número cuyo cuadrado sea 7? Sí, el $\sqrt{7}$

▶ Pág. 28. 1 Potencias de exponente entero


POTENCIAS Y RAÍCES

1 Ponencias de exponente entero

A) Potencias de exponente positivo

potencia de base a y exponente n.

Casos particulares

B) Potencias de exponente negativo

EJEMPLOS

EJERCICIOS

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS

La escritura de números grandes puede ser una dificultad para los alumnos.

Error previsible: no diferenciar número negativo y exponente negativo.

Sugerir diversas escrituras de un mismo número

SOLUCIONARIO

1. Completa la tabla tomando como modelo la primera columna.

2 elevado a 3	5 elevado a 3	8 elevado a 2	–3 elevado a 3	– 4 elevado a 4
2^3	5^3	8^2	$(-3)^3$	$(-4)^4$
$2 \times 2 \times 2$	$5 \times 5 \times 5$	8×8	$(-3) \times (-3) \times (-3)$	$(-4) \times (-4) \times (-4) \times (-4)$
8	125	64	–27	256

2. Cálculo mental:

a) $3^2 = 9$ **b)** $(-2)^3 = -8$

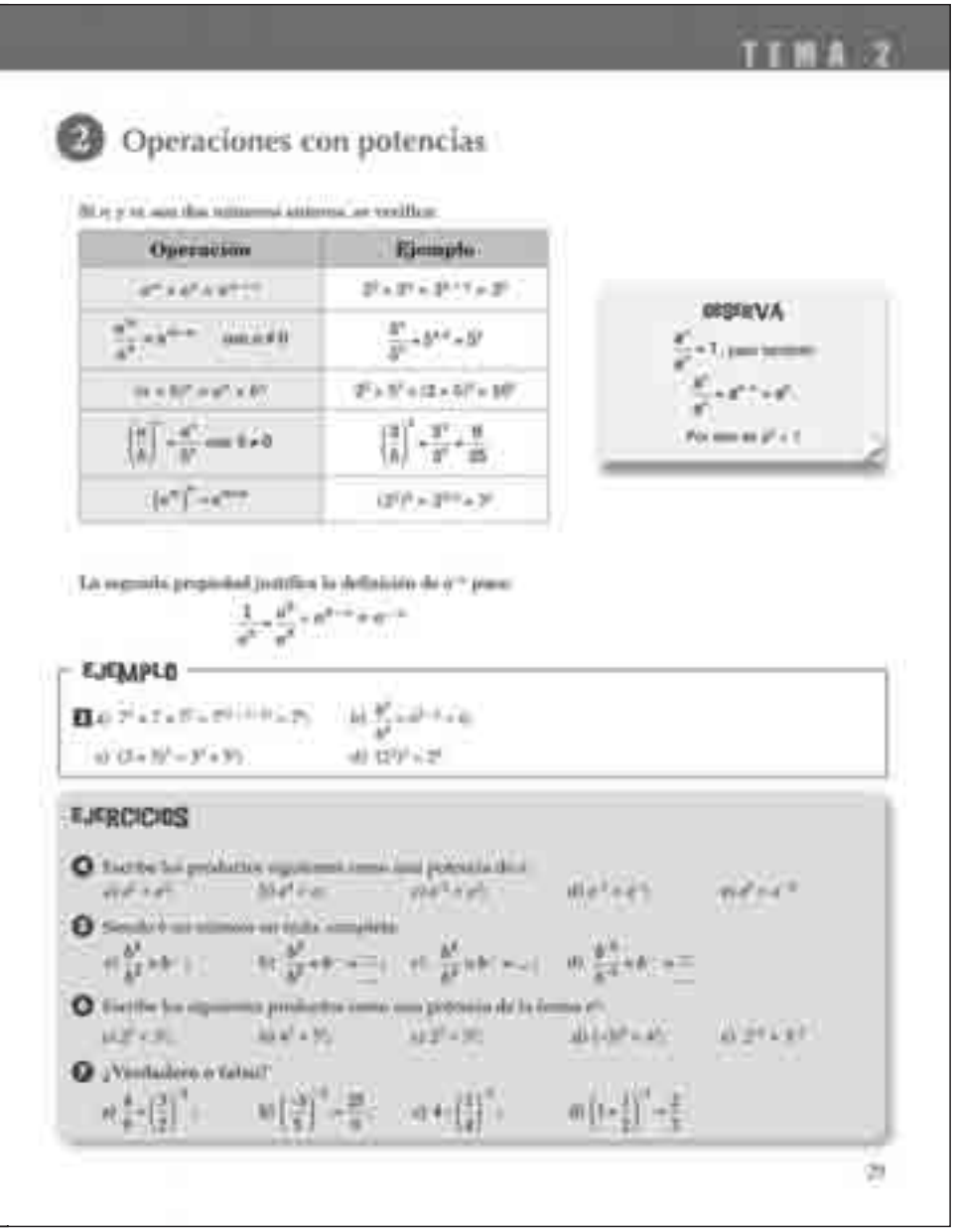
c) $(-3)^2 = 9$ **d)** $(-1)^{2011} = -1$

e) $-2^3 = -8$

3. Escribe en forma de fracción:

a) $5^{-1} = \frac{1}{5}$; **b)** $4^{-3} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}$; **c)** $(-3)^{-2} = \frac{1}{(-3)^2} = \frac{1}{9}$; **d)** $(-6)^{-4} = \frac{1}{(-6)^4} = \frac{1}{1296}$; **e)** $(-1)^{-5} = \frac{1}{(-1)^5} = \frac{1}{-1} = -1$; **f)** $1^{-8} = \frac{1}{1^8} = \frac{1}{1} = 1$

▶ Pág. 29. 2 Operaciones con potencias



TEMA 2

2 Operaciones con potencias

Operación	Ejemplo

OBSERVA

EJEMPLO

EJERCICIOS

b) $a^4 \times a = a^{4+1} = a^5$;

c) $a^{-2} \times a^3 = a^{-2+3} = a^1$;

d) $a^{-3} \times a^{-1} = a^{-3-1} = a^{-4}$;

e) $a^5 \times a^{-5} = a^{5-5} = a^0$

5. Siendo b un número no nulo, completa:

a) $\frac{b^4}{b^2} = b^{4-2} = b^2$; **b)** $\frac{b^3}{b^5} = b^{3-5} = b^{-2} = \frac{1}{b^2}$;

c) $\frac{b^4}{b^4} = b^{4-4} = b^0 = 1$; **d)** $\frac{b^{-2}}{b^{-1}} = b^{-2+1} = b^{-1} = \frac{1}{b}$;

6. Escribe los siguientes productos como una potencia de la forma a^n:

a) $2^2 \times 3^2 = (2 \times 3)^2 = 6^2$;

b) $4^3 \times 5^3 = (4 \times 5)^3 = 20^3$;

c) $2^2 \times 5^2 = (2 \times 5)^2 = 10^2$;

d) $(-3)^3 \times 4^3 = (-3 \times 4)^3 = (-12)^3 = -12^3$;

e) $2^{-2} \times 3^{-2} = (2 \times 3)^{-2} = 6^{-2}$

7. ¿Verdadero o falso?

a) $\frac{4}{9} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-2}$ Verdadero pues: $\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3^{-2}}{2^{-2}} = \frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9}$

b) $\left(\frac{-3}{5}\right)^{-2} = \frac{25}{9}$ Verdadero pues:

$$\left(\frac{-3}{5}\right)^{-2} = \frac{(-3)^{-2}}{5^{-2}} = \frac{5^2}{(-3)^2} = \frac{25}{9}$$

c) $4 = \left(\frac{1}{4}\right)^{-1}$ Verdadero pues: $\left(\frac{1}{4}\right)^{-1} = \frac{1^{-1}}{4^{-1}} = \frac{4}{1} = 4$

d) $\left(1+\frac{1}{2}\right)^{-1} = \frac{2}{3}$ Verdadero pues:

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)^{-1} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-1} = \frac{2}{3}$$

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS

Se puede solicitar propuestas a los alumnos antes de dar las propiedades.

Siempre es una ayuda un enunciado verbal de determinadas propiedades.

Puede ser la ocasión para introducir el uso de determinadas teclas de la calculadora.

Poner de manifiesto determinadas "propiedades" : $3^2 + 4^2 = 7^2$; $2^3 \times 5^3 = 10^6$ o cualquier otra imaginable.

SOLUCIONARIO

4. Escribe los productos siguientes como una potencia de a:

a) $a^2 \times a^2 = a^{2+2} = a^4$

▶ Pág. 30. 3 Potencias de 10. Notación científica y de ingeniero



POTENCIAS Y RAÍCES

3 Potencias de 10. Notación científica y de ingeniero

La notación científica

La notación de ingeniero

EJEMPLO

EJERCICIO

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS

Se puede solicitar hacer conjeturas antes de efectuar un cálculo.

Se esperan dificultades en el desplazamiento de la coma decimal

Atención a las diversas expresiones de notación científica ofrecida por las calculadoras.

Insistir en que la presentación 6.3^{12} dada por una calculadora no es 6,3 elevado a 12.

SOLUCIONARIO

8. Escribe en notación científica y de ingeniero:

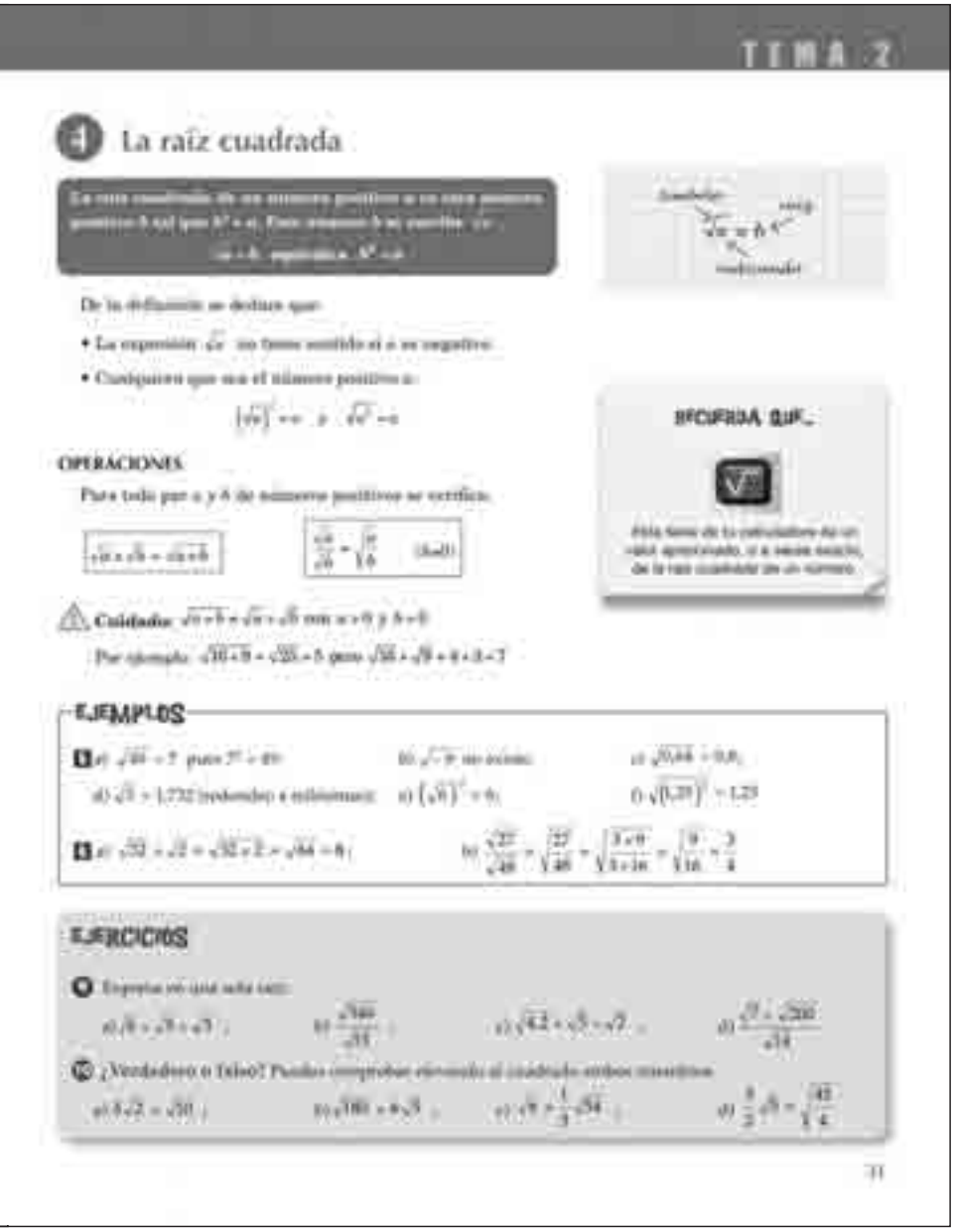
a) 23400; $2{,}34 \times 10^4$ y $23{,}4 \times 10^3$

b) 0,0467; $4{,}67 \times 10^{-2}$ y $46{,}7 \times 10^{-3}$

c) –783000000; $-7{,}83 \times 10^8$ y -783×10^6

d) 0,00000125; $1{,}25 \times 10^{-6}$ y $1{,}25 \times 10^{-6}$

▶ Pág. 31. 4 La raíz cuadrada


TEMA 2

4 La raíz cuadrada

OPERACIONES

EJEMPLOS

EJERCICIOS

11

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS

Concepto de raíz cuadrada.

Asimilar la notación $\sqrt{\ }$

Los convenios de escritura son la gramática del lenguaje matemático

No está de más resaltar que $\sqrt{(-a)^2} = a$

SOLUCIONARIO

9. Expresa en una sola raíz:

a) $\sqrt{6} \times \sqrt{5} \times \sqrt{3} = \sqrt{6 \times 5 \times 3} = \sqrt{90}$

b) $\dfrac{\sqrt{340}}{\sqrt{15}} = \sqrt{\dfrac{340}{15}} = \sqrt{\dfrac{68}{3}}$

c) $\sqrt{4{,}2} \times \sqrt{5} \times \sqrt{2} = \sqrt{4{,}2 \times 5 \times 2} = \sqrt{42}$

d) $\dfrac{\sqrt{7} \times \sqrt{200}}{\sqrt{14}} = \dfrac{\sqrt{7 \times 200}}{\sqrt{14}} = \sqrt{\dfrac{1400}{14}} = \sqrt{100} = 10$

10. ¿Verdadero o falso? Puedes comprobar elevando al cuadrado ambos miembros.

a) $\mathbf{5\sqrt{2} = \sqrt{10}}$ Falso, pues:

$5\sqrt{2} = \sqrt{5^2 \times 2} = \sqrt{25 \times 2} = \sqrt{50} \neq \sqrt{10}$

b) $\mathbf{\sqrt{180} = 6\sqrt{5}}$ Verdadero, pues:

$\sqrt{180} = \sqrt{36 \times 5} = \sqrt{6^2 \times 5} = 6\sqrt{5}$

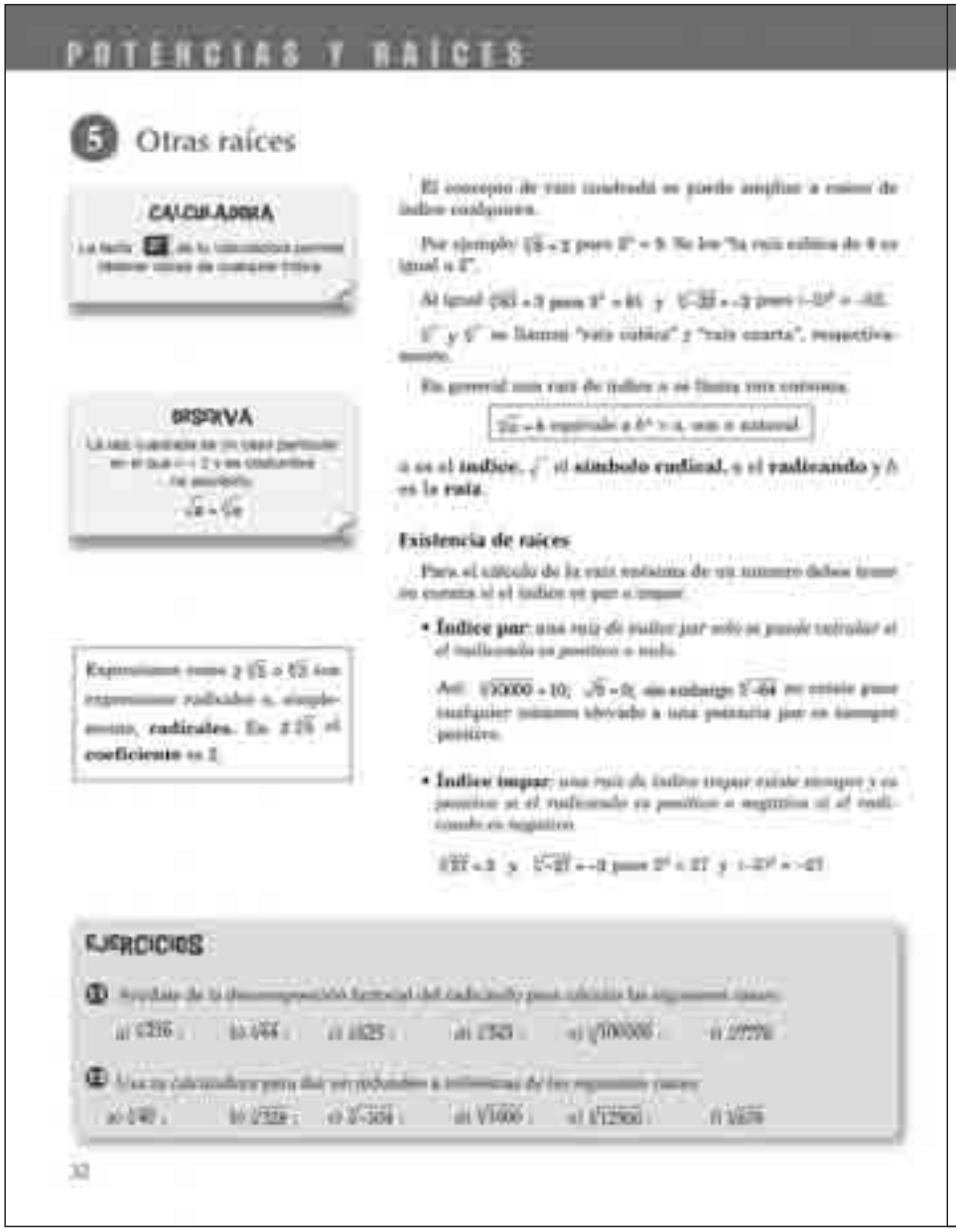
c) $\mathbf{\sqrt{6} = \dfrac{1}{3}\sqrt{54}}$ Verdadero, pues:

$\sqrt{6} = \sqrt{\dfrac{54}{9}} = \sqrt{\dfrac{54}{3^2}} = \sqrt{\dfrac{1}{3^2} \times 54} = \dfrac{1}{3}\sqrt{54} = \dfrac{\sqrt{54}}{3}$

d) $\mathbf{\dfrac{3}{2}\sqrt{5} = \sqrt{\dfrac{45}{4}}}$ Verdadero, pues:

$\dfrac{3}{2}\sqrt{5} = \sqrt{\dfrac{3^2 \times 5}{2^2}} = \sqrt{\dfrac{9 \times 5}{4}} = \sqrt{\dfrac{45}{4}}$

▶ Pág. 32. 5 Otras raíces



POTENCIAS Y RAÍCES

5 Otras raíces

CALCULADORA

OBSERVA

Expresiones como $2\sqrt{5}$ o $\sqrt{5}$ son expresiones radicales o, simplemente, **radicales**. En $2\sqrt{5}$ el **coeficiente** es 2.

El concepto de raíz cuadrada se puede ampliar a raíces de índice cualquiera.

Por ejemplo: $\sqrt[3]{8} = 2$ pues $2^3 = 8$. Se lee "la raíz cúbica de 8 es igual a 2".

Al igual $\sqrt[3]{64} = 4$ pues $4^3 = 64$ y $\sqrt[3]{-27} = -3$ pues $(-3)^3 = -27$.

$\sqrt[3]{\ }$ y $\sqrt[4]{\ }$ se llaman "raíz cúbica" y "raíz cuarta", respectivamente.

En general una raíz de índice n se lanza una extensión.

$\sqrt[n]{a} = b$ equivale a $b^n = a$, con n natural

n es el **índice**, $\sqrt{\ }$ el **símbolo radical**, a el **radicando** y b es la **raíz**.

Existencia de raíces

Para el cálculo de la raíz enésima de un número debes tener en cuenta si el índice es par o impar.

- **Índice par**: una raíz de índice par solo se puede calcular si el radicando es positivo o nulo.

Así: $\sqrt[4]{10000} = 10$; $\sqrt{0} = 0$; sin embargo $\sqrt{-64}$ no existe pues cualquier número elevado a una potencia par es siempre positivo.

- **Índice impar**: una raíz de índice impar existe siempre y es positiva si el radicando es positivo y negativa si el radicando es negativo.

$\sqrt[3]{27} = 3$ y $\sqrt[3]{-27} = -3$ pues $3^3 = 27$ y $(-3)^3 = -27$

EJERCICIOS

32

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS

Primera aproximación al concepto de raíz n-sima.

Insistir en la diferencia entre coeficiente e índice.

SOLUCIONARIO

11. Ayúdate de la descomposición factorial del radicando para calcular las siguientes raíces:

a) $\sqrt[3]{216} = \sqrt[3]{2^3 \times 3^3} = 2 \times 3 = 6$

b) $\sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{2^6} = 2$

c) $\sqrt[4]{625} = \sqrt[4]{5^4} = 5$

d) $\sqrt[3]{343} = \sqrt[3]{7^3} = 7$

e) $\sqrt[5]{100\,000} = \sqrt[5]{10^5} = 10$

f) $\sqrt[5]{7776} = \sqrt[5]{2^5 \times 3^5} = 2 \times 3 = 6$

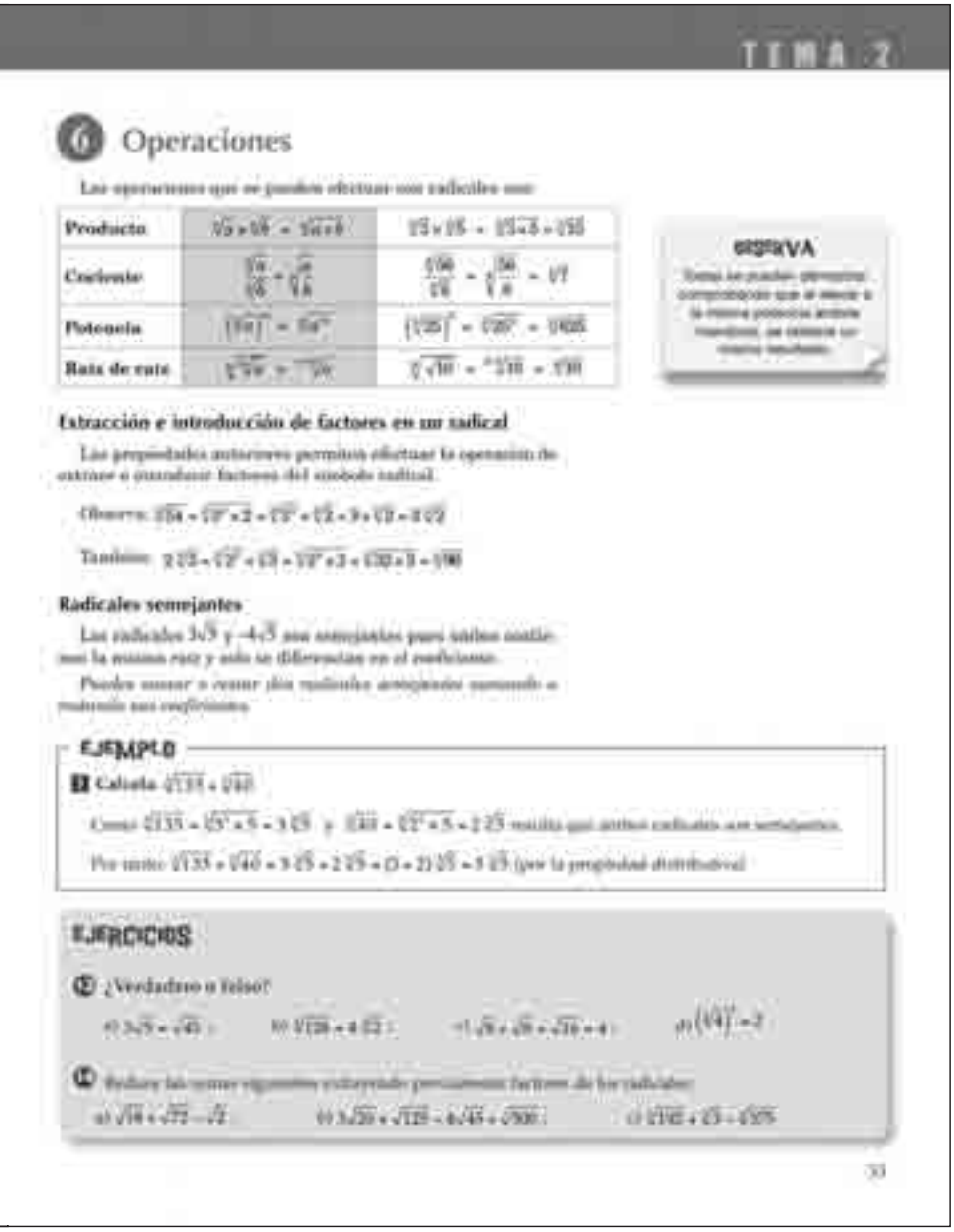
12. Usa tu calculadora para dar un redondeo a milésimas de las siguientes raíces:

a) $\sqrt[3]{40} = 3{,}420$ **b)** $\sqrt[5]{328} = 3{,}185$

c) $\sqrt[3]{-104} = -4{,}703$ **d)** $\sqrt[4]{1000} = 5{,}623$

e) $\sqrt[6]{12500} = 4{,}817$ **f)** $\sqrt[4]{678} = 5{,}103$

▶ Pág. 33. 6 Operaciones



TEMA 2

6 Operaciones

Las operaciones que se pueden efectuar con radicales son:

Producto	$\sqrt{5}\cdot\sqrt{8}=\sqrt{5\cdot 8}$	$\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}=\sqrt{2\cdot 5}=\sqrt{10}$
Cociente	$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$	$\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{50}{2}}=\sqrt{?}$
Potencia	$(\sqrt{a})^n=\sqrt{a^n}$	$(\sqrt{25})^3=\sqrt{25^3}=\sqrt{?625}$
Raíz de raíz	$\sqrt[n]{\sqrt{a}}=\sqrt[n\cdot m]{a}$	$\sqrt[3]{\sqrt{10}}=\sqrt[3\cdot 2]{10}=\sqrt[6]{10}$

OBSERVA

Todas las propiedades anteriores se pueden comprobar que al elevar a la misma potencia ambos miembros se obtiene un mismo resultado.

Extracción e introducción de factores en un radical

Las propiedades anteriores permiten efectuar la operación de extraer o introducir factores del símbolo radical.

Observa: $\sqrt{54}=\sqrt{3^2\cdot 2}=\sqrt{3^2}\cdot\sqrt{2}=3\cdot\sqrt{2}=3\sqrt{2}$

También: $2\sqrt{3}=\sqrt{2^2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{2^2\cdot 3}=\sqrt{4\cdot 3}=\sqrt{?12}$

Radicales semejantes

Los radicales $3\sqrt{5}$ y $-4\sqrt{5}$ son semejantes pues ambos contienen la misma raíz y solo se diferencian en el coeficiente.

Pueden sumar o restar dos radicales semejantes sumando o restando sus coeficientes.

EJEMPLO

1 Calcula $\sqrt{135}+\sqrt{40}$

Como $\sqrt{135}=\sqrt{3^2\cdot 5}=3\sqrt{5}$ y $\sqrt{40}=\sqrt{2^2\cdot 5}=2\sqrt{5}$ resulta que ambos radicales son semejantes.

Por tanto: $\sqrt{135}+\sqrt{40}=3\sqrt{5}+2\sqrt{5}=(3+2)\sqrt{5}=5\sqrt{5}$ (por la propiedad distributiva)

EJERCICIOS

12 ¿Verdadero o falso?

a) $3\sqrt{5}=\sqrt{45}$ b) $\sqrt[3]{128}=4\sqrt[3]{2}$ c) $\sqrt{8}+\sqrt{8}=\sqrt{16}$ d) $\left(\sqrt[4]{4}\right)^2=2$

13 Reduce las sumas siguientes extrayendo previamente factores de los radicales:

a) $\sqrt{18}+\sqrt{72}-\sqrt{2}$ b) $3\sqrt{20}+\sqrt{125}-4\sqrt{45}+\sqrt{500}$ c) $\sqrt[3]{192}+\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{375}$

33

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS

Prevenir del error de "operaciones" no definidas: $\sqrt{a+b}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$; $\sqrt{10}=5$; etc

Es interesante hacer estimaciones del valor de diferentes radicales:

Los del texto: $\sqrt[3]{54}\approx 3,78$; $\sqrt[5]{96}\approx 2,5$

SOLUCIONARIO

13. ¿Verdadero o falso?

a) $3\sqrt{5}=\sqrt{45}$ Verdadero pues: $3\sqrt{5}=\sqrt{3^2\times 5}=\sqrt{45}$

b) $\sqrt[3]{128}=4\sqrt[3]{2}$ Verdadero pues:

$\sqrt[3]{128}=\sqrt[3]{2^7}=2^2\sqrt[3]{2}=4\sqrt[3]{2}$

c) $\sqrt{8}+\sqrt{8}=\sqrt{16}=4$ Falso pues:

$\sqrt{8}+\sqrt{8}=2\sqrt{8}\uparrow\sqrt{16}$

d) $\left(\sqrt[4]{4}\right)^2=2$ Verdadero pues:

$\left(\sqrt[4]{4}\right)^2=\sqrt{4}=2$

14. Reduce las sumas siguientes extrayendo previamente factores de los radicales:

a) $\sqrt{18}+\sqrt{72}-\sqrt{2}=\sqrt{3^2\times 2}+\sqrt{6^2\times 2}-\sqrt{2}=$

$3\sqrt{2}+6\sqrt{2}-\sqrt{2}=(3+6-1)\sqrt{2}=8\sqrt{2}$

b) $3\sqrt{20}+\sqrt{125}-4\sqrt{45}+\sqrt{500}=$

$3\sqrt{4\times 5}+\sqrt{25\times 5}-4\sqrt{9\times 5}+\sqrt{100\times 5}=$

$=3\sqrt{2^2\times 5}+\sqrt{5^2\times 5}-4\sqrt{3^2\times 5}+\sqrt{10^2\times 5}=$

$=3\times 2\sqrt{5}+5\sqrt{5}-4\times 3\sqrt{5}+10\sqrt{5}=$

$=6\sqrt{5}+5\sqrt{5}-12\sqrt{5}+10\sqrt{5}=(6+5-12+10)\sqrt{5}=9\sqrt{5}$

c) $\sqrt[3]{192}+\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{375}=\sqrt[3]{2^6\times 3}+\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{3\times 5^3}=$

$=2^2\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{3}-5\sqrt[3]{3}=(4+1-5)\sqrt[3]{3}=0$

▶ Pág. 36. Ejercicios



POTENCIAS Y RAÍCES

EJERCICIOS

POTENCIAS

OPERACIONES

SOLUCIONARIO

15. Presta atención a la posición del signo «–» y calcula sin usar calculadora:

a) $(-4)^2 = (-4) \times (-4) = 16$;

$-4^2 = -(4 \times 4) = -16$;

$(-10)^4 = (-10) \times (-10) \times (-10) \times (-10) = 10000 = 10^4$

$-10^4 = -(10 \times 10 \times 10 \times 10) = -10000 = -10^4$

b) $-2^3 = -(2 \times 2 \times 2) = -8$;

$(-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2) = -8$;

$(-5)^2 = (-5) \times (-5) = 25$;

$(-5)^3 = (-5) \times (-5) \times (-5) = -125$

16. ¿Cuáles de los siguientes números son positivos?

$A = 3^5$; es positivo pues la base, 3, es positiva

$B = (-3)^2$; es positivo pues el exponenete es par

$C = 3^{-2}$; es positivo pues la base, 3, es positiva

$D = (-2)^{-3}$; es negativo pues $(-2)^{-3} = \dfrac{1}{(-2)^3} = \dfrac{1}{-8} = -\dfrac{1}{8}$

$E = (-2)^9$; es negativo pues la base, –2, es negativa y el exponente impar

$F = -5^2$; es negativo pues $-5^2 = -25$

$G = 0^{2012}$; es cero pues $0^{2012} = 0$

$H = (-9)^0$; es positivo pues $(-9)^0 = 1$

$I = 1^{-3}$ es positivo pues la base, 1, es positiva.

17. Da la escritura fraccionaria y decimal exacta (si es posible) de los siguientes números:

a) $10^{-1} = \frac{1}{10} = 0,1$; $4^{-1} = \frac{1}{4} = 0,25$;

$\left(\frac{5}{2}\right)^{-2} = \left(\frac{2}{5}\right)^{2} = \frac{2^2}{5^2} = \frac{4}{25} = 0,16$

b) $7^{-2} = \frac{1}{7^2} = \frac{1}{49}$; $\left(-4\right)^{-2} = \frac{1}{(-4)^2} = \frac{1}{16} = 0,0625$

$\left(\frac{5}{6}\right)^{-1} = \left(\frac{6}{5}\right)^{1} = \frac{6}{5} = 1,2$

18. Escribe como potencia de un número entero:

a) $\frac{1}{3^4} = 3^{-4}$ **b)** $0,000\,001 = 10^{-6}$

c) $\frac{1}{10^5} = 10^{-5}$ **d)** $10\,000\,000\,000 = 10^{10}$

19. Si $x = 2^5 \times 5^2 \times 7^4 \times 11$, ¿cuál es el menor número por el que se ha de multiplicar x para convertirlo en un cuadrado perfecto?

Todas las potencias deben ser de exponente par para que sea un cuadrado perfecto. En consecuencia, se debe multiplicar por $2 \times 11 = 22$.

20. Escribe como una potencia:

a) $9^{-2} \times 9^3 \times 9^2 = 9^{-2+3+2} = 9^3$

b) $3^4 \times 3^{-1} = 3^{4-1} = 3^3$

c) $7^4 \times 7^2 \times 7 = 7^{4+2+1} = 7^7$

d) $2^{-3} \times 2^{-4} \times 2^{-5} = 2^{-3-4-5} = 2^{-12}$

21. Calcula:

a) $(4 + 2 \times 3)^2 = 10^2 = 100$

b) $(4 + 2) \times 3^2 = 6 \times 9 = 54$

c) $4 + 2 \times 3^2 = 4 + 2 \times 9 = 4 + 18 = 22$

d) $4 + (2 \times 3)^2 = 4 + 6^2 = 4 + 36 = 40$

e) $4^2 - 2^2 \times 3^2 = 16 - 4 \times 9 = 16 - 36 = -20$

22. Escribe como una potencia:

a) $\frac{5^2}{7^2} = \left(\frac{5}{7}\right)^2$; $\frac{(-4)^3}{5^3} = \left(\frac{-4}{5}\right)^3$; $\frac{7^{-5}}{3^{-5}} = \left(\frac{7}{3}\right)^{-5}$; $\frac{p^4}{q^4} = \left(\frac{p}{q}\right)^4$

b) $\left(\frac{3}{5}\right)^3 \times \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^5$; $\left(\frac{15}{11}\right)^4 \times \left(\frac{7}{15}\right)^4 = \left(\frac{15}{11} \times \frac{7}{15}\right)^4 =$

$= \left(\frac{15 \times 7}{11 \times 15}\right)^4 = \left(\frac{7}{11}\right)^4$

c) $\left(\frac{32}{7}\right)^2 \times \left(\frac{14}{16}\right)^2 = \left(\frac{32}{7} \times \frac{14}{16}\right)^2 = \left(\frac{32 \times 14}{7 \times 16}\right)^2 = 4^2 = 16$

$\left(-\frac{5}{6}\right)^3 \times \left(\frac{18}{25}\right)^3 = \left(\frac{-5 \times 18}{6 \times 25}\right)^3 = \left(\frac{-3}{5}\right)^3$

d) $\left(\frac{a}{4}\right)^4 \times \left(\frac{16}{a}\right)^4 = \left(\frac{a \times 16}{4 \times a}\right)^3 = 4^4 = 256$

$\left(\frac{42}{13}\right)^2 \times \left(\frac{52}{7}\right)^2 = \left(\frac{42 \times 52}{13 \times 7}\right)^2 = (4 \times 6)^2 = 24^2 = 576$

23. Simplifica escribiendo los números siguientes en forma de una sola potencia:

a) $(3^4)^2 = 3^8$; $(5,2^{-2})^{-4} = 5,2^8$; $(6^2)^{-3} = 6^{-6}$;

$\left[\left(\frac{3}{5}\right)^2\right]^3 = \left(\frac{3}{5}\right)^6$

b) $(1,1^2)^{-5} = (1,1)^{-10}$; $(10^4)^1 = 10^4$; $(10^{-2})^6 = 10^{-12}$; $(10^5)^0 = 10^0 = 1$

24. a) Calcula 53^2

$53^2 = 2809$

b) Utiliza el resultado del apartado a) para calcular rápidamente $5,3^2$; $0,53^2$; 530^2

$5,3^2 = \left(\frac{53}{10}\right)^2 = \frac{53^2}{10^2} = \frac{2809}{100} = 28,09$

$0,53^2 = \left(\frac{53}{100}\right)^2 = \frac{53^2}{100^2} = \frac{2809}{10000} = 0,2809$

$530^2 = (53 \times 10)^2 = 53^2 \times 10^2 = 2809 \times 100 = 280900$

25. Suprime los paréntesis:

a) $(4 \times a)^3 = 4^3 \times a^3 = 64a^3$;

$(2 \times b)^{-2} = \frac{1}{(2 \times b)^2} = \frac{1}{2^2 \times b^2} = \frac{1}{4b^2}$;

$(-3 \times c)^4 = (-3)^4 \times c^4 = 81c^4$;

b) $(5\pi)^2 = 5^2\pi^2 = 25\pi^2$;

$(-2 \times d)^{-3} = \frac{1}{(-2 \times d)^3} = \frac{1}{(-2)^3 \times d^3} = \frac{1}{-8d^3} = \frac{-1}{8d^3}$;

$(0,4 \times 5 \times 0,5 \times e)^2 = (1 \times e)^2 = e^2$

26. Calcula:

a) $5^{23} \times (2^4 \times 5^6)^{-3} \times (5^{-2} \times 2^3)^4 = 5^{23} \times 2^{-4 \times 3} \times 5^{-6 \times 3} \times$ $\times 5^{-2 \times 4} \times 2^{3 \times 4} = 5^{23-18-8} \times 2^{-12+12} = 5^{-3} \times 2^0 =$ $\frac{1}{5^3} = \frac{1}{125} = 0,008$

b) $\left(\frac{5}{3}\right)^3 \times \left(\frac{4}{9}\right)^3 \times (9^{-2})^{-4} \times \frac{3}{5^4} = \frac{5^3}{3^3} \times \frac{4^3}{9^3} \times 9^{-2\times(-4)} \times \frac{3}{5^4} =$ $5^3 \times 3^{-3} \times 4^3 \times (3^2)^{-3} \times (3^2)^8 \times 3 \times 5^{-4} = 5^{3-4} \times$ $\times 3^{-3-6+16+1} \times 4^3 = \frac{3^8 \times 4^3}{5}$

c) $\frac{3^4}{3} = 3^{4-1} = 3^3 = 27$; $\frac{10}{10^{-2}} = 10 \times 10^2 = 10^3 = 1000$;

$\frac{5^4}{5^3} = 5^{4-3} = 5$; $\frac{154^{-3}}{154^{-4}} = 154^{-3+4} = 154$

d) $(3^{-2})^{-1} = 3^{-2 \times (-1)} = 3^2 = 9$;

$(4^{-1})^3 = 4^{-1 \times 3} = 4^{-3} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}$;

$\left[\left(\frac{5}{2}\right)^2\right]^{-2} = \left(\frac{5}{2}\right)^{2\times(-2)} = \left(\frac{5}{2}\right)^{-4} = \left(\frac{2}{5}\right)^4 = \frac{16}{625}$

27. Calcula:

a) $4^2 \times 4^3 = 4^{2+3} = 4^5 = 1024$;

$5 \times 5^3 = 5^{1+3} = 5^4 = 625$;

$10^5 \times 10^2 = 10^{5+2} = 10^7 = 10000000$

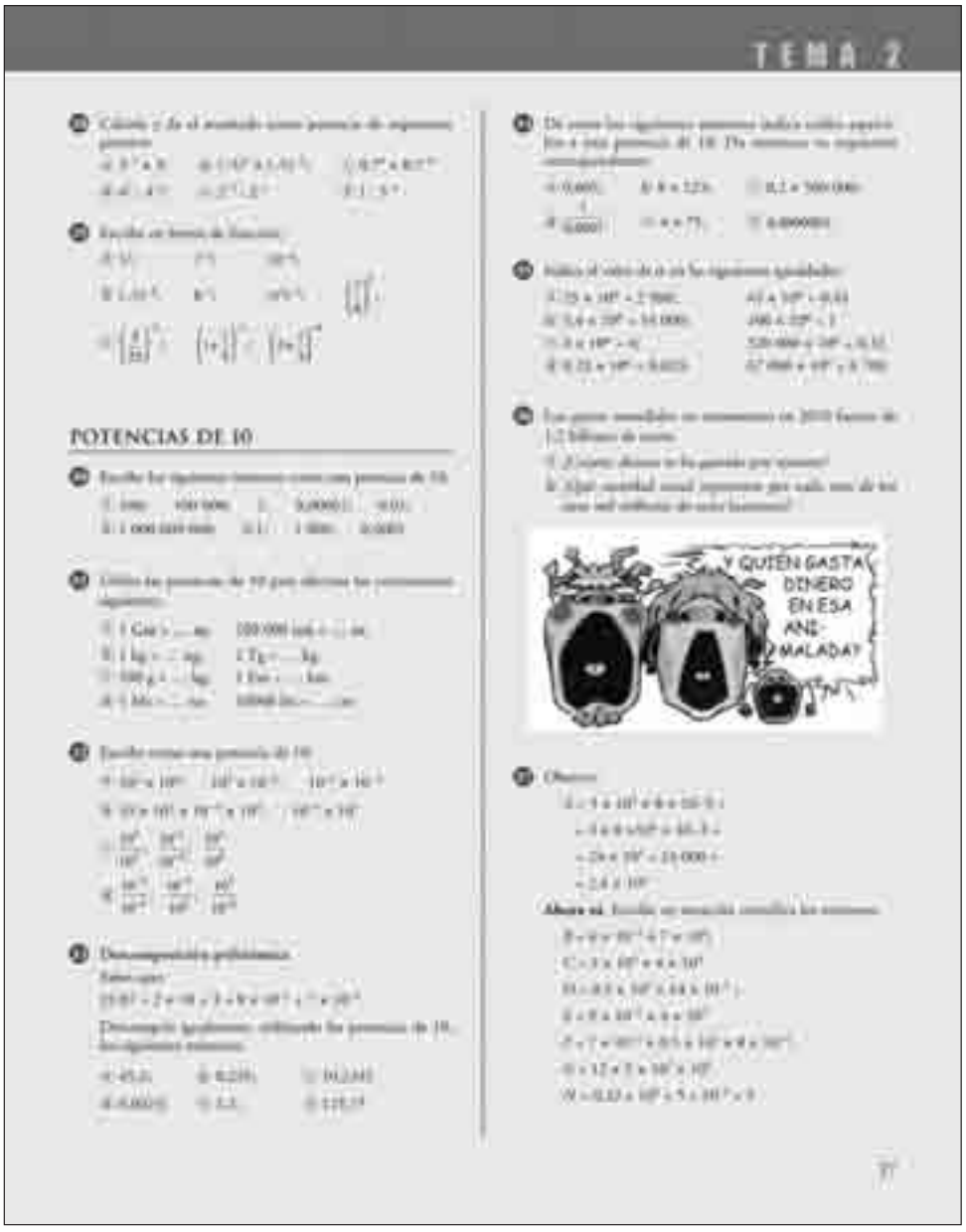
b) $\left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^{2+3} = \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{2^5}{3^5} = \frac{32}{243}$;

$\left(\frac{1}{5}\right)^3 \times \left(\frac{1}{5}\right) = \left(\frac{1}{5}\right)^{3+1} = \left(\frac{1}{5}\right)^4 = \frac{1}{5^4} = \frac{1}{625}$

c) $\left(\frac{7}{2}\right)^3 \times \left(\frac{7}{2}\right)^{-1} = \left(\frac{7}{2}\right)^{3-1} = \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{49}{4}$;

$\left(\frac{12}{5}\right)^7 \times \left(\frac{12}{5}\right)^{-5} = \left(\frac{12}{5}\right)^{7-5} = \left(\frac{12}{5}\right)^2 = \frac{12^2}{5^2} = \frac{144}{25}$

▶ Pág. 37. Ejercicios



TEMA 2

POTENCIAS DE 10

28. Calcula y da el resultado como potencia de exponente positivo:

a) $3^{-2} \times 3 = 3^{-2+1} = 3^{-1} = \frac{1}{3}$

b) $(-5)^3 \times (-5)^{-5} = (-5)^{3-5} = (-5)^{-2} =$
$= \frac{1}{(-5)^2} = \frac{1}{25} = \left(\frac{1}{5}\right)^2$

c) $0{,}7^4 \times 0{,}7^{-5} = 0{,}7^{-1} = \frac{1}{0{,}7} = \frac{10}{7}$

d) $4^3 : 4^{-2} = 4^{3+2} = 4^5$

e) $2^{-3} : 2^{-1} = 2^{-3+1} = 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$

f) $1 : 5^{-1} = 5$

29. Escribe en forma de fracción:

a) $5^2 = 25 = \frac{25}{1}$; $7^{-3} = \frac{1}{7^3} = \frac{1}{343}$;

$10^{-6} = \frac{1}{10^6} = \frac{1}{1000000}$

b) $(-5)^{-3} = \frac{1}{(-5)^3} = \frac{-1}{5^3} = \frac{-1}{125}$; $8^{-1} = \frac{1}{8}$

$(3^2)^{-1} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

$\left(\frac{7}{6}\right)^2 = \frac{7^2}{6^2} = \frac{49}{36}$

c) $\left(\frac{3}{23}\right)^{-3} = \left(\frac{23}{3}\right)^3 = \frac{12167}{27}$;

$\left(1+\frac{1}{5}\right)^{-1} = \left(\frac{6}{5}\right)^{-1} = \frac{5}{6}$;

$\left(2\times\frac{1}{3}\right)^{-4} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-4} = \left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{3^4}{2^4} = \frac{81}{16}$

30. Escribe los siguientes números como una potencia de 10:

a) $100 = 10^2$; $100\,000 = 10^5$; $1 = 10^0$;
$0{,}00001 = 10^{-5}$; $0{,}01 = 10^{-2}$;

b) $1\,000\,000\,000 = 10^9$; $0{,}1 = 10^{-1}$; $1000 = 10^3$;
$0{,}0001 = 10^{-4}$

31. Utiliza las potencias de 10 para efectuar las conversiones siguientes:

a) 1 Gm = 10^9 m;
100 000 nm = 10^5 nm = $10^5 \times 10^{-9}$ m = 10^{-4} m.

b) 1 kg = 10^3 g = $10^3 \times 10^9$ ng = 10^{12} ng;
1 Tg = 10^{12} g = $10^{12} \times 10^{-3}$ kg = 10^9 kg.

c) 100 g = 10^2 g = $10^2 \times 10^{-3}$ kg = 10^{-1} kg;
1 Em = 10^{18} m = $10^{18} \times 10^{-3}$ m = 10^{15} m.

d) 1 Ms = 10^6 s = $10^6 \times 10^9$ ns = 10^{15} ns;
10000 fm = 10^4 fm = $10^4 \times 10^{-15}$ m =
= $10^4 \times 10^{-15} \times 10^2$ cm= 10^{-9} cm

32. Escribe como una potencia de 10:

a) $10^2 \times 10^4 = 10^{2+4} = 10^6$;
$10^3 \times 10^{-5} = 10^{3-5} = 10^{-2}$;
$10^{-1} \times 10^{-4} = 10^{-1-4} = 10^{-5}$

b) $10 \times 10^3 \times 10^{-4} \times 10^5 = 10^{1+3-4+5} = 10^5$;
$10^{-3} \times 10^3 = 10^{-3+3} = 10^0 = 1$

c) $\frac{10^5}{10^2} = 10^{5-2} = 10^3$; $\frac{10^{-1}}{10^{-3}} = 10^{-1+3} = 10^2$;
$\frac{10^4}{10^6} = 10^{4-6} = 10^{-2}$

d) $\frac{10^{-2}}{10^{-5}} = 10^{-2+5} = 10^3$; $\frac{10^{-3}}{10^2} = 10^{-3-2} = 10^{-5}$;
$\frac{10^5}{10^{-2}} = 10^{5+2} = 10^7$

33. Descomposición polinómica

Sabes que:

$23{,}87 = 2 \times 10 + 3 + 8 \times 10^{-1} + 7 \times 10^{-2}$

Descompón igualmente, utilizando las potencias de 10, los siguientes números:

a) $45{,}2 = 4 \times 10 + 5 + 2 \times 10^{-1}$

b) $0{,}235 = 2 \times 10^{-1} + 3 \times 10^{-2} + 5 \times 10^{-3}$

c) $10{,}2341 = 1 \times 10 + 2 \times 10^{-1} + 3 \times 10^{-2} + 4 \times 10^{-3} + 1 \times 10^{-4}$

d) $0{,}0023 = 2 \times 10^{-3} + 3 \times 10^{-4}$

e) $1{,}2 = 1 + 2 \times 10^{-1}$

f) $125{,}75 = 1 \times 10^2 + 2 \times 10 + 5 + 7 \times 10^{-1} + 5 \times 10^{-2}$

34. De entre los siguientes números indica cuáles equivalen a una potencia de 10. Da entonces su expresión correspondiente:

a) 0,005 = no es potencia de 10;

b) $8 \times 125 = 10^3$

c) $0{,}2 \times 500\,000 = 10^5$;

d) $\frac{1}{0{,}0001} = 10^4$

e) $4 \times 75 = 300$ que no es potencia de 10;

f) $0{,}0000001 = 10^{-7}$;

35. Indica el valor de *a* en las siguientes igualdades:

a) $25 \times 10^a = 2\,500$; $a = 2$
$45 \times 10^a = 0{,}45$; $a = -2$

b) $5{,}4 \times 10^a = 54\,000$; $a = 4$
$100 \times 10^a = 1$; $a = -2$

c) $4 \times 10^a = 4$; $a = 0$
$320\,000 \times 10^a = 0{,}32$; $a = -6$

d) $0{,}23 \times 10^a = 0{,}023$; $a = -1$
$67\,000 \times 10^a = 6\,700$; $a = -1$

36. Los gastos mundiales en armamento en 2010 fueron de 1,2 billones de euros.

a) ¿Cuánto dinero se ha gastado por minuto?

b) ¿Qué cantidad anual representa por cada

uno de los siete mil millones de seres humanos?

1 año = 365 días × 24 horas / día × 60 minutos / hora= = 525 600 minutos

a) $\dfrac{1,2\times10^{12}}{525600} = 2,283105023\times10^{-6}\times10^{12} =$

$= 2,283105023\times10^{6} = 2283105,02$ €

b)

$$\frac{1,2\times10^{12}}{7000\times10^{6}} = \frac{1,2\times10^{3}}{7} = 0,171428\times10^{3} = 171,43\ €$$

37. Observa:

A = 3 × 10^6 × 8 × 10^{-3} =

= 3 × 8 ×10^6 × 10^{-3} =

= 24 × 10^3 = 24 000 =

= 2,4 × 10^4

Ahora tú. Escribe en notación científica los números:

$B = 6 \times 10^{-3} \times 7 \times 10^{6} = 6 \times 7 \times 10^{-3} \times 10^{6} = = 42 \times 10^{3} = 4,2 \times 10^{4}$

$C = 3 \times 10^{3} \times 4 \times 10^{4} = 3 \times 4 \times 10^{3} \times 10^{4} = 12 \times 10^{7} = = 1,2 \times 10^{8}$

$D = 0,5 \times 10^{2} \times 14 \times 10^{-5} = 0,5 \times 14 \times 10^{2} \times 10^{-5} = = 7 \times 10^{-3}$

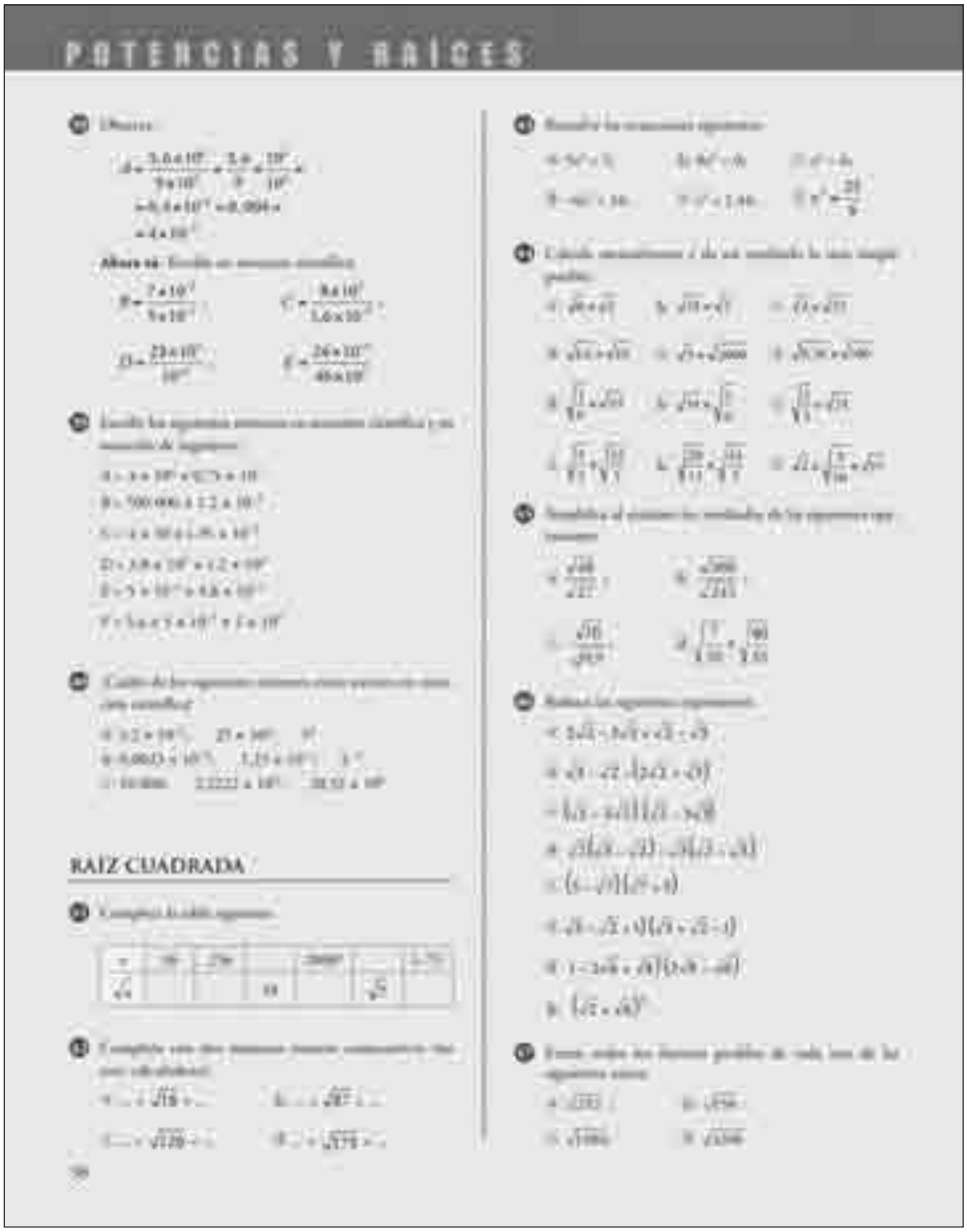
$E = 9 \times 10^{-5} \times 4 \times 10^{3} = 9 \times 4 \times 10^{-5} \times 10^{3} = = 36 \times 10^{-2} = 3,6 \times 10^{-1}$

$F = 7 \times 10^{-3} \times 0,5 \times 10^{2} \times 8 \times 10^{-4} = = 7 \times 0,5 \times 8 \times 10^{-3} \times 10^{2} \times 10^{-4} = 28 \times 10^{-5} = = 2,8 \times 10^{-4}$

$G = 12 \times 5 \times 10^{3} \times 10^{4} = 60 \times 10^{7} = 6 \times 10^{8}$

$H = 0,32 \times 10^{6} \times 5 \times 10^{-3} \times 5 = 0,32 \times 5 \times 5 \times 10^{6} \times \times 10^{-3} = 8 \times 10^{3}$

▶ Pág. 38. Ejercicios


POTENCIAS Y RAÍCES

RAÍZ CUADRADA

38. Observa:

$$A = \frac{3,6\times10^4}{9\times10^6} = \frac{3,6}{9}\times\frac{10^4}{10^6} =$$
$$= 0,4\times10^{-2} = 0,004 =$$
$$= 4\times10^{-3}$$

Ahora tú. Escribe en notación científica:

$$B = \frac{7\times10^{-3}}{5\times10^{-1}} = \frac{7}{5}\times10^{-2} = 1,4\times10^{-2}$$
$$C = \frac{8\times10^3}{1,6\times10^{-3}} = \frac{8}{1,6}\times10^6 = 5\times10^6$$
$$D = \frac{23\times10^5}{10^{-3}} = 23\times10^8 = 2,3\times10^9$$
$$E = \frac{24\times10^{-3}}{40\times10^2} = \frac{24}{40}\times10^{-5} = 0,6\times10^{-5}$$

39. Escribe los siguientes números en notación científica y en notación de ingeniero:

$A = 3 \times 10^4 \times 0,75 \times 10^2 = 2,25 \times 10^6 = 2,25 \times 10^6$

$B = 500\,000 \times 1,2 \times 10^{-3} = 600000 \times 10^{-3} =$
$= 6 \times 10^2 = 600$

$C = 4 \times 10 \times (-9) \times 10^{-5} = -36 \times 10^{-4} = -3,6 \times 10^{-3} =$
$= -3,6 \times 10^{-3}$

$D = 3,8 \times 10^3 \times 1,2 \times 10^5 = 4,56 \times 10^8 = 456 \times 10^6$

$E = 5 \times 10^{-4} \times 4,8 \times 10^{-1} = 24 \times 10^{-5} = 2,4 \times 10^{-4}$
$= 240 \times 10^{-6}$

$F = 5,6 \times 5 \times 10^{-5} \times 2 \times 10^9 = 56 \times 10^4 = 5,6 \times 10^5 =$
$= 560 \times 10^3$

40. ¿Cuáles de los siguientes números están escritos en notación científica?

a) $3,2 \times 10^{-3}$; 25×10^4; 5^2

b) $0,0023 \times 10^{-2}$; $1,23 \times 10^{-1}$; 4^{-4}

c) 10 000; $2,2222 \times 10^2$; $20,32 \times 10^6$

Están escritos en notación científica: a) $3,2 \times 10^{-3}$; b) $1,23 \times 10^{-1}$; c) $2,2222 \times 10^2$;

41. Completa la tabla siguiente:

x	36	256	324	2008^2	7	$(-7)^2$
$\sqrt{x}$	6	16	18	2008	$\sqrt{7}$	7

42. Completa con dos números enteros consecutivos (no uses calculadora):

a) $4 < \sqrt{18} < 5$ **b)** $9 < \sqrt{87} < 10$

c) $10 < \sqrt{120} < 11$ **d)** $13 < \sqrt{175} < 14$

43. Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $5x^2 = 5 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = -1$ y $x = 1$

b) $8x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

c) $x^2 = 6 \Rightarrow x = -\sqrt{6}$ y $x = \sqrt{6}$

d) $-4x^2 = 16 \Rightarrow x^2 = -4 \Rightarrow$ no tiene solución

e) $x^2 = 1,44 \Rightarrow x = -\sqrt{1,44} = -1,2$ y $x = \sqrt{1,44} =$
$= 1,2$

f) $x^2 = \frac{25}{9} \Rightarrow x = -\sqrt{\frac{25}{9}} = -\frac{5}{3}$ y $x = \sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{5}{3}$

44. Calcula mentalmente y da un resultado lo más simple posible:

a) $\sqrt{8}\times\sqrt{2} = \sqrt{16} = 4$

b) $\sqrt{18}\times\sqrt{2} = \sqrt{36} = 6$

c) $\sqrt{2}\times\sqrt{25} = 5\sqrt{2}$

d) $\sqrt{1,6}\times\sqrt{10} = \sqrt{16} = 4$

e) $\sqrt{5}\times\sqrt{200} = \sqrt{10000} = 100$

f) $\sqrt{0,36}\times\sqrt{100} = \sqrt{36} = 6$

g) $\sqrt{\frac{1}{6}}\times\sqrt{24} = \sqrt{\frac{24}{6}} = \sqrt{4} = 2$

h) $\sqrt{54}\times\sqrt{\frac{1}{6}} = \sqrt{\frac{54}{6}} = \sqrt{9} = 3$

i) $\sqrt{\frac{2}{3}}\times\sqrt{24} = \sqrt{\frac{2\times24}{3}} = \sqrt{\frac{48}{3}} = \sqrt{16} = 4$

j) $\sqrt{\frac{5}{2}}\times\sqrt{\frac{32}{5}} = \sqrt{\frac{5\times32}{2\times5}} = \sqrt{16} = 4$

k) $\sqrt{\frac{20}{11}}\times\sqrt{\frac{44}{5}} = \sqrt{\frac{20\times44}{11\times5}} = \sqrt{16} = 4$

l) $\sqrt{2}\times\sqrt{\frac{3}{10}}\times\sqrt{15} = \sqrt{\frac{2\times3\times15}{10}} = \sqrt{9} = 3$

45. Simplifica al máximo los resultados de las siguientes operaciones:

a) $\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{27}} = \sqrt{\frac{48}{27}} = \sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{9}} = \frac{4}{3}$

b) $\frac{\sqrt{300}}{\sqrt{243}} = \sqrt{\frac{300}{243}} = \sqrt{\frac{100}{81}} = \frac{\sqrt{100}}{\sqrt{81}} = \frac{10}{9}$

c) $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{0,9}} = \sqrt{\frac{10}{0,9}} = \sqrt{\frac{100}{9}} = \frac{\sqrt{100}}{\sqrt{9}} = \frac{10}{3}$

d) $\sqrt{\frac{7}{50}}\times\sqrt{\frac{40}{35}} = \sqrt{\frac{7\times40}{50\times35}} = \sqrt{\frac{4}{25}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{25}} = \frac{2}{5}$

46. Reduce las siguientes expresiones:

a) $2\sqrt{2} - 3\sqrt{3} + \sqrt{2} - \sqrt{3} = (2+1)\sqrt{2} - (3+1)\sqrt{3} =$
$= 3\sqrt{2} - 4\sqrt{3}$

b) $\sqrt{3} - \sqrt{2} - (2\sqrt{2} + \sqrt{3}) = \sqrt{3} - \sqrt{2} - 2\sqrt{2} - \sqrt{3} = -3\sqrt{2}$

c) $\left(\sqrt{3} - 2\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2} - 3\sqrt{3}\right) = \sqrt{3}\sqrt{2} - 2\sqrt{2}\sqrt{2} - 3\sqrt{3}\sqrt{3} + 6\sqrt{2}\sqrt{3} =$
$= \sqrt{6} - 2\sqrt{4} - 3\sqrt{9} + 6\sqrt{6} = (1+6)\sqrt{6} - 2\times2 - 3\times3 = 7\sqrt{6} - 13$

d) $\sqrt{2}\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right) - \sqrt{3}\left(\sqrt{2} - \sqrt{3}\right) = \sqrt{2}\sqrt{3} - \sqrt{2}\sqrt{2} - \sqrt{3}\sqrt{2} + \sqrt{3}\sqrt{3} =$
$= -\sqrt{4} + \sqrt{9} = -2 + 3 = 1$

e) $\left(5 - \sqrt{7}\right)\left(\sqrt{7} + 5\right) = 5\sqrt{7} - \sqrt{7}\sqrt{7} + 5^2 - 5\sqrt{7} =$
$= 25 - \sqrt{7^2} = 25 - 7 = 18$

f) $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}-1\right)=$

$=\sqrt{3}\sqrt{3}-\sqrt{2}\sqrt{3}+\sqrt{3}+\sqrt{3}\sqrt{2}-\sqrt{2}\sqrt{2}+\sqrt{2}=$

$=-\sqrt{3}+\sqrt{2}-1=\sqrt{3^2}-\sqrt{6}+\sqrt{3}+\sqrt{6}-\sqrt{2^2}+\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{2}-1=$

$=3-2+2\sqrt{2}-1=2\sqrt{2}$

g) $\left(1-2\sqrt{6}+\sqrt{8}\right)\left(2\sqrt{8}-\sqrt{6}\right)=$

$=2\sqrt{8}-4\sqrt{6}\sqrt{8}+2\sqrt{8}\sqrt{8}-\sqrt{6}+2\sqrt{6}\sqrt{6}-\sqrt{8}\sqrt{6}=$

$=2\sqrt{8}-4\sqrt{48}+2\sqrt{8^2}-\sqrt{6}+2\sqrt{6^2}-\sqrt{48}=$

$=2\sqrt{8}-5\sqrt{48}+16-\sqrt{6}+12=2\sqrt{8}-5\sqrt{48}-\sqrt{6}+28$

h) $\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)^2=\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)=$

$=\sqrt{2}\sqrt{2}+\sqrt{6}\sqrt{2}+\sqrt{2}\sqrt{6}+\sqrt{6}\sqrt{6}=$

$=\sqrt{2^2}+\sqrt{12}+\sqrt{12}+\sqrt{6^2}=2+2\sqrt{12}+6=8+2\sqrt{12}$

47. Extrae todos los factores posibles de cada una de las siguientes raíces:

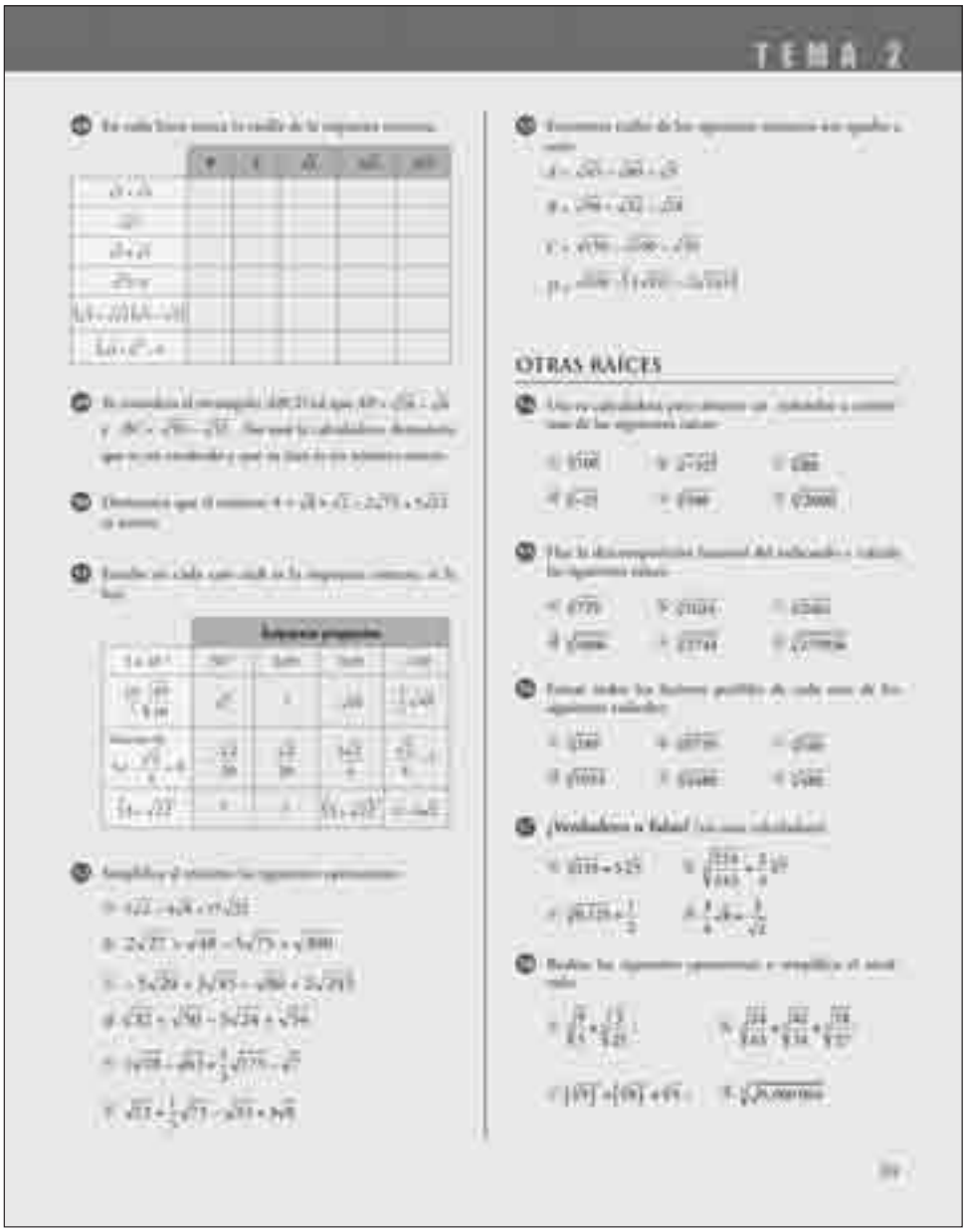
a) $\sqrt{252}=\sqrt{2^2\times3^2\times7}=2\times3\sqrt{7}=6\sqrt{7}$

b) $\sqrt{150}=\sqrt{2\times3\times5^2}=5\sqrt{2\times3}=5\sqrt{6}$

c) $\sqrt{1584}=\sqrt{2^4\times3^2\times11}=2^2\times3\sqrt{11}=12\sqrt{11}$

d) $\sqrt{3200}=\sqrt{2^7\times5^2}=\sqrt{2^6\times2\times5^2}=2^3\times5\sqrt{2}=40\sqrt{2}$

▶ Pág. 39. Ejercicios



TEMA 2

OTRAS RAÍCES

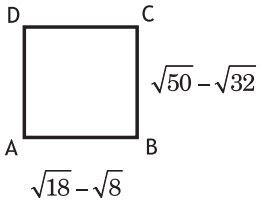
48. En cada línea marca la casilla de la respuesta correcta:

	0	3	$\sqrt{3}$	$2\sqrt{3}$	$3\sqrt{3}$
$\sqrt{3}+\sqrt{3}$				×	
$\sqrt{27}$					×
$\sqrt{3}\times\sqrt{3}$		×			
$\sqrt{75}/5$			×		
$(\sqrt{5}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-\sqrt{2})$		×			
$(\sqrt{3}+1)^2-4$				×	

Pues:

1. $\sqrt{3}+\sqrt{3}=2\sqrt{3}$;
   $\sqrt{27}=\sqrt{3^2\times 3}=3\sqrt{3}$;
2. $\sqrt{3}\times\sqrt{3}=\sqrt{3\times 3}=\sqrt{3^2}=3$
3. $\sqrt{75}/5=\sqrt{5^2\times 3}/5=5\sqrt{3}/5=\sqrt{3}$; $\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)=$
4. $\sqrt{5}\sqrt{5}+\sqrt{2}\sqrt{5}-\sqrt{5}\sqrt{2}-\sqrt{2}\sqrt{2}=\sqrt{5^2}+\sqrt{10}-\sqrt{10}-\sqrt{2^2}=$
   $=5-2=3$;
5. $\left(\sqrt{3}+1\right)^2-4=3+2\sqrt{3}+1-4=2\sqrt{3}$

49. Se considera el rectángulo *ABCD* tal que *AB* = $\sqrt{18}-\sqrt{8}$ y *BC* = $\sqrt{50}-\sqrt{32}$. Sin usar la calculadora, demuestra que es un cuadrado y que su área es un número entero.



$AB = \sqrt{18}-\sqrt{8}=\sqrt{9\times 2}-\sqrt{4\times 2}=3\sqrt{2}-2\sqrt{2}=\sqrt{2}$

$CB = \sqrt{50}-\sqrt{32}=\sqrt{25\times 2}-\sqrt{16\times 2}=5\sqrt{2}-4\sqrt{2}=\sqrt{2}$

$AB = CB \rightarrow$ se trata de un cuadrado.

Área = $\sqrt{2}\times\sqrt{2}=\sqrt{2^2}=2\in\mathbb{Z}$

50. Demuestra que el número *A* = $\sqrt{8}\times\sqrt{2}-2\sqrt{75}+5\sqrt{12}$ es entero.

$A=\sqrt{8}\times\sqrt{2}-2\sqrt{75}+5\sqrt{12}=\sqrt{16}-2\sqrt{25\times 3}+5\sqrt{4\times 3}=$
$=4-2\times 5\sqrt{3}+5\times 2\sqrt{3}=4-10\sqrt{3}+10\sqrt{3}=4\in\mathbb{Z}$

51. Escribe en cada caso cuál es la respuesta correcta, si la hay.

	Respuestas propuestas			
5×10^{-3}	50^{-3}	0,05	0,05	–150
$\frac{10}{7}\sqrt{\frac{49}{10}}$	$\sqrt{7}$	7	$\sqrt{10}$	$\frac{1}{7}\sqrt{49}$
Solución de: $5x-\frac{\sqrt{2}}{4}=0$	$-\frac{\sqrt{2}}{20}$	$\frac{\sqrt{2}}{20}$	$\frac{5\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{4}-5$
$(3+\sqrt{2})^2$	7	1	$(3+\sqrt{2})^2$	$11-6\sqrt{2}$

$5\times 10-3 = 0{,}005 \rightarrow$ ninguna respuesta es correcta.

$\frac{10}{7}\sqrt{\frac{49}{10}}=\frac{10}{7}\frac{\sqrt{49}}{\sqrt{10}}=\frac{10\times 7}{7\sqrt{10}}=\frac{10}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{100}}{\sqrt{10}}=\sqrt{\frac{100}{10}}=\sqrt{10}$

$5x-\frac{\sqrt{2}}{4}=0\rightarrow 5x=\frac{\sqrt{2}}{4}\rightarrow x=\frac{\sqrt{2}}{4\times 5}=\frac{\sqrt{2}}{20}$

$\left(3+\sqrt{2}\right)^2=\left(3+\sqrt{2}\right)\left(3+\sqrt{2}\right)=3^2+3\sqrt{2}+3\sqrt{2}+\sqrt{}$

$=9+6\sqrt{2}+2=11+6\sqrt{2}$ → ninguna respuesta es correcta.

52. Simplifica al máximo las siguientes operaciones:

a) $5\sqrt{2}-4\sqrt{8}+17\sqrt{32}=5\sqrt{2}-4\sqrt{4\times 2}+17\sqrt{16\times 2}=$
$=5\sqrt{2}-8\sqrt{2}+68\sqrt{2}=65\sqrt{2}$

b) $2\sqrt{27}+\sqrt{48}-5\sqrt{75}+\sqrt{300}=$
$=2\sqrt{3^2\times 3}+\sqrt{4^2\times 3}-5\sqrt{5^2\times 3}+\sqrt{10^2\times 3}=$
$=2\times 3\sqrt{3}+4\sqrt{3}-5\times 5\sqrt{3}+10\sqrt{3}=$
$=6\sqrt{3}+4\sqrt{3}-25\sqrt{3}+10\sqrt{3}=-5\sqrt{3}$

c) $-5\sqrt{20}+3\sqrt{45}-\sqrt{80}+2\sqrt{245}=$
$=-5\sqrt{2^2\times 5}+3\sqrt{3^2\times 5}-\sqrt{4^2\times 5}+2\sqrt{7^2\times 5}=$
$=-5\times 2\sqrt{5}+3\times 3\sqrt{5}-4\sqrt{5}+2\times 7\sqrt{5}=$
$=-10\sqrt{5}+9\sqrt{5}-4\sqrt{5}+14\sqrt{5}=9\sqrt{5}$

d) $\sqrt{32}+\sqrt{50}-3\sqrt{24}+\sqrt{54}=$
$=\sqrt{4^2\times 2}+\sqrt{5^2\times 2}-3\sqrt{2^2\times 6}+\sqrt{3^2\times 6}=$
$=2\sqrt{2}+5\sqrt{2}-3\times 2\sqrt{6}+3\sqrt{6}=7\sqrt{2}-6\sqrt{6}+3\sqrt{6}=$
$=7\sqrt{2}-3\sqrt{6}$

e) $2\sqrt{28}-\sqrt{63}+\frac{1}{3}\sqrt{175}-\sqrt{7}=$
$=4\sqrt{7}-3\sqrt{7}+\frac{1}{3}5\sqrt{7}-\sqrt{7}=\frac{5}{3}\sqrt{7}$

f) $\sqrt{12}+\frac{1}{3}\sqrt{75}-\sqrt{32}+3\sqrt{8}=$
$=2\sqrt{3}+\frac{1}{3}5\sqrt{3}-4\sqrt{2}+6\sqrt{2}=$
$=(2+\frac{5}{3})\sqrt{3}+(-4+6)\sqrt{2}=$
$=\frac{11}{3}\sqrt{3}+2\sqrt{2}$

53. Encuentra cuáles de los siguientes números son iguales a cero.

$A = \sqrt{45} - \sqrt{80} + \sqrt{5} = \sqrt{3^2 \times 5} - \sqrt{4^2 \times 5} + \sqrt{5} =$
$= 3\sqrt{5} - 4\sqrt{5} + \sqrt{5} = 0$

$B = \sqrt{98} - \sqrt{32} - \sqrt{18} = \sqrt{7^2 \times 2} - \sqrt{4^2 \times 2} - \sqrt{3^2 \times 2} =$
$= 7\sqrt{2} - 4\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = 0$

$C = \sqrt{150} - \sqrt{100} - \sqrt{50} = \sqrt{5^2 \times 6} - \sqrt{10^2} - \sqrt{5^2 \times 2} =$
$= 5\sqrt{6} - 10 - 5\sqrt{2} \neq 0$

$D = \sqrt{108} - \left(3\sqrt{192} - 2\sqrt{243}\right) =$
$= \sqrt{3^2 \times 2^2 \times 3} - 3\sqrt{8^2 \times 3} + 2\sqrt{9^2 \times 3} =$
$= 3 \times 2\sqrt{3} - 3 \times 8\sqrt{3} + 2 \times 9\sqrt{3} = 6\sqrt{3} - 24\sqrt{3} + 18\sqrt{3} = 0$

54. Usa tu calculadora para obtener un redondeo a centésimas de las siguientes raíces:

a) $\sqrt[3]{100} = 4{,}64$ **b)** $\sqrt[5]{-325} = -3{,}18$

c) $\sqrt[4]{80} = 2{,}99$ **d)** $\sqrt[3]{-25} = -2{,}92$

e) $\sqrt[6]{586} = 2{,}89$ **f)** $\sqrt[4]{2000} = 6{,}69$

55. Haz la descomposición factorial del radicando y calcula las siguientes raíces:

a) $\sqrt[3]{729} = \sqrt[3]{3^6} = 3^2 = 9$

b) $\sqrt[5]{1024} = \sqrt[5]{2^{10}} = 2^2 = 4$

c) $\sqrt[4]{2401} = \sqrt[4]{7^4} = 7$

d) $\sqrt[6]{4096} = \sqrt[6]{2^{12}} = 2^2 = 4$

e) $\sqrt[3]{2744} = \sqrt[3]{2^3 \times 7^3} = 2 \times 7 = 14$

f) $\sqrt[7]{279936} = \sqrt[7]{2^7 \times 3^7} = 2 \times 3 = 6$

56. Extrae todos los factores posibles de cada uno de los siguientes radicales:

a) $\sqrt[3]{189} = \sqrt[3]{3^3 \times 7} = 3\sqrt[3]{7}$

b) $\sqrt[3]{6750} = \sqrt[3]{2 \times 3^3 \times 5^3} = 3 \times 5\sqrt[3]{2} = 15\sqrt[3]{2}$

c) $\sqrt[4]{160} = \sqrt[4]{2^5 \times 5} = 2\sqrt[4]{2 \times 5} = 2\sqrt[4]{10}$

d) $\sqrt[4]{1053} = \sqrt[4]{3^4 \times 13} = 3\sqrt[4]{13}$

e) $\sqrt[4]{6480} = \sqrt[4]{2^4 \times 3^4 \times 5} = 2 \times 3\sqrt[4]{5} = 6\sqrt[4]{5}$

f) $\sqrt[5]{486} = \sqrt[5]{2 \times 3^5} = 3\sqrt[5]{2}$

57. ¿Verdadero o falso? (no uses calculadora)

a) $\sqrt[5]{135} = 3\sqrt[5]{5}$ Falso pues
$3\sqrt[5]{5} = \sqrt[5]{35 \times 5} = \sqrt[5]{243 \times 5} = \sqrt[5]{1215}$

b) $\sqrt[6]{\frac{224}{243}} = \frac{2}{3}\sqrt[3]{7}$ Falso pues
$\frac{2}{3}\sqrt[3]{7} = \sqrt[3]{\frac{2^3 \times 7}{3^3}} = \sqrt[3]{\frac{56}{27}} = \sqrt[6]{\frac{3136}{729}}$

c) $\sqrt[3]{0{,}125} = \frac{1}{2}$ Verdadero pues
$\sqrt[3]{0{,}125} = \sqrt[3]{\frac{125}{1000}} = \sqrt[3]{\frac{5^3}{10^3}} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

d) $\frac{3}{4}\sqrt{8} = \frac{3}{\sqrt{2}}$ Verdadero pues
$\frac{3}{4}\sqrt{8} = \frac{3}{4}2\sqrt{2} = \frac{3}{2}\sqrt{2} = \frac{3}{\sqrt{2}}$

58. Realiza las siguientes operaciones y simplifica el resultado:

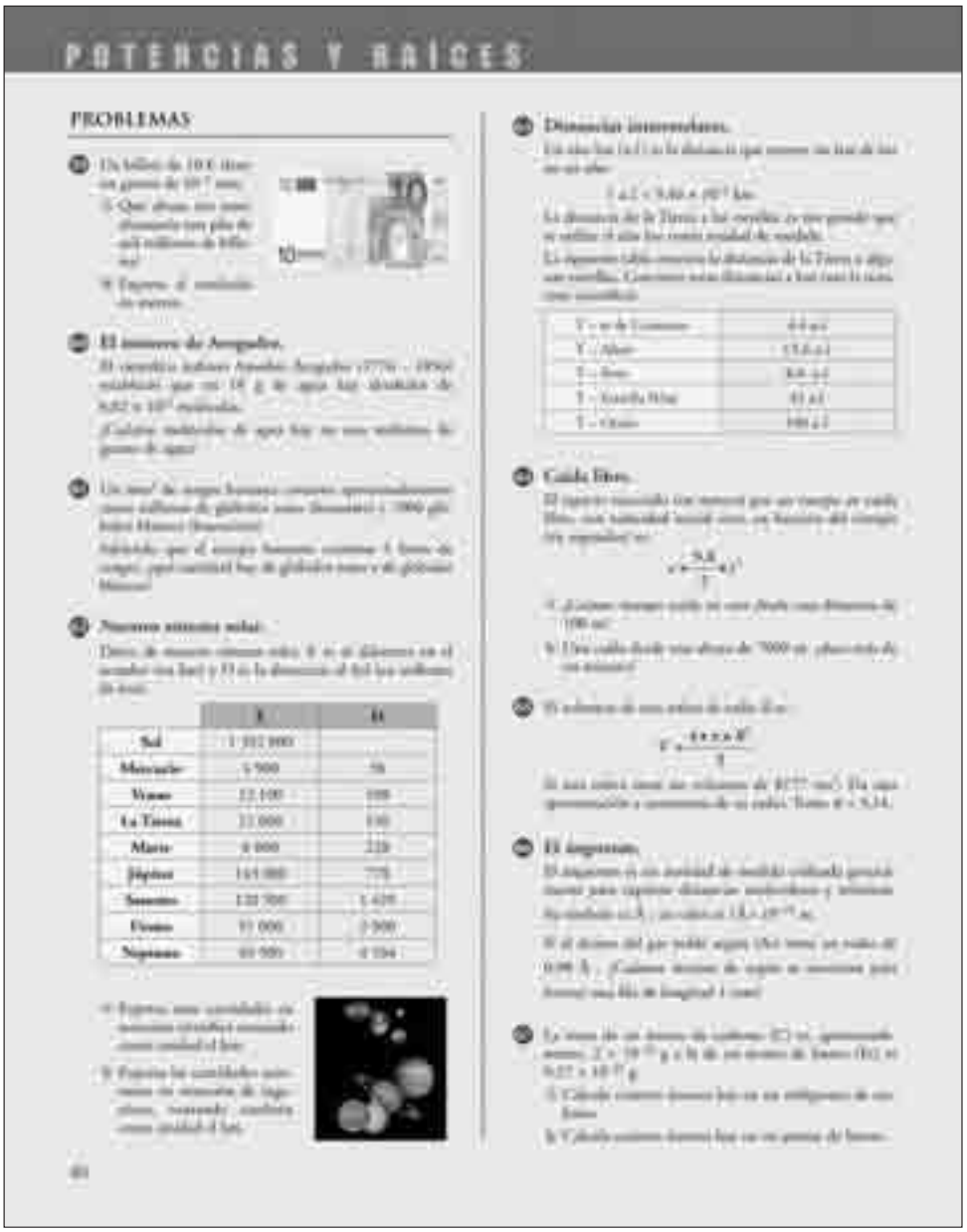
a) $\sqrt[3]{\frac{9}{5}} \times \sqrt[3]{\frac{3}{25}} = \sqrt[3]{\frac{9 \times 3}{5 \times 25}} = \sqrt[3]{\frac{3^3}{5^3}} = \frac{3}{5}$

b) $\sqrt[3]{\frac{24}{63}} \times \sqrt[3]{\frac{42}{54}} \times \sqrt[3]{\frac{18}{27}} = \sqrt[3]{\frac{24 \times 42 \times 18}{63 \times 54 \times 27}} =$
$= \sqrt[3]{\frac{2^3 \times 3 \times 2 \times 3 \times 7 \times 2 \times 3^2}{3^2 \times 7 \times 2 \times 3^3 \times 3^3}} = \sqrt[3]{\frac{2^5 \times 3^5 \times 7}{2 \times 3^8 \times 7}} =$
$= \sqrt[3]{\frac{2^4}{3^3}} = \frac{2}{3}\sqrt[3]{2}$

c) $\left(\sqrt[4]{9}\right)^2 \times \left(\sqrt[4]{8}\right)^2 \times \sqrt[4]{4} = \sqrt[4]{3^4} \times \sqrt[4]{2^6} \times \sqrt[4]{2^2} = \sqrt[4]{3^4 \times 2^8} =$
$= 3 \times 2^2 = 12$

d) $\sqrt[3]{\sqrt{0,\,000\,064}} = \sqrt[6]{0{,}000064} = \sqrt[6]{\frac{64}{10^6}} = \sqrt[6]{\frac{2^6}{10^6}} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$

▶ Pág. 40. Ejercicios



POTENCIAS Y RAÍCES

PROBLEMAS

59. Un billete de 10 € tiene un grosor de 10^{-2} mm.

a) Qué altura (en mm) alcanzaría una pila de mil millones de billetes?

b) Expresa el resultado en metros.

a) $10^9 \times 10^{-2} = 10^7$ mm

b) $\frac{10^7}{10^3} = 10^4$ mm

60. El número de Avogadro.

El científico italiano Amedeo Avogadro (1776 – 1856) estableció que en 18 g de agua hay alrededor de $6{,}02 \times 10^{23}$ moléculas.

¿Cuántas moléculas de agua hay en una milésima de gramo de agua?

$\frac{6{,}02 \times 10^{23}}{18} = 0{,}33\widehat{4} \times 10^{23}$ moléculas en un gramo.

$\frac{0{,}33\widehat{4} \times 10^{23}}{10^3} = 0{,}33\widehat{4} \times 10^{20} = 3{,}3\widehat{4} \times 10^{19}$ moléculas en una milésima de gramo.

61. Un mm^3 de sangre humana contiene aproximadamente cinco millones de glóbulos rojos (hematíes) y 7000 glóbulos blancos (leucocitos).

Sabiendo que el cuerpo humano contiene 5 litros de sangre, ¿qué cantidad hay de glóbulos rojos y de glóbulos blancos?

$1\ l = 10^6\ mm^3$

$5 \times 10^6 \times 5 \times 10^6 = 25 \times 10^{12}$ glóblulos rojos.

$7000 \times 5 \times 10^6 = 35 \times 10^9$ glóbulos blancos.

62. Nuestro sistema solar.

Datos de nuestro sistema solar. E es el diámetro en el ecuador (en km) y D es la distancias al Sol (en millones de km).

	E	D
Sol	1 392 000	
Mercurio	4 900	58
Venus	12 100	108
La Tierra	12 800	150
Marte	6 800	228
Júpiter	143 000	778
Saturno	120 500	1 429
Urano	51 000	2 900
Neptuno	49 500	4 504

a) Expresa estas cantidades en notación científica tomando como unidad el km.

b) Expresa las cantidades anteriores en notación de ingeniero, tomando también como unidad el km.

a)

	E	D
Sol	$1{,}392 \times 10^6$	
Mercurio	$4{,}9 \times 10^3$	58×10^7
Venus	$12{,}1 \times 10^4$	108×10^8
La Tierra	$12{,}8 \times 10^4$	150×10^8
Marte	$6{,}8 \times 10^3$	228×10^8
Júpiter	143×10^5	778×10^8
Saturno	$120{,}5 \times 10^5$	$1{,}429 \times 10^9$
Urano	51×10^4	$2{,}9 \times 10^9$
Neptuno	$49{,}5 \times 10^4$	$4{,}504 \times 10^9$

b)

	E	D
Sol	$1{,}392 \times 10^6$	
Mercurio	$4{,}9 \times 10^3$	$5{,}8 \times 10^6$
Venus	$1{,}21 \times 10^3$	$1{,}08 \times 10^6$
La Tierra	$1{,}28 \times 10^3$	$1{,}5 \times 10^6$
Marte	$6{,}8 \times 10^3$	$2{,}28 \times 10^6$
Júpiter	$1{,}43 \times 10^3$	$7{,}78 \times 10^6$
Saturno	$1{,}205 \times 10^3$	$1{,}429 \times 10^9$
Urano	$5{,}1 \times 10^3$	$2{,}9 \times 10^9$
Neptuno	$4{,}95 \times 10^3$	$4{,}504 \times 10^9$

63. Distancias interestelares.

Un año luz (*a.l.*) es la distancia que recorre un haz de luz en un año.

$$\mathbf{1\ a.l. = 9{,}46 \times 10^{12}\ km}$$

La distancia de la Tierra a las estrellas es tan grande que se utiliza el año luz como unidad de medida.

La siguiente tabla muestra la distancia de la Tierra a algunas estrellas. Convierte estas distancias a km (usa la notación científica).

T – α de Centauro	4,4 *a.l.*
T – Altair	15,6 *a.l.*
T – Sirio	8,6 *a.l.*
T – Estrella Polar	42 *a.l.*
T – Orión	540 *a.l.*

T – α de Centauro: $4{,}4 \times 9{,}46 \times 10^{12} =$

$= 41{,}624 \times 10^{12} = 4{,}1624 \times 10^{13}$ km

T – Altair: $15{,}6 \times 9{,}46 \times 10^{12} = 147{,}576 \times 10^{12} =$

$= 1{,}47576 \times 10^{14}$ km

T – Sirio: $8{,}6 \times 9{,}46 \times 10^{12} = 81{,}356 \times 10^{12} =$

$= 8{,}1356 \times 10^{13}$ km

T – Estrella Polar: $42 \times 9{,}46 \times 10^{12} = 397{,}32 \times 10^{12} =$

$= 3{,}9732 \times 10^{14}$ km

T – Orión: $540 \times 9{,}46 \times 10^{12} = 5108{,}4 \times 10^{12} =$

$= 5{,}1084 \times 10^{15}$ km

64. Caída libre.

El espacio recorrido (en metros) por un cuerpo en caída libre, con velocidad inicial cero, en función del tiempo (en segundos) es:

$$e = \frac{9{,}8}{2} \times t^2$$

a) ¿Cuánto tiempo tarda en caer desde una distancia de 100 m?

b) Una caída desde una altura de 7000 m, ¿dura más de un minuto?

a) $100 = \dfrac{9{,}8}{2} \times t^2 \Rightarrow t^2 = \dfrac{200}{9{,}8} = 20{,}408 \Rightarrow t = 4{,}517\ seg$

b) $7000 = \dfrac{9{,}8}{2} \times t^2 \Rightarrow t^2 = \dfrac{14000}{9{,}8} = 1428{,}571 \Rightarrow$

$\Rightarrow t = 37{,}796\ seg$

No, dura 37,796 seg.

65. El volumen de una esfera de radia *R* es :

$$V = \frac{4 \times \pi \times R^3}{3}$$

Si una esfera tiene un volumen de 8177 cm^3. Da una aproximación a centésimas de su radio. Toma π = 3,14.

$$8177 = \frac{4 \times 3{,}14 \times R^3}{3} \Rightarrow R^3 = \frac{3 \times 8177}{4 \times 3{,}14} = 1953{,}105 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R = \sqrt[3]{1953{,}105} = 12{,}50\ cm$$

66. El ángstrom.

El ángstrom es un aunidad de medida utilizada generalmente para expresar distancias moleculares y atómicas. Su símbolo es Å y su valor es 1Å = 10^{-10} m.

Si el átomo del gas noble argón (Ar) tiene un radio de 0,98 Å. ¿Cuántos átomos de argón se necesitan para formar una fila de longitud 1 mm?

$1\ Å = 10^{-10}\ m = 10^{-7}\ mm$

$$\frac{1}{0,98 \times 10^{-7}} = 1,02 \times 10^{7}$$

Se necesitan $1,02 \times 10^7$ átomos de argón.

67. La masa de un átomo de carbono (C) es, aproximadamente, 2×10^{-23} g y la de un átomo de hierro (Fe) es $9,27 \times 10^{-23}$ g.

a) Calcula cuántos átomos hay en un miligramo de carbono.

b) Calcula cuántos átomos hay en un gramo de hierro.

a) $2 \times 10^{-23}\ g = 2 \times 10^{-23} \times 10^{3}\ mg = 2 \times 10^{-20}\ mg$

$$\frac{1}{2 \times 10^{-20}} = 0,5 \times 10^{20} = 5 \times 10^{19}$$

Hay 5×10^{19} átomos de carbono en un miligramo.

b) $$\frac{1}{9,27 \times 10^{-23}} = 0,107 \times 10^{23} = 107 \times 10^{20}$$

Hay 107×10^{20} átomos de hierro en un gramo.

Tema 3

Los polinomios

▸ Programación de aula

Objetivos

- Distinguir entre monomio y polinomio.
- Sumar, restar, multiplicar y dividir polinomios.
- Conocer los productos notables.
- Obtener el valor numérico de un polinomio.
- Definir los ceros de un polinomio.
- Factorizar un polinomio.

Criterios de evaluación

- Usar adecuadamente el vocabulario algebraico.
- Distinguir entre monomios y polinomios.
- Calcular la suma y resta de polinomios.
- Calcular la multiplicación de polinomios.
- Usar y caracterizar los productos notables.
- Calcular la división de polinomios.
- Obtener el valor numérico de un polinomio.
- Calcular los ceros de un polinomio.
- Factorizar un polinomio.

Contenidos

- **Conceptos** ("saber")
  - Polinomios.
  - Suma y resta de polinomios.
  - Multiplicación de polinomios.
  - División de polinomios.
  - Propiedades de las operaciones.
  - Productos notables.
  - Factor común. Factorización.
  - Valor numérico. Raíces de un polinomio.

- **Procedimientos** ("Saber hacer")
  - Utilización de construcciones geométricas que permitan verificar las diferentes igualdades algebraicas.
  - Automatización de cálculos con expresiones literales.
  - Significado y uso del vocabulario específico: coeficiente, término, grado, ordenado/desordenado, completo/incompleto.
  - Utilización de los algoritmos de las operaciones: adición, sustracción, multiplicación, división y potenciación de monomios.
  - Uso de los algoritmos para realizar adiciones, sustracciones, y multiplicaciones de polinomios.
  - Utilización de las propiedades de las operaciones para facilitar los cálculos.
  - División de un polinomio por un monomio.
  - División de dos polinoios.
  - Calculo del valor numérico de un polinomio.

- **Actitudes** ("Saber ser")
  - Predisposición al uso del simbolismo específico de la unidad.
  - Valoración de la adquisición de destrezas operativas como requisito previo al avance en los contenidos matemáticos.
  - Disposición favorable a la revisión y mejora del resultado de cualquier cálculo algebraico.

▸ Programación por competencias

COMPETENCIA MATEMÁTICA

CONSTRUCCIÓN DE MODELOS

Descriptores

1. Transformar al lenguaje algebraico situaciones que pueden expresarse con polinomios.

Desempeño

1. Representa matemáticamente situaciones que pueden expresarse con polinomios.	- Distingue entre posibles polinomios. - Decide para utilizar un polinomio adecuado.	- **Introducción** (pág. 42) - **Ejercicios 38, 59 a 62 y 80** (pág. 56 a 58)
2. Opera con potencias y raíces.	- Utiliza las propiedades de las operaciones con potencias y raíces para facilitar los cálculos.	

PENSAMIENTO Y RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

Descriptores

1. Trabajar con polinomios y realizar con ellos las operaciones aritméticas básicas.
2. Automatizar los procesos de cálculo.

Desempeño

1. Identifica diferentes expresiones algebraicas.	- Distingue entre monomios y polinomios. - Distingue los polinomios de otras expresiones algebraicas.	- **Ejemplo 1 y 2** (pág. 44) - **Ejercicios 1, 2, 15 a 18** (pág. 44 y 54)
2. Diseña el algoritmo de cálculo para las operaciones aritméticas básicas con polinomios.	- Aplica el algoritmo correspondiente para sumar, restar, multiplicar y dividir polinomios.	- **Ejemplos y ejercicios del tema** (pág. 44 a 58)
3. Automatiza los cálculos realizados con expresiones literales.	- Interioriza los algoritmos de cálculo y los efectúa repetitivamente.	

ARGUMENTAR MATEMÁTICAMENTE

Descriptores

1. Utilizar la Geometría para argumentar sobre la igualdad de expresiones algebraicas.
2. Considerar los productos notables y saber utilizarlos.
3. Utilizar las propiedades de las operaciones para facilitar los cálculos.
4. Utilizar los ceros de un polinomio para su factorización.

Desempeño

1. Se apoya en la Geometría para establecer relaciones algebraicas.	- Utiliza construcciones geométricas para verificar diferentes igualdades algebraicas.	- **Introducción y "De 2º a 3º"** (pág. 42 y 43) - **"Observa"** (pág. 48) - **Ejercicios 41, 59, 60 y 62** (pág. 56 y 57)
2. Distingue los productos notables en el conjunto de los polinomios.	- Opera con productos notables.	- **En los ejemplos 5 y 6** (pág. 48) - **Ejercicios 9, 10 y 42 a 62** (pág. 48, 56 y 57)
3. Factoriza expresiones algebraicas.	- Factoriza teniendo en cuenta las propiedades de las operaciones. - Factoriza teniendo en cuenta los ceros de un polinomio. - Factoriza teniendo en cuenta los productos notables.	- **Ejemplos 6 y 8** (pág. 48 y 51) - **Ejercicios 10, 14 y 63 a 74** (pág. 48, 51, 57 y 58)

PLANTEAR Y RESOLVER PROBLEMAS MATEMÁTICOS	**Descriptores**		
	1. Formular problemas o situaciones que impliquen la consideración de polinomios. 2. Reflexionar sobre la validez de las soluciones obtenidas.		
	Desempeño		
	1. Plantea una situación concreta utilizando polinomios.	- Formaliza algebraicamente la situación descrita.	- **Ejemplos y ejercicios del tema** (pág. 44 a 58)
	2. Resuelve la cuestión planteada.	- Elige y aplica el sistema de resolución adecuado. - Obtiene la solución.	
LENGUAJE MATEMÁTICO	**Descriptores**		
	1. Utilizar los símbolos, las operaciones y el lenguaje técnico formal.		
	Desempeño		
	1. Conoce el lenguaje matemático.	- Interpreta el lenguaje formal y simbólico de las matemáticas. - Trabaja con expresiones simbólicas y fórmulas.	- **Ejemplos y ejercicios del tema** (páginas 44 a 58).
	2. Traduce el lenguaje natural a lenguaje formal y matemático.	- Entiende las equivalencias entre un lenguaje y otro. - Es crítico en la exactitud del lenguaje formal.	- **Ejemplos y ejercicios del tema** (páginas 44 a 58).

COMPETENCIA LINGÜÍSTICA

COMPETENCIA LINGÜÍSTICA	**Descriptores**		
	1. Comprender el enunciado de un problema en el que interviene un polinomio y diferenciar las ideas fundamentales que permiten expresarlo en lenguaje algebraico. 2. Aportar vocabulario específico y preciso relacionado con los polinomios y con las operaciones entre ellos. 3. Describir verbalmente el proceso seguido en la resolución de un problema en el que intervienen monomios y polinomios, confrontándolo con otros posibles.		
	Desempeño		
	1. Comprende lo que lee.	- Identifica la pregunta que se le hace. - Identifica los elementos algebraicos esenciales que intervienen. - Discrimina e interpreta la información que le da el enunciado de un problema.	- **Ejemplos y ejercicios del tema** (pág. 44 a 58)
	2. Se expresa por escrito de manera adecuada y correcta, con claridad y coherencia, utilizando un lenguaje preciso.	- Identifica la pregunta que se le hace. - Identifica los elementos algebraicos esenciales que intervienen. - Discrimina e interpreta la información que le da el enunciado de un problema.	

COMPETENCIA SOCIAL Y CIUDADANA

COMPETENCIA SOCIAL Y CIUDADANA

Descriptores

1. Plantear en grupo problemas algebraicos formalizados a través de expresiones polinómicas y discutir las diferentes propuestas hasta obtener la correcta.

Desempeño

1. Desarrolla habilidades de trabajo en grupo.	- Respeta el trabajo en grupo. - Acepta los criterios fundados de los demás.	- **Ejercicios diversos 77 a 83** (pág. 58)

COMPETENCIA DIGITAL Y TRATAMIENTO DE LA INFORMACION

COMPETENCIA DIGITAL Y TRATAMIENTO DE LA INFORMACION

Descriptores

1. Confecciona esquemas lógicos y automáticos de cálculo aplicables al cálculo con polinomios.

Desempeño

1. Interpreta, organiza y contrasta la información recibida.	- Resume y sintetiza la información. - Realiza actividades que requieren organización, relación o análisis de la información.	- **Ejemplos y ejercicios del tema** (pág. 44 a 58)
2. Codifica el lenguaje algebraico.	- Reconoce que el lenguaje algebraico supone codificar la información que nos proporciona la realidad.	
3. Codifica el lenguaje algebraico.	- Reconoce que el lenguaje algebraico supone codificar la información que nos proporciona la realidad.	- **Ejercicios diversos 77 a 83** (pág. 58)

COMPETENCIA APRENDER A APRENDER

COMPETENCIA APRENDER A APRENDER

Descriptores

1. Adquirir conciencia y hacer uso de las propias capacidades y conocimientos para iniciarse en el aprendizaje de los polinomios y adquirir destrezas operativas como requisito previo al avance en los contenidos matemáticos.
2 Desarrollar la curiosidad de plantearse preguntas, formalizarlas y resolverlas con la metodología estudiada.
3. Utilizar estrategias de aprendizaje, utilizando técnicas de apoyo diversas, para afrontar la toma de decisiones.

Desempeño

1. Desarrolla habilidades de obtención, análisis y elaboración y automatización en el tratamiento de la información.	- Lee los enunciados de los ejercicios con la intención de comprender, relacionar y sintetizar contenidos. - Maneja adecuadamente recursos y técnicas de aprendizaje individual.	- **Ejemplos y ejercicios del tema** (pág. 44 a 58)
2. Mejora la atención y motivación.	- Se fija en cada paso y lo analiza, afianzando el proceso de aprendizaje. - Cuida la expresión y la presentación de los trabajos.	

COMPETENCIA CULTURAL Y ARTÍSTICA

COMPETENCIA CULTURAL Y ARTÍSTICA

Descriptores

1. Mostrar autores y hechos históricos relacionados con los polinomios.

Desempeño

1. Relaciona los conceptos matemáticos con un hecho o autor históricos.	- Muestra autores matemáticos y/o problemas y hechos reales relacionados con el Algebra y los polinomios.	- **Ejercicio 38** (pág. 56)

COMPETENCIA AUTONOMÍA E INICIATIVA PERSONAL

COMPETENCIA AUTONOMÍA E INICIATIVA PERSONAL

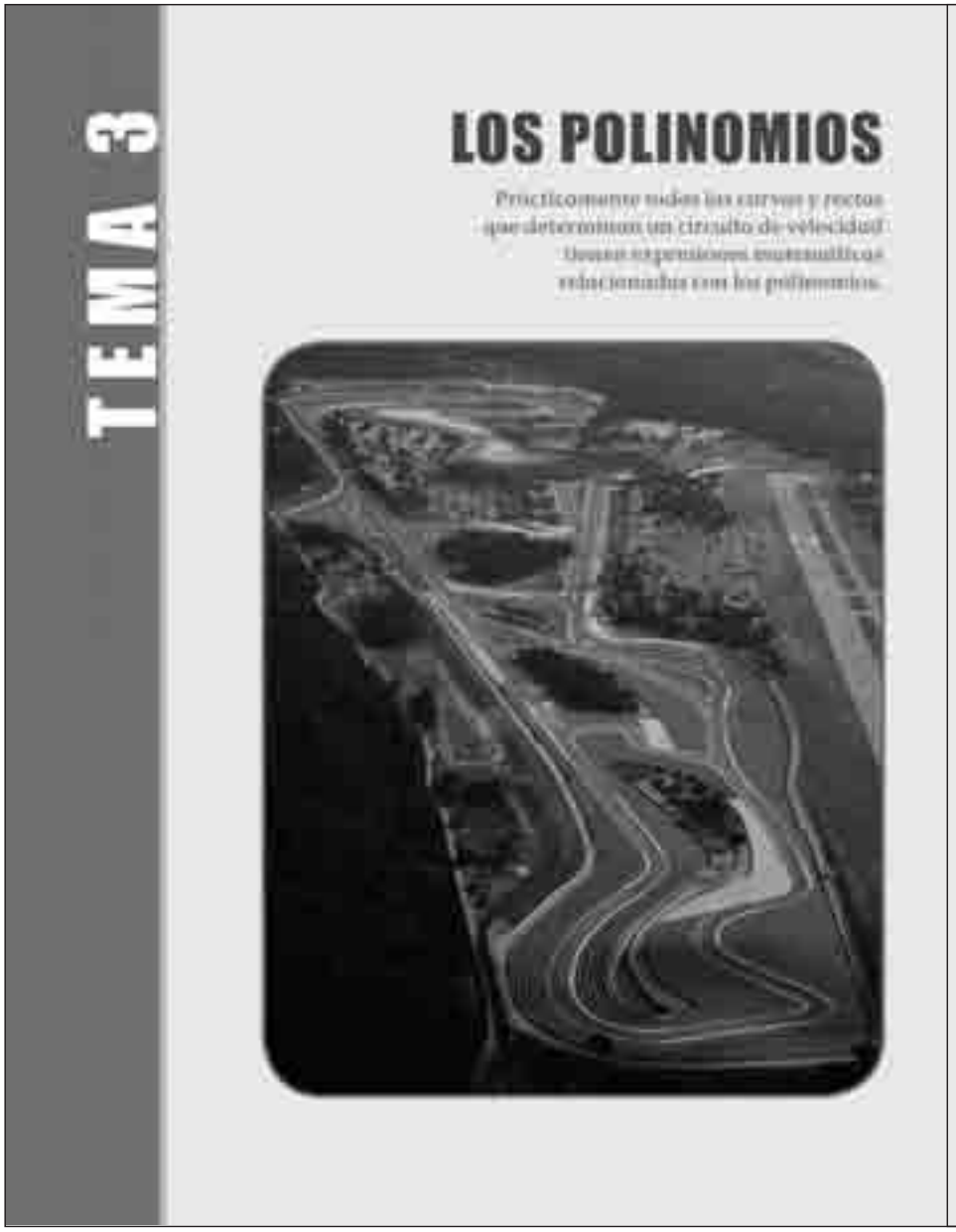
Descriptores

1. Confiar en las propias capacidades y gusto por la elaboración y uso de estrategias personales de cálculo.
2. Siendo tenaz y perseverante en la búsqueda de solución a los problemas de cálculo en los que intervienen monomios y polinomios.

Desempeño

1. Idea y planifica el desarrollo de un ejercicio.	- Elige la opción adecuada para la resolución de los ejercicios. - Mantiene la opción hasta llegar a la conclusión final.	- **Ejemplos y ejercicios del tema** (pág. 44 a 58)
2. Evalúa la solución obtenida.	- Valora el resultado y lo pone en relación con su enunciado del problema resuelto. - Mantiene una disposición favorable a la revisión y mejora del resultado de cualquier cálculo algebraico	
3. Toma decisiones en función del resultado obtenido.	- Decide en función del resultado.	

▶ Pág. 42 - 43. Los polinomios



SOLUCIONARIO

Completa:

a) $AE = AJ = a - b$

b) El área del cuadrado *AEFJ* es: $(a - b)^2$

c) El área del cuadrado *ABCD* es: a^2

d) El área del cuadrado *FGCH* es: b^2

e) El área de cada rectángulo *EBGF* y *JFHD* es: $b\,(a - b)$

Deduce que: $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$

El área del cuadrado ABCD es igual a la suma de las áreas del cuadrado AEFI, del cuadrado FGCH y de los rectángulos EBGF y IFHD. Por tanto:

$a^2 = (a - b)^2 + b^2 - 2b(a - b) \Rightarrow (a - b)^2 =$
$= a^2 - b^2 - 2b(a - b) = a^2 - b^2 - 2ab + 2b^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow (a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$

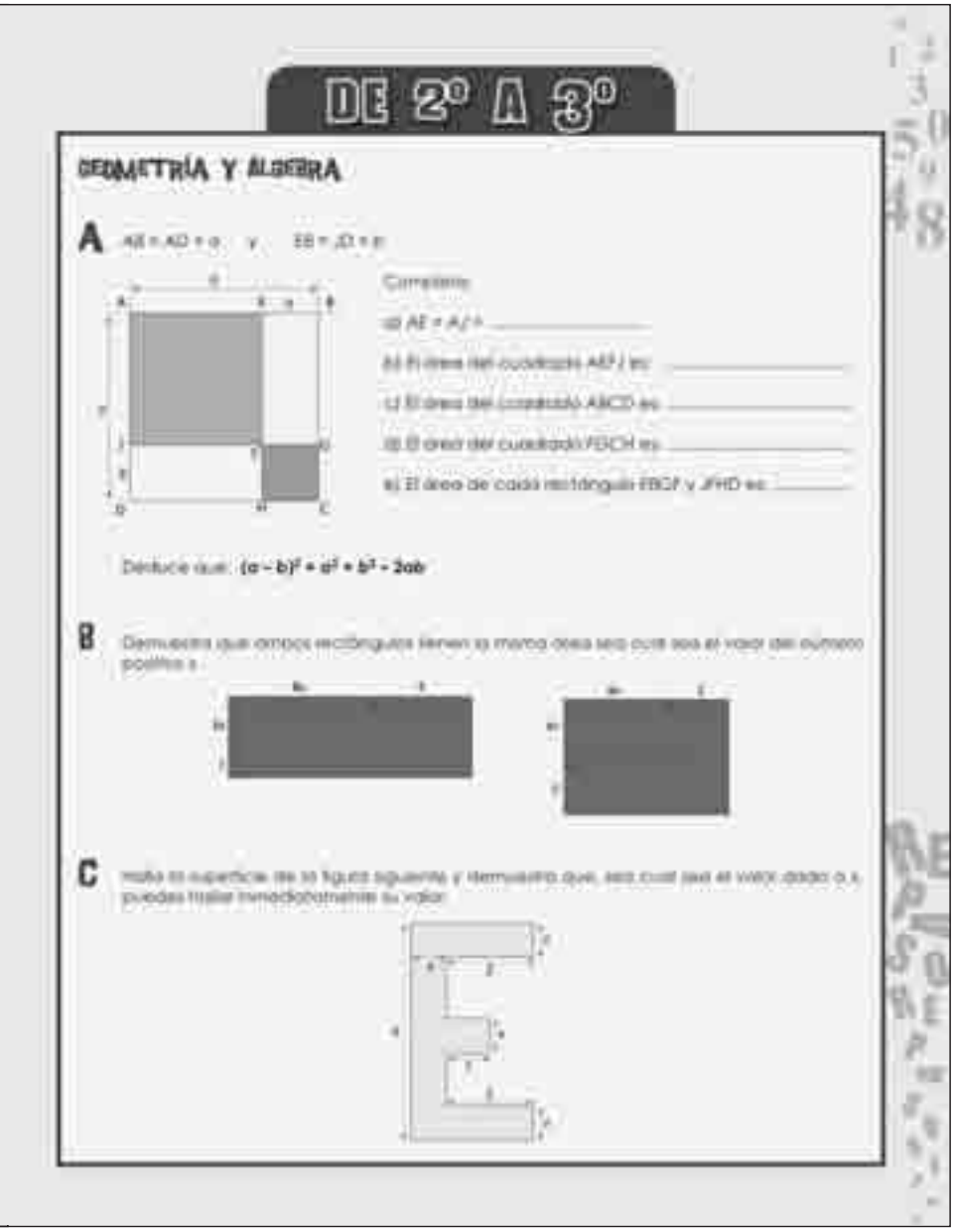
Demuestra que ambos rectángulos tienen la misma área sea cual sea el valor del número positivo *x*.

El área del rectángulo de la izquierda es:

$(8x + 4) \cdot (3x + 1) = 24x^2 + 20x + 4$

El área del rectángulo de la derecha es:

$(6x + 2) \cdot (4x + 2) = 24x^2 + 20x + 4$



Tienen por tanto la misma área independientemente del valor de x.

Halla la superficie de la figura siguiente y demuestra que, sea cual sea el valor dado a x, puedes hallar inmediatamente su valor.

El valor de sus superficie es:

$2x + x + 2x + 5x = 10x$ por lo que se puede hallar fácilmente su valor independientemente del valor de x.

▶ Pág. 44. 1 Monomios y polinomios


LOS POLINOMIOS

1 Monomios y polinomios

PARTES DE UN MONOMIO

EJEMPLOS

EJERCICIOS

44

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS

Adquisición del vocabulario específico.

Los exponentes deben ser naturales.

SOLUCIONARIO

1. Escribe un monomio que sea semejante a cada uno de los siguientes:

a) Un monomio semejante a $-3xy$ es, por ejemplo, $5xy$.

b) Un monomio semejante a $2a^2b^3$ es, por ejemplo, $7a^2b^3$

c) Un monomio semejante a $0{,}25xyz$ es, por ejemplo, $2xyz$

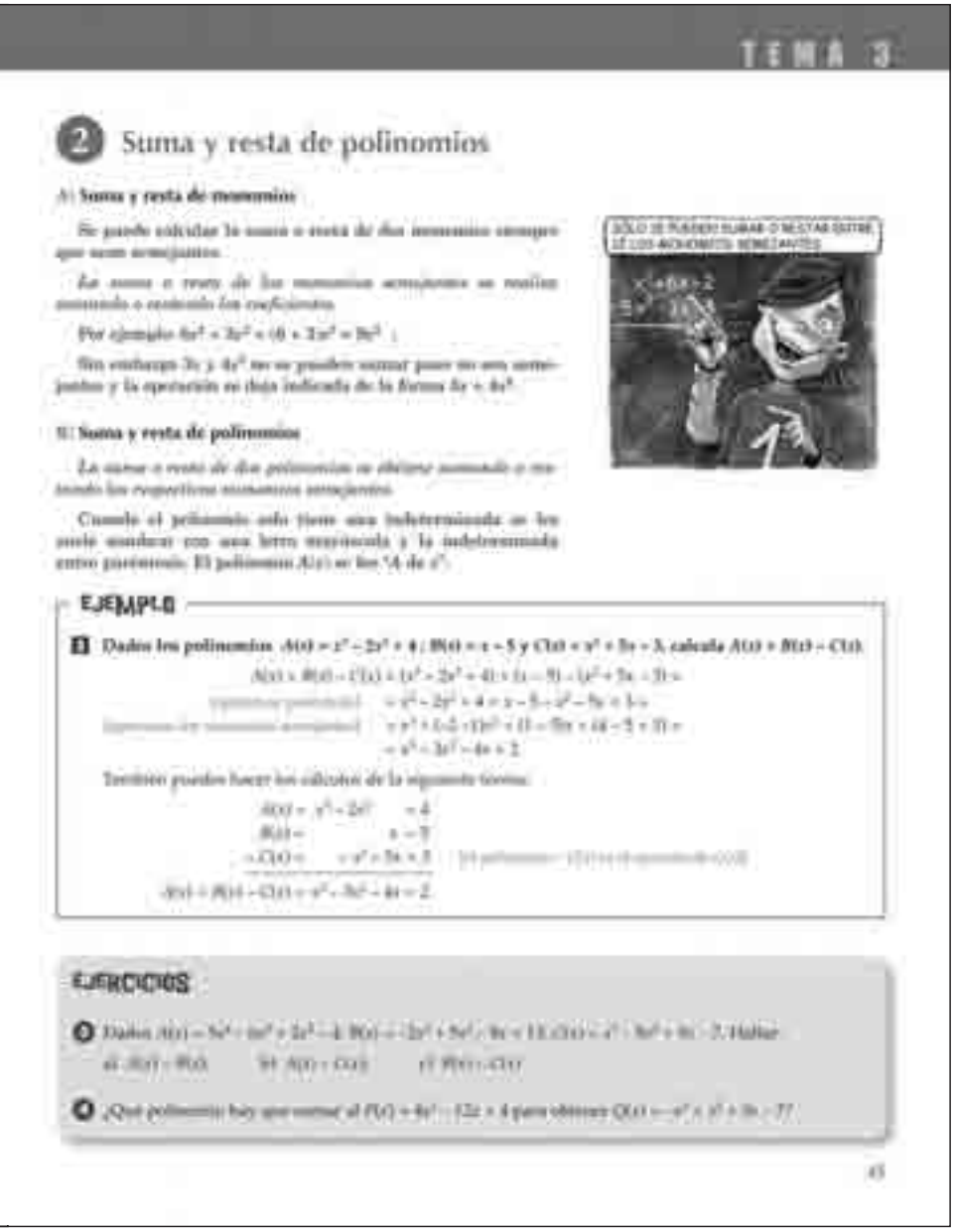
d) Un monomio semejante a $-4{,}3ab^2$ es, por ejemplo, $3ab^2$

2. Indica el grado y el término independiente del polinomio $2x^2y - 3x^2y^3 - 13 + x^2y^2$

El grado es 5, que corresponde al del monomio $-3x^2y^3$.

El término independiente es -13.

▶ Pág. 45. 2 Suma y resta de polinomios



TEMA 3

2 Suma y resta de polinomios

A) Suma y resta de monomios

Se puede calcular la suma o resta de dos monomios siempre que sean semejantes.

La suma o resta de los monomios semejantes se realiza sumando o restando los coeficientes.

Por ejemplo $6x^2 + 3x^2 + (0 \cdot 2x^2 = 9x^2$;

Sin embargo $3x$ y $4x^2$ no se pueden sumar pues no son semejantes y la operación se deja indicada de la forma $3x + 4x^2$.

B) Suma y resta de polinomios

La suma o resta de dos polinomios se obtiene sumando o restando los respectivos monomios semejantes.

Cuando el polinomio solo tiene una indeterminada se les suele nombrar con una letra mayúscula y la indeterminada entre paréntesis. El polinomio $A(x)$ se lee "A de x".

EJEMPLO

1 Dados los polinomios $A(x) = x^3 - 2x^2 + 4$; $B(x) = x - 5$ y $C(x) = x^3 + 3x - 3$, calcula $A(x) + B(x) - C(x)$.

$A(x) + B(x) - C(x) = (x^3 - 2x^2 + 4) + (x - 5) - (x^3 + 3x - 3) =$

$= x^3 - 2x^2 + 4 + x - 5 - x^3 - 3x + 3 =$

$= x^3 + (-2 - 1)x^2 + (1 - 3)x + (4 - 5 + 3) =$

$= x^3 - 3x^2 - 4x + 2$

También podemos hacer los cálculos de la siguiente forma:

$A(x) = x^3 - 2x^2 + 4$

$B(x) = x - 5$

$-C(x) = -x^3 - 3x + 3$

$A(x) + B(x) - C(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + 2$

EJERCICIOS

3 Dados $A(x) = 5x^4 - 6x^3 + 2x^2 - 4$; $B(x) = -2x^3 + 5x^2 - 8x + 13$; $C(x) = x^3 - 5x^2 + 9x - 7$. Hallar:

a) $A(x) - B(x)$ b) $A(x) + C(x)$ c) $B(x) - C(x)$

4 ¿Qué polinomio hay que sumar al $P(x) = 4x^2 - 12x + 4$ para obtener $Q(x) = -x^3 + x^2 + 3x - 7$?

45

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS

El alumno suele asumir estas operaciones de forma natural.

Incidir en no sumar los exponentes.

Valorar la aceptación de efectuar las operaciones "en línea" frente a la forma tradicional.

La suma de dos polinomios es otro polinomio de grado menor o igual al mayor de los grados de los polinomios sumados.

SOLUCIONARIO

3. Dados $A(x) = 5x^4 - 6x^3 + 2x^2 - 4$; $B(x) = -2x^3 + 5x^2 - 8x + 13$; $C(x) = x^3 - 5x^2 + 9x - 7$. Hallar:

a) $A(x) - B(x) =$

$= 5x^4 - 6x^3 + 2x^2 - 4 - (-2x^3 + 5x^2 - 8x + 13) =$

$= 5x^4 - 6x^3 + 2x^2 - 4 + 2x^3 - 5x^2 + 8x - 13 =$

$= 5x^4 - 4x^3 - 3x^2 - 17$

b) $A(x) - C(x) =$

$= 5x^4 - 6x^3 + 2x^2 - 4 - (x^3 - 5x^2 + 9x - 7) =$

$= 5x^4 - 6x^3 + 2x^2 - 4 - x^3 + 5x^2 - 9x + 7 =$

$= 5x^4 - 7x^3 - 7x^2 - 9x + 3$

c) $B(x) - C(x) =$

$= -2x^3 - 5x^2 - 8x + 13 - (x^3 - 5x^2 + 9x - 7) =$

$= -2x^3 - 5x^2 - 8x + 13 - x^3 + 5x^2 - 9x + 7 =$

$= -3x^3 + 10x^2 - 17x + 20$

4. ¿Qué polinomio hay que sumar al $P(x) = 4x^2 - 12x + 4$ para obtener $Q(x) = -x^3 + x^2 + 3x - 7$?

$P(x) + R(x) = Q(x) \Rightarrow R(x) = Q(x) - P(x)$

$= -x^3 + x^2 + 3x - 7 - (4x^2 - 12x + 4) =$

$= -x^3 + x^2 + 3x - 7 - 4x^2 + 12x - 4 =$

$= -x^3 - 3x^2 + 15x - 11$

▶ Pág. 46. 3 Multiplicación de polinomios


LOS POLINOMIOS

3 Multiplicación de polinomios

A) Multiplicación de monomios

El producto de dos monomios es otro monomio cuyo coeficiente es el producto de los coeficientes, quedando las indeterminadas elevadas a la suma de sus respectivos grados.

Por ejemplo: $(3x^2) \cdot (5xy) = 15x^3y$

RECUERDA

Propiedad distributiva

$a(b + c) = ab + ac$

$ab - c) = ab - ac$

$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$

B) Multiplicación de un monomio por un polinomio

Para multiplicar un monomio por un polinomio se multiplica el monomio por cada término del polinomio, aplicando la propiedad distributiva.

Por ejemplo: $4x^2 \cdot (x^2 - 2x) = 4x^4 - 8x^3$

C) Multiplicación de polinomios

La multiplicación de polinomios se realiza mediante la aplicación sucesiva de la propiedad distributiva y las propiedades de las potencias.

Por ejemplo, el producto de $A(x) = 2x^2 - 5x + 2$ por $B(x) = -4x^2 + 2x - 1$, es:

$A(x) \cdot B(x) = (2x^2 - 5x + 2) \cdot (-4x^2 + 2x - 1) =$

$= 2x^2 \cdot (-4x^2 + 2x - 1) - 5x \cdot (-4x^2 + 2x - 1) + 2 \cdot (-4x^2 + 2x - 1) =$

$= -12x^4 + 6x^3 - 2x^2 + 20x^3 - 10x^2 + 5x - 8x^2 + 4x - 2 =$

$= -12x^4 + 26x^3 - 21x^2 + 9x - 2$

RECUERDA

El polinomio producto tiene como grado la suma de los grados de los polinomios que se multiplican.

El grado del producto es 4, la suma de los grados de $A(x)$ y $B(x)$.

También podemos utilizar la disposición tradicional:

$A(x) = 2x^2 - 5x + 2$

$B(x) = -4x^2 + \square x - 1$ (multiplicamos)

$-12x^4 + 26x^3 - 21x^2 + 9x - 2$

$A(x) \cdot B(x) = -12x^4 + 26x^3 - 21x^2 + 9x - 2$

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS

La multiplicación en línea se presta al uso generalizado de la propiedad distributiva.

SOLUCIONARIO

5. Realiza las siguientes operaciones:

a) $2x \cdot (-3x^3) = -6x^4$

b) $7x^2 \cdot 2x = 14x^3$

c) $3x^4 \cdot 5x^2 = 15x^6$

d) $6x^2 \cdot (1 - 3x) = 6x^2 - 6x^2 \cdot 3x = 6x^2 - 18x^3$

e) $-4x \cdot (2x - 3x^2) = -4x \cdot 2x - 4x \cdot (-3x^2) =$
$= -8x^2 + 12x^3$

f) $5x^3 \cdot (1 - 2x + x^2) = 5x^3 + 5x^3 \cdot (-2x) + 5x^3 \cdot x^2 =$
$= 5x^3 - 10x^4 + 5x^5$

6. Completa:

a) $7x^2(3x) = 21x^3$

b) $-2x^3(-\frac{1}{2}x^1) = x^4$

c) $-3x^2(1 - 3x^3) = -3x^2 + 9x^5$

d) Tiene varias soluciones:

$4x^1(\frac{1}{2}x - x^4) = 2x^2 - 4x^5$

$4x^2(\frac{1}{2}x - x^3) = 2x^3 - 4x^5$

$4x^3(\frac{1}{2}x - x^2) = 2x^4 - 4x^5$

$4x^4(\frac{1}{2}x - x^1) = 2x^5 - 4x^5 = -2x^5$

e) Tiene varias soluciones:

$1x^2(6x - 6) = 6x^3 - 6x^2$

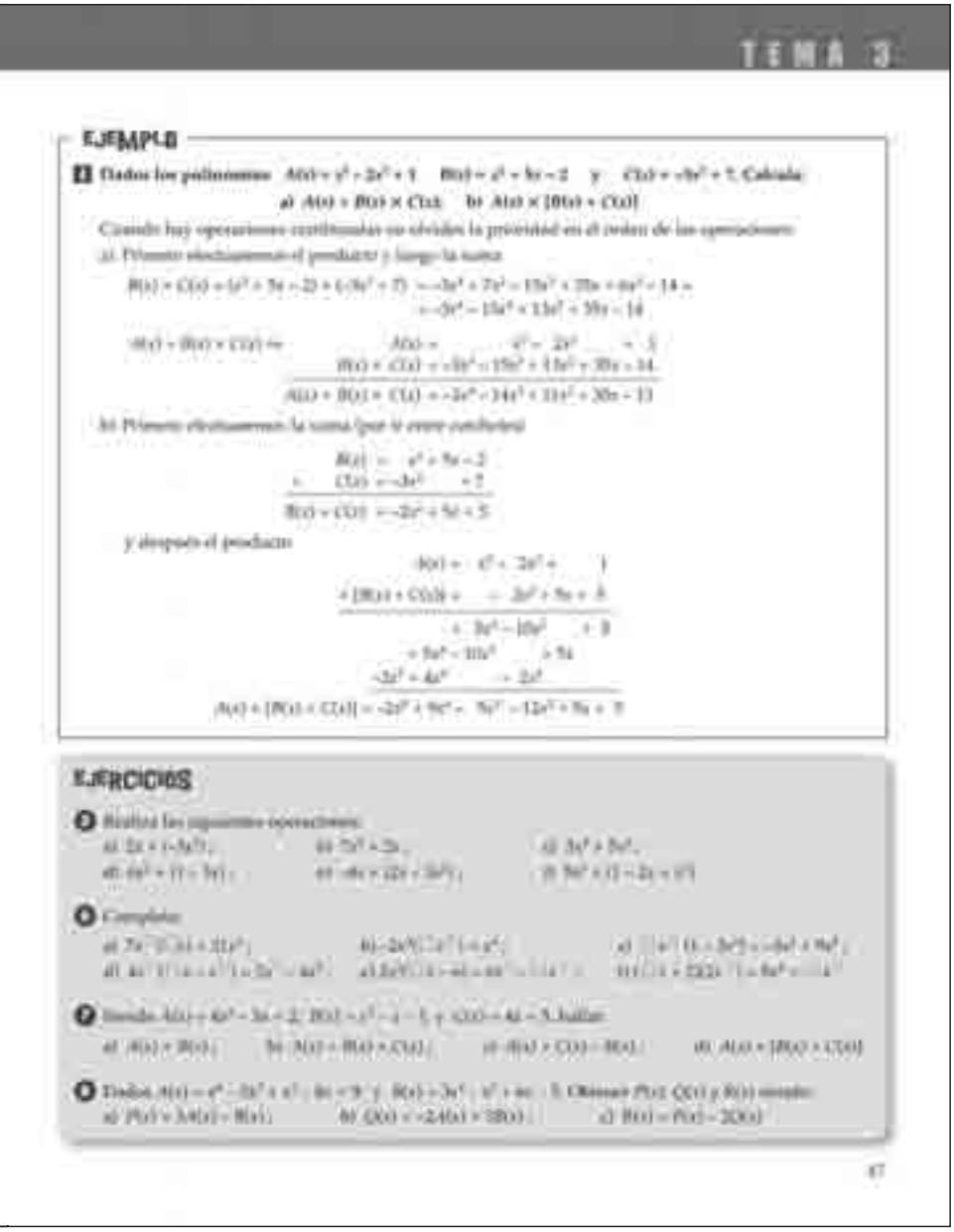
$2x^2(3x - 6) = 6x^3 - 12x^2$

$3x^2(2x - 6) = 6x^3 - 18x^2$

en general $\alpha x^2(\frac{6}{\alpha}x - 6) = 6x^3 - 6\alpha x^2$

f) $(4x + 2)(2x^3) = 8x^4 + 4x^3$

▶ Pág. 47.



TEMA 3

EJEMPLO

EJERCICIOS

7. Siendo $A(x) = 4x^2 - 3x + 2$; $B(x) = x^2 - x - 1$; y $C(x) = 4x + 5$, hallar:

a) $A(x) \cdot B(x) = (4x^2 - 3x + 2) \cdot (x^2 - x - 1) =$
$= 4x^4 - 4x^3 - 4x^2 - 3x^3 + 3x^2 + 3 + 2x^2 - 2x - 2 =$
$= 4x^4 - 7x^3 + x^2 + x - 2$

b) $B(x) \cdot C(x) = (x^2 - x - 1) \cdot (4x + 5) = 4x^3 + x^2 - 9x - 5 =$
$= 4x^3 + x^2 - 9x - 5$
$A(x) + B(x) \cdot C(x) = 4x^2 - 3x + 2 + 4x^3 + x^2 - 9x - 5 =$
$= 4x^3 + 5x^2 - 12x - 3$

c) $A(x) \cdot C(x) = (4x^2 - 3x + 2) \cdot (4x + 5) =$
$= 16x^3 + 20x^2 - 12x^2 - 15x + 8x + 10 =$
$= 16x^3 + 8x^2 - 7x + 10$
$A(x) \cdot C(x) - B(x) = 16x^3 + 8x^2 - 7x + 10 - (x^2 - x - 1) =$
$= 16x^3 + 8x^2 - 7x + 10 - x^2 + x + 1 =$
$= 16x^3 + 7x^2 - 6x + 11$

d) $B(x) + C(x) = x^2 - x - 1 + 4x + 5 = x^2 + 3x + 4$
$A(x) \cdot [B(x) + C(x)] = (4x^2 - 3x + 2) \cdot (x^2 + 3x + 4) = 4x^4 + 12x^3 + 16x^2 - 3x^3 - 9x^2 - 12x + 2x^2 + 6x + 8 = 4x^4 + 9x^3 + 9x^2 - 6x + 8$

8. Dados $A(x) = x^4 - 5x^3 + x^2 - 8x + 9$; y $B(x) = 3x^4 - x^3 + 6x - 5$. Obtener $P(x)$, $Q(x)$ y $R(x)$ siendo:

a) $P(x) = 3A(x) - B(x)$

a) $3A(x) = 3(x^4 - 5x^3 + x^2 - 8x + 9) =$
$= 3x^4 - 15x^3 + 3x^2 - 24x + 27$
$P(x) = 3A(x) - B(x) =$
$= 3x^4 - 15x^3 + 3x^2 - 24x + 27 - (3x^4 - x^3 + 6x - 5) =$
$= 3x4 - 15x^3 + 3x^2 - 24x + 27 - 3x^4 + x^3 - 6x + 5 =$
$= -12x^3 + 3x^2 - 30x + 32$

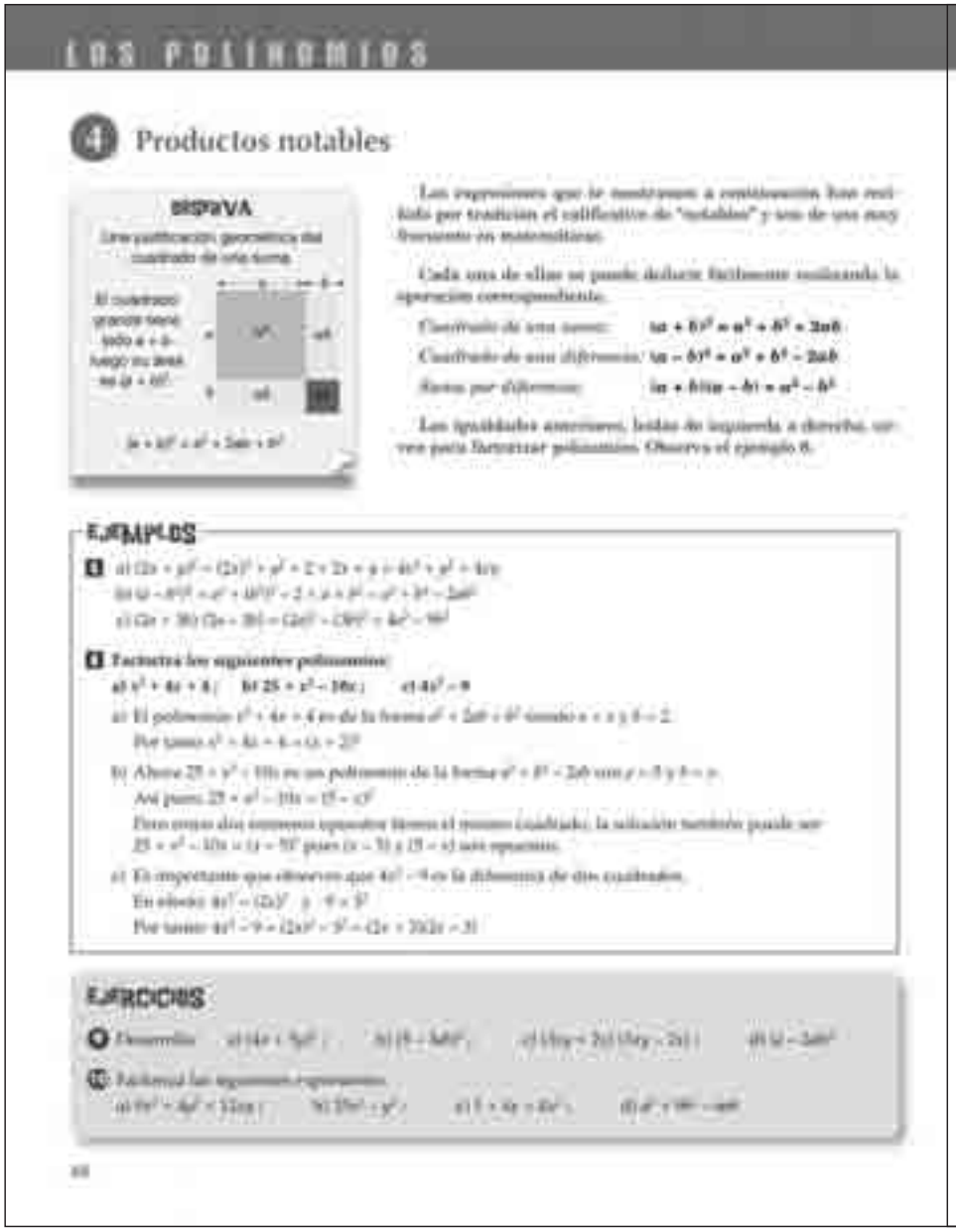
b) $Q(x) = -2A(x) + 3B(x)$

b) $Q(x) = -2(x^4 - 5x^3 + x^2 - 8x + 9) + 3(3x^4 - x^3 + 6x - 5) =$
$= -2x^4 + 10x^3 - 2x^2 + 16x - 18 + 9x^4 - 3x^3 + 18x - 15 =$
$= 7x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 34x - 33$

c) $R(x) = P(x) - 2Q(x)$

c) $R(x) = -12x^3 + 3x^2 - 30x + 32 - 2(7x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 34x - 33) = -12x^3 + 3x^2 - 30x + 32 - 14x^4 - 14x^3 + 4x^2 - 68x + 66 = -14x^4 - 26x^3 + 7x^2 - 98x + 98$

▶ Pág. 48. 4 Productos notables


LOS POLINOMIOS

4 Productos notables

DESAFÍO

EJEMPLOS

EJERCICIOS

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS

Algunos alumnos pueden pensar que $(2x + 3)^2$ no es un producto.

Se puede solicitar a los alumnos la justificación de las fórmulas aplicando la doble distributividad.

El objetivo es hacer adquirir a los alumnos los automatismos que les permitan obtener directamente la expresión desarrollada.

Una ayuda para la factorización (ejercicio 10) es detectar los términos de mayor grado y del término constante (si lo hay).

SOLUCIONARIO

9. Desarrolla:

a) $(4x + 5y)^2 = (4x)^2 + 2 \cdot 4x \cdot 5y + (5y)^2 =$
$= 16x^2 + 4xy + 25y^2$

b) $(5 - 3ab)^2 = 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 3ab + (3ab)^2 =$
$= 25 - 30ab + 9a^2b^2$

c) $(3xy + 2x)\,(3xy - 2x) = (3xy)^2 - (2x)^2 =$
$= 9x^2y^2 - 4x^2$

d) $(a - 2ab)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot 2ab + (2ab)^2 =$
$= a^2 - 4a^2b + 4a^2b^2$

10. Factoriza las siguientes expresiones:

a) $9x^2 + 4y^2 + 12xy = (3x + 2y)^2$

b) $25x^2 - y^2 = (5z + y)\,(5x - y)$

c) $1 + 4x + 4x^2 = (1 + 2x)^2$

d) $a^2 + 9b^2 - 6ab = (a - 3b)^2$

▶ Pág. 49. 5 División de polinonios



TEMA 3

5 División de polinomios

5.1 División de monomios

Para dividir dos monomios se dividen los coeficientes y se dividen las partes literales utilizando las propiedades de las potencias.

El resultado de la división de dos monomios no siempre es otro monomio.

Por ejemplo: $12x^3y^2 : 5xy = \frac{12x^3y^2}{5xy} = \frac{12}{5} \cdot \frac{x^3y^2}{xy} = 2{,}4x^2y$ es un monomio

$2x : x^2 = \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x}$ y esta expresión no es un monomio

5.2 División de un polinomio entre un monomio

Para dividir un polinomio entre un monomio se divide cada término del polinomio por el monomio.

El **cociente** es el resultado de dividir todos los términos de mayor grado que el monomio por él y el **resto** son los términos del polinomio de menor grado que el monomio.

Por ejemplo, la división $(6x^4 - 3x^3 + 5x + 2) : x^2$ es:

$$\frac{6x^4 - 3x^3 + 5x + 2}{x^2} = \frac{6x^4}{x^2} - \frac{3x^3}{x^2} + \frac{5x + 2}{x^2} = 6x^2 - 3x + \frac{5x + 2}{x^2}$$

En este caso el resultado de la división no es un polinomio.

Los elementos de esta división son:

dividendo $D(x) = 6x^4 - 3x^3 + 5x + 2$; *divisor* $d(x) = x^2$;

cociente $c(x) = 6x^2 - 3x$; *resto* $r(x) = 5x + 2$.

Entre los elementos de una división se verifica la **relación de la división**.

$$\frac{D(x)}{d(x)} = c(x) + \frac{r(x)}{d(x)} \quad \text{o} \quad D(x) = d(x) \cdot c(x) + r(x)$$

EJEMPLO

1 Calcula el cociente y resto en la división siguiente: $(6x^4 - 5x^3 + 6x^2 + 3x) : (2x^2)$

$$\frac{6x^4 - 5x^3 + 6x^2 + 3x}{2x^2} = 6x^2 - \frac{5}{2}x + 3 + \frac{3x}{2x^2} = 6x^2 - \frac{5}{2}x + 3 + \frac{3}{2x}$$

cociente $6x^2 - \frac{5}{2}x + 3$ el cociente y $3x$ el resto.

Una relación es: $6x^4 - 5x^3 + 6x^2 + 3x = 2x^2 \cdot \left(6x^2 - \frac{5}{2}x + 3\right) + 3x$

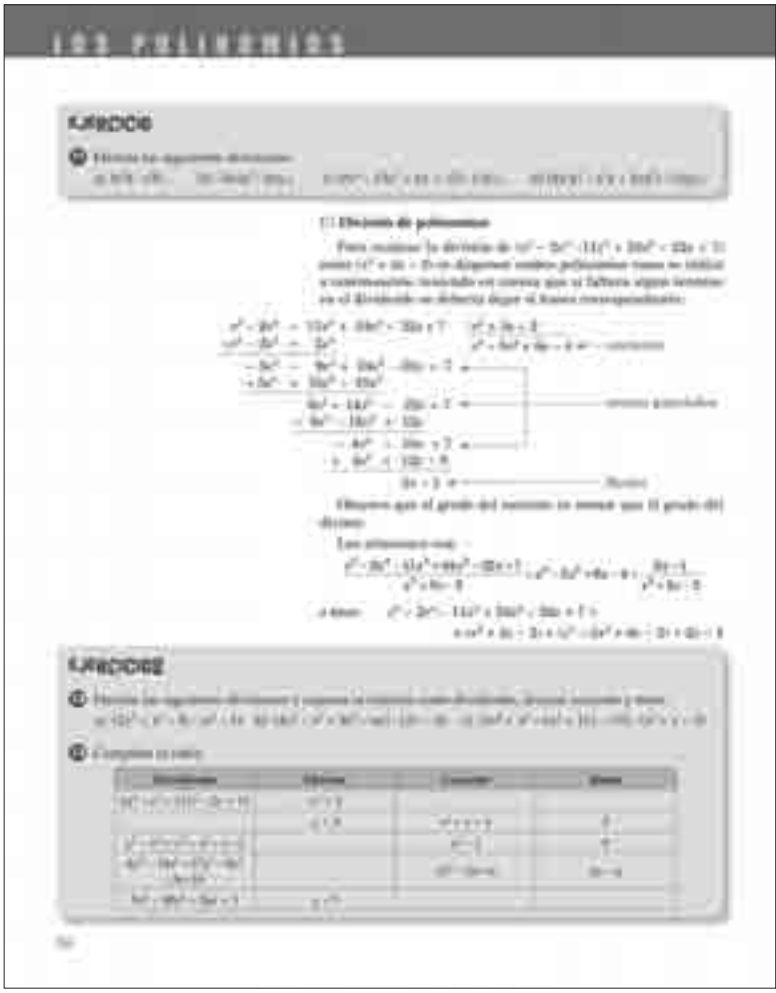
47

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS

Es recomendable proceder ordenadamente.

Se puede recurrir a una división numérica para explicar por qué se cambia el signo para obtener cada resto parcial.

▶ Pág. 50.



SOLUCIONARIO

11. Efectúa las siguientes divisiones:

a) $3a^3b : a^2b = 3a$

b) $-16xy^3 : 4xy = -4y^2$

c) $(9x^4 - 15x^3 + 6x + 12) : (3x) =$

$= 9x^4 : 3x - 15x^3 : 3x + 6x : 3x + 12 : 3x =$

$= 3x^3 - 5x^2 + 2 + \frac{4}{x}$

d) $(4x^3y^2 - x^2y + 5xy^2) : (2xy) =$

$=4x^3y^2 : 2xy - x^2y : 2xy + 5xy^2 : 2xy =$

$= 2x^2y - \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}y$

12. Efectúa las siguientes divisiones y expresa la relación entre dividendo, divisor, cociente y resto.

a) $(2x^3 + x^2 - 5) : (x^2 - 1)$

$2x^3 + x^2 - 5 \quad \big| \; x^2 - 1$

$-2x^3 + 2x \quad\quad\; 2x + 1$

$x^2 + 2x - 5$

$-x^2 + 1$

$2x - 4$

La relación es: $2x^3 + x^2 - 5 = (2x + 1)(x^2 - 1) + (2x - 4)$

b) $(4x^4 - x^3 + 3x^2 - 6x) : (2x - 3)$

$4x^4 - x^3 + 3x^2 - 6x \quad \big| \; 2x - 3$

$-4x^4 + 6x^3 \quad\quad\; 2x^3 + \frac{5}{2}x^2 + \frac{21}{4}x + \frac{39}{8}$

$5x^3 + 3x^2 - 6x$

$-5x^3 + \frac{15}{21}x^2$

$\frac{21}{2}x^2 - 6x$

$-\frac{21}{2}x^2 + \frac{63}{4}x$

$\frac{39}{4}x$

$-\frac{39}{4}x + \frac{117}{8}$

$\frac{117}{8}$

c) $(3x^4 + x^3 - 6x^2 + 11x - 15) : (x^2 + x - 3)$

$3x^4 + x^3 - 6x^2 + 11x - 15 \quad \big| \; x^2 + x - 3$

$-3x^4 - 3x^3 + 9x^2 \quad\quad\; 3x^2 - 2x + 5$

$-2x^3 + 3x^2 + 11x - 15$

$2x^3 + 2x^2 - 6x$

$5x^2 + 5x - 15$

$-5x^2 - 5x + 15$

0

La relación es:

$3x^4 + x^3 - 6x^2 + 11x - 15 = (x^2 + x - 3)\cdot(3x^2 - 2x + 5)$

13. Completa la tabla:

Dividendo	Divisor	Cociente	Resto
$2x^4 - x^3 + 11x^2 - 2x + 13$	$x^2 + 3$	$2x^2 - x + 5$	$x - 2$
$x^3 + 2x^2 - 2x + 8$	$x + 3$	$x^2 - x + 1$	5
$x^5 + x^4 + x^3 - x^2 - x - 1$	$x^2 + x + 1$	$x^3 - 1$	0
$6x^5 - 13x^4 + 17x^3 - 8x^2 - 3x + 18$	$2x^2 - x + 4$	$3x^3 - 5x^2 + 6$	$3x - 6$
$5x^3 - 30x^2 + 26x + 3$	$x - 5$	$5x^2 - 5x + 1$	8

pues:

▶ Pág. 51. 6 Valor numérico y ceros de un polinomio



a) $2x^4 - x^3 + 11x^2 - 2x + 13$ | $x^2 + 3$

$-2x^4 \quad -6x^2$ | $2x^2 - x + 5$

$-x^3 + 5x^2 - 2x + 13$

$+x^3 \quad + 3x$

$5x^2 + x + 13$

$-5x^2 \quad -15$

$x - 2$

b) $D = d \times c + r = (x + 3) \times (x^2 - x + 1) + 5 =$
$= x^3 + 2x^2 - 2x + 8$

c) $d = \dfrac{D - r}{c} = \dfrac{x^5 + x^4 + x^3 - x^2 - x - 1}{x^3 - 1}$

$x^5 + x^4 + x^3 - x^2 - x - 1$ | $x^3 - 1$

$-x^5 \quad +x^2$ | $x^2 + x + 1$

$x^4 + x^3 \quad -x - 1$

$-x^4 \quad + x$

$x^3 \quad - 1$

$-x^3 \quad + 1$

0

d) $d = \dfrac{D - r}{c} =$

$= \dfrac{(6x^5 - 13x^4 + 17x^3 - 8x^2 - 3x + 18) - (3x - 6)}{3x^3 - 5x^2 + 6} =$

$= \dfrac{6x^5 - 13x^4 + 17x^3 - 8x^2 - 6x + 24}{3x^3 - 5x^2 + 6}$

$6x^5 - 13x^4 + 17x^3 - 8x^2 - 6x + 24$ | $3x^3 - 5x^2 + 6$

$-6x^5 + 10x^4 \quad -12x^2$ | $2x^2 - x + 4$

$-3x^4 + 17x^3 - 20x^2 - 6x + 24$

$+3x^4 - 5x^3 \quad + 6x$

$12x^3 - 20x^2 \quad + 24$

$-12x^3 + 20x^2 \quad -24$

0

e) $5x^3 - 30x^2 + 26x + 3$ | $x - 5$

$-5x^3 + 25x^2$ | $5x^2 - 5x + 1$

$-5x^2 + 26x + 3$

$5x^2 - 25x$

$x + 3$

$-x + 5$

8

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS

Primera aproximación al proceso general de la factorización, centrada básicamente en los productos notables.

14. Usa los productos notables o saca factor común para obtener los ceros de los polinomios siguientes:

a) $4x^2 - 1 = (2x + 1)(2x - 1)$ Las raíces son:

$x = -\dfrac{1}{2}$ y $x = \dfrac{1}{2}$

b) $x^3 - 2x^2 = x^2(x - 2)$. Las raíces son: $x = 0$ y $x = 2$

c) $1 - 2x + x^2 = (1 - x)^2$ La raíz es: $x=1$

d) $7x - x^2 = x(7 - x)$ Las raíces son: $x=0$ y $x=7$

e) $16 + 8x + x^2 = (4 + x)^2$ La raíz es: $x = -4$

f) $x^2 - 16 = (x + 4)(x - 4)$ Las raíces son: $x = -4$ y $x = 4$

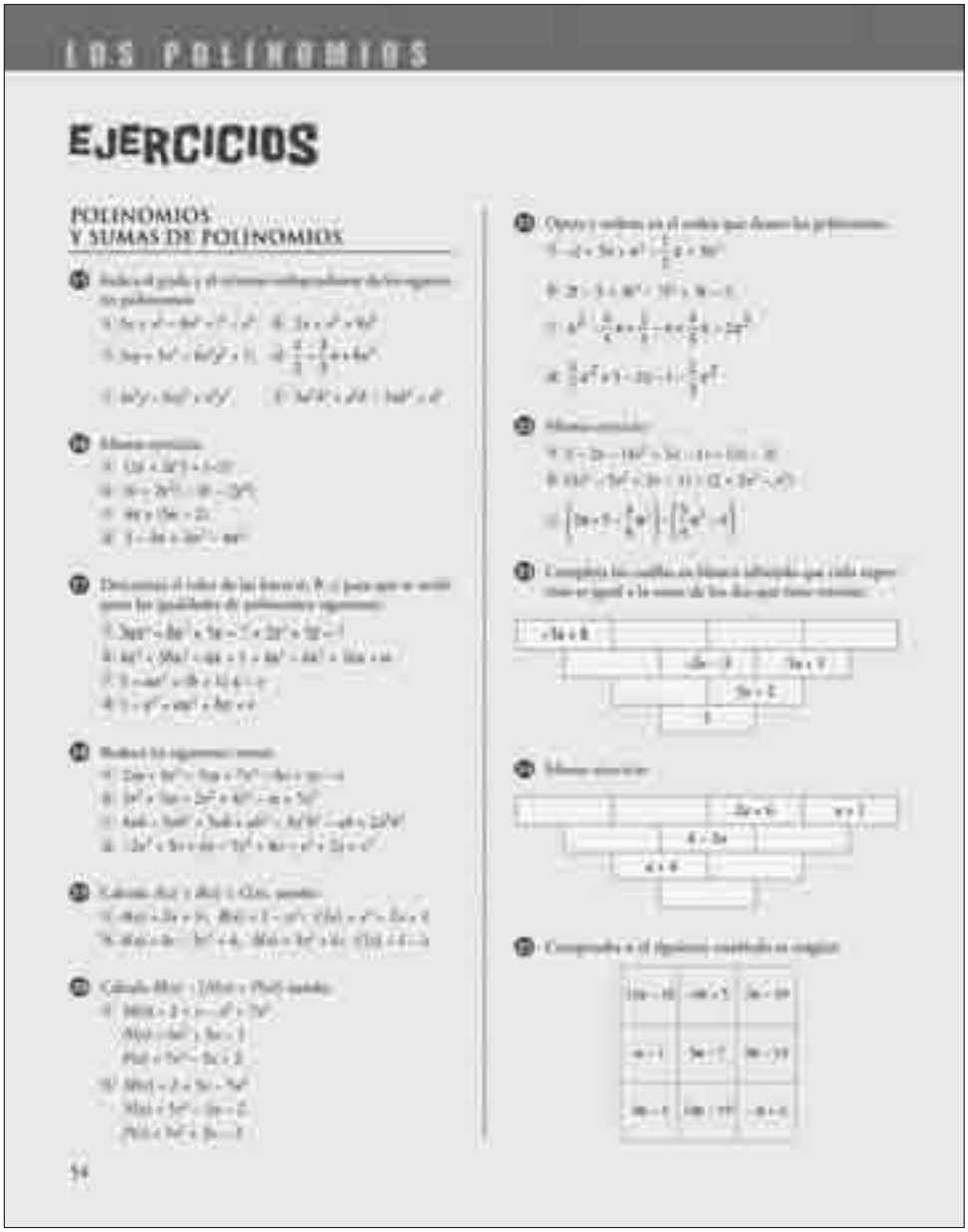
g) $3x^3 - 75x = 3x(x^2 - 25) = 3x(x + 5)(x - 5)$

Las raíces son: $x = 0$, $x = -5$ y $x = 5$

h) $3x^2 + 6x + 3 = 3(x^2 + 2x + 1) = 3(x + 1)^2$

Las raíz es: $x = -1$

▶ Pág. 54. Ejercicios


LOS POLINOMIOS

EJERCICIOS

POLINOMIOS Y SUMAS DE POLINOMIOS

54

SOLUCIONARIO

15. Indica el grado y el término independiente de los siguientes polinomios:

a) $3x + x^2 - 8x^3 + 7 - x^4$

El grado es 4 y el término independiente es 7.

b) $2x + x^5 + 8x^4$

El grado es 5 y el término independiente es 0.

c) $3xy + 5x^3 - 6x^2y^2 + 1$;

El grado es 4 y el término independiente es 1.

d) $\frac{1}{2} - \frac{3}{5}x + 4x^2$

El grado es 2 y el término independiente es $\frac{1}{2}$.

e) $4x^2y - 3xy^2 + x^2y^3$

El grado es 5 y el término independiente es 0.

f) $3a^2b^3 + a^3b - 5ab^3 + a^6$

El grado es 6 y el término independiente es 0.

16. Mismo ejercicio:

a) $(2z + z^3)\cdot(-2) = -4z - 4z^3$

El grado es 3 y el término independiente es 0.

b) $(6 + 2y^2) - (6 - 2y^2) = 6 + 2y^2 - 6 + 2y^2 = 4y^2$

El grado es 2 y el término independiente es 0.

c) $4x \cdot (3x - 2) = 12x^2 - 8x$

El grado es 2 y el término independiente es 0.

d) $3 - 2a + 2a^2 - 4a^3$

El grado es 3 y el término independiente es 3.

17. Determina el valor de las letras *a*, *b*, *c* para que se verifiquen las igualdades de polinomios siguientes:

a) $3ax^4 - bx^3 + 5x - 7 = 2x^3 + 5x - 7$

$\begin{cases} 3a = 0 \to a = 0 \\ -b = 2 \to b = -2 \end{cases}$

b) $4x^3 + 3bx^2 - 6x + 1 = 4x^3 - 6x^2 + 2cx + a$

$\begin{cases} 3b = -6 \to b = -3 \\ 2c = -6 \to c = -3 \\ a = 1 \to a = 1 \end{cases}$

c) $3 = ax^2 + (b + 1)x - c$

$\begin{cases} a = 0 \to a = 0 \\ b + 1 = 0 \to b = -1 \\ -c = 3 \to c = -3 \end{cases}$

d) $1 - x^2 = ax^2 + bx + c$

$\begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \\ c = 1 \end{cases}$

18. Reduce las siguientes sumas

a) $2xy + 3x^2 - 5xy + 7x^2 - 6x + xy - x =$
$= (2 - 5 + 1)xy + (3 + 7)x^2 + (-6 - 1)x =$
$= -2xy + 10x^2 - 7x$

b) $3t^2 + 5tz - 2z^2 + 4t^2 - tz + 5z^2 =$
$= (3 + 4)t^2 + (5 - 1)tz + (-2 + 5)z^2 =$
$= 7t^2 + 4tz + 3z^2$

c) $4ab - 3ab^2 + 5ab + ab^2 - 3a^2b^2 - ab + 2a^2b^2 =$
$= (4 + 5 - 1)ab + (-3 + 1)ab^2 + (-3 + 2)a^2b^2 =$
$= 8ab - 2ab^2 - a^2b^2$

d) $-2x^2 + 3x + 6y - 5y^2 + 8x - y^2 + 2y + x^2 =$
$= (-2 + 1)x^2 + (3 + 8)x + (6 + 2)y + (-5 - 1)y^2 =$
$= -x^2 + 11x + 8y - 6y^2$

19. Calcula $A(x) + B(x) + C(x)$, siendo:

a) $A(x) = 2x + 3$; $B(x) = 1 - x^2$; $C(x) = x^3 - 2x + 1$

$A(x) + B(x) + C(x) = 2x + 3 + 1 - x^2 + x^3 - 2x + 1 =$
$= x^3 - x^2 + 5$

b) $A(x) = 4x - 3x^2 + 4$; $B(x) = 3x^2 + 6$; $C(x) = 1 - x$

$A(x) + B(x) + C(x) = 4x - 3x^2 + 4 + 3x^2 + 6 + 1 - x =$
$= 3x + 11$

20. Calcula $M(x) - [N(x) + P(x)]$ siendo:

a) $M(x) = 2 + x - x^2 + 7x^3$
$N(x) = 6x^2 + 3x - 1$
$P(x) = 7x^3 - 3x + 2$

a) $M(x) - [N(x) + P(x)] =$
$= 2 + x - x^2 + 7x^3 - [6x^2 + 3x - 1 + 7x^3 - 3x + 2] =$
$= 2 + x - x^2 + 7x^3 - [7x^3 + 6x^2 + 1] =$
$= 2 + x - x^2 + 7x^3 - 7x^3 - 6x^2 - 1 =$
$= -7x^2 + x + 1$

b) $M(x) = 2 + 3x - 5x^2$
$N(x) = 5x^2 - 3x - 2$
$P(x) = 5x^2 + 3x - 2$

b) $M(x) - [N(x) + P(x)] =$
$= 2 + 3x - 5x^2 - [5x^2 - 3x - 2 + 5x^2 + 3x - 2] =$
$= 2 + 3x - 5x^2 - [10x^2 - 4] =$
$= 2 + 3x - 5x^2 - 10x^2 + 4 = -15x^2 + 3x + 6$

21. Opera y ordena en el orden que desees los polinomios:

a) $-2 + 5x + x^2 - \frac{1}{2}x + 3x^2 = 4x^2 + \frac{9}{2}x - 2$

b) $2t - 3 + 3t^3 - 7t^2 + 3t - 2 = 3t^3 - 7t^2 + 5t - 5$

c) $x^2 - \frac{4}{5}x + \frac{2}{3} - x + \frac{4}{5}x - 2x^3 = -2x^3 + x^2 - x + \frac{2}{3}$

d) $\frac{5}{7}z^2 + 5 - 2z - 1 - \frac{2}{3}z^2 = \left(\frac{5}{7} - \frac{2}{3}\right)z^2 - 2z + 4 =$

$= \frac{1}{21}z^2 - 2z + 4$

22. Mismo ejercicio:

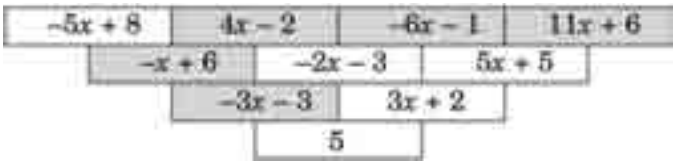
a) $3 - 2x - (4x^2 + 5x - 1) + (2x - 3) =$
$= 3 - 2 - 4x^2 - 5x + 1 + 2x - 3 = -4x^2 - 5x + 1$

b) $(3x^4 - 5x^2 + 3x - 1) - (2 + 3x^2 - x^3) =$
$= 3x^4 - 5x^2 + 3x - 1 - 2 - 3x^2 + x^3 =$
$= 3x^4 + x^3 - 8x^2 + 3x - 3$

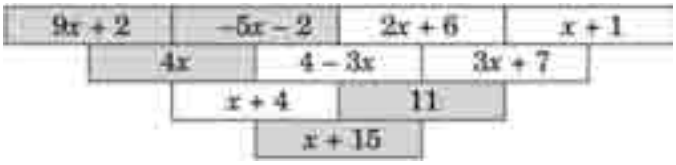
c) $\left(2a + 5 - \frac{3}{4}a^2\right) - \left(\frac{5}{4}a^2 - 6\right) = 2a + 5 - \frac{3}{4}a^2 - \frac{5}{4}a^2 + 6 =$

$= -2a^2 + 2a + 11$

23. Completa las casillas en blanco sabiendo que cada expresión es igual a la suma de los dos que tiene encima:



24. Mismo ejercicio:

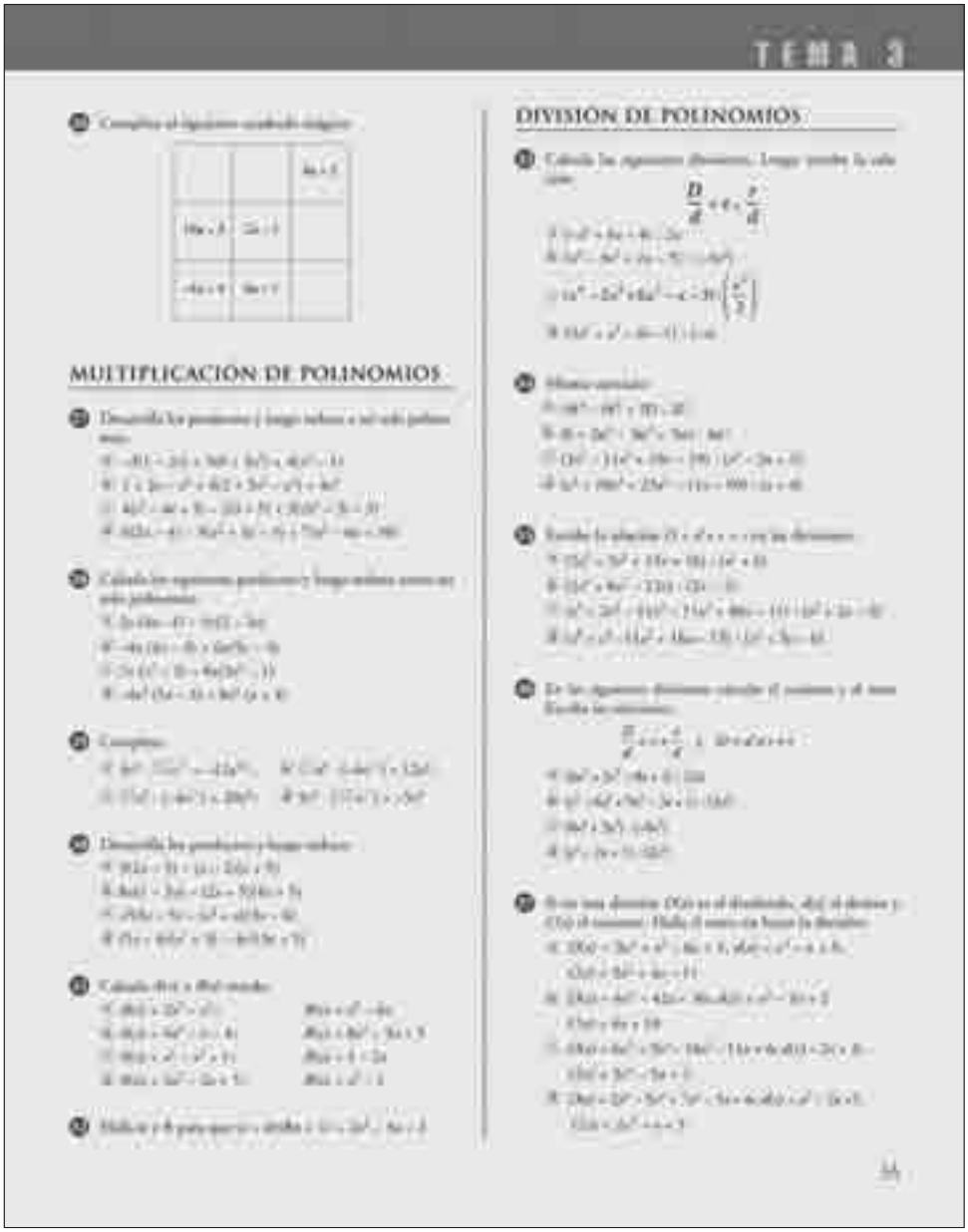


25. Comprueba si el siguiente cuadrado es mágico:

$11a - 16$	$-3a + 5$	$7a - 10$
$a - 1$	$5a - 7$	$9a - 13$
$3a - 4$	$13a - 19$	$-a + 2$

Si es un cuadrado mágico pues la suma de todas las filas, la suma de todas las columnas y la suma de todas las diagonales vale lo mismo: $15a - 21$.

▶ Pág. 55. Ejercicios


TEMA 3

DIVISIÓN DE POLINOMIOS

MULTIPLICACIÓN DE POLINOMIOS

SOLUCIONARIO

26. Completa el siguiente cuadrado mágico:

-2	$-2a + 5$	$8a + 2$
$10a + 3$	$2a - 1$	$-6a + 3$
$-4a + 4$	$6a + 1$	$4a$

27. Desarrolla los productos y luego reduce a un solo polinomio:

a) $-3(1 - 2x) + 5(6 + 3x^2) + 4(x^2 - 1) =$
$= -3 + 6x + 30 + 15x^2 + 4x^2 - 4 = 19x^2 + 6x + 23$

b) $1 + 2x - x^3 + 4(2 + 3x^2 - x^3) + 4x^3 =$
$= 1 + 2x - x^3 + 8 + 12x^2 - 4x^3 + 4x^3 =$
$= -x^3 + 12x^2 + 2x + 9$

c) $4(t^2 - 6t + 5) - 2(t + 5) + 3(2t^3 - 3t - 3) =$
$= 4t^2 - 24t + 20 - 2t - 10 + 6t^3 - 9t - 9 =$
$= 6t^3 + 4t^2 - 35t + 1$

d) $6(2x - 4) - 5(x^2 + 3x - 5) + 7(x^2 - 6x + 10) =$
$= 12x - 24 - 5x^2 - 15x + 25 + 7x^2 - 42x + 70 =$
$= 2x^2 - 45x + 71$

28. Calcula los siguientes productos y luego ordena como un solo polinomio:

a) $2x(4x - 1) - 5x(2 - 3x) = 8x^2 - 2x - 10x + 15x^2 =$
$= 23x^2 - 12x$

b) $-4x(4x - 3) + 6x(5x - 4) = -16x^2 + 12x + 30x^2 - 24x =$
$= 14x^2 - 12x$

c) $7x(x^2 - 3) - 8x(3x^2 - 1) = 7x^3 - 21x - 24x^3 + 8x =$
$= -14x^3 - 13x$

d) $-4x^2(5x-3)-8x^2(x+4)=$
$=-20x^3+12x^2+8x^3+32x^2=-12x^3+44x^2$

29. Completa:

a) $3x^4\cdot(-4)x^8=-12x^{12}$
b) $-2\,x^4\cdot(-6x^2)=12x^6$
c) $-5\,x^5\cdot(-4x^3)=20x^8$
d) $5x^2\cdot(-1x^4)=-5x^6$

30. Desarrolla los productos y luego reduce:

a) $3(2x-5)-(x-2)(x+5)=$
$=6x-15-(x^2+5x-2x-10)=$
$=6x-15-x^2-3x+10=-x^2+3x-5$

b) $8x(1-3x)-(2x-5)(4x+5)=$
$=8x-24x^2-(8x^2+10x-20x-25)=$
$=8x-24x^2-8x^2+10x+25=-32x^2+18x+25$

c) $x^2(3x-5)-(x^2+x)(3x-6)=$
$=3x^3-5x^2-(3x^3-6x^2+3x^2-6x)=$
$=3x^3-5x^2-3x^3+3x^2+6x=-2x^2+6x$

d) $(5x-6)(x^2+3)-4x^2(3x+5)=$
$=5x^3+15x-6x^2-18-12x^3-20x^2=$
$=-7x^3-26\,x^2+15x-18$

31. Calcula $A(x)\cdot B(x)$ siendo:

a) $A(x)\cdot B(x)=(2x^3-x^2)\cdot(x^2-6x)=2x^5-12x^4-x^4+6x^3=$
$=2x^5-13x^4+6x^3$

b) $A(x)\cdot B(x)=(4x^2-x-4)\cdot(8x^2-3x+5)=$
$=32x^4-12x^3+20x^2-8x^3+3x^2-5x-32x^2+12x-20=$
$=32x^4-20x^3-9x^2+7x-20$

c) $A(x)\cdot B(x)=(x^3-x^2+1)\cdot(1-2x)=$
$=x^3-2x^4-x^2+2x^3+1-2x=$
$=-2x^4+3x^3-x^2-2x+1$

d) $A(x)\cdot B(x)=(3x^2-2x+5)\cdot(x^2-1)=$
$=3x^4-3x^2+2x^3+2x+5x^2-5=$
$=3x^4-2x^3+2x^2+2x-5$

32. Halla a y b para que $(x+a)(bx+1)=2x^2-3x-2$

$(x+a)\cdot(bx+1)=bx^2+x+abx+a=$
$=bx^2+(ab+1)\,x+a$
$bx^2-(ab+1)x+a=2x^2-3x-2\Rightarrow$

$$\Rightarrow\begin{cases}b=2\\ab+1=-3\end{cases}\Rightarrow a=-2\ y\ b=2$$

33. Calcula las siguientes divisiones· Luego escribe la relación $\frac{D}{d}=c+\frac{r}{d}$

a) $(-x^2+6x-8):2x$

$$\frac{-x^2+6x-8}{2x}=\frac{-x^2}{2x}+\frac{6x}{2x}+\frac{-8}{2x}=-\frac{1}{2}x+3+\frac{-8}{2x}$$

cociente: $-\frac{1}{2}x+3$; resto: -8

b) $(x^4-3x^3+2x-5):(-3x^2)$

$$\frac{x^4-3x^3+2x-5}{-3x^2}=\frac{x^4}{-3x^2}+\frac{-3x^3}{-3x^2}+\frac{2x-5}{-3x^2}=$$

$$=-\frac{1}{3}x^2+x+\frac{2x-5}{-3x^2}$$

cociente: $-\frac{1}{3}x^2+x$; resto: $2x-5$

c) $(x^4-2x^3+6x^2-x-3):\dfrac{x^2}{2}$

$$\frac{x^4-2x^3+6x^2-x-3}{\frac{x^2}{2}}=\frac{x^4}{\frac{x^2}{2}}+\frac{-2x^3}{\frac{x^2}{2}}+\frac{6x^2}{\frac{x^2}{2}}+\frac{-x-}{\frac{x^2}{2}}$$

$$=2x^2-4x+12+\frac{-x-}{\frac{x^2}{2}}$$

cociente: $2x^2-4x+12$; resto: $-x-3$

d) $(3x^3+x^2-6x-1):(-x)$

$$\frac{3x^3+x^2-6x-1}{-x}=\frac{3x^3}{-x}+\frac{x^2}{-x}+\frac{-6x}{-x}+\frac{-1}{-x}=-3x^2-x+6+\frac{-1}{-x}$$

cociente: $-3x^2-x+6$; resto: -1

34. Mismo ejercicio:

a) $(4t^3-6t^2+2t):2t^2$

$$\frac{4t^3-6t^2+2t}{2t^2}=\frac{4t^3}{2t^2}+\frac{-6t^2}{2t^2}+\frac{2t}{2t^2}=2t-3+\cdot$$

cociente: $2t-3$; resto: $2t$

b) $(6+2a^3-3a^2+5a):3a^2$

$$\frac{2a^3-3a^2+5a+6}{3a^2}=\frac{2a^3}{3a^2}+\frac{-3a^2}{3a^2}+\frac{5a+6}{3a^2}=\frac{2}{3}a-1+\frac{5a+6}{3a^2}$$

cociente: $\frac{2}{3}a-1$; resto: $5a+6$

c) $(3x^3-11x^2+29x-19):(x^2-3x+5)$

$$\begin{array}{l|l}3x^3-11x^2+29x-19 & x^2-3x+5\\ \underline{-3x^3+\ 9x^2-15x\ \ \ \ \ \ \ \ } & \\ -2x^2+14x-19 & 3x-2\\ \underline{+2x^2-\ 6x+10\ \ \ \ } & \\ 8x-9 & \end{array}$$

$$\frac{3x^3-11x^2+29x-19}{x^2-3x+5}=3x-2+\frac{8x-9}{x^2-3x+5}$$

cociente: $3x-2$; resto: $8x-9$

d) $(x^4+10x^3+23x^2-11x-50):(x+4)$

$$\begin{array}{l|l}x^4+10x^3+23x^2-11x-50 & x+4\\ \underline{-x^4-\ 4x^3\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ } & \\ 6x^3+23x^2-11x-50 & x^3+6x^2-x-7\\ \underline{-6x^3-\ 24x^2\ \ \ \ \ \ \ } & \\ -x^2-11x-50 & \\ \underline{x^2+\ 4x\ \ \ \ \ \ \ \ } & \\ -7x-50 & \\ \underline{7x+28\ \ \ \ \ \ \ } & \\ -22 & \end{array}$$

$$\frac{x^4+10x^3+23x^2-11x-50}{x+4}=x^3+6x^2-x-7+\frac{-22}{x+4}$$

cociente: x^3+6x^2-x-7; resto: -22

35. Escribe la relación $D = d \cdot c + r$ en las divisiones:

a) $(2x^3 + 3x^2 + 15x + 16) : (x^2 + 6)$

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 + 3x^2 + 15x + 16 & x^2 + 6 \\ \hline -2x^3 \quad - 12x & 2x + 3 \\ \hline 3x^2 + 3x + 16 & \\ -3x^2 \quad - 18 & \\ \hline 3x - 2 & \end{array}$$

$2x^3 + 3x^2 + 15x + 16 = (x^2 + 6) \cdot (2x+3) + (3x - 2)$

b) $(2x^3 + 8x^2 - 12x) : (2x - 2)$

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 + 8x^2 - 12x & 2x - 2 \\ \hline -2x^3 + 2x^2 & x^2 + 5x - 1 \\ \hline 10x^2 - 12x & \\ -10x^2 + 10x & \\ \hline -2x & \\ 2x - 2 & \\ \hline -2 & \end{array}$$

$2x^3 + 8x^2 - 12x = (2x - 2) \cdot (x^2 + 5x - 1) - 2$

c) $(x^5 + 2x^4 - 11x^3 - 11x^2 + 40x - 11) : (x^2 + 2x - 6)$

$$\begin{array}{r|l} x^5 + 2x^4 - 11x^3 - 11x^2 + 40x - 11 & x^2 + 2x - 6 \\ \hline -x^5 - 2x^4 + 6x^3 & x^3 - 5x - 1 \\ \hline -5x^3 - 11x^2 + 40x - 11 & \\ 5x^3 + 10x^2 - 30x & \\ \hline -x^2 + 10x - 11 & \\ x^2 + 2x - 6 & \\ \hline 12x - 17 & \end{array}$$

$x^5 + 2x^4 - 11x^3 - 11x^2 + 40x - 11 =$
$= (x^2 + 2x - 6)\cdot(x^3 - 5x - 1) + (12x - 17)$

d) $(x^4 + x^3 - 11x^2 + 16x - 13) : (x^2 + 3x - 6)$

$$\begin{array}{r|l} x^4 + x^3 - 11x^2 + 16x - 13 & x^2 + 3x - 6 \\ \hline -x^4 - x^3 + 6x^2 & x^2 - 2x + 1 \\ \hline -2x^3 - 5x^2 + 16x - 13 & \\ 2x^3 + 6x^2 - 12x & \\ \hline x^2 + 4x - 13 & \\ -x^2 - 3x + 6 & \\ \hline x - 7 & \end{array}$$

$x^4 + x^3 - 11x^2 + 16x - 13 =$
$= (x^2 + 3x - 6)\cdot(x^2 - 2x + 1) + (x - 7)$

36. En las siguientes divisiones calcular el cociente y el resto. Escribe las relaciones

$$\frac{D}{d} = c + \frac{r}{d} \quad \text{y} \quad D = d \times c + r$$

a) $(6x^3 + 2x^2 - 8x + 3) : (2x)$

$$\frac{6x^3 + 2x^2 - 8x + 3}{2x} = \frac{6x^3}{2x} + \frac{2x^2}{2x} + \frac{-8x}{2x} + \frac{3}{2x} =$$

$$= 3x^2 + x - 4 + \frac{3}{2x}$$

$6x^3 + 2x^2 - 8x + 3 = (2x)\cdot(3x^2 + x - 4) + 3$
cociente: $3x^2 + x - 4$; resto: 3

b) $(x^5 - 6x^4 + 9x^3 - 2x + 1) : (3x^3)$

$$\frac{x^5 - 6x^4 + 9x^3 - 2x + 1}{3x^3} = \frac{x^5}{3x^3} + \frac{-6x^4}{3x^3} + \frac{9x^3}{3x^3} + \frac{-2x+1}{3x^3} =$$

$$= \frac{1}{3}x^2 - 2x + 3 + \frac{-2x+1}{3x^3}$$

$$x^5 - 6x^4 + 9x^3 - 2x + 1 = (3x^3).\left(\frac{1}{3}x^2 - 2x + 3\right) + (-2x + 1)$$

cociente: $\frac{1}{3}x^2 - 2x + 3$; resto: $-2x + 1$

c) $(8x^4 + 3x^2) : (-6x^2)$

$$\frac{8x^4 + 3x^2}{-6x^2} = \frac{8x^4}{-6x^2} + \frac{3x^2}{-6x^2} = -\frac{4}{3}x^2 - \frac{1}{2} =$$

$$= -\frac{4}{3}x^2 - \frac{1}{2} + \frac{0}{-6x^2} =$$

$$= 8x^4 + 3x^2 = (-6x^2).\left(-\frac{4}{3}x^2 - \frac{1}{2}\right) + 0$$

cociente: $-\frac{4}{3}x^2 - \frac{1}{2}$; resto: 0

d) $(x^2 - 2x + 1) : (2x^2)$

$$\frac{x^2 - 2x + 1}{2x^2} = \frac{x^2}{2x^2} + \frac{-2x+1}{2x^2} = \frac{1}{2} + \frac{-2x}{2x}$$

$$x^2 - 2x + 1 = (2x^2).\left(\frac{1}{2}\right) + (-2x + 1)$$

cociente: $\frac{1}{2}$; resto: $-2x + 1$

37. Si una división $D(x)$ es el dividendo, $d(x)$ es el divisor y $C(x)$ es el cociente. Halla el resto sin hacer la división:

De la igualdad $D(x) = d(x)\cdot C(x) + r(x)$ se deduce: $r(x) = D(x) - d(x)\cdot C(x)$

a) $D(x) = 3x^4 + x^3 - 6x + 1$; $d(x) = x^2 - x + 5$; $C(x) = 3x^2 + 4x - 1$

$r(x) = 3x^4 + x^3 - 6x + 1 - (x^2 - x + 5)\cdot(3x^2 + 4x - 11) =$
$= 3x^4 + x^3 - 6x + 1 - (3x^4 + 4x^3 - 11x^2 - 3x^3 - 4x^2 + 11x +$
$+ 15x^2 + 20x - 55) =$
$= 3x^4 + x^3 - 6x + 1 - (3x^4 + x^3 + 31x - 55) =$
$= -37x + 56$

b) $D(x) = 6x^3 - 42x + 36$; $d(x) = x^2 - 3x + 2$; $C(x) = 6x + 18$

$r(x) = 6x^3 - 42x + 36 - (x^2 - 3x + 2)\cdot(6x + 18) =$
$= 6x^3 - 42x + 36 - (6x^3 + 18x^2 - 18x^2 - 54x + 12x + 36) =$
$= 6x^3 - 42x + 36 - (6x^3 - 42x + 36) = 0$

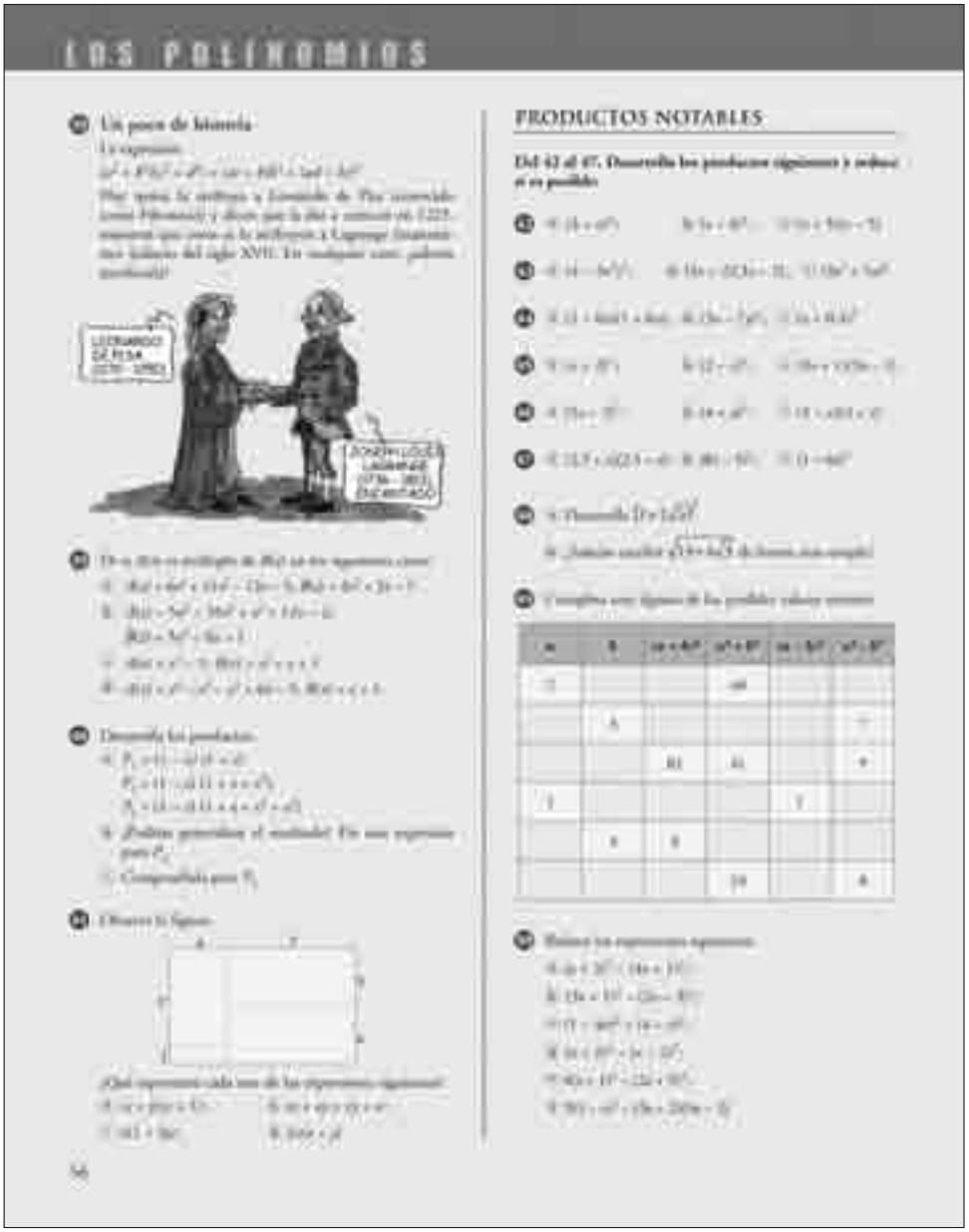
c) $D(x) = 6x^5 + 9x^4 - 10x^2 - 11x + 6$; $d(x) = 2x + 3$; $C(x) = 3x^4 - 5x + 2$

$r(x) = 6x^5 + 9x^4 - 10x^2 - 11x + 6 - (2x+3)\cdot(3x^4 - 5x + 2) =$
$= 6x^5 + 9x^4 - 10x^2 - 11x + 6 - (6x^5 - 10x^2 + 4x + 9x^4 - 15x + 6) =$
$= 6x^5 + 9x^4 - 10x^2 - 11x + 6 - (6x^5 + 9x^4 - 10x^2 - 11x + 6) = 0$

d) $D(x) = 2x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 5x + 6$; $d(x) = x^2 - 2x + 1$; $C(x) = 2x^2 - x + 3$

$r(x) = 2x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 5x + 6 - (x^2 - 2x + 1)\cdot(2x^2 - x + 3) =$
$= 2x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 5x + 6 - (2x^4 - x^3 + 3x^2 - 4x^3 + 2x^2 -$
$- 6x + 2x^2 - x + 3) =$
$= 2x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 5x + 6 - (2x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 7x + 3) =$
$= 2x + 3$

▶ Pág. 56. Ejercicios


LOS POLINOMIOS

PRODUCTOS NOTABLES

SOLUCIONARIO

38. Un poco de historia

La expresión:

$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$

Hay quien la atribuye a Leonardo de Pisa (conocido como Fibonacci) y dicen que la dio a conocer en 1225, mientras que otros se la atribuyen a Lagrange (matemático italiano del siglo XVI). En cualquier caso, ¿sabrías justificarla?

$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2$

$(ac + bd)^2 + (ad - bc)^2 = (ac)^2 + 2acdb + (bd)^2 + + (ad)^2 - 2adbc + (bc)^2 = a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2$

La igualdad es cierta pues los desarrollos de ambos miembros producen el mismo resultado.

39. Dí si $A(x)$ es múltiplo de $B(x)$ en los siguientes casos:

a) $A(x) = 6x^3 + 11x^2 - 12x - 5$; $B(x) = 2x^2 + 3x - 5$

Se dividen

$$\begin{array}{r|l} 6x^3 + 11x^2 - 12x - 5 & 2x^2 + 3x - 5 \\ \cline{2-2} -6x^3 - 9x^2 + 15x & 3x + 1 \\ \cline{1-1} \quad 2x^2 + 3x - 5 & \\ -2x^2 - 3x + 5 & \\ \cline{1-1} \quad 0 & \end{array}$$

$A(x)$ sí es un múltiplo de $B(x)$.

b) $A(x) = 5x^5 - 16x^3 + x^2 + 12x - 2$; $B(x) = 5x^3 - 6x + 1$

$$\begin{array}{l|l} 5x^5 - 16x^3 + x^2 + 12x - 2 & 5x^3 - 6x + 1 \\ -5x^5 + 6x^3 - x^2 & x^2 - 2 \\ \hline -10x^3 + 12x - 2 & \\ 10x^3 - 12x + 2 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$A(x)$ sí es un múltiplo de $B(x)$.

c) $A(x) = x^3 - 1$; $B(x) = x^2 + x + 1$

$$\begin{array}{l|l} x^3 - 1 & x^2 + x + 1 \\ -x^3 - x^2 - x & x - 1 \\ \hline -x^2 - x - 1 & \\ x^2 + x + 1 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$A(x)$ sí es un múltiplo de $B(x)$.

d) $A(x) = x^4 - x^3 - x^2 + 6x - 5$; $B(x) = x + 1$

$$\begin{array}{l|l} x^4 - x^3 - x^2 + 6x - 5 & x + 1 \\ -x^4 - x^3 & x^3 - 2x^2 + x + 5 \\ \hline -2x^3 - x^2 + 6x - 5 & \\ 2x^3 + 2x^2 & \\ \hline x^2 + 6x - 5 & \\ -x^2 - x & \\ \hline 5x - 5 & \\ -5x - 5 & \\ \hline -10 & \end{array}$$

$A(x)$ no es un múltiplo de $B(x)$.

40. Desarrolla los productos:

a) $P_1 = (1 - x)(1 + x)$ $P_2 = (1 - x)(1 + x + x^2)$ $P_3 = (1 - x)(1 + x + x^2 + x^3)$

b) ¿Podrías generalizar el resultado? Da una explicación para P_n

c) Compruébala para P_5

a) $P_1 = (1 - x)(1 + x) = 1 - x^2$

$P_2 = (1 - x)(1 + x + x^2) = 1 + x + x^2 - x - x^2 - x^3 = 1 - x^3$

$P_3 = (1 - x)(1 + x + x^2 + x^3) = 1 + x + x^2 + x^3 - x - x^2 - x^3 - x^4 = 1 - x^4$

b) Si $P_n = (1 - x)(1 + x + x^2 + \ldots + x^n) = 1 - x^{n+1}$

c) $P_5 = (1 - x)(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 - x - x^2 - x^3 - x^4 - x^5 - x^6 = 1 - x^6$

41. Observa la figura:



¿Qué representa cada una de las expresiones siguientes?

a) $(x + y)(y + 1)$ es el valor del área del rectángulo grande.

b) $xy + xy + xy + x$ Es el valor del área del rectángulo grande, pues es la suma de las dos áreas de los cuatro rectángulos interiores.

c) $x(1 + 3y)$ Es el valor del área del rectángulo grande, pues $x(1 + 3y) = x + 3xy$ que es la simplificación del apartado b)

d) $2x(x + y)$ Es el valor del área del rectángulo grande, pues $2x = y + 1$

Del 42 al 47. Desarrolla los productos siguientes y reduce si es posible:

42. a) $(3 + x)^2 = 9 + 6x + x^2$

b) $(x - 4)^2 = x^2 - 8x + 16$

c) $(x + 5)(x - 5) = x^2 - 25$

43. a) $(4 - 3x^2)^2 = 16 - 2 \cdot 4 \cdot 3x^2 + (3x^2)^2 = 16 - 24x^2 + 9x^4$

b) $(3x + 2)(3x - 2) = (3x)^2 - 4 = 9x^2 - 4$

c) $(3x^2 + 5x)^2 = (3x^2)^2 + 2(3x^2)(5x) + (5x)^2 = 9x^4 + 30x^3 + 25x^2$

44. a) $(1 - 6x)(1 + 6x) = 1 - (6x)^2 = 1 - 36x^2$

b) $(3x - 7y)^2 = 9x^2 - 2 \cdot 3x \cdot 7y + 49y^2 = 9x^2 - 42xy + 49y^2$

c) $(x + 0{,}4)^2 = x^2 + 0{,}8x + 0{,}16$

45. a) $(x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4$

b) $(2 - x)^2 = 4 - 4x + x^2$

c) $(3x + 1)(3x - 1) = 9x^2 - 1$

46. a) $(5x - 2)^2 = 25x^2 - 20x + 4$

b) $(4 + x)^2 = 16 + 8x + x^2$

c) $(3 - x)(3 + x) = 9 - x^2$

47. a) $(2{,}5 + x)(2{,}5 - x) = 6{,}25 - x^2$

b) $(8x - 5)^2 = 64x^2 - 80x + 25$

c) $(1 - 6x)^2 = 1 - 12x + 36x^2$

48. a) Desarrolla: $\left(1 + 2\sqrt{3}\right)^2$

b) ¿Sabrías ecribir $\sqrt{13 + 4\sqrt{3}}$ **de forma más simple?**

a) $\left(1 + 2\sqrt{3}\right)^2 = 1 + 2 \cdot 2\sqrt{3} + \left(2\sqrt{3}\right)^2 = 1 + 4\sqrt{3} + 12 = 13 + 4\sqrt{3}$

b) $\sqrt{13 + 4\sqrt{3}} = \sqrt{\left(1 + 2\sqrt{3}\right)^2} = 1 + 2\sqrt{3}$

49. Completa con alguno de los posibles valores enteros:

a	b	$(a+b)^2$	a^2+b^2	$(a-b)^2$	a^2-b^2
2	6	64	40	16	–32
4	3	49	25	1	7
–5 / 5	–4 / 4	81	41	1	9
1	0 / 2	1 / 9	1 / 5	1	1 / 3
–1	4	9	17	25	–15
±3	±1	16 igual signo / 4 distinto signo	10	4 / 16	8

50. Reduce las expresiones siguientes:

a) $(x+3)^2-(4x+1)^2 = x^2+6x+9-(16x^2-8x+1) =$
$= -15x^2+14x+8$

b) $(3x+1)^2-(2x-3)^2 = 9x^2+6x+1-(4x^2-12x+9) =$
$= 5x^2+18x-8$

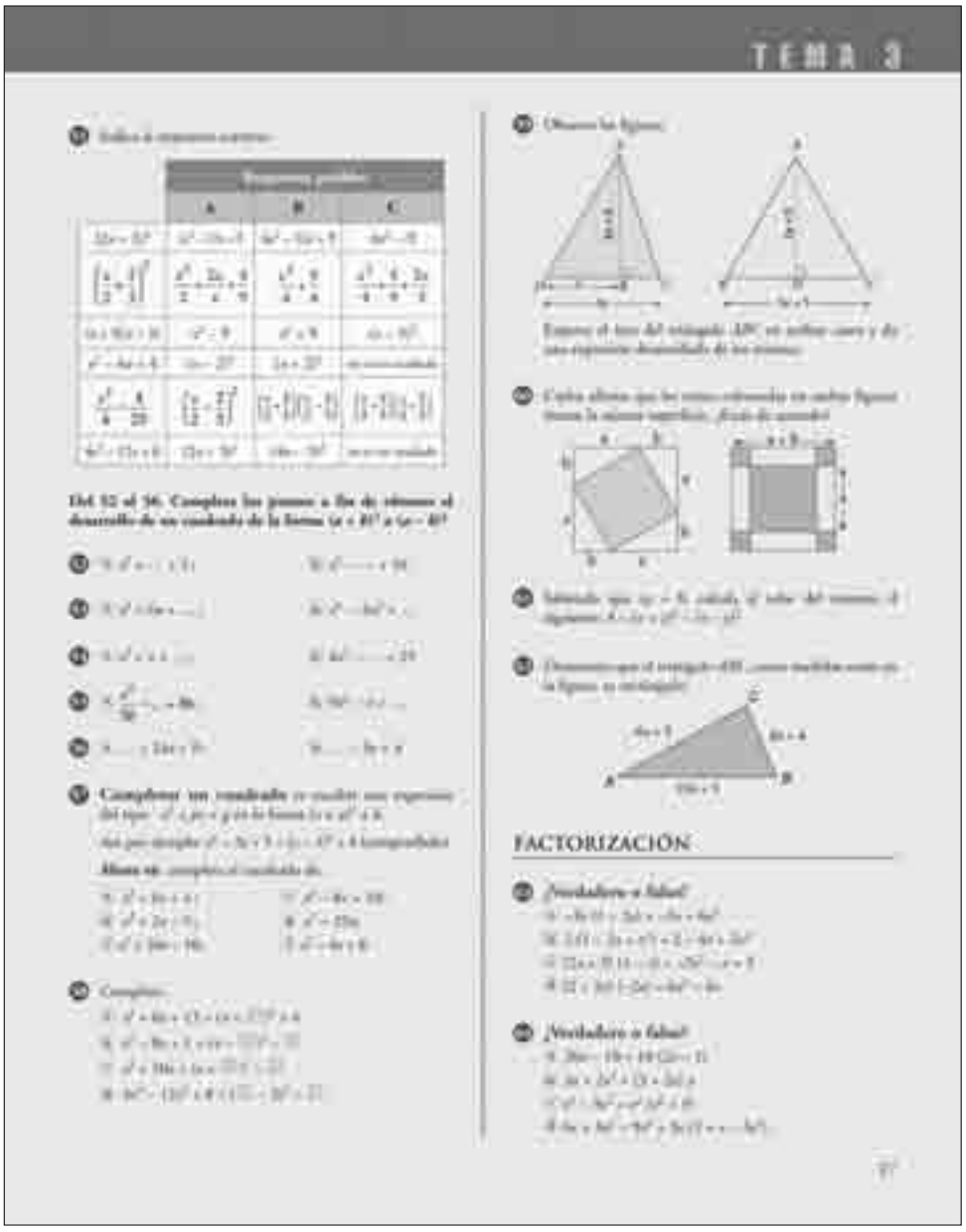
c) $(1-4x)^2-(4-x)^2 = 1-8x+16x^2-(16-8x+x^2) =$
$= 15x^2-15$

d) $(x+2)^2-(x-2)^2 = x^2+4x+4-(x^2-4x+4) = 8x$

e) $4(x+1)^2-(2x+3)^2 = 4(x^2+2x+1)-(4x^2+12x+9) =$
$= 4x^2+8x+4-4x^2-12x-9 = -4x-5$

f) $9(3-x)^2-(3x+2)(3x-2) =$
$= 9(9-6x+x^2)-(9x^2-4) =$
$= 81-54x+9x^2-9x^2+4 = 85-54x$

▶ Pág. 57. Ejercicios


TEMA 3

FACTORIZACIÓN

SOLUCIONARIO

51. Indica la respuesta correcta: (la respuesta correcta es la sombreada)

	Respuestas posibles		
	A	**B**	**C**
$(2x-3)^2$	$2x^2-12x+9$	$4x^2-12x+9$	$4x^2-9$
$\left(\frac{x}{2}+\frac{2}{3}\right)^2$	$\frac{x^2}{2}+\frac{2x}{x}+\frac{4}{9}$	$\frac{x^2}{4}+\frac{9}{4}$	$\frac{x^2}{4}+\frac{4}{9}+\frac{2x}{3}$
$(x+3)(x-3)$	x^2-9	x^2+9	$(x-3)^2$
x^2-4x+4	$(x-2)^2$	$(x+2)^2$	no es un cuadrado
$\frac{x^2}{4}-\frac{4}{25}$	$\left(\frac{x}{2}-\frac{2}{5}\right)^2$	$\left(\frac{x}{2}+\frac{2}{5}\right)\left(\frac{x}{2}-\frac{2}{5}\right)$	$\left(\frac{x}{2}+\frac{2}{5}\right)\left(\frac{x}{2}+\frac{2}{5}\right)$
$4x^2-12x+6$	$(2x-3)^2$	$(4x-3)^2$	no es un cuadrado

Del 52 al 56. Completa los puntos a fin de obtener el desarrollo de un cuadrado de la forma $(a+b)^2$ o $(a-b)^2$

52. a) x^2+2x+1 **b)** $x^2-8x+16$

53. a) x^2+6x+9 **b)** x^4-6x^2+9

54. a) $x^2+x+\frac{1}{4}$ **b)** $4x^2-20x+25$

55. a) $\frac{x^2}{36}-2x+36$ **b)** $9x^2-x+\frac{1}{36}$

56. a) $16x^2+24x+9$ **b)** $\frac{9x^2}{16}-3x+4$

57. «Completar el cuadrado» es escribir una expresión del tipo x^2+px+q en la forma $(x\pm a)^2\pm b$. Así, por ejemplo: $x^2-2x+5=(x-1)^2+4$ (compruébalo).

Ahora tú, completa el cuadrado de:

a) $x^2+6x+1=(x+3)^2-8$

b) $x^2 + 2x - 5 = (x + 1)^2 + 4$

c) $x^2 - 8x + 10 = (x - 4)^2 - 6$

d) $x^2 - 25x = \left(x - \frac{25}{2}\right)^2 - \frac{625}{4}$

e) $x^2 + 10x - 10 = (x + 5)^2 - 35$

f) $x^2 - 4x + 8 = (x - 2)^2 + 4$

58. Completa:

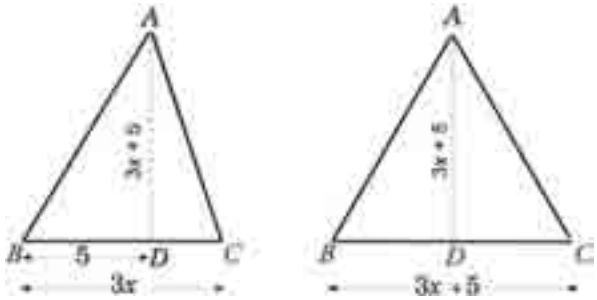
a) $x^2 + 6x + 13 = (x + \mathbf{3})^2 + 4$

b) $x^2 - 8x + 1 = (x - \mathbf{4})^2 - \mathbf{15}$

c) $x^2 + 10x = (x + \mathbf{5})^2 - \mathbf{25}$

d) $4x^4 - 12x + 8 = (\mathbf{2x^2} - 3)^2 - \mathbf{1}$

59. Observa las figuras.



Expresa el área del triángulo *ADC* en ambos casos y da una expresión desarrollada de las mismas.

En la figura izquierda

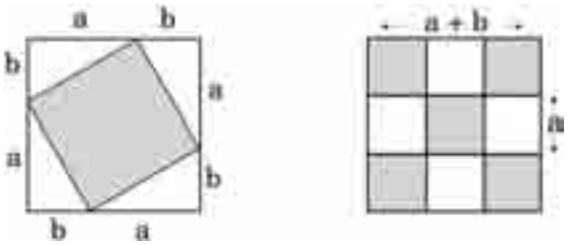
$$\text{Área} = \frac{(3x-5)(3x+5)}{2} = \frac{9x^2-25}{2}$$

El de la figura derecha

$$\text{Área: } \frac{\frac{3x+5}{2}\cdot(3x+5)}{2} = \frac{(3x+5)^2}{4} = \frac{9x^2+30x+25}{4} =$$

$$= \frac{9}{4}x^2 + \frac{15}{2}x + \frac{25}{4}$$

60. Carlos afirma que las zonas coloreadas en ambas figuras tienen la misma superficie. ¿Estás de acuerdo?



Área coloreada en la figura de la izquierda =

$= (a + b)^2 - 4\frac{ab}{2} = a^2 + 2ab + b^2 - 2ab = a^2 + b^2$

Área coloreada en la figura de la derecha =

$= (a + b)^2 - 4a^2 = a^2 + 2ab + b^2 - 4a^2 = 2ab + b^2 - 3a^2$

Para que sean iguales tiene que ser:

$a^2 + b^2 = 2ab + b^2 - 3a^2 \Rightarrow 4a^2 = 2ab \Rightarrow 2a = b$

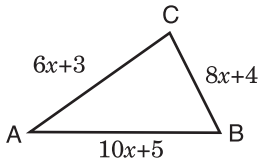
61. Sabiendo que $xy = 8$, calcula el valor del número *A* siguiente: $A = (x + y)^2 - (x - y)^2$

$A = (x + y)^2 - (x - y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 - (x^2 - 2xy + y^2) =$

$= 4xy$

Como $xy = 8 \Rightarrow A = 4 \cdot 8 = 32$

62. Demuestra que el triángulo *ABC*, cuyas medidas están en la figura, es rectángulo.



Para que sea rectángulo tiene que cumplirse el teorema de Pitágoras

$(6x + 3)^2 + (8x + 4)^2 = (10x + 5)^2$

$(6x + 3)^2 + (8x + 4)^2 = 36x^2 + 36x + 9 + 64x^2 + 64x + 16 =$

$= 100x^2 + 100x + 25$

$(10x + 5)^2 = 100x^2 + 100x + 25$

luego sí es rectángulo.

63. ¿Verdadero o falso?

a) $-3x(1 - 2x) = -3x + 6x^2$ Verdadero

b) $2(1 - 2x + x^2) = 2 - 4x + 2x^2$ Verdadero

c) $(2x + 3)(1 - x) = -2x^2 - x + 3$ Verdadero

d) $(2 + 3x)(-2x) = 6x^2 - 4x$ Falso

64. ¿Verdadero o falso?

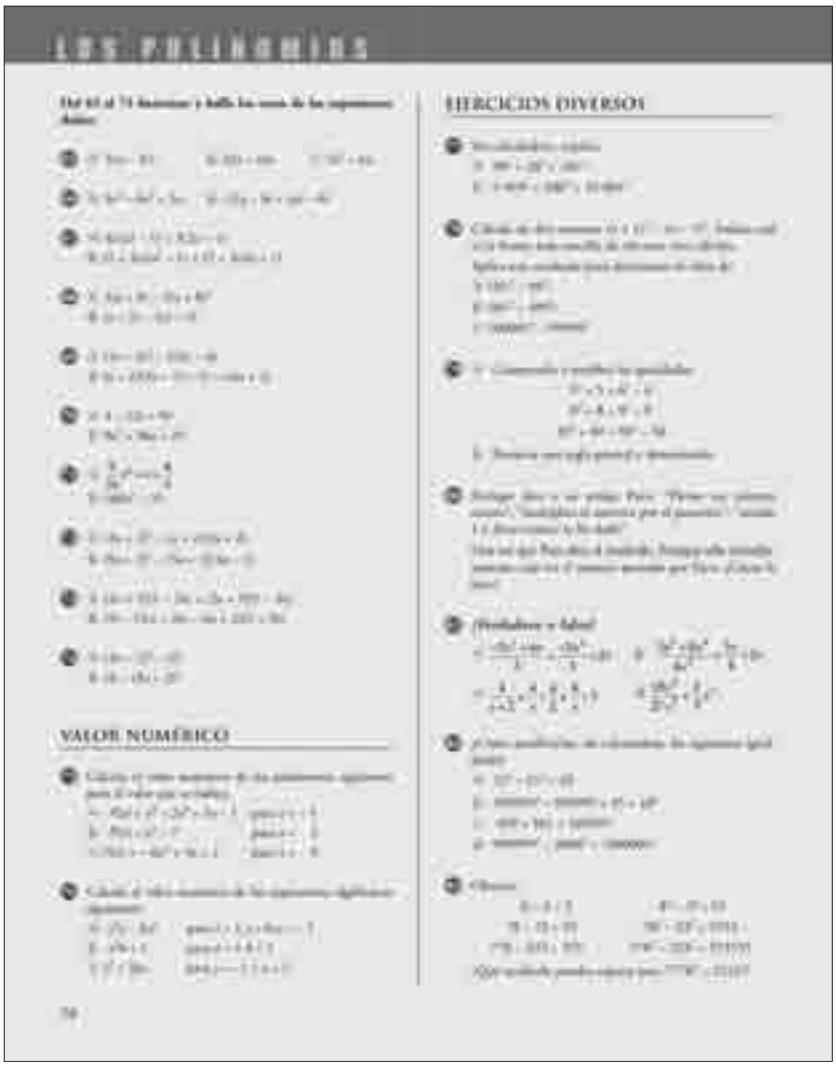
a) $20x - 10 = 10(2x - 1)$ Verdadero

b) $3x + 2x^2 = (3 + 2x)x$ Verdadero

c) $x^4 - 3x^2 = x^2(x^2 + 3)$ Falso

d) $6x + 3x^2 - 9x^3 = 3x(2 + x - 3x^2)$ Verdadero

▶ Pág. 58. Ejercicios



SOLUCIONARIO

Del 65 al 74 factorizar y halla los ceros de las expresiones dadas:

65. a) $32x - 32 = 32(x - 1)$. Ceros $x = 1$

b) $32x - 16 = 16(2x - 1)$. Ceros $x = \frac{1}{2}$

c) $3x^2 - 6x = 3x\,(x - 2)$. Ceros $x = 0$ y $x = 2$

66. a) $3x^3 - 6x^2 + 3x = 3x\,(x^2 - 2x + 1) = 3x\,(x - 1)^2$. Ceros $x = 0$ y $x = 1$

b) $-2(a - b) + x(a - b) = (a - b)(-2 + x)$. Ceros $x = 2$

67. a) $4a(2x - 1) + 3(2x - 1) = (2x - 1)(4a + 3)$. Ceros $x = \frac{1}{2}$ y $a = -\frac{3}{4}$

b) $(2 + 3x)(x^2 - 1) + (2 + 3x)(x + 1) =$
$= (2 + 3x)(x + 1)(x - 1) + (2x + 3)(x+1) =$
$= (2 + 3x)(x + 1)(x - 1 + 1) =$
$= (2 + 3x)(x + 1)\,x$. Ceros $x = -\frac{2}{3}$, $x = -1$ y $x = 0$

68. a) $3(a + 8) - 3(a + 8)^2 = 3\,(a + 8)\,(1 - (a + 8)) =$
$= 3\,(a + 8)\,(-a - 7)$

Ceros: $a = -8$ y $a = -7$

b) $(x - 5) - 3(x - 5) = -2\,(x - 5)$. Ceros: $x = 5$

69. a) $(5x - 6)^2 - 5(5x - 6) = (5x - 6)(5x - 6 - 5) =$
$= (5x - 6)(5x - 11)$

Ceros $x = \frac{6}{5}$ y $x = \frac{11}{5}$

b) $(x + 2)(3x - 1) + (2 - x)(x + 2) =$
$= (x + 2)(3x - 1 + 2 - x) = (x + 2)(2x+1)$

Ceros $x = -2$ y $x = -\frac{1}{2}$

70. a) $4 - 12t + 9t^2 = (2 - 3t)^2$. Ceros $t = -\frac{2}{3}$

b) $9a^2 + 30a + 25 = (3a + 5)^2$

71. a) $\frac{9}{16}x^2 + x + \frac{4}{9} = \left(\frac{3}{4}x + \frac{2}{3}\right)^2$. Ceros $x = -\frac{2/3}{3/4} = -\frac{8}{9}$

b) $100x^2 - 25 = (10x + 5)(10x - 5)$.

72. a) $(3x + 2)^2 - (x + 2)(3x + 2) =$
$= (3x + 2)\,((3x + 2) - (x + 2)) = 2x\,(3x + 2)$.

Ceros $x = -\frac{2}{3}$ y $x = 0$

b) $(5a + 2)^2 - (5a + 2)(3a - 1) =$
$= (5a + 2)(5a + 2 - (3a - 1)) = (5a + 2)\,(2a + 3)$.

Ceros a $= -\frac{2}{5}$ y a $= -\frac{3}{2}$

73. a) $(2x + 5)(1 - 3x) + (2x + 5)(1 - 3x) =$
$= 2(2x + 5)(1 - 3x)$. Ceros $x = -\frac{5}{2}$ y $x = \frac{1}{3}$

b) $(5t-1)(2+3t)-(4t+2)(2+3t)=$
$=(2+3t)(5t-1-(4t+2))=(2+3t)(t-3)$. Ceros
$t=-\frac{2}{3}$ y $t=3$.

74. a) $(3x-2)^2-25=(3x-2+25)(3x-2-25)=$
$=(3x+23)(3x-27)$. Ceros $x=-\frac{23}{3}$ y $x=\frac{27}{3}$

b) $16-(3a+2)^2=(16+3a+2)(16-(3a+2))=$
$=(18+3a)(14-3a)=3\,(6+a)\,(14-3a)$. Ceros
$a=-6$ y $a=\frac{14}{3}$

75. Calcula el valor numérico de los polinomios siguientes para el valor que se indica:

a) $P(x)=x^3-2x^2+5x-1$ **en** $x=-1$
$P(-1)=(-1)^3-2(-1)^2+5(-1)-1=-1-2-5-1=-9$

b) $P(x)=x^5-7$ **en** $x=2$
$P(2)=2^5-7=32-7=25$

c) $P(x)=-6x^2+3x+2$ **en** $x=0$
$P(0)=2$

76. Calcula el valor numérico de las expresiones algebraicas siguientes:

a) x^2y-3z^3 **en** $x=1$ $y=0$ $z=-1$
$1^2\cdot 0-3(-1)^3=0-3(-1)=3$

b) a^2b+1 **en** $a=1$ $b=2$
$1^2\cdot 2+1=2+1=3$

c) y^2+3yz **en** $y=-1$ $z=2$
$(-1)^2+3(-1)\cdot 2=1-6=-5$

77. Sin calculadora explica:

a) $99^2+20^2=101^2 \Leftrightarrow 101^2-99^2=20^2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (101+99)(101-99)=20^2$
$\Leftrightarrow 200\cdot 2=20^2 \Leftrightarrow 400=20^2$

b) $9999^2+200^2=10\,001^2 \Leftrightarrow 10\,001^2-9999^2=200^2$
$\Leftrightarrow (10001+9999)(10001-9999)=200^2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 20000\cdot 2=200^2 \Leftrightarrow 40000=200^2$

78. Calcula de dos maneras $(a+1)^2-(a-1)^2$. Indica cuál es la forma más sencilla de efectuar éste cálculo. Aplicar este resultado para determinar el valor de:

$(a+1)^2-(a-1)^2=a^2+2a+1-(a^2-2a+1)=4a$
$(a+1)^2-(a-1)^2=((a+1)+(a-1))\,((a+1)-(a-1))=$
$=2a\cdot 2=4a$

a) $101^2-99^2=4\cdot 100=400$

b) $501^2-499^2=4\cdot 500=2000$

c) $100001^2-99999^2=4\cdot 100000=400000$

79. a) Comprueba o justifica las igualdades:

$5^2+5=6^2-6$
$8^2+8=9^2-9$
$49^2+49=50^2-50$

$5^2+5=6^2-6 \Leftrightarrow 5(5+1)=6(6-1) \Leftrightarrow 5\cdot 6=6\cdot 5$

de otra forma:

$5^2+5=6^2-6 \Leftrightarrow 6+5=6^2-5^2 \Leftrightarrow 11=$
$=(6+5)(6-5)$

$8^2+8=9^2-9 \Leftrightarrow 8(8+1)=9(9-1) \Leftrightarrow 8\cdot 9=$
$=9\cdot 8$

$49^2+49=50^2-50 \Leftrightarrow 49(49+1)=$
$=50(50-1) \Leftrightarrow 49\cdot 50=50\cdot 49$

b) Enuncia una regla general y demuéstrala.

El cuadrado de un número a mas el número a es igual al cuadrado del número siguiente $a+1$ menos ese número.

$a^2+a=(a+1)^2-(a+1)$
$a(a+1)=(a+1)(a+1-1)$
$a(a+1)=(a+1)\,a$

80. Enrique dice a su amigo Paco: "Piensa en un número entero" "multiplica el anterior por el posterior" "súmale 1 y dime cuánto te ha dado"

Una vez Paco dice el resultado, Enrique sabe inmediatamente cuál era el número pensado por Paco. ¿Cómo lo hace?

Paco piensa en el número a. Multiplica el anterior por el posterior: $(a-1)(a+1)=a^2-1$, le suma 1: $a^2-1+1=a^2$.

Enrique sabe el número que ha pensado Paco haciendo la raíz cuadrada del resultado que éste le ha dicho.

81. ¿Verdadero o falso?

a) $\frac{-5x^2+6x}{3}=\frac{-5x^2}{3}+2x$ Verdadero

b) $\frac{3x^2+8x^4}{4x^3}=\frac{3x}{4}+2x$ Falso

c) $\frac{4}{x+2}=\frac{4}{x}+\frac{4}{2}=\frac{4}{x}+2$ Falso

d) $\frac{18x^4}{27x^2}=\frac{2}{3}x^3$ Falso

82. ¿Cómo justificarías, sin calculadora, las siguientes igualdades?

a) $22^2-21^2=43$

Por $a^2-b^2=(a+b)\,(a-b)$

b) $499999^2+999999=25\times 10^6$

Por $(a-1)^2+2a-1=a^2$

c) $499\times 501=249999$

Por $(a-1)\,(a+1)=a^2-1$

d) $999999^2+2000^2=1000001^2$

Por $(a-1)^2+(2\sqrt{a}\,)2=(a+1)^2$

83. Observa:

$8-3=5$	$8^2-3^2=55$
$78-23=55$	$78^2-23^2=5555$
$778-223=555$	$778^2-223^2=555555$

¿Qué resultado puedes esperar para 7778^2-2223^2?

55555555 puesto que $a^2-b^2=(a+b)\,(a-b)$

Tema 4

Ecuaciones de primer y segundo grado

▸ Programación de aula

Objetivos

- Distinguir entre identidad y ecuación.
- Transformar una ecuación en otra equivalente.
- Trabajar con ecuaciones de primer grado.
- Trabajar con ecuaciones de segundo grado.
- Factorizar las ecuaciones de segundo grado.
- Conocer el algoritmo para la resolución de ecuaciones de segundo grado: el discriminante de la ecuación.
- Resolver problemas de ecuaciones de primer y segundo grado.

Criterios de evaluación

- Usar adecuadamente el vocabulario algebraico.
- Distinguir entre identidad y ecuación.
- Considerar ecuaciones equivalentes.
- Resolver ecuaciones de primer grado.
- Resolver ecuaciones de segundo grado.
- Factorizar ecuaciones de segundo grado.
- Aplicar el algoritmo para la resolución de ecuaciones de segundo grado.
- Las ecuaciones de primer y segundo grado resuelven problemas.
- Adquirir hábitos automáticos de cálculo en la resolución de ecuaciones de primer y segundo grado.

Contenidos

- **Conceptos** ("saber")
  - Identidades y ecuaciones.
  - Ecuaciones equivalentes.
  - Ecuaciones de primer grado.
  - Soluciones de la ecuación $(ax + b)(cx + d) = 0$.
  - Factorización de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ en la forma $a(x - A)(x - B) = 0$.
  - Resolución de ecuaciones de segundo grado incompletas.
  - Algoritmo para la resolución de la ecuación de segundo grado.
  - Relación entre las raíces y los coeficientes de la ecuación de segundo grado.

- **Procedimientos** ("Saber hacer")
  - Interpretación de los distintos significados del signo =.
  - Identificación de expresiones correctas o incorrectas.
  - Transformación de igualdades en otras equivalentes.
  - Verificación de la validez de las soluciones obtenidas.
  - Representación matemática de situaciones utilizando diferentes lenguajes (verbal, gráfico, numérico), estableciendo correspondencias entre los mismos.
  - Estimación de resultados y valoración de si una determinada respuesta numérica es o no razonable.
  - Escritura de expresiones cuadráticas en producto de factores.
  - Resolución de ecuaciones de segundo grado por factorización y por el algoritmo.
  - Verificación de las soluciones.

- **Actitudes** ("Saber ser")
  - Apreciación de la simplicidad y el rigor del lenguaje algebraico para la descripción de situaciones.
  - Reflexionar sobre la validez de la o las soluciones obtenidas en la resolución de problemas.
  - Apreciación del lenguaje simbólico o algebraico permite representar distintas situaciones y obtener conclusiones generales.
  - Gusto por la presentación ordenada y clara de los cálculos y sus resultados.

▸ Programación por competencias

COMPETENCIA MATEMÁTICA

PENSAMIENTO Y RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

Descriptores

1. Entender la extensión y las limitaciones de los conceptos matemáticos y saber utilizarlos.
2. Transformar al lenguaje algebraico situaciones resolubles mediante ecuaciones de primer y segundo grado.

Desempeño

1. Comprende la utilidad de los sistemas de ecuaciones.	- Modeliza una situación a partir de una ecuación de primer o segundo grado. - Formaliza la expresión de esa relación.	- **Ejemplos 10 a 15** (pág. 69 a 73) - **Ejercicios 11 a 15 y 71 a 107** (pág. 69, 72, 73 y 78 a 80)
2. Distingue entre identidad y ecuación.	- Identifica una identidad o una ecuación.	- **Ejemplo 1** (pág. 69) - **Ejercicios 16 y 17** (pág. 62 y 76)
3. Transforma adecuadamente una ecuación en otra equivalente.	- Utiliza una transformación conveniente. - Distingue entre posibles transformaciones equivalentes.	- **Ejemplos y ejercicios del tema** (pág. 62 a 80)

ARGUMENTAR MATEMÁTICAMENTE

Descriptores

1. Resolver ecuaciones de primer y segundo grado.
2. Aplicar el algoritmo de resolución de las ecuaciones de segundo grado.
3. Distinguir distintas formas en las que puede presentarse una ecuación de segundo grado.

Desempeño

1. Resuelve correctamente una ecuación de primer grado a través de sucesivas ecuaciones equivalentes.	- Aísla convenientemente la variable de una ecuación de primer grado.	- **Ejemplos 3 a 5 y 10 a 13** (pág. 64, 65 y 69 a 71) - **Ejercicios 5 a 8, 11, 12 y 19 a 41** (pág. 65, 69, 76 y 77)
2. Elige el método más adecuado para resolver una ecuación de segundo grado.	- Resuelve una ecuación de segundo grado tras adecuar el proceso de solución a su forma de presentación. - Factoriza una ecuación de segundo grado cuando es preciso.	- **Ejemplos 6 a 9, 14 y 15** (pág. 66 a 68 y 72 y 73) - **Ejercicios 9 a 15 y 42 a 70** (pág. 68, 69, 72, 73, 77 y 78)
3. Aplica correctamente el algoritmo de resolución de ecuaciones de segundo grado.	- Discute la solución teniendo en cuenta el discriminante.	

PLANTEAR Y RESOLVER PROBLEMAS MATEMÁTICOS

Descriptores

1. Formular problemas o situaciones que impliquen un planteamiento con ecuaciones de primer o segundo grado.
2. Reducir problemas complejos a otros más sencillos para facilitar la comprensión y solución de los mismos.
3. Reflexionar sobre la validez de las soluciones obtenidas.

Desempeño

1. Plantea una situación concreta utilizando una ecuación de primer o segundo grado.	- Formaliza algebraicamente la relación.	- **Introducción y "De 2º a 3º"** (pág. 42 y 43) - **"Observa"** (pág. 48) - **Ejercicios 41, 59, 60 y 62** (pág. 56 y 57)
2. Identifica los elementos que intervienen en la situación planteada.	- Define adecuadamente la variable incógnita.	- **En los ejemplos 5 y 6** (pág. 48) - **Ejercicios 9, 10 y 42 a 62** (pág. 48, 56 y 57)
3. Resuelve la cuestión planteada.	- Elige y aplica el sistema de resolución adecuado. - Obtiene la solución.	- **Ejemplos y ejercicios del tema** (pág. 62 a 80)

LENGUAJE MATEMÁTICO

Descriptores

1. Utilizar los símbolos, las operaciones y el lenguaje técnico formal.

Desempeño

1. Conoce el lenguaje matemático.	- Interpreta el lenguaje formal y simbólico de las matemáticas. - Trabaja con expresiones simbólicas y fórmulas.	- **Ejemplos y ejercicios del tema** (páginas 62 a 80).
2. Traduce el lenguaje natural a lenguaje formal y matemático.	- Entiende las equivalencias entre un lenguaje y otro. - Es crítico en la exactitud del lenguaje formal.	

COMPETENCIA LINGÜÍSTICA

COMPETENCIA LINGÜÍSTICA

Descriptores

1. Comprender el enunciado de un problema en el que interviene una ecuación de primer o segundo grado y diferenciar las ideas fundamentales que nos permitan expresarlas en lenguaje algebraico.
2. Aportar vocabulario específico y preciso relacionado con las ecuaciones de primer y segundo grado.
3. Describir verbalmente el proceso seguido en la resolución de un problema, confrontándolo con otros posibles.

Desempeño

1. Comprende lo que lee.	- Identifica la pregunta que se le hace. - Identifica los elementos algebraicos esenciales que intervienen.	- **Ejemplos y ejercicios del tema** (pág. 62 a 80)
2. Discrimina e interpreta la información que le da el enunciado de un problema.	- Diferencia los datos de las incógnitas. - Determina la variable que le otorga a la incógnita y enuncia su significado.	
3. Se expresa por escrito de manera adecuada y correcta, con claridad y coherencia, utilizando un lenguaje preciso.	- Presenta el texto con la solución del problema de forma adecuada y correcta. - Selecciona la información adecuada.	

COMPETENCIA SOCIAL Y CIUDADANA

COMPETENCIA SOCIAL Y CIUDADANA

Descriptores

1. Plantear en grupo problemas algebraicos formalizados a través de ecuaciones de primer y segundo grado y discutir las diferentes ecuaciones propuestas, hasta obtener la correcta.

Desempeño

1. Desarrolla habilidades de trabajo en grupo.	- Respeta el trabajo en grupo. - Acepta los criterios fundados de los demás.	- **Ejercicios diversos 71 a 107** (pág. 78 a 80)

COMPETENCIA EN CONOCIMIENTO E INTERACCION CON EL MEDIO FISICO

COMPETENCIA EN CONOCIMIENTO E INTERACCION...

Descriptores

1. Advertir cómo las ecuaciones de primer y segundo grado pueden aplicarse a la resolución de situaciones de la vida cotidiana y del entorno y medio físicos.

Desempeño

1. Interpreta situaciones del mundo físico y las conceptualiza en términos de ecuaciones de primer y segundo grado.	- Sintetiza la información. - Expone la información con precisión. - Expone adecuadamente el proceso que traslada la información al modelo matemático expresado por una ecuación de primer y segundo grado.	- **Ejemplo 15** (pág. 73) - **Ejercicios 85 a 88, 93 y 99** (pág. 78 a 80)

COMPETENCIA APRENDER A APRENDER

COMPETENCIA APRENDER A APRENDER

Descriptores

1. Adquirir conciencia y hacer uso de las propias capacidades y conocimientos para iniciarse en el aprendizaje de la resolución de las ecuaciones de primer y segundo grado.
2 Desarrollar la curiosidad de plantearse preguntas, formalizarlas y resolverlas con la metodología estudiada.
3. Utilizar estrategias de aprendizaje, utilizando técnicas de apoyo diversas y la automatización de esquemas de cálculo, para afrontar la toma de decisiones.

Desempeño

1. Desarrolla habilidades de obtención, análisis y elaboración de la información.	- Lee los enunciados de los ejercicios con la intención de comprender, relacionar y sintetizar contenidos. - Maneja adecuadamente recursos y técnicas de aprendizaje individual.	- **Ejemplos y ejercicios del tema** (pág. 62 a 80)
2. Mejora la atención y motivación.	- Se fija en cada paso y lo analiza, afianzando el proceso de aprendizaje. - Cuida la expresión y la presentación de los trabajos.	

COMPETENCIA CULTURAL Y ARTÍSTICA

COMPETENCIA CULTURAL Y ARTÍSTICA

Descriptores

1. Muestra autores y hechos históricos relacionados con las ecuaciones de primer y segundo grado.

Desempeño

1. Relaciona los conceptos matemáticos con un hecho o autor históricos.	- Muestra autores matemáticos y/o problemas o hechos reales relacionados con el Algebra y las ecuaciones.	- **Introducción** (pág. 60) - **Ejercicio 99** (pág. 80)

COMPETENCIA AUTONOMÍA E INICIATIVA PERSONAL

COMPETENCIA AUTONOMÍA E INICIATIVA PERSONAL

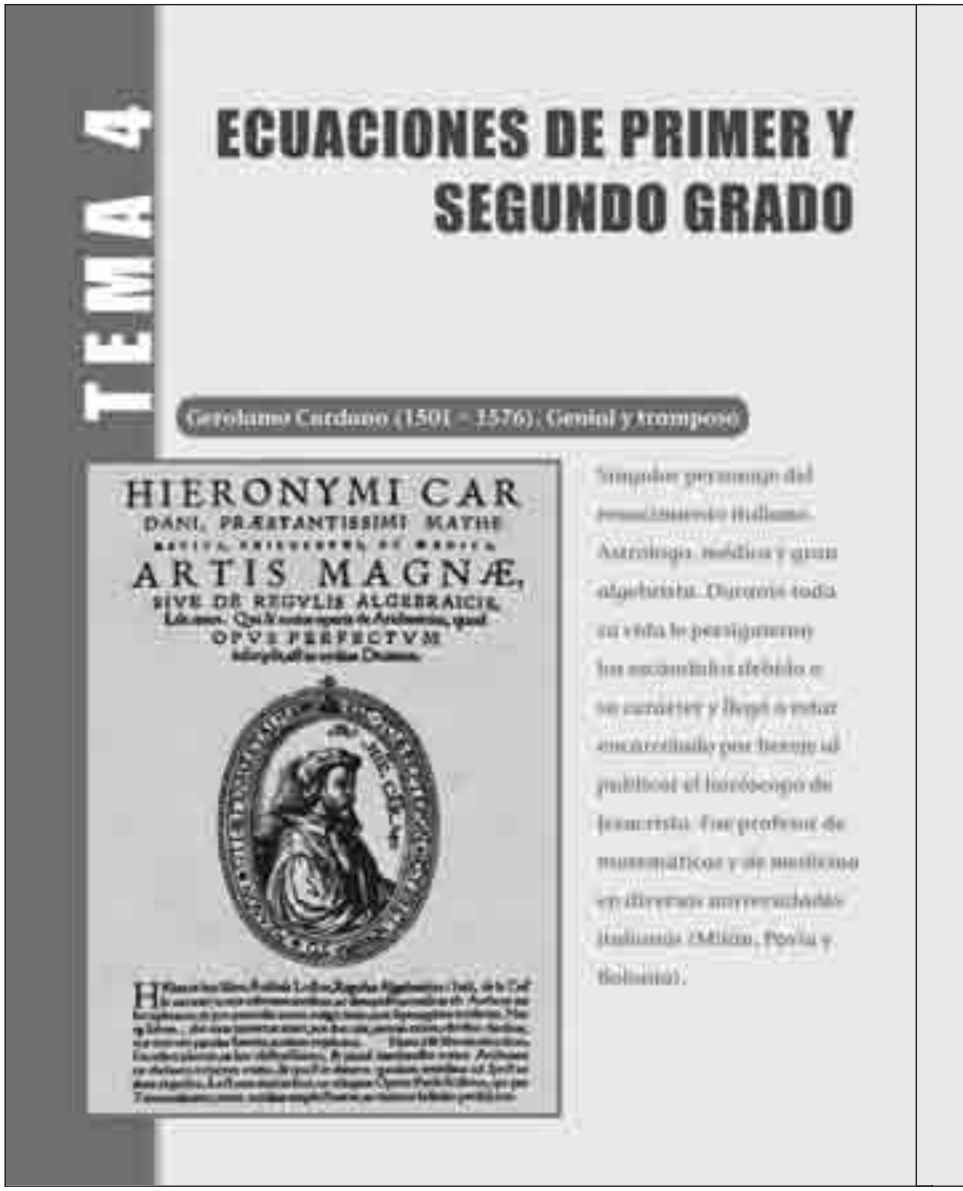
Descriptores

1. Confiar en las propias capacidades y gusto por la elaboración y uso de estrategias personales de cálculo.
2. Ser tenaz y perseverante en la búsqueda de solución a los problemas de cálculo en los que intervienen ecuaciones de primer y segundo grado.

Desempeño

1. Idea y planifica el desarrollo de un ejercicio.	- Elige la opción adecuada para la resolución de los ejercicios. - Mantiene la opción hasta llegar a la conclusión final.	- **Ejemplos y ejercicios del tema** (pág. 62 a 80)
2. Evalúa la solución obtenida.	- Valora el resultado y lo pone en relación con su enunciado del problema resuelto.	
3. Toma decisiones en función del resultado obtenido.	- Decide en función del resultado.	

▶ Pág. 60 - 61. Ecuaciones de primer y segundo grado



SOLUCIONARIO

ERROR

Alfredo ha cometido un error al resolver la ecuación $3(1 - x) = 4 + 5(3 + x)$.

¿En qué paso lo ha cometido?

$$3(1 - x) = 4 + 5(3 + x)$$

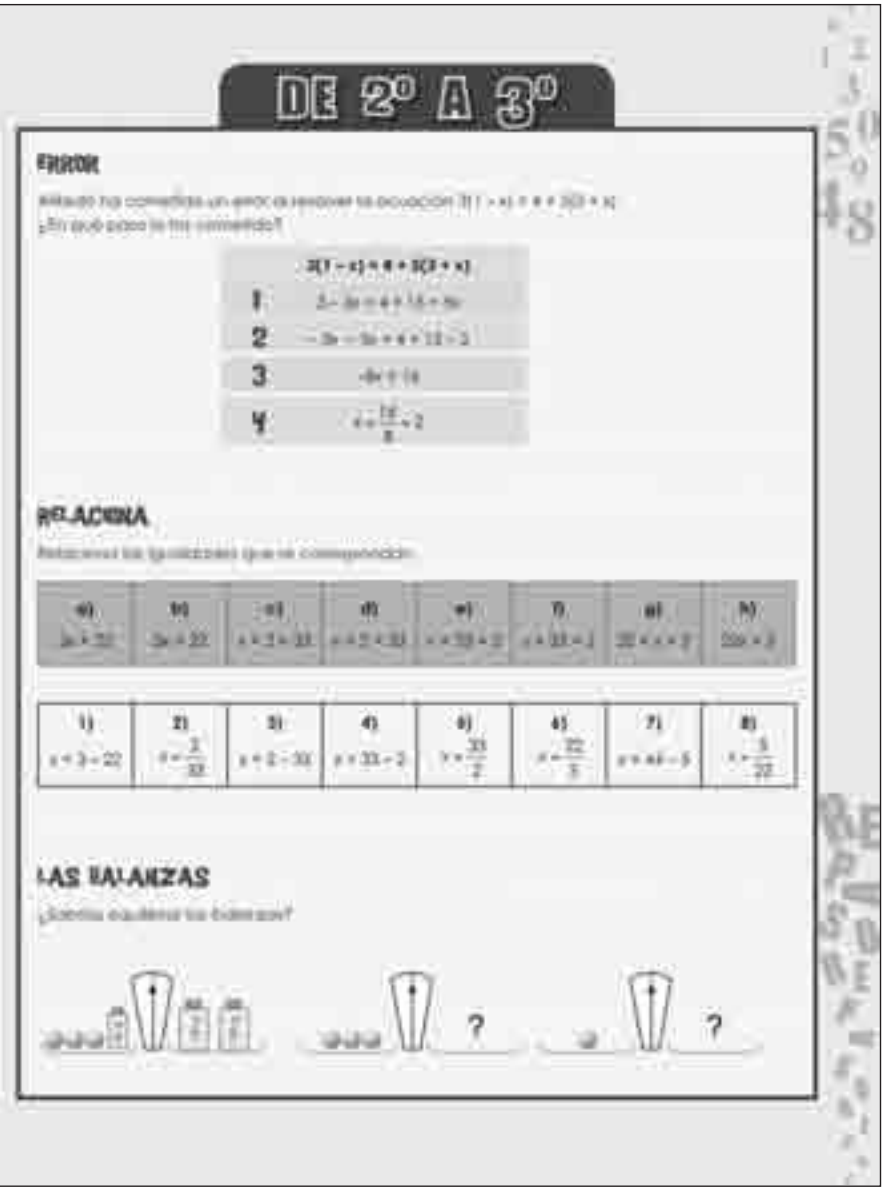
1 $3 - 3x = 4 + 15 + 5x$

2 $-3x - 5x = 4 + 15 - 3$

3 $-8x = 16$

4 $x = \frac{16}{8} = 2$

En el 4 pues le falta el signo –. Debería ser: $x = \frac{16}{-8} = -2$



RELACIONA

Relaciona las igualdades que se correspondan.

a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)
$3x + 22$	$3x = 22$	$x \times 2 = 33$	$x + 2 = 33$	$x + 33 = 2$	$x \times 33 = 2$	$22 + x = 3$	$22x = 5$

1)	2)	3)	4)	5)	6)	7)	8)
$x = 3 - 22$	$x = \frac{16}{-8} = -2$	$x = 2 - 33$	$x = 33 - 2$	$x = \frac{33}{2}$	$x = \frac{22}{5}$	$x = 44 - 5$	$x = \frac{5}{22}$

La a) y la b) no están relacionadas con ninguna.

LAS BALANZAS

¿Sabrías equilibrar las balanzas?

La segunda: 100 g y 50 g. La tercera: 50g.

▶ Pág. 62. 1 Identidades y ecuaciones



ECUACIONES DE PRIMER Y SEGUNDO GRADO

1 Identidades y ecuaciones

LA PALABRA ECUACIÓN VIENE DE LA PALABRA LATINA AEQUARE QUE SIGNIFICA IGUALAR

AUNQUE SABERLO NO SEA UTILIDAD CONSUELO CUANDO LA ECUACIÓN ES UN POCO MMMMGGGG!!

Una igualdad, tiene dos miembros, uno a cada lado del signo igual (=).

$3x(x-3) = 3x^2 - 9x$

1er miembro = 2º miembro

Hay dos tipos de igualdades las identidades y las ecuaciones.

Una identidad es una igualdad siempre cierta.

La igualdad $3x(x+2) = 3x^2 + 10x$ es una identidad pues es una aplicación de la propiedad distributiva y es cierta sea cual sea el valor de x.

Una ecuación es una igualdad literal que solo es cierta para determinados valores de las letras llamadas incógnitas.

La igualdad $x + 5 = 9$ es una ecuación, pues solo es cierta cuando $x = 4$.

Solución de una ecuación es cada uno de los valores de las incógnitas que convierten la ecuación en identidad.

Resolver una ecuación es encontrar todas sus soluciones.

En la ecuación anterior el valor $x = 2$ es la solución de la ecuación.

EJEMPLO

1 De las expresiones siguientes, indica cuáles son identidades y cuáles ecuaciones:

a) $2x(x-3) = 2x^2 - 10x$ b) $2x - 1 = 1$ c) $(x-2)^2 = x^2 - 4x + 4$ d) $x - 2 = 0$

a) Es la aplicación de la propiedad distributiva, luego es una identidad.

b) Solo es cierta la igualdad cuando x toma el valor 1, ya que $2 \cdot (1) - 1 = 1$, para cualquier otro valor será falsa. Luego es una ecuación de solución $x = 1$.

c) Es el desarrollo del cuadrado de un binomio, igualdad siempre cierta, por lo tanto es una identidad.

d) Es una ecuación de solución $x = 2$.

EJERCICIO

2 Las siguientes igualdades son identidades o ecuaciones. Identifícalas y en caso de ser una ecuación, intenta obtener su solución.

a) $3x(1-2x) = 3x - 6x^2$ b) $1 + 2x = x + 5$ c) $(x+2)^2 = x^2 + 4$ d) $6x + 2 - 3x = 3x + 2$

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS

Prerrequisitos: Saber verificar una igualdad.

El alumno tiende generalmente a "leer" una igualdad solo de izquierda a derecha.

Abundar en el doble sentido de lectura de una igualdad.

SOLUCIONARIO

1. Las siguientes igualdades son identidades o ecuaciones. Identifícalas y en caso de ser una ecuación, intenta obtener su solución.

a) $3x(1-2x) = 3x - 6x^2$; Identidad

b) $1 + 2x = x + 5$; Ecuación $x = 4$

c) $(x+2)^2 = x^2 + 4$; Ecuación $x = 0$

d) $6x + 2 - 3x = 3x + 2$; Identidad

▶ Pág. 63. 2 Ecuaciones equivalentes



TEMA 4

2 Ecuaciones equivalentes

TRANSFORMACIONES DE EQUIVALENCIA

EJEMPLO

EJERCICIOS

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS

Se buscan ecuaciones equivalentes para simplificar su resolución.

Prevenir del uso de transformaciones no equivalentes.

SOLUCIONARIO

Para el 2 y el 3. Explica si son o no equivalentes las siguientes igualdades:

2. a) $x^2 - 2x = 1$ **y** $x^2 - 2x - 1 = 0$; Son equivalentes

b) $4 - x^2 = 8x$ **y** $x^2 + 8x - 4 = 0$; Son equivalentes

3. a) $-2x - 5 = 3 - x^2$ **y** $x^2 - 3 = 2x + 5$; Son equivalentes

b) $7x + 2 = 2x - 8$ **y** $5x = 10$; No son equivalentes

4. Aplica las transformaciones de equivalencia e intenta resolver las siguientes ecuaciones:

a) $3x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{3}$

b) $2x = -4 \Rightarrow x = \frac{-4}{2} = -2$

c) $2 + 3x = x + 4 \Rightarrow 3x - x = 4 - 2 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{2}{2} = 1$

d) $3x + 1 = 5x + 1 \Rightarrow 3x - 5x = 1 - 1 \Rightarrow -2x = 0$

$\Rightarrow x = \frac{0}{-2} = 0$

e) $-x + 2{,}5 = 0 \Rightarrow x = 2{,}5$

f) $4x + \sqrt{3} = \sqrt{3} \Rightarrow 4x = \sqrt{3} - \sqrt{3} \Rightarrow 4x = 0$

$\Rightarrow x = \frac{0}{4} = 0$

g) $5x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1/2}{5} = \frac{1}{10}$

h) $5 - 7x = -2x + 3 \Rightarrow -7x + 2x = 3 - 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow -5x = -2 \Rightarrow x = \frac{-2}{-5} = \frac{2}{5}$

▶ Pág. 64. 3 Ecuaciones de primer grado



ECUACIONES DE PRIMER Y SEGUNDO GRADO

3 Ecuaciones de primer grado

Toda ecuación que pueda transformarse en una de las dos anteriores es una **ecuación de primer grado con una incógnita.**

Ya se ha dicho que para resolver una ecuación debes transformarla previamente en otra equivalente más fácil de resolver, aplicando las transformaciones ya estudiadas, que en la práctica se reducen a:

Lo que en un miembro está sumando pasa al otro restando y lo que en un miembro está multiplicando pasa al otro dividiendo y viceversa.

EJEMPLOS

1 **Resuelve la ecuación siguiente:** $\frac{7-x}{2}+\frac{3(x-2)}{10}=-2(x-6)$

a) Como m.c.m. (5, 10) = 10, reducimos a denominador común:

$$\frac{5(7-x)}{10}-\frac{3(x-2)}{10}=\frac{-20(x-6)}{10} \Rightarrow \frac{5(7-x)-3(x-2)}{10}=\frac{-20(x-6)}{10}$$

b) Igualamos los numeradores: $5(7-x)-3(x-2)=-20(x-6)$

c) Por la propiedad distributiva: $14-2x-3x+6=-20x+60 \Rightarrow -5x+20=-20x+60$

d) Trasponemos términos: $-5x+20x=60-20$

e) Reducimos ambos miembros: $15x=40$

f) Despejamos: $x=\frac{40}{15}=\frac{8}{3}$

2 **Resuelve la ecuación:** $3(x+1)+5=5(x-2)-2x$

a) Aplicando la propiedad distributiva y quitando paréntesis:

$$3x+3+5=5x-10-2x$$

b) Agrupando términos: $3x-5x+2x=-10+3-5$

c) Operando: $0=-12$

No hay ningún valor de x que cumpla la igualdad. La ecuación inicial **no tiene solución** y se dice que es una **ecuación incompatible.**

64

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS

Se puede comparar una ecuación con un a balanza equilibrada: lo que se hace en un platillo se debe compensar en el otro.

Prevenir sobre la posible aparición de identidades o de ecuaciones incompatibles.

SOLUCIONARIO

Del 5 al 8. Resolver las siguientes ecuaciones:

5. a) $\frac{4(x-11)}{14}-\frac{2x-7}{2}=-2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4(x-11)-7(2x-7)=-28 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4(x-44)-14x+49)=-28 \Rightarrow$

$\Rightarrow -10x+5=-28 \Rightarrow$

$\Rightarrow 10x=33 \Rightarrow x=\frac{33}{10}$

b) $\frac{-3(5-2x)}{5}-\frac{4-x}{15}=-6(x-1) \Rightarrow$

$\Rightarrow -9(5-2x)-(4-x)=-90(x-1) \Rightarrow$

$\Rightarrow -45+18x-4+x=-90x+90 \Rightarrow$

$\Rightarrow 19x-49=-90x+90 \Rightarrow 109x=139 \Rightarrow x=\frac{139}{109}$

c) $\frac{3}{5}-\frac{2(1-x)}{3}=\frac{x}{3}+\frac{x-4}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{3\cdot 12}{60}-\frac{2(1-x)}{60}=\frac{20x}{60}+\frac{15(x-4)}{60} \Rightarrow$

$\Rightarrow 36-40(1-x)=20x+15(x-4) \Rightarrow$

$\Rightarrow 36-40+40x=20x+15x-60 \Rightarrow$

$\Rightarrow 5x=-56 \Rightarrow x=-\frac{56}{5}$

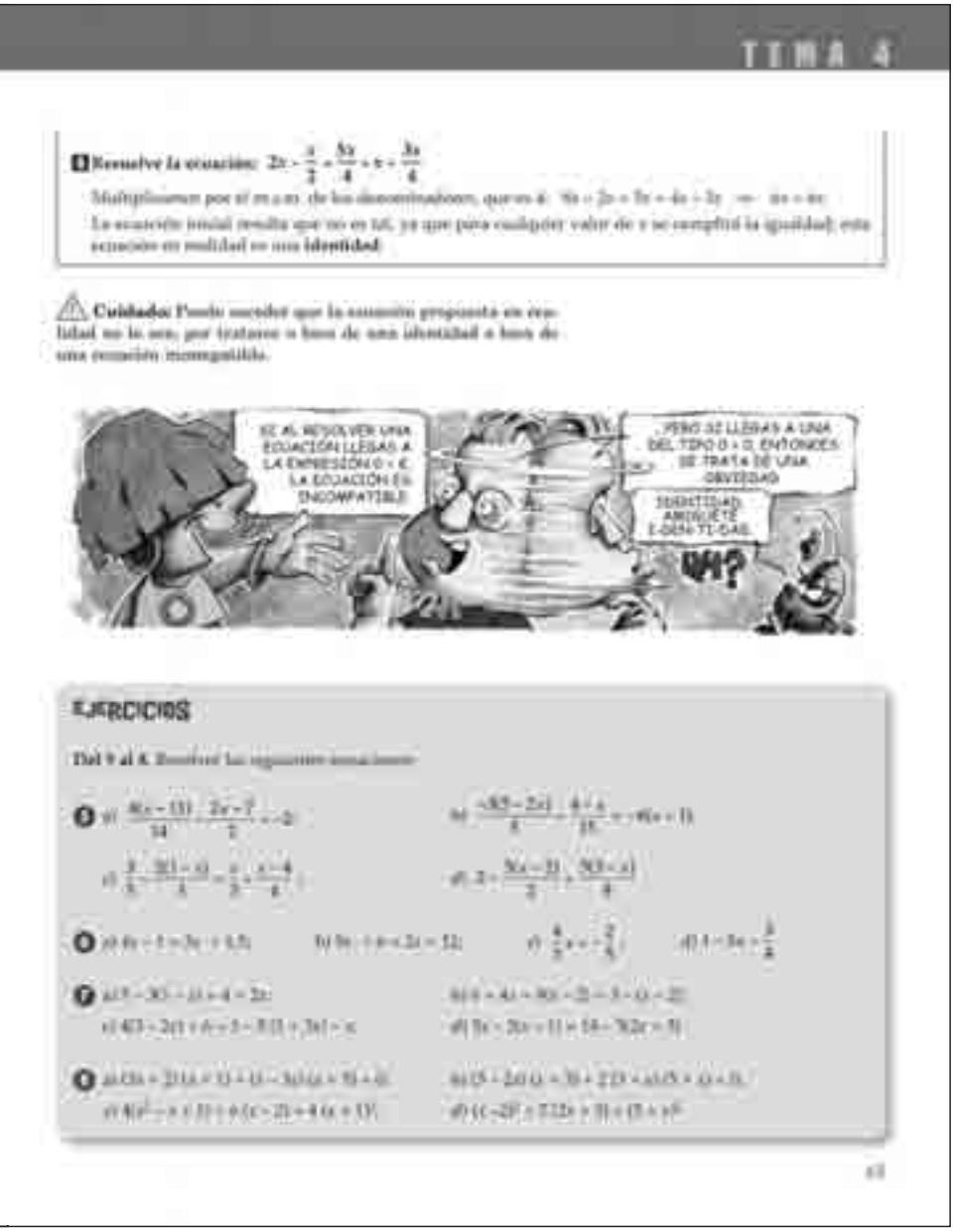
d) $2-\frac{3(x-2)}{2}=\frac{5(3-x)}{8} \Rightarrow$

$\Rightarrow 16-12(x-2)=5(x-3) \Rightarrow$

$\Rightarrow 16-12x+24=5x-15 \Rightarrow$

$\Rightarrow 17x=55 \Rightarrow x=\frac{55}{17}$

▶ Pág. 65.



TEMA 4

1 **Resuelve la ecuación:** $2x - \frac{x}{2} + \frac{5x}{4} + x = \frac{3x}{4}$

Multiplicamos por el m.c.m. de los denominadores, que es 4: $8x - 2x + 5x + 4x - 3x \;\rightarrow\; 12x = 4x$

La ecuación inicial resulta que no es tal, ya que para cualquier valor de x se cumplirá la igualdad; esta ecuación en realidad es una **identidad**.

⚠ **Cuidado:** Puede suceder que la ecuación propuesta en realidad no lo sea, por tratarse o bien de una identidad o bien de una ecuación incompatible.

EJERCICIOS

Del 9 al 6. Resolver las siguientes ecuaciones:

6. a) $4x - 1 = 3x + 1{,}5 \Rightarrow$

$\Rightarrow 8x - 2 = 6x + 3 \;\Rightarrow\; 2x = 5 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{x = \frac{5}{2}}$

b) $5x + 6 = 2x + 12 \;\Rightarrow\; 3x = 6 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{x = 2}$

c) $\frac{4}{3}x = -\frac{2}{5} \Rightarrow x = \frac{-\frac{2}{5}}{\frac{4}{3}} = -\frac{6}{20} = -\frac{3}{10}$

d) $1 - 3x = \frac{3}{4} \Rightarrow 3x = 1 - \frac{3}{4} \Rightarrow 3x = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \frac{1}{12}$

7. a) $5 - 3(1 - x) = 4 + 2x \Rightarrow 5 - 3 + 3x = 4 + 2x \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 2$

b) $6 + 4x + 9(x - 2) = 3 - (x - 2) \;\Rightarrow$

$\Rightarrow 6 + 4x + 9x - 18 = 3 - x + 2 \;\Rightarrow$

$\Rightarrow 13x - 12 = 5 - x \Rightarrow 14x = 17 \Rightarrow \boldsymbol{x = \frac{17}{14}}$

c) $4(3 - 2x) + 6 = 1 - 5(1 + 3x) - x \Rightarrow$

$\Rightarrow 12 - 8x + 6 = 1 - 5 - 15x - x \Rightarrow$

$\Rightarrow 18 - 8x = -4 - 16x \Rightarrow 8x = -22 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = -\frac{22}{8} = -\frac{11}{4}$

d) $5x - 2(x - 1) = 14 - 3(2x + 3) \;\Rightarrow$

$5x - 2x + 2 = 14 - 6x - 9 \Rightarrow 3x + 2 = 5 - 6x \Rightarrow$

$\Rightarrow 9x = 3 \;\Rightarrow\; x = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

8. a) $(3x + 2)(x + 1) + (1 - 3x)(x + 5) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3x^2 + 3x + 2x + 2 + x + 5 - 3x^2 -$

$- 15x = 0 \Rightarrow -9x + 7 = 0 \Rightarrow \boldsymbol{x = -\frac{7}{9}}$

b) $(5 - 2x)(x + 3) + 2(3 + x)(5 + x) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 5x + 15 - 2x^2 - 6x + 2(15 + 3x + 5x + x^2) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -2x^2 - x + 17 + 2(x^2 + 8x + 15) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 15x + 47 = 0 \Rightarrow x = -\frac{47}{15}$

c) $4(x^2 - x + 1) + 6(x - 2) = 4(x^2 + 2x + 1) \Rightarrow$

$\Rightarrow 4x^2 - 4x + 4 + 6x - 12 - 4x^2 - 8x - 4 = 0$

$-6x - 12 = 0 \Rightarrow \boldsymbol{x = -2}$

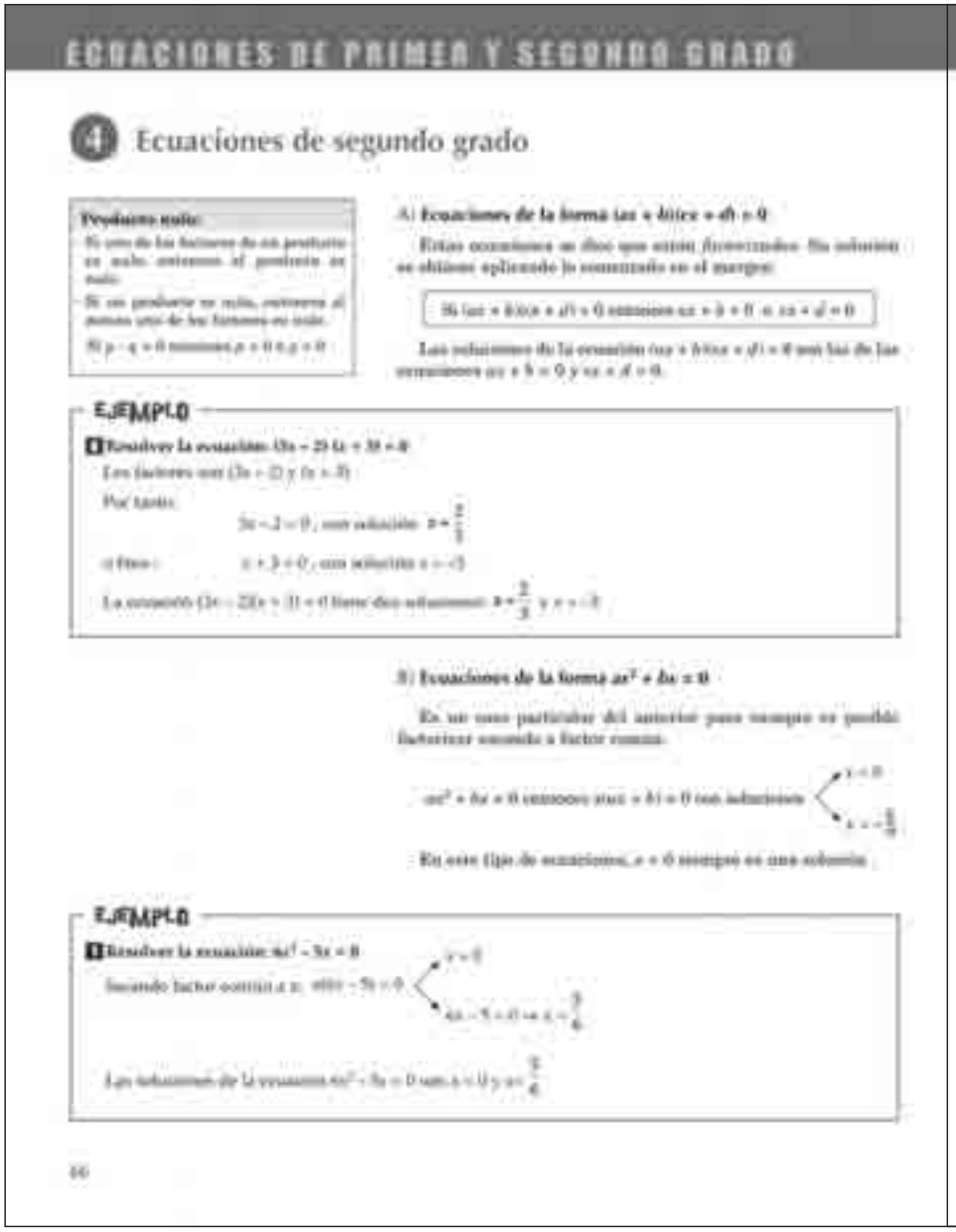
d) $(x - 2)^2 + 7(2x + 3) = (5 + x)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 + 14x + 21 = 25 + 10x + x^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + 10x + 25 = x^2 + 10x + 25 \Rightarrow 0 = 0$

Esta ecuación es una identidad. Cualquier valor es solución

▶ Pág. 66. 4 Ecuaciones de segundo grado



ECUACIONES DE PRIMER Y SEGUNDO GRADO

4 Ecuaciones de segundo grado

Producto nulo:

Si uno de los factores de un producto es nulo, entonces el producto es nulo.

Si un producto es nulo, entonces al menos uno de los factores es nulo.

Si $p \cdot q = 0$ entonces $p = 0$ o $q = 0$

A) Ecuaciones de la forma $ax + bx^2 + cx + d = 0$

Estas ecuaciones se dice que están factorizadas. Sus soluciones se obtienen aplicando lo comentado en el margen:

Si $(ax + b)(cx + d) = 0$ entonces $ax + b = 0$ o $cx + d = 0$

Las soluciones de la ecuación $(ax + b)(cx + d) = 0$ son las de las ecuaciones $ax + b = 0$ y $cx + d = 0$.

EJEMPLO

1 Resolver la ecuación $(3x - 2)(x + 3) = 0$

Los factores son $(3x - 2)$ y $(x + 3)$

Por tanto:

$3x - 2 = 0$, con solución $x = \frac{2}{3}$

o bien:

$x + 3 = 0$, con solución $x = -3$

La ecuación $(3x - 2)(x + 3) = 0$ tiene dos soluciones: $x = \frac{2}{3}$ y $x = -3$

B) Ecuaciones de la forma $ax^2 + bx = 0$

Es un caso particular del anterior para siempre es posible factorizar sacando a factor común.

$ax^2 + bx = 0$ entonces $x(ax + b) = 0$ con soluciones $x = 0$ y $x = -\frac{b}{a}$

En este tipo de ecuaciones, $x = 0$ siempre es una solución.

EJEMPLO

1 Resolver la ecuación $4x^2 - 5x = 0$

Sacando factor común x: $x(4x - 5) = 0$ $\begin{cases} x = 0 \\ 4x - 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{4} \end{cases}$

Las soluciones de la ecuación $4x^2 - 5x = 0$ son $x = 0$ y $x = \frac{5}{4}$

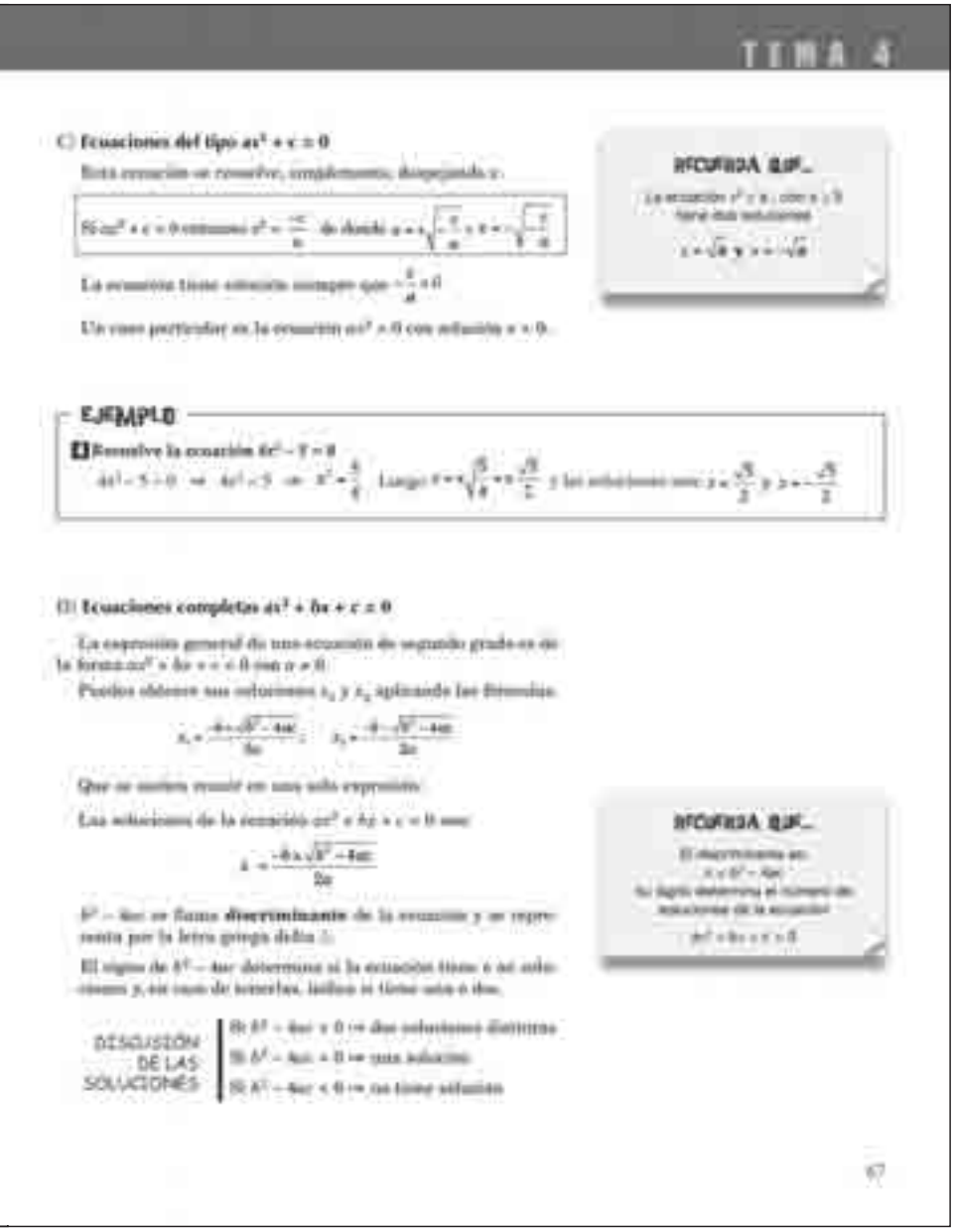
66

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS

Fomentar cálculo mental y técnicas de factorización

El algoritmo de resolución debería ser el último en utilizarse.

▶ Pág. 67.



TEMA 4

C) Ecuaciones del tipo $ax^2 + c = 0$

Esta ecuación se resuelve, simplemente, despejando x.

Si $ax^2 + c = 0$ entonces $x^2 = \frac{-c}{a}$ de donde $x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$, $x = -\sqrt{\frac{-c}{a}}$

La ecuación tiene solución siempre que $-\frac{c}{a} \geq 0$

Un caso particular es la ecuación $ax^2 = 0$ con solución $x = 0$.

RECUERDA QUE...

La ecuación $x^2 = a$, con $a \geq 0$ tiene dos soluciones:

$x = \sqrt{a}$ y $x = -\sqrt{a}$

EJEMPLO

Resuelve la ecuación $4x^2 - 5 = 0$

$4x^2 - 5 = 0 \Rightarrow 4x^2 = 5 \Rightarrow x^2 = \frac{5}{4}$. Luego $x = \pm\sqrt{\frac{5}{4}} = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}$ y las soluciones son: $x = \frac{\sqrt{5}}{2}$ y $x = -\frac{\sqrt{5}}{2}$

D) Ecuaciones completas $ax^2 + bx + c = 0$

La expresión general de una ecuación de segundo grado es de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ con $a \neq 0$.

Puedes obtener sus soluciones x_1 y x_2 aplicando las fórmulas:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}; \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Que se suelen resumir en una sola expresión:

Las soluciones de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ son:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$b^2 - 4ac$ se llama **discriminante** de la ecuación y se representa por la letra griega delta Δ.

El signo de $b^2 - 4ac$ determina si la ecuación tiene o no soluciones y, en caso de tenerlas, indica si tiene una o dos.

DISCUSIÓN DE LAS SOLUCIONES

- Si $b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow$ dos soluciones distintas
- Si $b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow$ una solución
- Si $b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow$ no tiene solución

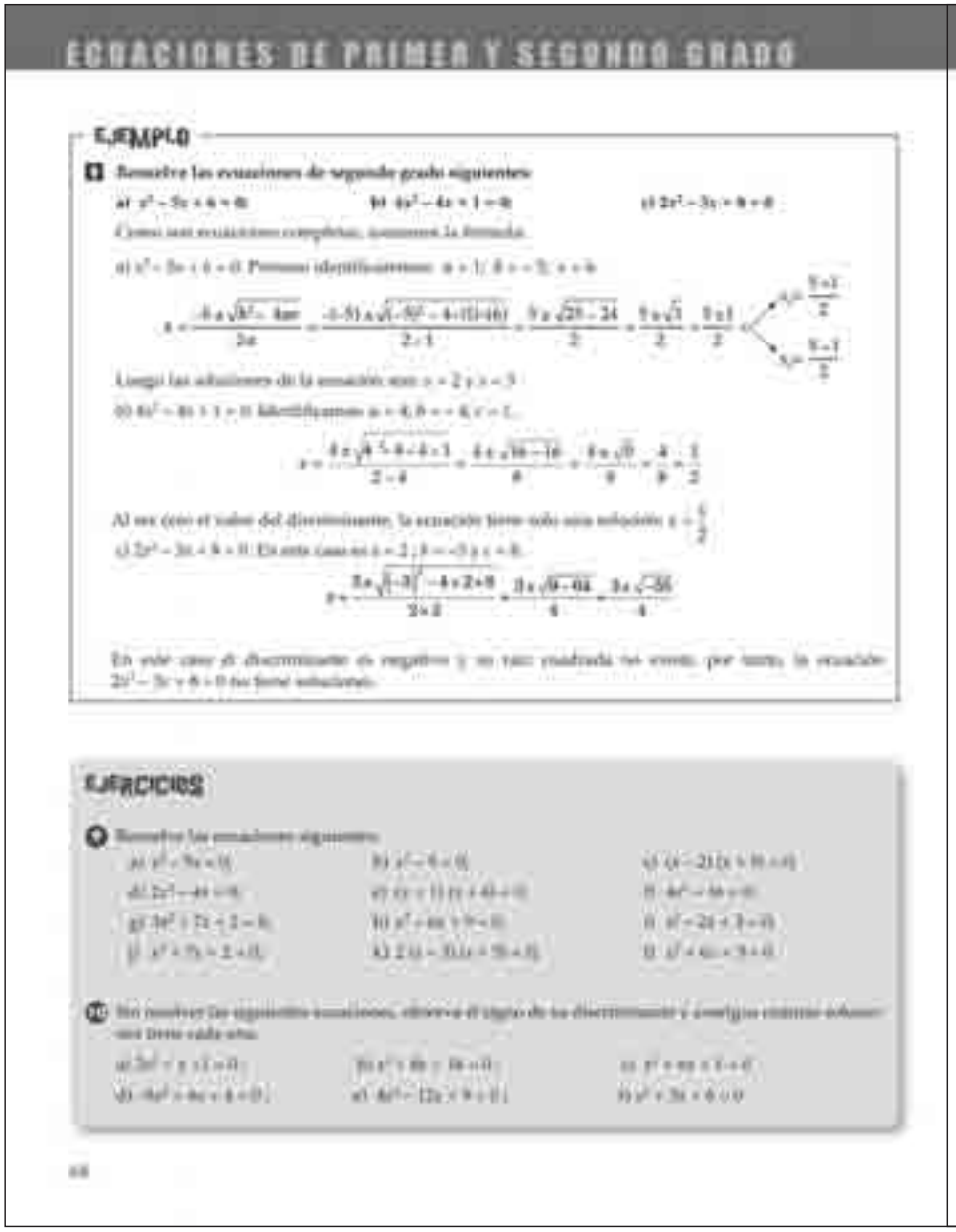
RECUERDA QUE...

El discriminante es: $\Delta = b^2 - 4ac$

Su signo determina el número de soluciones de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$

67

▶ Pág. 68.


ECUACIONES DE PRIMER Y SEGUNDO GRADO

EJEMPLO

EJERCICIOS

SOLUCIONARIO

9. Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $x^2 - 5x = 0 \Rightarrow x(x-5) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = 0$ y $x = 5$

b) $x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \sqrt{9} = 3$ y $x =$
$= -\sqrt{9} = -3$

c) $(x-2)\cdot(x+5) = 0 \Rightarrow x = 2$ y $x = -5$

d) $2x^2 - 4x = 0 \Rightarrow 2x(x-2) =$
$= 0 \Rightarrow x = 0$ y $x = 2$

e) $(x+1)(x+4) = 0 \Rightarrow x = -1$ y $x = -4$

f) $4x^2 - 16 = 0 \Rightarrow 4(x^2-4) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \sqrt{4} =$
$= 2$ y $x = -\sqrt{4} = -2$

g) $3x^2 + 7x + 2 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \frac{-7 \pm \sqrt{49-24}}{6} = \frac{-7 \pm 5}{6} = \begin{cases} \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3} \\ -\frac{12}{6} = \mathbf{-2} \end{cases}$$

h) $x^2 - 6x + 9 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{36-36}}{2} = \frac{6}{2} = \mathbf{3}$$

i) $x^2 - 2x + 3 = 0 \Rightarrow$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4-12}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-8}}{2}$$ No tiene solución

j) $x^2 + 7x + 2 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \frac{-7 \pm \sqrt{49-8}}{2} = \frac{-7 \pm \sqrt{41}}{2} = \begin{cases} \frac{\mathbf{-7+\sqrt{41}}}{\mathbf{2}} \\ \frac{\mathbf{-7-\sqrt{41}}}{\mathbf{2}} \end{cases}$$

k) $2(x-3)(x+5) = 0 \Rightarrow x = 3$ y $x = -5$

l) $x^2 + 6x + 5 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{36-20}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{4}}{2} = \begin{cases} \frac{-2}{2} = \mathbf{-1} \\ \frac{-10}{2} = \mathbf{-5} \end{cases}$$

10. Sin resolver las siguientes ecuaciones, observa el signo de su discriminante y averigua cuántas soluciones tiene cada una.

$\Delta = b^2 - 4ac$

a) $\mathbf{3x^2 + x + 1 = 0}$ **;**

$\Delta = 1 - 12 = -11 < 0$. No tiene solución

b) $\mathbf{x^2 + 8x + 16 = 0}$**;**

$\Delta = 64 - 64 = 0$. Tiene sólo una solución

c) $\mathbf{x^2 + 6x + 1 = 0}$**;**

$\Delta = 36 - 4 > 0$. Tiene dos soluciones.

d) $\mathbf{-5x^2 + 6x + 4 = 0}$**;**

$\Delta = 36 + 80 > 0$. Tiene dos soluciones.

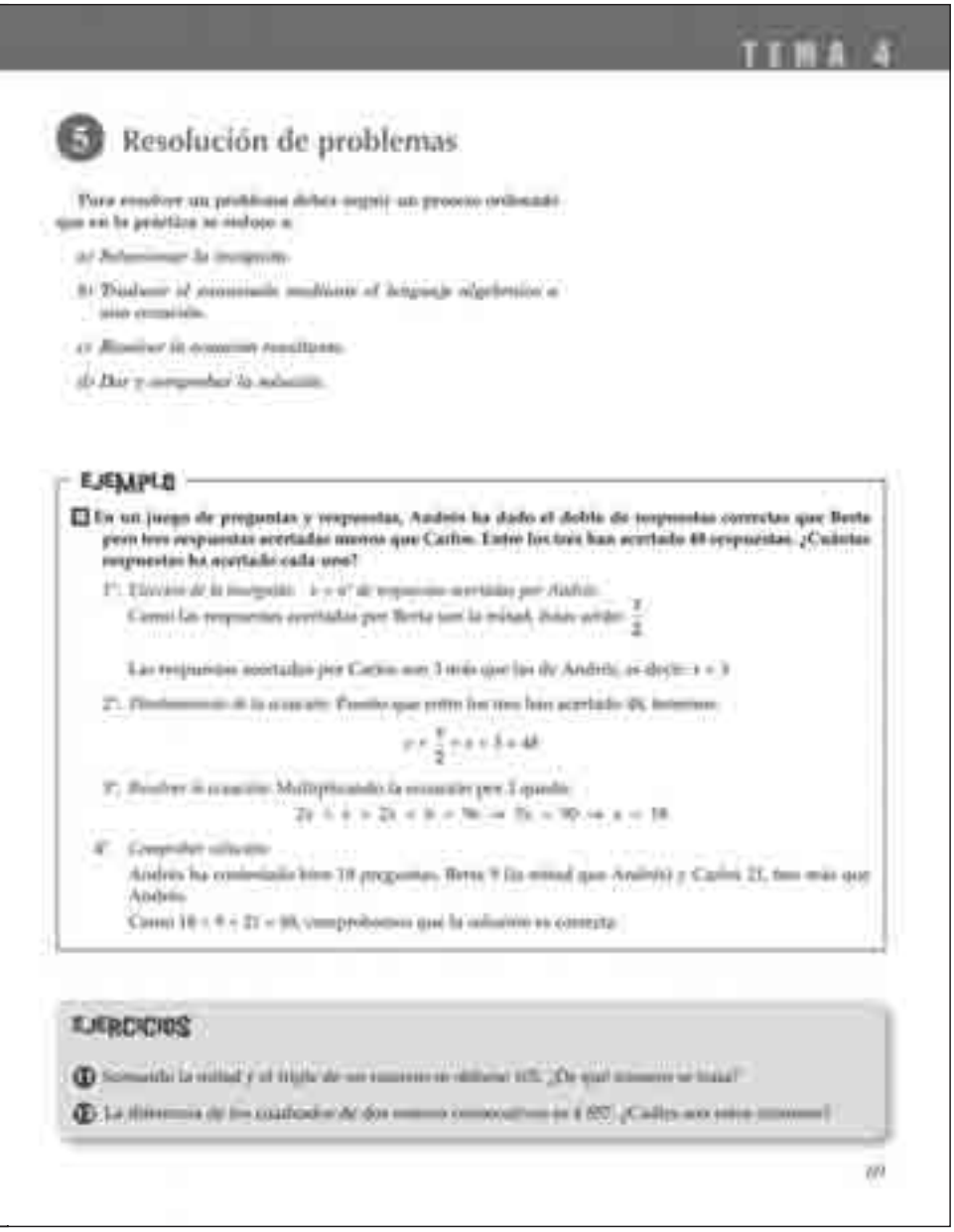
e) $\mathbf{4x^2 - 12x + 9 = 0}$**;**

$\Delta = 144 - 144 = 0$. Tiene sólo una solución.

f) $\mathbf{x^2 + 3x + 6 = 0}$**;**

$\Delta = 9 - 24 < 0$. No tiene solución.

▶ Pág. 69. 5 Resolución de problemas



TEMA 4

5 Resolución de problemas

Para resolver un problema debes seguir un proceso ordenado que en la práctica se reduce a:

a) Relacionar la incógnita.

b) Traducir el enunciado mediante el lenguaje algebraico a una ecuación.

c) Resolver la ecuación resultante.

d) Dar y comprobar la solución.

EJEMPLO

En un juego de preguntas y respuestas, Andrés ha dado el doble de respuestas correctas que Berta pero tres respuestas acertadas menos que Carlos. Entre los tres han acertado 48 respuestas. ¿Cuántas respuestas ha acertado cada uno?

1º. Elección de la incógnita. x = nº de respuestas acertadas por Andrés.

Como las respuestas acertadas por Berta son la mitad, serán: $\frac{x}{2}$

Las respuestas acertadas por Carlos son 3 más que las de Andrés, es decir: $x + 3$

2º. Planteamiento de la ecuación. Puesto que entre los tres han acertado 48, tenemos:

$$x + \frac{x}{2} + x + 3 = 48$$

3º. Resolver la ecuación. Multiplicando la ecuación por 2 queda:

$$2x + x + 2x + 6 = 96 \Rightarrow 5x = 90 \Rightarrow x = 18$$

4º. Comprobar solución.

Andrés ha contestado bien 18 preguntas. Berta 9 (la mitad que Andrés) y Carlos 21, tres más que Andrés.

Como $18 + 9 + 21 = 48$, comprobamos que la solución es correcta.

EJERCICIOS

11 Sumando la mitad y el triple de un número se obtiene 105. ¿De qué número se trata?

12 La diferencia de los cuadrados de dos números consecutivos es 4 857. ¿Cuáles son estos números?

69

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS

Consolidar un método para la resolución de este tipo de problemas.

SOLUCIONARIO

11. Sumando la mitad y el triple de un número se obtiene 105. ¿De qué número se trata?

Sea el número x

$$\frac{x}{2} + 3x = 105 \Rightarrow x + 6x = 210 \Rightarrow 7x = 210 \Rightarrow x = 30$$

12. La diferencia de los cuadrados de dos enteros consecutivos es 4 857. ¿Cuáles son estos números?

Sean los números x y $x + 1$

$$(x+1)^2 - x^2 = 4857 \Rightarrow 2x + 1 = 4857 \Rightarrow x = \frac{4856}{2} = 2428$$

Los números son 2428 y 2429.

▶ Pág. 70.

ECUACIONES DE PRIMER Y SEGUNDO GRADO

EJEMPLO

Una persona reparte su fortuna entre cuatro herederos de la siguiente manera: la mitad al primero; la quinta parte al segundo; la novena parte del resto al tercero y 54 656 euros al cuarto. Calcular la fortuna heredada y la parte de cada heredero.



1º Elección de la incógnita:

Fortuna heredada entre todos: x

2º Planteamiento de la ecuación:

Primer heredero: $\frac{1}{2}$ de la fortuna $\rightarrow \frac{x}{2}$

Segundo heredero: $\frac{2}{5}$ de la fortuna $\rightarrow \frac{x}{5}$

Tercer heredero: $\frac{1}{9}$ del resto. Veamos primero qué parte se ha repartido y saldremos lo que queda por repartir:

Hasta el momento se ha repartido: $\frac{x}{2}+\frac{x}{5}=\frac{7x}{10}$, queda por repartir: $x-\frac{7x}{10}=\frac{3x}{10}$

Tercer heredero: $\frac{1}{9}$ de $\frac{3x}{10} \rightarrow \frac{3x}{90}$ que simplificando es: $\frac{x}{30}$

Cuarto heredero: 54 656 euros.

En total se han repartido:

1º heredero + 2º heredero + 3º heredero + 4º heredero = total

$$\frac{x}{2}+\frac{x}{5}+\frac{x}{30}+54656=x$$

3º Resolvemos la ecuación:

Multiplicamos por 30 que es el m.c.m. {2, 5, 30}

$$15x+6x+x+1\,639\,680=30x \rightarrow 22x-30x=-1\,639\,680 \rightarrow -8x=-1\,639\,680$$

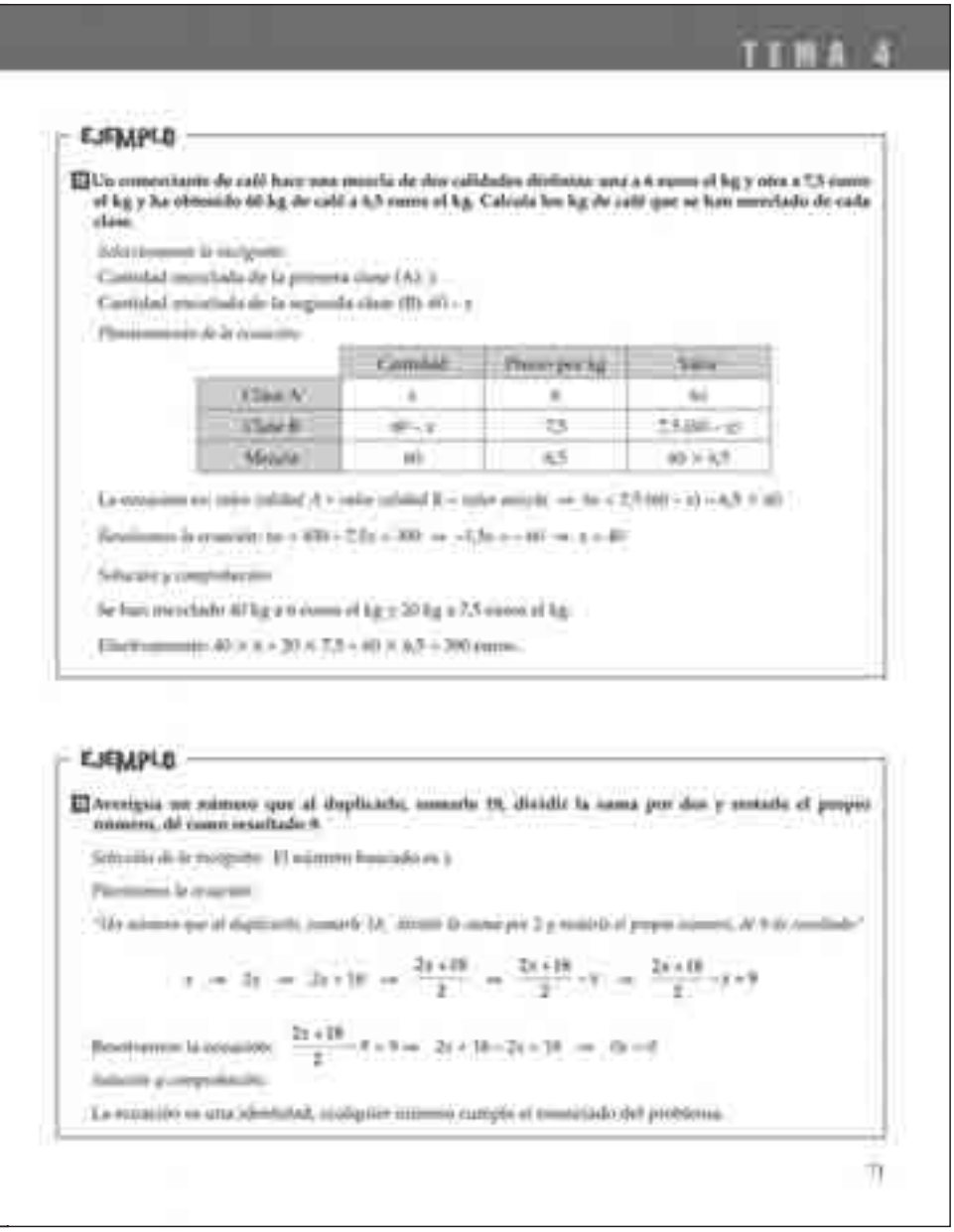
$$x=204\,960$$

4º Solución y comprobación:

El primer heredero ha recibido $\frac{x}{2}=102\,480$ euros, el segundo $\frac{x}{5}=40\,992$ euros, el tercero $\frac{x}{30}=6\,832$ euros y el cuarto 54 656 euros.

Comprobamos que el total de lo recibido 102 480 + 40 992 + 6 832 + 54 656 = 204 960 es la fortuna repartida.

▶ Pág. 71.



TEMA 4

EJEMPLO

Un comerciante de café hace una mezcla de dos calidades distintas: una a 6 euros el kg y otra a 7,5 euros el kg y ha obtenido 60 kg de café a 6,5 euros el kg. Calcula los kg de café que se han mezclado de cada clase.

Selecciona la incógnita:

Cantidad mezclada de la primera clase (A): x

Cantidad mezclada de la segunda clase (B): $60 - x$

Planteamiento de la ecuación:

	Cantidad	Precio por kg	Valor
Clase A	x	6	$6x$
Clase B	$60 - x$	7,5	$7,5(60 - x)$
Mezcla	60	6,5	$60 \times 6,5$

La ecuación es: valor calidad A + valor calidad B = valor mezcla $\Rightarrow 6x + 7,5(60 - x) = 6,5 \times 60$

Resolvemos la ecuación: $6x + 450 - 7,5x = 390 \Rightarrow -1,5x = -60 \Rightarrow x = 40$

Solución y comprobación:

Se han mezclado 40 kg a 6 euros el kg y 20 kg a 7,5 euros el kg.

Efectivamente: $40 \times 6 + 20 \times 7,5 = 60 \times 6,5 = 390$ euros.

EJEMPLO

Averigua un número que al duplicarlo, sumarle 18, dividir la suma por dos y restarle el propio número, dé como resultado 9.

Selección de la incógnita: El número buscado es x

Planteamos la ecuación:

"Un número que al duplicarlo, sumarle 18, dividir lo suma por 2 y restarle el propio número, da 9 de resultado"

$$x \Rightarrow 2x \Rightarrow 2x + 18 \Rightarrow \frac{2x + 18}{2} \Rightarrow \frac{2x + 18}{2} - x \Rightarrow \frac{2x + 18}{2} - x = 9$$

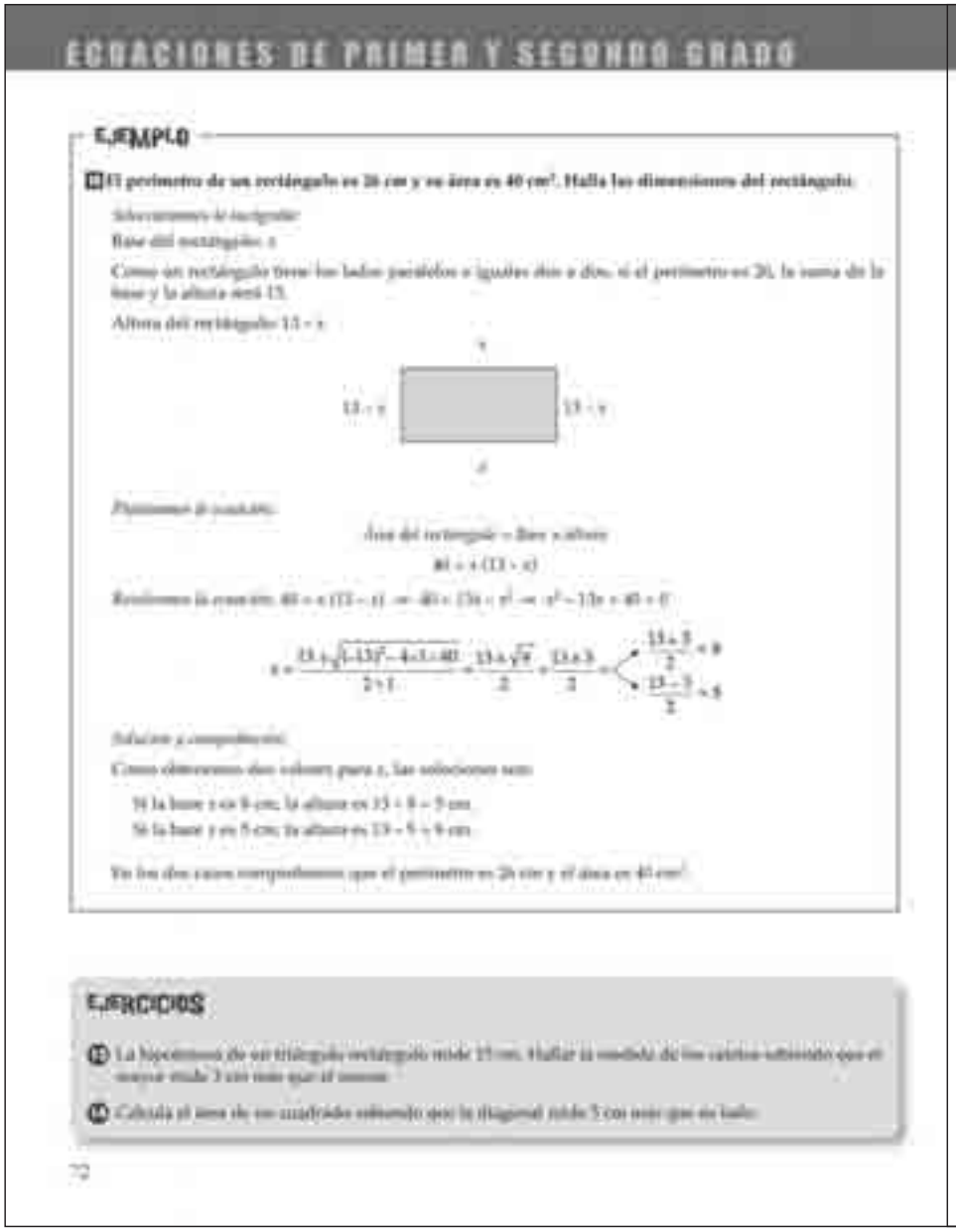
Resolvemos la ecuación: $\frac{2x + 18}{2} - x = 9 \Rightarrow 2x + 18 - 2x = 18 \Rightarrow 0x = 0$

Solución y comprobación:

La ecuación es una identidad, cualquier número cumple el enunciado del problema.

71

▶ Pág. 72.


ECUACIONES DE PRIMER Y SEGUNDO GRADO

EJEMPLO

El perímetro de un rectángulo es 26 cm y su área es 40 cm². Halla las dimensiones del rectángulo.

Base del rectángulo: x

Como un rectángulo tiene los lados paralelos e iguales dos a dos, si el perímetro es 26, la suma de la base y la altura será 13.

Altura del rectángulo: 13 − x

Área del rectángulo = Base × altura

$40 = x(13 - x)$

$x = \frac{13 \pm \sqrt{13^2 - 4 \cdot 1 \cdot 40}}{2 \cdot 1} = \frac{13 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{13 \pm 3}{2} \Rightarrow \begin{cases} \frac{13+3}{2} = 8 \\ \frac{13-3}{2} = 5 \end{cases}$

Si la base x es 8 cm, la altura es 13 − 8 = 5 cm.

Si la base x es 5 cm, la altura es 13 − 5 = 8 cm.

EJERCICIOS

12. La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 15 cm. Hallar la medida de los catetos sabiendo que el mayor mide 3 cm más que el menor.

13. Calcula el área de un cuadrado sabiendo que la diagonal mide 5 cm más que su lado.

SOLUCIONARIO

13. La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 15 cm. Hallar la medida de los catetos sabiendo que el mayor mide 3 cm más que el menor.



Por el teorema de Pitágoras

$x^2 + (x + 3)^2 = 15^2 \Rightarrow$

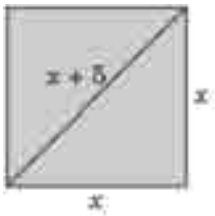
$\Rightarrow x^2 + x^2 + 6x + 9 = 225 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x^2 + 6x - 216 = 0 \Rightarrow x^2 + 3x - 108 = 0$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 432}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{441}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{21}}{2} = \begin{cases} \frac{18}{2} = \mathbf{9} \\ \frac{-24}{2} = -12 \end{cases}$$

Como la longitud de un lado no puede ser negativa, el cateto menor vale 9 cm y el mayor 12 cm.

14. Calcula el área de un cuadrado sabiendo que la diagonal mide 5 cm más que su lado.



Por el teorema de Pitágoras

$x^2 + x^2 = (x + 5)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x^2 = x^2 + 10x + 25 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 - 10x - 25 = 0$

$$x = \frac{-10 \pm \sqrt{100 + 100}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{200}}{2} = \frac{10 \pm 10\sqrt{2}}{2} =$$

$$= 5 \pm 5\sqrt{2} = \begin{cases} 5 + 5\sqrt{2} \\ 5 - 5\sqrt{2} \end{cases}$$

Como x es una longitud no puede ser negativa

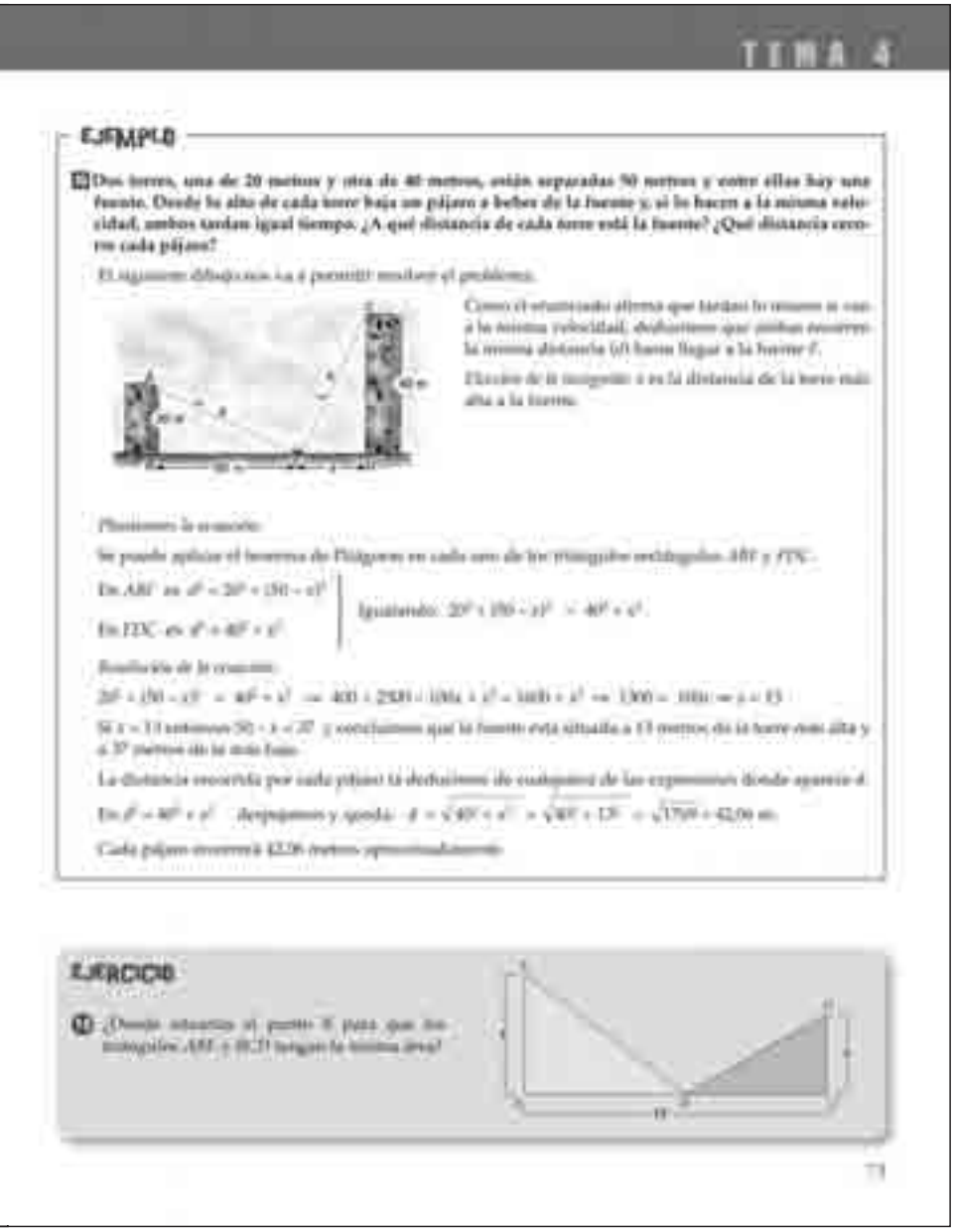
$x = 5 + 5\sqrt{2} = 5(1 + \sqrt{2})$.

El área del cuadrado es $x^2 = \left(5(1 + \sqrt{2})\right)^2 =$

$= 25(1 + \sqrt{2})^2 = 25(1 + 2\sqrt{2} + 2) = 25(3 + 2\sqrt{2}) = 75 + 50\sqrt{2} \simeq$

$\simeq 145,71 \text{ cm}^2$

▶ Pág. 73.



TEMA 4

EJEMPLO

Dos torres, una de 20 metros y otra de 40 metros, están separadas 50 metros y entre ellas hay una fuente. Desde lo alto de cada torre baja un pájaro a beber de la fuente y, si lo hacen a la misma velocidad, ambos tardan igual tiempo. ¿A qué distancia de cada torre está la fuente? ¿Qué distancia recorre cada pájaro?

El siguiente dibujo nos va a permitir resolver el problema.

Como el enunciado afirma que tardan lo mismo si van a la misma velocidad, deducimos que ambos recorren la misma distancia (d) hasta llegar a la fuente F.

Llamemos x a la distancia de la torre más alta a la fuente.

Planteamos la ecuación:

Se puede aplicar el teorema de Pitágoras en cada uno de los triángulos rectángulos ABF y FDC.

En ABF es $d^2 = 20^2 + (50 - x)^2$

En FDC es $d^2 = 40^2 + x^2$

Igualando: $20^2 + (50 - x)^2 = 40^2 + x^2$.

Resolución de la ecuación:

$20^2 + (50 - x)^2 = 40^2 + x^2 \Rightarrow 400 + 2500 - 100x + x^2 = 1600 + x^2 \Rightarrow 1300 = 100x \Rightarrow x = 13$

Si $x = 13$ entonces $50 - x = 37$ y concluimos que la fuente está situada a 13 metros de la torre más alta y a 37 metros de la más baja.

La distancia recorrida por cada pájaro la deducimos de cualquiera de las expresiones donde aparece d.

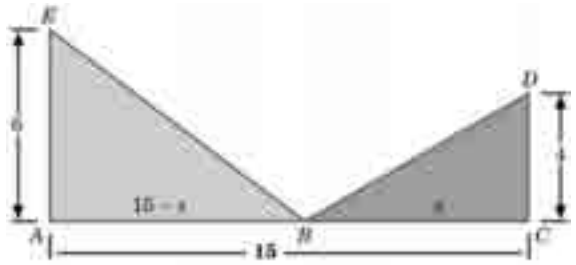
En $d^2 = 40^2 + x^2$ despejamos y queda: $d = \sqrt{40^2 + x^2} = \sqrt{40^2 + 13^2} = \sqrt{1769} = 42{,}06$ m.

Cada pájaro recorrerá 42,06 metros aproximadamente.

EJERCICIO

11 ¿Dónde situarías el punto B para que los triángulos ABE y BCD tengan la misma área?

15. ¿Dónde situarías el punto *B* para que los triángulos *ABE* y *BCD* tengan la misma área?

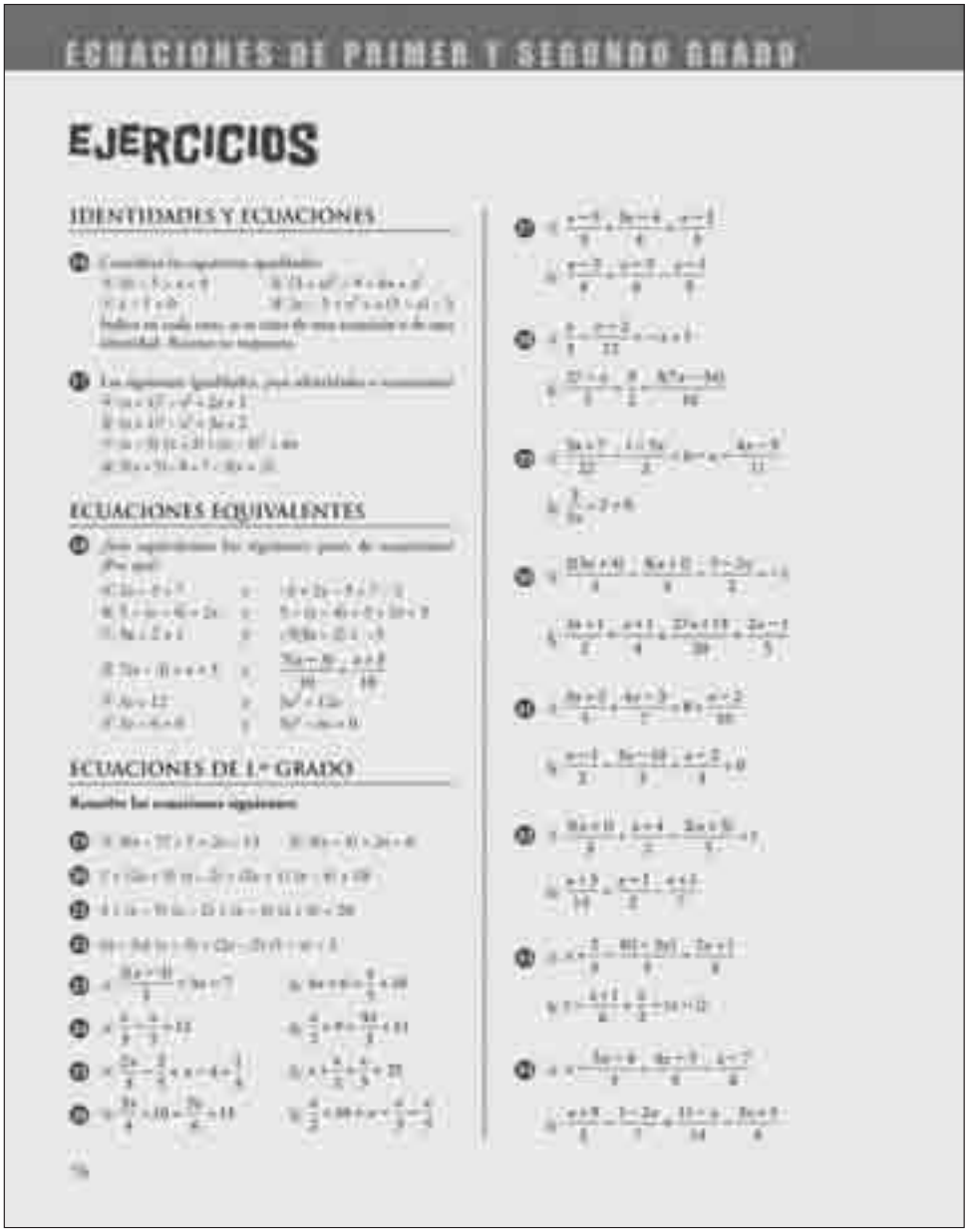


$$\frac{6 \cdot (15 - x)}{2} = \frac{4x}{2} \Rightarrow 3(15 - x) = 2x \Rightarrow 45 - 3x = 2x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5x = 45 \Rightarrow \boldsymbol{x = 9}$$

B estaría a 6 unidades de *A* y 9 de *C*.

▶ Pág. 76. Ejercicios



ECUACIONES DE PRIMER Y SEGUNDO GRADO

EJERCICIOS

IDENTIDADES Y ECUACIONES

ECUACIONES EQUIVALENTES

ECUACIONES DE 1.º GRADO

SOLUCIONARIO

16. Considera las siguientes igualdades:

a) $3x - 5 = x + 4$

b) $(3 + x)^2 = 9 + 6x + x^2$

c) $x - 1 = 0$

d) $3x - 5 + x^2 = x\,(3 - x) - 5$

Indica en cada caso, si se trata de una ecuación o de una identidad. Razona tu respuesta.

a) Una ecuación pues sólo se cumple para $x = \dfrac{9}{2}$

$2x = 9 \Rightarrow x = \dfrac{9}{2}$

b) Es una identidad pues es el desarrollo de $(x + 3)^2$ es $x^2 + 6x + 9$ es cierta para todo valor de x.

c) Es una ecuación de solución $x = 1$

d) Es una ecuación pues operando queda $3x + x^2 = 3x - x^2 \Rightarrow 2x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$. Solo se cumple para $x = 0$.

17. Las siguientes igualdades, ¿son identidades o ecuaciones?

a) $(x + 1)^2 - x^2 = 2x + 1$

Es una identidad pues desarrollando queda $0 = 0 \Rightarrow$ es cierta para todo valor de x.

b) $(x + 1)^2 - x^2 = 3x + 2$

Es una ecuación pues desarrollando queda $x^2 + 2x + 1 - x^2 = 3x + 2 \Rightarrow 2x + 1 = 3x + 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = -1$

Solo se cumple para $x = -1$ que es su solución

c) $(x - 3)\,(x + 3) = (x - 3)^2 + 6x$

Es una ecuación pues desarrollando se tiene $x^2 - 9 = x^2 - 6x + 9 - 6x \Rightarrow x^2 - 9 = x^2 + 9 \Rightarrow$
$\Rightarrow -9 = 9$

Esta ecuación no tiene solución

d) $3(x+5)-8=7-3(x+2)$

Es una ecuación pues desarrollando se tiene

$3x+15-8=7-3x-6 \Rightarrow 3x+7=1-3x \Rightarrow$

$\Rightarrow 6x=-6 \Rightarrow x=-1$

La igualdad sólo se verifica para $x=-1$ que es la solución de la ecuación.

18. ¿Son equivalentes los siguientes pares de ecuaciones? ¿Por qué?

a) $2x-3=7$ y $-2+2x-3=7-2$

Sí, porque a la 1.ª se le suma –2 a los dos miembros.

b) $5-(x-4)=2x$ y $5-(x-4)+3=2x+3$

Sí, porque a la 1.ª se le suma 3 a los dos miembros.

c) $3x-2=1$ y $-5(3x-2)=-5$

Sí, porque a la 1.ª se le multiplica por –5 a los dos miembros.

d) $7(x-3)=x+3$ y $\dfrac{7(x-3)}{10}=\dfrac{x+3}{10}$

Sí, porque a la 1.ª se le divide por 10 a los dos miembros.

e) $3x=12$ y $3x^2=12x$

f) $3x-6=0$ y $3x^2-6x=0$

e) y **f)** No, pues al multiplicar cada ecuación por x se añade una solución, la solución $x=0$.

Del 19 al 41 resuelve las ecuaciones siguientes:

19. a) $3(x-7)+1=2x-13 \Rightarrow 3x-21+1=2x-13 \Rightarrow$

$\Rightarrow x=7$

b) $3(x-3)=2x-6 \Rightarrow 3x-9=2x-6 \Rightarrow x=3$

20. $2+(2x+3)(x-2)=(2x+1)(x-4)+18 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2+2x^2-4x+3x-6=2x^2-8x+x-4+18 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x^2-x-4=2x^2-7x+14 \Rightarrow 6x=18 \Rightarrow$

$\Rightarrow x=3$

21. $3+(x-5)(x-2)=(x-3)(x+4)+20 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3+x^2-2x-5x+10=x^2+4x-3x-12+20 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2-7x+13=x^2+x+8 \Rightarrow -8x=-5 \Rightarrow x=\dfrac{5}{8}$

22. $(4-2x)(x-3)=(2x-2)(5-x)-3 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4x-12-2x^2+6x=10x-2x^2-10+2x-3 \Rightarrow$

$\Rightarrow -2x^2+10x-12=-2x^2+12x-13 \Rightarrow$

$\Rightarrow -2x=-1 \Rightarrow x=\dfrac{1}{2}$

23. a) $\dfrac{2(x-3)}{5}=3x-7 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2(x-3)=5(3x-7) \Rightarrow 2x-6=15x-35 \Rightarrow$

$\Rightarrow -13x=-29 \Rightarrow x=\dfrac{29}{13}$

b) $4x+6=\dfrac{x}{5}+10 \Rightarrow$

$\Rightarrow 20x+30=x+50 \Rightarrow 19x=20 \Rightarrow x=\dfrac{20}{19}$

24. a) $\dfrac{x}{3}-\dfrac{x}{5}=12 \Rightarrow 5x-3x=12\cdot 15 \Rightarrow 2x=180 \Rightarrow$

$\Rightarrow x=90$

b) $\dfrac{x}{2}+9=\dfrac{4x}{3}+11 \Rightarrow \dfrac{x+18}{2}=\dfrac{4x+33}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow 3x+54=8x+66 \Rightarrow -5x=12 \Rightarrow x=-\dfrac{12}{5}$

25. a) $\dfrac{2x}{3}-\dfrac{2}{5}=x-4+\dfrac{1}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{10x-6}{15}=\dfrac{3x-12+1}{3} \Rightarrow \dfrac{10x-6}{5}=3x-11 \Rightarrow$

$\Rightarrow 10x-6=15x-55 \Rightarrow -5x=-49 \Rightarrow x=\dfrac{49}{5}$

b) $x+\dfrac{x}{2}+\dfrac{x}{3}=25 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{6x+3x+2x}{6}=25 \Rightarrow 11x=150 \Rightarrow x=\dfrac{150}{11}$

26. a) $\dfrac{3x}{4}+10=\dfrac{5x}{6}+15 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{3x+40}{4}=\dfrac{5x+90}{6} \Rightarrow 3(3x+40)=2(5x+90) \Rightarrow$

$\Rightarrow 9x+120=10x+180 \Rightarrow x=-60$

b) $\dfrac{x}{2}+34=x-\dfrac{x}{3}-\dfrac{x}{5} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{x+68}{2}=\dfrac{15x-5x-3x}{15} \Rightarrow 15(x+68)=2\cdot 7x \Rightarrow$

$\Rightarrow 15x-1020=14x \Rightarrow x=1020$

27. a) $\dfrac{x-9}{3}+\dfrac{3x-4}{4}=\dfrac{x-3}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{4(x-9)+3(3x-4)}{12}=\dfrac{x-3}{3} \Rightarrow \dfrac{4x-36+9x-12}{4}=$

$=x-3 \Rightarrow 13x-48=4(x-3) \Rightarrow 13x-48=4x-12 \Rightarrow$

$\Rightarrow 9x=36 \Rightarrow x=4$

b) $\dfrac{x-3}{4}=\dfrac{x-5}{6}-\dfrac{x-1}{9} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{x-3}{4}=\dfrac{3(x-5)-2(x-1)}{18} \Rightarrow \dfrac{x-3}{4}=\dfrac{3x-15-2x+2}{18} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{x-3}{2}=\dfrac{x-13}{9} \Rightarrow 9x-27=2x-26 \Rightarrow$

$\Rightarrow 7x=1 \Rightarrow x=\dfrac{1}{7}$

28. a) $\dfrac{x}{3}-\dfrac{x-2}{12}=-x+5 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{4x-x+2}{12}=-x+5 \Rightarrow 3x+2=12(-x+5) \Rightarrow$

$\Rightarrow 3x+2=-12x+60 \Rightarrow 15x=58 \Rightarrow x=\dfrac{58}{15}$

b) $\frac{27-x}{5}=\frac{9}{2}-\frac{3(7x-54)}{10} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{27-x}{5}=\frac{45-21x+162}{10} \Rightarrow 27-x=\frac{207-21x}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 54-2x=207-21x \Rightarrow 19x=153 \Rightarrow x=\frac{153}{19}$

29. a) $\frac{3x+7}{22}-\frac{1-5x}{2}=6-x-\frac{4x-9}{11} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{3x+7-11(1-5x)}{22}=\frac{11(6-x)-(4x-9)}{11} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{3x+7-11+55x}{22}=\frac{66-11x-4x+9}{11} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{58x-4}{22}=\frac{-15x+75}{11} \Rightarrow$

$\Rightarrow 58x-4=2(-15x+75) \Rightarrow 58x-4=-30x+150 \Rightarrow$

$\Rightarrow 88x=154 \Rightarrow x=\frac{154}{88}=\frac{7}{4}$

b) $\frac{3}{5x}+2=0 \Rightarrow$

$3+10x=0 \Rightarrow x=-\frac{3}{10}$

30. a) $\frac{2(3x+4)}{3}-\frac{3(x+1)}{4}-\frac{5-2x}{2}=-1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{8(3x+4)-9(x+1)-6(5-2x)}{12}=-1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 24x+32-9x-9-30+12x=-12 \Rightarrow$

$\Rightarrow 27x=-5 \Rightarrow x=-\frac{5}{27}$

b) $\frac{3x+1}{2}-\frac{x+1}{4}=\frac{27x+19}{20}-\frac{2x-1}{5} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{2(3x+1)-(x+1)}{4}=\frac{27x+19-4(2x-1)}{20} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{6x+2-x-1}{4}=\frac{27x+19-8x+4}{20} \Rightarrow$

$\Rightarrow 5(5x+1)=19x+23 \Rightarrow 25x+5=19x+23 \Rightarrow$

$\Rightarrow 6x=18 \Rightarrow x=3$

31. a) $\frac{3x+2}{5}+\frac{4x-3}{7}=8+\frac{x-2}{35} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{7(3x+2)+5(4x-3)}{35}=\frac{35\cdot 8+x-2}{35} \Rightarrow$

$\Rightarrow 21x+14+20x-15=280+x-2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 40x=279 \Rightarrow x=\frac{279}{40}$

b) $\frac{x-1}{2}-\frac{3x-10}{5}+\frac{x-2}{3}=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 15(x-1)-6(3x-10)+10(x-2)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 15x-15-18x+60+10x-20=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 7x+25=0 \Rightarrow x=-\frac{25}{7}$

32. a) $\frac{5(x+1)}{3}+\frac{x+4}{2}-\frac{2(x+3)}{5}=1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{50(x+1)+15(x+4)-12(x+3)}{30}=1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 50x+50+15x-60-12x-36=30 \Rightarrow$

$\Rightarrow 53x-46=30 \Rightarrow 53x=76 \Rightarrow x=\frac{76}{53}$

b) $\frac{x+3}{14}=\frac{x-1}{2}-\frac{x+1}{7} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{x+3}{14}=\frac{7(x-1)-2(x+1)}{14} \Rightarrow x+3=7x-7-2x-2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x+3=5x-9 \Rightarrow 4x=12 \Rightarrow x=3$

33. a) $x+\frac{2}{3}-\frac{4(1-3x)}{5}=\frac{2x+1}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{15x+10-12(1-3x)}{15}=\frac{2x+1}{3} \Rightarrow \frac{15x+10-12+36x}{5}=$

$=2x+1 \Rightarrow 51x-2=10x+5 \Rightarrow 41x=7 \Rightarrow x=\frac{7}{41}$

b) $1-\frac{x+1}{6}=\frac{x}{2}-(x-1) \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{6-x-1}{6}=\frac{x-2(x-1)}{2} \Rightarrow \frac{5-x}{3}=x-2x+2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 5-x=3(-x+2) \Rightarrow 5-x=-3x+6 \Rightarrow 2x=1 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$

34. a) $x-\frac{5x-4}{3}=\frac{4x-5}{9}-\frac{x-7}{6} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{3x-(5x-4)}{3}=\frac{2(4x-5)-3(x-7)}{18} \Rightarrow$

$\Rightarrow -2x+4=\frac{5x+11}{6} \Rightarrow -12x+24=5x+11 \Rightarrow$

$\Rightarrow 17x=13 \Rightarrow x=\frac{13}{17}$

b) $\frac{x+9}{2}-\frac{1-2x}{7}=\frac{11-x}{14}-\frac{3x+5}{4} \Rightarrow$

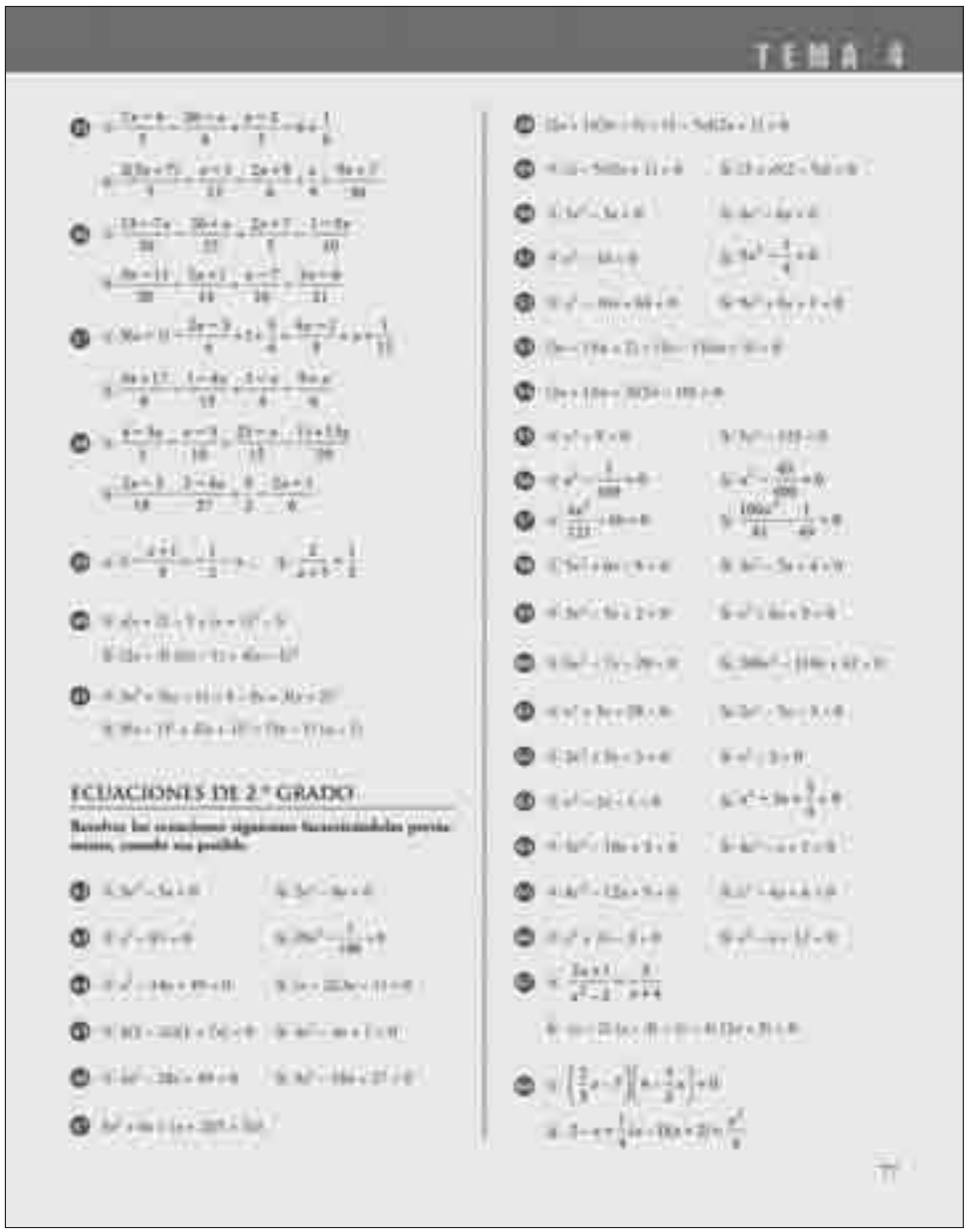
$\Rightarrow \frac{7(x+9)-2(1-2x)}{14}=\frac{2(11-x)-7(3x+5)}{28} \Rightarrow$

$\Rightarrow 7x+63-2+4x=\frac{22-2x-21x-35}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2(11x+61)=-23x-13 \Rightarrow$

$\Rightarrow 55x=-135 \Rightarrow x=-\frac{135}{55}=-\frac{27}{11}$

▶ Pág. 77. Ejercicios


TEMA 4

ECUACIONES DE 2.º GRADO

SOLUCIONARIO

35. a) $\dfrac{7x-4}{5}-\dfrac{20-x}{4}+\dfrac{x-2}{3}-6=\dfrac{1}{6} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{12(7x-4)-15(20-x)+20(x-2)-6\cdot 60}{60}=\frac{1}{6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 84x-48-300+15x+20x-40-360=10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 119x=758 \Rightarrow x=\frac{758}{119}$$

b) $\dfrac{2(3x+7)}{5}-\dfrac{x-1}{15}-\dfrac{2x+9}{6}+\dfrac{x}{9}=\dfrac{9x+7}{30} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{36(3x+7)-6(x-1)-15(2x+9)+10x}{90}=\frac{9x+7}{30} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 108x+252-6x+6-30x-135+10x=3(9x+7) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 82x+123=27x+21 \Rightarrow 55x=-102 \Rightarrow x=-\frac{102}{55}$$

36. a) $\dfrac{13-7x}{20}-\dfrac{26+x}{25}=\dfrac{2x+7}{5}-\dfrac{1-9x}{10} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{5(13-7x)-4(26+x)}{100}=\frac{2(2x+7)-(1-9x)}{10} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 65-35x-104-4x=10(4x+14-1+9x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -39x-39=130x+130 \Rightarrow 169x=-169 \Rightarrow x=-1$$

b) $\dfrac{3x-11}{20}-\dfrac{5x+1}{14}=\dfrac{x-7}{10}-\dfrac{5x-6}{21} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{7(3x-11)-10(5x+1)}{140}=\frac{21(x-7)-10(5x-6)}{210} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{21x-77-50x-10}{2}=\frac{21x-147-50x+60}{3} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \dfrac{-29x-87}{2} = \dfrac{-29x-87}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow 3(29x+87) = 2(29x+87) \Rightarrow 29x-87=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \dfrac{87}{29} = 3$

37. a) $\mathbf{3(x-1) - \dfrac{2x-3}{4} + 1 + \dfrac{5}{6} = \dfrac{4x-1}{3} + x + \dfrac{1}{12}} \Rightarrow$

$\dfrac{36(x-1)-3(2x-3)+12+10}{12} = \dfrac{4(4x-1)+12x+1}{12} \Rightarrow$

$\Rightarrow 36x-36-6x+9+22 = 16x-4+12x+1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 30x-5 = 28x-3 \Rightarrow \quad 2x=2 \Rightarrow \quad x=1$

b) $\mathbf{\dfrac{3x+17}{8} - \dfrac{1-4x}{13} = \dfrac{1-x}{4} - \dfrac{9+x}{6}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{13(3x+17)-8(1-4x)}{104} = \dfrac{3(1-x)-2(9+x)}{12} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{39x+221-8+32x}{26} = \dfrac{3-3x-18-2x}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow 3(71x+213) = 26(-5x-15) \Rightarrow$

$\Rightarrow 213x+639 = -130x-390 \Rightarrow 343x = -1029 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = -\dfrac{1029}{343} = -3$

38. a) $\mathbf{\dfrac{4-3x}{5} - \dfrac{x-3}{10} = \dfrac{23-x}{15} - \dfrac{11+13x}{20}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{2(4-3x)-(x-3)}{10} = \dfrac{4(23-x)-3(11+13x)}{60} \Rightarrow$

$\Rightarrow 8-6x-x+3 = \dfrac{92-4x-33-39x}{6} \Rightarrow$

$\Rightarrow 6(11-7x) = 59-53x \Rightarrow 66-42x = 59-43x \Rightarrow$

$\Rightarrow x = -7$

b) $\mathbf{\dfrac{2x-3}{18} - \dfrac{2-4x}{27} = \dfrac{5}{3} - \dfrac{2x-1}{6}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{3(2x-3)-2(2-4x)}{54} = \dfrac{10-(2x-1)}{6} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{6x-9-4+8x}{9} = 11-2x \Rightarrow 14x-13 = 99-18x \Rightarrow$

$\Rightarrow 32x = 112 \Rightarrow x = \dfrac{112}{32} = \dfrac{7}{2}$

39. a) $\mathbf{2 - \dfrac{x+1}{3} = -\dfrac{1}{2} - x} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{6-(x+1)}{3} = \dfrac{-1-2x}{2} \Rightarrow 2(5-x) = 3(-1-2x) \Rightarrow$

$\Rightarrow 10-2x = -3-6x \Rightarrow 4x = -13 \Rightarrow x = -\dfrac{13}{4}$

b) $\mathbf{\dfrac{2}{x+5} = \dfrac{1}{3}} \Rightarrow$

$\Rightarrow 6 = x+5 \Rightarrow x = 1$

40. a) $\mathbf{x(x+2) - 5 = (x+1)^2 - 3} \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2+2x-5 = x^2+2x+1-3 \Rightarrow -5 = -2$

No tiene solución.

b) $\mathbf{(2x-3)(2x-1) - 4(x-1)^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 4x^2-2x-6x+3 = 4(x^2-2x+1) \Rightarrow$

$\Rightarrow 4x^2-8x+3 = 4x^2-8x+4 \Rightarrow 3 = 4$

No tiene solución.

41. a) $\mathbf{x^2+3(x-1) = 4-9x+3(x+2)^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 3x^2+3x-3 = 4-9x+3(x^2+4x+4) \Rightarrow$

$\Rightarrow 3x^2+3x-3 = 4-9x+3x^2+12x+12 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3x^2+3x-3 = 3x^2+3x+16 \Rightarrow -3 = 16$

No tiene solución

b) $\mathbf{3(x-1)^2 + 2(x+1)^2 = (5x-1)(x-1)} \Rightarrow$

$\Rightarrow 3(x^2-2x+1)+2(x^2+2x+1) = 5x^2-5x-x+1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 5x^2-2x+5 = 5x^2-6x+1 \Rightarrow 4x = -4 \Rightarrow \mathbf{x = -1}$

Del 42 al 70. Resolver las ecuaciones siguientes factorizándolas previamente, cuando sea necesario.

42. a) $\mathbf{3x^2-5x=0} \Rightarrow$

$\Rightarrow x(3x-5)=0 \begin{cases} \mathbf{x=0} \\ 3x-5=0 \Rightarrow \mathbf{x=\dfrac{5}{3}} \end{cases}$

b) $\mathbf{2x^2-8x=0} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x(x-4)=0 \begin{cases} \mathbf{x=0} \\ \mathbf{x=4} \end{cases}$

43. a) $\mathbf{x^2-81=0} \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 = 81 \Rightarrow \mathbf{x = \sqrt{81} = 9}$ y $\mathbf{x = -\sqrt{81} = -9}$

b) $\mathbf{25x^2 - \dfrac{1}{100} = 0} \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 = \dfrac{1}{2500} \Rightarrow \mathbf{x = \sqrt{\dfrac{1}{2500}} = \dfrac{1}{50}}$ y

$\mathbf{x = -\sqrt{\dfrac{1}{2500}} = -\dfrac{1}{50}}$

44. a) $\mathbf{x^2-14x+49=0} \Rightarrow (x-7)^2 = 0 \Rightarrow x = 7$

o también $x = \dfrac{14 \pm \sqrt{14^2-4\cdot 49}}{2} = \dfrac{14 \pm \sqrt{0}}{2} = \mathbf{7}$

b) $\mathbf{(x-2)(3x-1)=0} \begin{cases} \mathbf{x=2} \\ 3x=1 \Rightarrow \mathbf{x=\dfrac{1}{3}} \end{cases}$

45. a) $\mathbf{4(3-2x)(1+7x)=0} \begin{cases} 3-2x=0 \rightarrow x=\dfrac{3}{2} \\ 1+7x=0 \rightarrow x=-\dfrac{1}{7} \end{cases}$

b) $\mathbf{4x^2-4x+1=0} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \dfrac{4 \pm \sqrt{42-4\cdot 4}}{2\cdot 4} = \dfrac{4 \pm \sqrt{0}}{8} = \dfrac{1}{2}$

46. a) $4x^2 - 28x + 49 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \frac{28 \pm \sqrt{28^2 - 4 \cdot 4 \cdot 49}}{2 \cdot 4} = x = \frac{28 \pm \sqrt{784 - 784}}{8} = \frac{28}{8} = \frac{7}{2}$$

b) $3x^2 - 18x + 27 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \frac{18 \pm \sqrt{18^2 - 4 \cdot 3 \cdot 27}}{2 \cdot 3} = x = \frac{18 \pm \sqrt{324 - 324}}{6} = \frac{18}{6} = 3$$

De otra forma :

$$3x^2 - 18x + 27 = 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 9 = 0 \Rightarrow$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 9}}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

47. $3x^2 + 6x = (x + 2)(5 + 3x) \Rightarrow$

$\Rightarrow 3x + 6x = 5x + 3x^2 + 10 + 6x \Rightarrow 5x + 10 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = -2$

48. $(2x + 1)(3x - 5) + (1 - 5x)(2x + 1) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 6x^2 - 10x + 3x - 5 + 2x + 1 - 10x^2 - 5x = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -4x^2 - 10x - 4 = 0 \Rightarrow 2x^2 + 5x + 2 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2}}{2 \cdot 2} = \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{-5 \pm 3}{4} = \begin{cases} -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2} \\ -\frac{2}{4} = -2 \end{cases}$$

49. a) $(x - 5)(2x + 1) = 0$ $\begin{cases} x = 5 \\ 2x + 1 = 0 \rightarrow x = -\frac{1}{2} \end{cases}$

b) $(3 + x)(2 - 5x) = 0$ $\begin{cases} x = -3 \\ 2 - 5x = 0 \rightarrow x = \frac{2}{5} \end{cases}$

50. a) $5x^2 - 3x = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x(5x - 3) = 0$ $\begin{cases} x = 0 \\ 5x - 3 = 0 \rightarrow x = \frac{3}{5} \end{cases}$

b) $4x^2 - 6x = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x(2x - 3) = 0$ $\begin{cases} x = 0 \\ 2x - 3 = 0 \rightarrow x = \frac{3}{2} \end{cases}$

51. a) $x^2 - 16 = 0 \Rightarrow x^2 = 16$ $\begin{cases} x = \sqrt{16} = 4 \\ x = -\sqrt{16} = -4 \end{cases}$

b) $9x^2 - \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{36}$ $\begin{cases} x = \sqrt{\frac{1}{36}} = \frac{1}{6} \\ x = -\sqrt{\frac{1}{36}} = -\frac{1}{6} \end{cases}$

52. a) $x^2 - 16x + 64 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \frac{16 \pm \sqrt{16^2 - 4 \cdot 64}}{2} = \frac{16 \pm \sqrt{256 - 256}}{2} = \frac{16}{2} = 8$$

b) $9x^2 + 6x + 1 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 9}}{2 \cdot 9} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 36}}{18} = \frac{-6}{18} = -\frac{1}{3}$$

53. $(3x - 1)(x + 2) + (3x - 1)(4x + 3) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (3x - 1)(x + 2 + 4x + 3) = 0 \Rightarrow (3x - 1)(5x + 5) = 0$

$\Rightarrow$ $\begin{cases} 3x - 1 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{3} \\ 5x + 5 = 0 \rightarrow x = -1 \end{cases}$

54. $(2x + 1)(x + 3)(5x - 10) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\begin{cases} 2x + 1 = 0 \rightarrow x = -\frac{1}{2} \\ x + 3 = 0 \rightarrow x = -3 \\ 5x - 10 = \rightarrow x = 2 \end{cases}$

55. a) $x^2 - 9 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 = 9$ $\begin{cases} x = \sqrt{9} = 3 \\ x = -\sqrt{9} = -3 \end{cases}$

b) $5x^2 - 125 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 - 25 = 0 \Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\begin{cases} x = \sqrt{25} = 5 \\ x = -\sqrt{25} = -5 \end{cases}$

56. a) $x^2 - \frac{1}{169} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 = \frac{1}{169}$ $\begin{cases} x = \sqrt{\frac{1}{169}} = \frac{1}{13} \\ x = -\sqrt{\frac{1}{169}} = -\frac{1}{13} \end{cases}$

b) $x^2 - \frac{49}{400} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 = \frac{49}{400}$ $\begin{cases} x = \sqrt{\frac{49}{400}} = \frac{7}{20} \\ x = -\sqrt{\frac{49}{400}} = -\frac{7}{20} \end{cases}$

57. a) $\frac{4x^2}{121} - 16 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{4x^2}{121} = 16 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{16 \cdot 121}{4} = 4 \cdot 121 \quad \begin{cases} x = \sqrt{4 \cdot 121} = 2 \cdot 11 = 22 \\ x = \sqrt{4 \cdot 121} = -2 \cdot 11 = -22 \end{cases}$$

b) $\frac{100x^2}{81} - \frac{1}{49} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{100x^2}{81} = \frac{1}{49} \Rightarrow x^2 = \frac{81}{100 \cdot 49} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{\frac{81}{100 \cdot 49}} = \frac{9}{10 \cdot 7} = \frac{9}{70} \\ x = -\sqrt{\frac{81}{100 \cdot 49}} = -\frac{9}{10 \cdot 7} = -\frac{9}{70} \end{cases}$$

58. a) $5x^2 + 6x - 8 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-8)}}{2 \cdot 5} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 160}}{10} =$$

$$= \frac{-6 \pm \sqrt{196}}{10} = \frac{-6 \pm 14}{10} = \begin{cases} \frac{8}{10} = \mathbf{\frac{4}{5}} \\ -\frac{20}{10} = \mathbf{-2} \end{cases}$$

b) $3x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 3 \cdot 4}}{2 \cdot 3} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 48}}{6} = \frac{5 \pm \sqrt{-23}}{6}$$

No tiene solución

59. a) $3x^2 - 5x + 2 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2}}{2 \cdot 3} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{6} = \frac{5 \pm 1}{6} = \begin{cases} \frac{6}{6} = \mathbf{1} \\ \frac{4}{6} = \mathbf{\frac{2}{3}} \end{cases}$$

b) $x^2 + 6x + 9 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 9}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{0}}{2} = \mathbf{-3}$$

60. a) $6x^2 - 7x - 20 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-20)}}{2 \cdot 6} = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 480}}{12} =$$

$$= \frac{7 \pm \sqrt{529}}{12} = \frac{7 \pm \sqrt{23}}{12} = \begin{cases} \frac{30}{12} = \mathbf{\frac{5}{2}} \\ -\frac{16}{12} = \mathbf{-\frac{4}{3}} \end{cases}$$

b) $200x^2 - 310x + 42 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \frac{310 \pm \sqrt{310^2 - 4 \cdot 200 \cdot 42}}{2 \cdot 200} =$$

$$= \frac{310 \pm \sqrt{96100 - 33600}}{400} = \frac{310 \pm \sqrt{62500}}{400} = \frac{310 \pm 250}{400} =$$

$$= \begin{cases} \frac{310 + 250}{400} = \frac{560}{400} = \mathbf{\frac{7}{5}} \\ \frac{310 - 250}{400} = \frac{60}{400} = \mathbf{\frac{3}{20}} \end{cases}$$

61. a) $x^2 + 3x - 28 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(-28)}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 112}}{2} = \frac{-3 \pm 11}{2} =$$

$$= \begin{cases} \frac{8}{2} = \mathbf{4} \\ -\frac{14}{2} = \mathbf{-7} \end{cases}$$

b) $2x^2 - 5x - 3 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3)}}{2 \cdot 2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 24}}{4} =$$

$$= \frac{5 \pm 7}{4} = \begin{cases} \frac{12}{4} = \mathbf{3} \\ -\frac{2}{4} = \mathbf{-\frac{1}{2}} \end{cases}$$

62. a) $2x^2 + 5x - 3 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 2(-3)}}{2 \cdot 2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 24}}{4} =$$

$$= \frac{-5 \pm 7}{4} = \begin{cases} \frac{2}{4} = \mathbf{\frac{1}{2}} \\ -\frac{12}{4} = \mathbf{-3} \end{cases}$$

b) $x^2 - 3 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x^2 = 3 \begin{cases} x = \sqrt{3} \\ x = -\sqrt{3} \end{cases}$$

63. a) $x^2 - 2x - 1 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot (-1)}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} =$$

$$= 1 \pm \sqrt{2} = \begin{cases} \mathbf{1 + \sqrt{2}} \\ \mathbf{1 - \sqrt{2}} \end{cases}$$

b) $x^2 - 3x + \frac{5}{4} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot \frac{5}{4}}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{3 \pm 2}{2} = \begin{cases} \mathbf{\frac{5}{2}} \\ \mathbf{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

64. a) $3x^2 - 10x + 3 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \frac{10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3}}{2 \cdot 3} = \frac{10 \pm \sqrt{64}}{6} = \frac{10 \pm 8}{6} = \begin{cases} \frac{18}{6} = \mathbf{3} \\ \frac{2}{6} = \mathbf{\frac{1}{3}} \end{cases}$$

b) $4x^2 - x + 1 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1}}{2 \cdot 4} = \frac{1 \pm \sqrt{-15}}{8}$$ No tiene solución

65. a) $4x^2 - 12x + 9 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \frac{12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9}}{2 \cdot 4} = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 144}}{8} = \frac{12}{8} = \mathbf{\frac{3}{2}}$$

b) $x^2 - 4x + 6 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 6}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-8}}{2}$$ No tiene solución

66. a) $x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot (-3)}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} =$$

$$= -1 \pm 2 = \begin{cases} \mathbf{1} \\ \mathbf{-3} \end{cases}$$

b) $x^2 - x - 12 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot (-12)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{1 \pm 7}{2} = \begin{cases} \frac{8}{2} = \mathbf{4} \\ -\frac{6}{2} = \mathbf{-3} \end{cases}$$

67. a) $\dfrac{2x+1}{x^2-2} = \dfrac{3}{x+4} \Rightarrow$

$$\Rightarrow (2x+1)(x+4) = 3(x^2-2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 8x + x + 4 = 3x^2 - 6 \Rightarrow 2x^2 + 9x + 4 = 3x^2 - 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 9x - 10 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{9 \pm \sqrt{9^2 - 4 \cdot (-10)}}{2} = \frac{9 \pm \sqrt{121}}{2} = \frac{9 \pm 11}{2} = \begin{cases} \frac{20}{2} = \\ -\frac{2}{2} \end{cases}$$

b) $(x-2)(x-4) - (x-4)(2x+3) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow (x-4)(x-2-(2x+3)) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-4)(x-2-2x-3) = 0 \Rightarrow (x-4)(x-5) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - 4 = 0 \rightarrow \mathbf{x = 4} \\ -x - 5 = 0 \rightarrow \mathbf{x = -5} \end{cases}$$

68. a) $\left(\dfrac{2}{3}x - 7\right)\left(4 - \dfrac{5}{2}x\right) = 0 \Rightarrow$

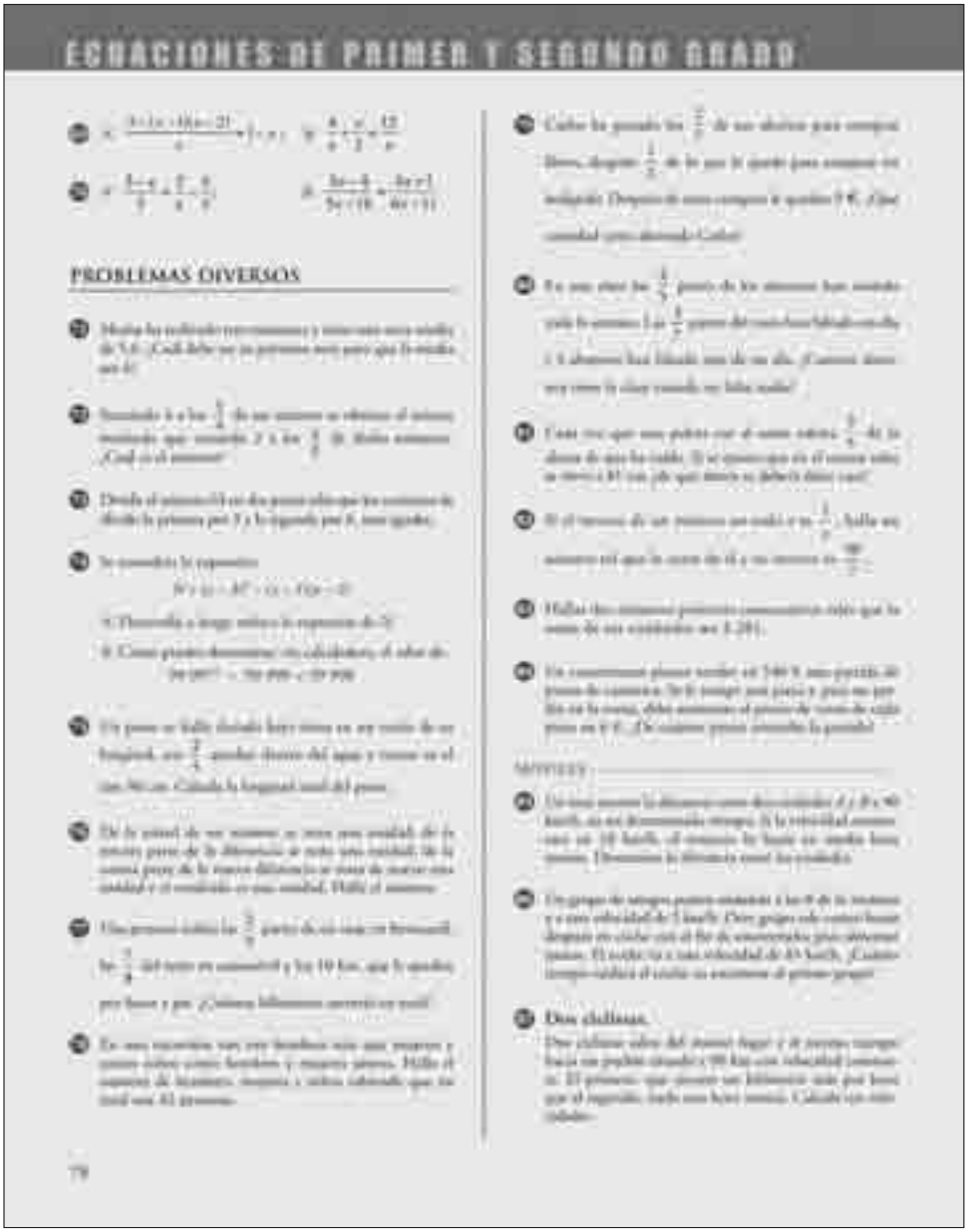
$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{3}x - 7 = 0 \rightarrow \frac{2}{3}x = 7 \rightarrow \mathbf{x = \frac{21}{2}} \\ 4 - \frac{5}{2}x = 0 \rightarrow \frac{5}{2}x = 4 \rightarrow \mathbf{x = \frac{8}{5}} \end{cases}$$

b) $2 - x + \dfrac{1}{4}(x-1)(x+2) = \dfrac{x^2}{4} \Rightarrow$

$$\Rightarrow 4(2-x) + (x-1)(x+2) = x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8 - 4x + x^2 + 2x - x - 2 = x^2 \Rightarrow -3x + 6 = 0 \Rightarrow \mathbf{x = 2}$$

▶ Pág. 78. Ejercicios



ECUACIONES DE PRIMER Y SEGUNDO GRADO

PROBLEMAS DIVERSOS

SOLUCIONARIO

69. a) $\dfrac{3-(x-1)(x-2)}{x}=1-x \Rightarrow$

$\Rightarrow 3-(x-1)(x-2)=x(1-x) \Rightarrow$

$\Rightarrow 3-(x^2-2x-x+2)=x-x^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3-x^2+3x-2=x-x^2 \Rightarrow 2x+1=0 \Rightarrow \boldsymbol{x=-\dfrac{1}{2}}$

b) $\dfrac{4}{x}+\dfrac{x}{2}=\dfrac{12}{x} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{8+x^2}{2x}=\dfrac{12}{x} \Rightarrow 8+x^2=24 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2=16 \begin{cases} \boldsymbol{x=4} \\ \boldsymbol{x=-4} \end{cases}$

70. a) $\dfrac{3-x}{5}=\dfrac{2}{x}-\dfrac{4}{5} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{3-x}{5}=\dfrac{10-4x}{5x} \Rightarrow x(3-x)=10-4x \Rightarrow$

$\Rightarrow 3x-x^2=10-4x \Rightarrow x^2-7x+10=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x=\dfrac{7\pm\sqrt{7^2-4\cdot 10}}{2}=\dfrac{7\pm\sqrt{9}}{2}=\dfrac{7\pm 3}{2}= \begin{cases} \dfrac{17}{2}=\boldsymbol{6} \\ -\dfrac{10}{2}=\boldsymbol{-5} \end{cases}$

b) $\dfrac{3x-4}{5x-16}=\dfrac{4x+1}{6x-11} \Rightarrow$

$\Rightarrow (3x-4)(6x-11)=(5x-16)(4x+1) \Rightarrow$

$\Rightarrow 18x^2-33x-24x+44=20x^2+5x-64x-16 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x^2-2x-60=0 \Rightarrow x^2-x-30=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x=\dfrac{1\pm\sqrt{1^2-4(-30)}}{2}=\dfrac{1\pm\sqrt{121}}{2}=$

$=\dfrac{1\pm 11}{2}=\begin{cases}\dfrac{12}{2}=\mathbf{6}\\ -\dfrac{10}{2}=\mathbf{-5}\end{cases}$

71. Marisa ha realizado tres exámenes y tiene una nota media de 5,6. ¿Cuál debe ser su próxima nota para que la media sea 6?

Si su próxima nota es x se tiene:

$3 \cdot 5{,}6 + x = 4 \cdot 6 \Rightarrow x = 24 - 16{,}8 = 7{,}2$

La próxima nota debe de ser 7,2.

72. Sumando 4 a los $\dfrac{3}{4}$ de un número se obtiene el mismo resultado que restando 2 a los $\dfrac{4}{5}$ de dicho número. ¿Cuál es el número?

Sea x el número, entonces

$\dfrac{3}{4}x+4=\dfrac{4}{5}x-2 \Rightarrow \dfrac{3x+16}{4}=\dfrac{4x-10}{5} \Rightarrow$

$\Rightarrow 15x+80=16x-40 \Rightarrow \boldsymbol{x=120}$

73. Dividir el número 63 en dos partes tales que los cocientes de dividir la primera por 3 y la segunda por 6, sean iguales.

Si una parte es x, la otra es $63 - x$ y se tiene:

$\dfrac{x}{3}=\dfrac{63-x}{6} \Rightarrow 2x=63-x \Rightarrow 3x=63 \Rightarrow x=21$

Las partes son: 21 y 42.

74. Se considera la expresión:

$$N = (x-3)^2 - (x-1)(x-2)$$

a) Desarrolla y luego reduce la expresión de N.

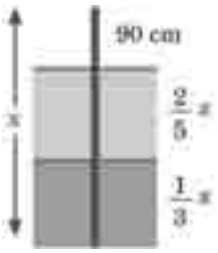
$N=(x-3)^2-(x-1)(x-2)=x^2-6x+9-(x^2-2x-x+2)=$

$=x^2-6x+9-x^2+3x-2=-3x+7$

b) ¿Cómo puedes determinar, sin calculadora, el valor de: $99997^2 - 99999 \times 99998$?

Corresponde al valor de N para $x = 100000$, luego su valor es $-3 \cdot 100000 + 7 = -299993$.

75. Un poste se halla clavado bajo tierra en un tercio de su longitud, sus $\dfrac{2}{5}$ quedan dentro del agua y restan en el aire 90 cm. Calcula la longitud total del poste.



Si x es la longitud del poste, se tiene:

$\dfrac{1}{3}x+\dfrac{2}{5}x+90=x \Rightarrow 5x+6x+1350=15x \Rightarrow$

$\Rightarrow 4x=1350 \Rightarrow x=337{,}5$

La longitud del poste es de 337,5 cm.

76. De la mitad de un número se resta una unidad; de la tercera parte de la diferencia se resta una unidad; de la cuarta parte de la nueva diferencia se resta de nuevo una unidad y el resultado es una unidad. Halla el número.

Sea x el número, entonces

$\dfrac{x}{2}-1=\dfrac{x-2}{2}$

$\dfrac{1}{3}\left(x-\dfrac{x-2}{2}\right)-1=\dfrac{x+2}{6}-1=\dfrac{x-4}{6}$

$\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{x-2}{2}-\dfrac{x-4}{6}\right)-1=1 \Rightarrow \dfrac{x-2}{2}-\dfrac{x-4}{6}=8 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3x-6-x+4=48 \Rightarrow 2x=50 \Rightarrow \boldsymbol{x=25}$

77. Una persona realiza las $\dfrac{3}{5}$ partes de un viaje en ferrocarril, las $\dfrac{7}{8}$ del resto en automóvil y los 10 km. que le quedan por hacer a pie. ¿Cuántos kilómetros recorrió en total?

Si x son los kilómetros que recorrió, se tiene:

$\dfrac{3}{5}x+\dfrac{7}{8}\left(x-\dfrac{3}{5}x\right)+10=x \Rightarrow \dfrac{3}{5}x+\dfrac{7x}{20}+10=x \Rightarrow$

$\Rightarrow 12x+7x+200=20x \Rightarrow \boldsymbol{x=200}$

Ha recorrido 200 kilómetros.

78. En una excursión van tres hombres más que mujeres y tantos niños como hombres y mujeres juntos. Halla el número de hombres, mujeres y niños sabiendo que en total son 42 personas.

Si x es el número de mujeres, se tiene

$(x + 3) + x + (2x + 3) = 42 \Rightarrow 4x = 36 \Rightarrow x = 9$

En la excursión van 12 hombres, 9 mujeres y 21 niños.

79. Carlos ha gastado los $\dfrac{2}{7}$ de sus ahorros para comprar libros, después $\dfrac{1}{3}$ de lo que le queda para comprar un bolígrafo. Después de estas compras le quedan 9 €. ¿Qué cantidad tenía ahorrada Carlos?

Si x es la cantidad que tiene ahorrada, se tiene

$$\frac{2x}{7}+\frac{1}{3}\left(x-\frac{2x}{7}\right)+9=x \Rightarrow \frac{2x}{7}+\frac{5x}{21}+9=x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6x+5x+189=21x \Rightarrow 10x=189 \Rightarrow x=18,9$$

Carlos tenía ahorrado 18,90 euros.

80. En una clase las $\frac{4}{5}$ de los alumnos han asistido toda la semana. Las $\frac{3}{7}$ partes del resto han faltado un día y 4 alumnos han faltado más de un día. ¿Cuántos alumnos tiene la clase cuando no falta nadie?

Si x es el número de alumnos que tiene la clase, se tiene:

$$\frac{4x}{5}+\frac{3}{7}\left(x-\frac{4x}{5}\right)+4=x \Rightarrow \frac{4x}{5}+\frac{3x}{35}+4=x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 28x+3x+140=35x \Rightarrow 4x=140 \Rightarrow x=35$$

La clase tiene 35 alumnos.

81. Cada vez que una pelota cae al suelo rebota $\frac{3}{5}$ de la altura de que ha caído. Si se quiere que en el cuarto salto se eleve a 81 cm ¿de qué altura se deberá caer?

Si se deja caer desde una altura de x cm, el primer rebote alcanza $\frac{3x}{5}$ cm, el segundo $\frac{3^2x}{5^2}$, el tercero $\frac{3^3x}{5^3}$ y el cuarto $\frac{3^4x}{5^4}$, entonces

$$\frac{3^4x}{5^4}=81 \Rightarrow x=5^4=625$$

Se deja caer de una altura de 625 cm.

82. Si el inverso de un número no nulo x es $\frac{1}{x}$, halla un número tal que la suma de él y su inverso es $\frac{50}{7}$.

$$x+\frac{1}{x}=\frac{50}{7} \Rightarrow 7(x^2+1)=50x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7x^2-50x+7=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{50\pm\sqrt{50^2-4\cdot7\cdot7}}{2\cdot7}=\frac{50\pm\sqrt{2304}}{14}=\frac{50\pm48}{14}=$$

$$=\begin{cases}\frac{98}{4}=7\\ \frac{2}{14}=\frac{1}{7}\end{cases}$$

El número puede ser el 7 o el $\frac{1}{7}$

83. Hallar dos números positivos consecutivos tales que la suma de sus cuadrados sea 3 281.

Si los números son x y $x+1$ se tiene:

$$x^2+(x+1)^2=3281 \Rightarrow 2x^2+2x+1=3281 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2+x-1640=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1-4(-1640)}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{6561}}{2}=\frac{-1\pm8}{2}$$

$$=\begin{cases}\frac{80}{2}=40\\ -\frac{82}{2}=-41\end{cases}$$

Los números son el 40 y el 41.

84. Un comerciante piensa vender en 540 € una partida de piezas de cerámica. Se le rompe una pieza y, para no perder en la venta, debe aumentar el precio de venta de cada pieza en 6 €. ¿De cuántas piezas constaba la partida?

Si x es el número de piezas de la partida e y el precio de cada una de ellas, se tiene:

$$\left.\begin{array}{l}xy=540\\(x-1)(y+6)=540\end{array}\right\}\Rightarrow xy+6x-y-6=540 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=6x-6$$

Sustituyendo en la primera ecuación

$$x(6x-6)=540 \Rightarrow x(x-1)=90 \Rightarrow x^2-x-90=0 \Rightarrow$$

$$x=\frac{1\pm\sqrt{1-4(-90)}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{361}}{2}=\frac{1\pm19}{2}=\begin{cases}\frac{20}{2}=10\\ -\frac{18}{2}=-9\end{cases}$$

Como x no puede ser negativo, el n.º de piezas era de 10.

85. Un tren recorre la distancia entre dos ciudades *A* y *B* a 90 km/h, en un determinado tiempo. Si la velocidad aumentara en 10 km/h, el trayecto lo haría en media hora menos. Determina la distancia entre las ciudades.

Si t es el tiempo que tarda en hacer el trayecto a 90 km/h se tiene:

$e = 90\ t = 100(t-0,5) \Rightarrow 90t = 100t - 50 \Rightarrow$

$\Rightarrow 10t = 50 \Rightarrow t = 5$

La distancia entre las dos ciudades es $90 \cdot 5 = 450$ km.

86. Un grupo de amigos parten andando a las 8 de la mañana y a una velocidad de 5 km/h. Otro grupo sale cuatro horas después en coche con el fin de encontrarlos para almorzar juntos. El coche va a una velocidad de 85 km/h. ¿Cuánto tiempo tardará el coche en encontrar al primer grupo?

Si t es el tiempo, en horas, que tardará el coche, se tiene $5(t+4)=85t \Rightarrow 80t=20 \Rightarrow t=\frac{1}{4}$

El coche tardará $\frac{1}{4}$ de hora, es decir, 15 minutos.

87. Dos ciclistas salen del mismo lugar y al mismo tiempo hacia un pueblo situado a 90 km con velocidad constante. El primero, que recorre un kilómetro más por hora que el segundo, tarda una hora menos. Calcula sus velocidades.

Si el primer ciclista recorre el trayecto a una velocidad de x km/h en un tiempo de t horas, se tiene

primer ciclista $xt = 90$

segundo ciclista $(x - 1)(t + 1) = 90 \Rightarrow$

$\Rightarrow xt + x - t - 1 = 90 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = t + 1$

sustituyendo en la primera ecuación

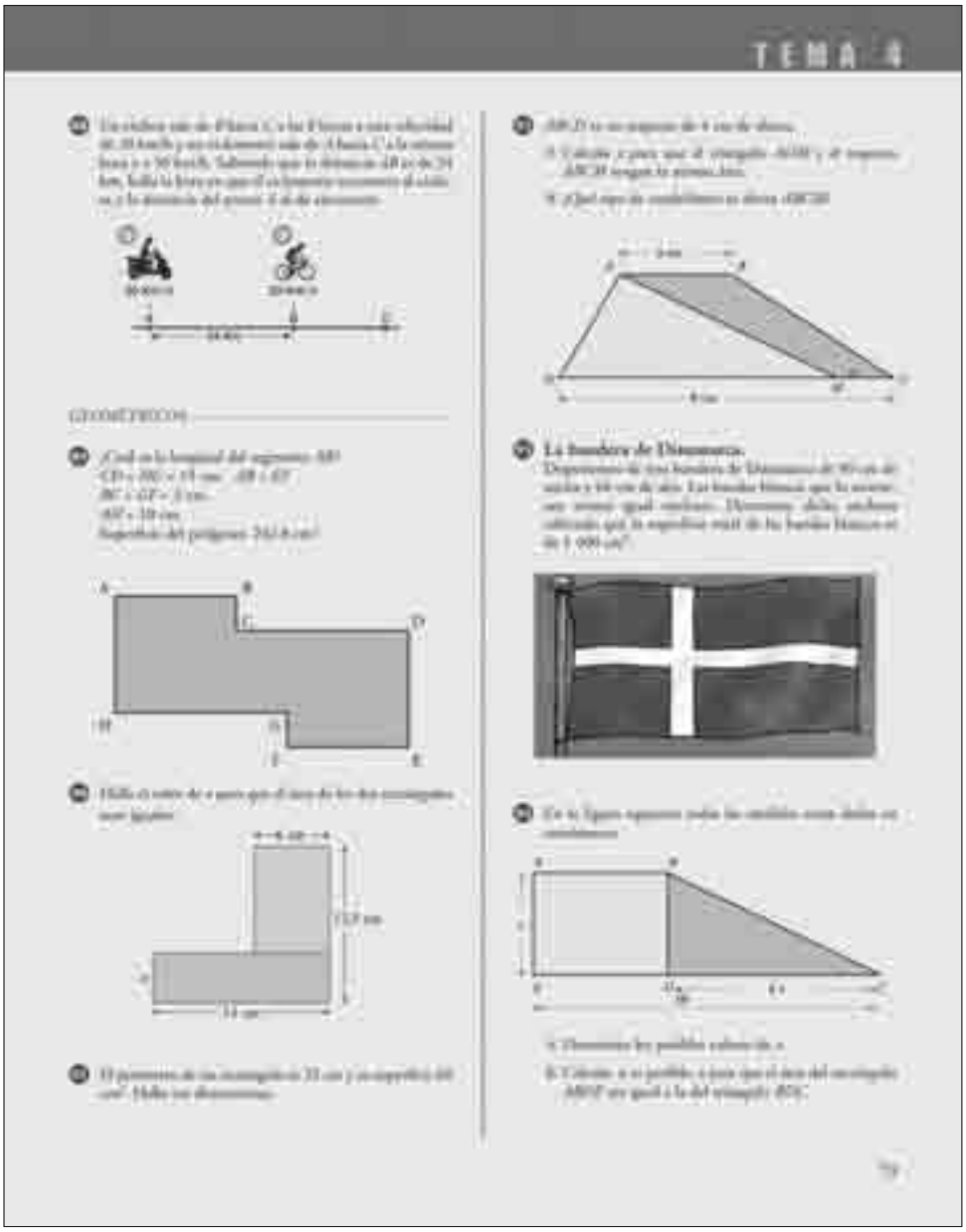
$(t + 1)\, t = 90 \Rightarrow t^2 + t - 90 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow t = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(-90)}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{361}}{2} = \frac{-1 \pm 19}{2} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{18}{2} = 9 \\ -\dfrac{20}{2} = -10 \end{cases}$$

Como t no puede ser negativo, la velocidad del primer ciclista es $x = \dfrac{90}{9} = 10$ km/h y la del segundo 9 km/h.

▶ Pág. 79. Ejercicios



SOLUCIONARIO

88. Un ciclista sale de *B* hacia *C* a las 8 horas a una velocidad de 20 km/h y un ciclomotor sale de *A* hacia *C* a la misma hora y a 50 km/h. Sabiendo que la distancia *AB* es de 24 km, halla la hora en que el ciclomotor encuentra al ciclista y la distancia del punto *A* al de encuentro.



Si se encuentran después de t horas y a una distancia de B de x km, se tiene

para el ciclista $x = 20t$

para el ciclomotor $x + 24 = 50t \Rightarrow 20t + 24 = 50t \Rightarrow$

$\Rightarrow 30t = 24 \Rightarrow t = \dfrac{24}{30} = \dfrac{4}{5}$

y $x = 20t = 20 \cdot \dfrac{4}{5} = 16$

Como $\dfrac{4}{5}\text{h} = 48\ \text{min}$, se encuentran a las 8h 48 min y a una distancia de A de 24 + 16 = **40 km**.

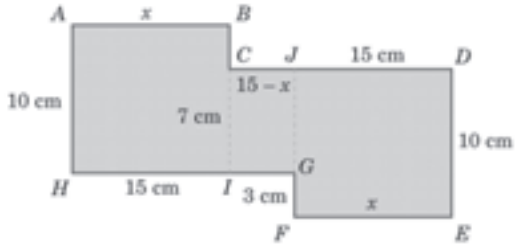
89. ¿Cuál es la longitud del segmento *AB*?

CD* = *HG* = 15 cm. *AB* = *EF

***BC* = *GF* = 3 cm.**

***AH* = 10 cm.**

Superficie del polígono: 242,8 cm².



Si llamamos x a la longitud del segmento AB, de la figura se deduce que $CI = GJ = 7$ cm; $DE = 10$ cm; $CJ = IG = 15 - x$ cm entonces:

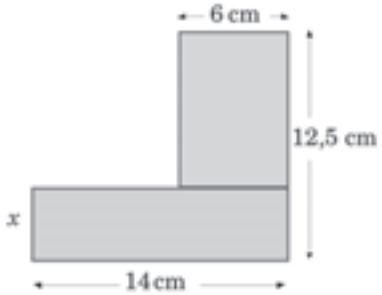
$$\left.\begin{array}{l}\text{área del } ABIH = \text{área del } JDEF = 10x\\ \text{área del } CJGI = 7(15-x)\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 20x + 7(15-x) = 242{,}8 \Rightarrow 20x + 105 - 7x =$$

$$= 242{,}8 \Rightarrow 13x = 137{,}8 \Rightarrow x = 10{,}6$$

La longitud del lado AB es 10,6 cm.

90. Halla el valor de *x* para que el área de los dos rectángulos sean iguales:



$$14x = 6(12{,}5 - x) \Rightarrow 14x = 75 - 6x \Rightarrow 20x = 75 \Rightarrow$$

$$x = \frac{75}{20} = \frac{15}{4} = \mathbf{3{,}75}$$

91. El perímetro de un rectángulo es 32 cm y su superficie 60 cm². Halla sus dimensiones.



$$\left.\begin{array}{r}2x + 2y = 32\\ xy = 60\end{array}\right\} \rightarrow x + y = 16 \rightarrow y = 16 - x$$

$$x(16-x) = 60 \rightarrow 16x - x^2 = 60 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 16x + 60 = 0 \Rightarrow x = \frac{16 \pm \sqrt{16^2 - 4 \cdot 60}}{2} =$$

$$= \frac{16 \pm \sqrt{256 - 240}}{2} = \frac{16 \pm 4}{2} \quad \begin{array}{l}10\\6\end{array}$$

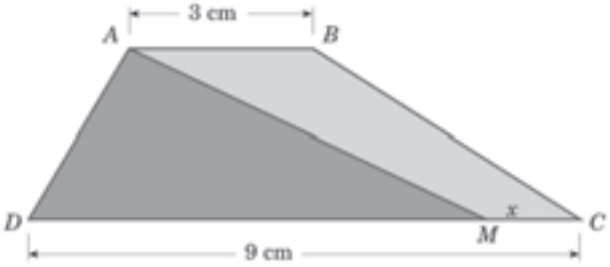
Si $x = 10 \Rightarrow y = 6$ ó si $x = 6 \Rightarrow y = 10$

En cualquier caso las dimensiones del rectángulo son 6 y 10 cm.

92. *ABCD* es un trapecio de 4 cm de altura.

a) Calcula *x* para que el triángulo *ADM* y el trapecio *ABCM* tengan la misma área.

b) ¿Qué tipo de cuadrilátero es ahora *ABCM*?



a) $\dfrac{(9-x)\cdot 4}{2} = \dfrac{3+x}{2} \cdot 4 \Rightarrow 9 - x = 3 + x \Rightarrow x = 3$

b) Un romboide.

93. Disponemos de una bandera de Dinamarca de 90 cm de ancha y 60 cm de alta. Las bandas blancas que la atraviesan tienen igual anchura. Determina dicha anchura sabiendo que la superficie total de las bandas blancas es de 1 400 cm².

La horizontal mide $90x$ y la vertical $60x$.

Como la zona donde se cruzan mide x^2 y se ha contado dos veces, la ecuación es:

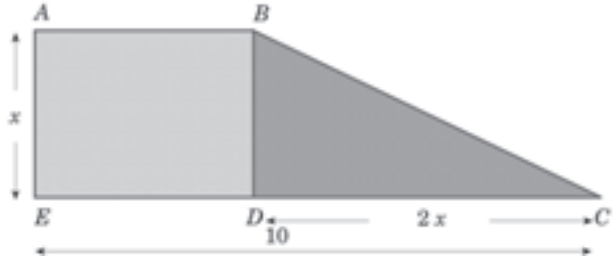
$90x + 60x - x^2 = 1400 \Rightarrow x^2 - 150x + 1400 = 0$

de soluciones $x = 140$ y $x = 10$ de las cuales la primera no tiene sentido en este caso. Por tanto la anchura de la banda blanca es de 10 cm.

94. En la figura siguiente todas las medidas están dadas en centímetros

a) Determina los posibles valores de *x*.

b) Calcula, si es posible, *x* para que el área del rectángulo *ABDE* sea igual a la del triángulo *BDC*.



a) $0 < x < 5$

b) $x(10 - 2x) = \dfrac{x \cdot 2x}{2} \Rightarrow 10x - 2x^2 = 2x^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 3x^2 - 10x = 0 \Rightarrow x(3x - 10) = 0 \Rightarrow \begin{array}{l}x = 0\\ x = \dfrac{10}{3}\end{array}$$

El valor de x es $\dfrac{10}{3} \simeq \mathbf{3{,}33}$ cm.

▶ Pág. 80. Ejercicios



ECUACIONES DE PRIMER Y SEGUNDO GRADO

CON PITÁGORAS

95 *ABC* es un triángulo isósceles cuya base es el lado desigual *BC* = 12 cm. Si su área es de 24 cm², se pide:
a) Calcular su altura *h*.
b) Calcular la medida de los lados *AB* y *AC*.

96 En un rectángulo la diagonal mide 8 cm más que la base y 16 cm más que la altura. Hallar el área y el perímetro.

97 Tres segmentos miden, respectivamente, 8, 22 y 24 cm. Si se añade a los tres una misma longitud, se puede construir con ellos un triángulo rectángulo. Halla dicha longitud.

98 Calcula los lados y el área de un triángulo isósceles de perímetro 32 cm y altura sobre el lado desigual de 8 cm.

99 **Problema indio del siglo IX.**
Un junco está en un estanque a 90 cm de la orilla y sobresale del agua 30 cm. Cuando sopla el viento se inclina de forma que su cabeza llega a tocar la orilla a la altura del agua. ¿Cuál es la profundidad del estanque?

100 El cuadrado *ABCD* tiene 10 m de lado. Determina *x* para que el cuadrado interior tenga 90 m² de área. Da un valor exacto y un redondeo a centésimas.

DOS CLÁSICOS

101 Un padre tiene 28 años más que su hijo. Dentro de 16 años la edad del padre será doble que la de su hijo. ¿Cuál es la edad de cada uno?

102 Un padre tiene 49 años y su hijo 21. ¿Cuántos años hace que la edad del padre era triple que la del hijo?

AMIGOS

103 Quince amigos van a merendar y eligen entre dos menús diferentes que cuestan 1,2 y 1,4 €, respectivamente. A la hora de pagar uno de ellos calcula y dice que hay que pagar un total de 19 €. ¿Cuántos tomaron cada tipo de menú?

104 Treinta personas van al fútbol. Los precios de las entradas son 16 € y 12 €. En total les cuesta 380 €.
a) ¿Cuántas entradas sacaron de cada precio?
b) Si ellos aseguran haber pagado 300 €, ¿piensas que es posible?

105 Un grupo de amigos han de pagar una merienda cuya factura asciende a 90 €. Como seis de ellos no tiene dinero, cada uno de los restantes ha pagado 4 € más de lo que le correspondían. ¿Cuántos amigos forman el grupo?

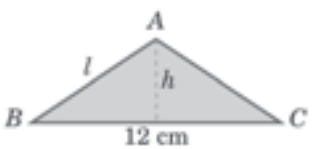
106 **La excursión.**
Un grupo de estudiantes organiza una excursión, para lo cual alquilan un autobús cuyo coste total es de 1008 €. Al salir aparecen 6 estudiantes más y esto hace que cada uno de los anteriores pague 4 € menos. Calcular el número de estudiantes que fueron a la excursión y qué cantidad pagó cada uno.

107 Carla y Lucas tienen el mismo número de fichas. Cada uno intenta ponerlas formando un cuadrado. Carla observa que una vez que ha colocado las suyas le sobran 20. Lucas intenta confeccionar un cuadrado de una fila y una columna más pero no puede terminarlo pues le faltan 33 fichas. ¿Cuántas fichas tienen cada uno?

80

SOLUCIONARIO

95. *ABC* es un triángulo isósceles cuya base es el lado desigual *BC* = 12 cm. Si su área es de 24 cm², se pide:
a) Calcular su altura *h*.
b) Calcular la medida de los lados *AB* y *AC*.



a) $\frac{12\,h}{2} = 24 \Rightarrow 6\,h = 24 \Rightarrow h = 4$·

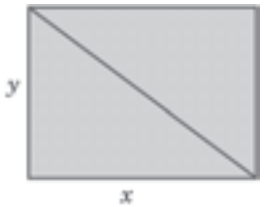
La altura es de 4 cm.

b) Por ser isósceles $AB = AC$.
Por el teorema de Pitágoras se tiene:

$$l^2 = 6^2 + h^2 \Rightarrow l^2 = 36 + 16 = 52 \Rightarrow l = \sqrt{52} \simeq 7,2$$

La longitud de los lados *AB* y *AC* **es aproximadamente 7,2 cm.**

96. En un rectángulo la diagonal mide 8 cm más que la base y 16 cm más que la altura. Hallar el área y el perímetro.



Según el enunciado, la diagonal verifica que $x + 8 = y + 16$, luego $x - y = 8$

Por el teorema de Pitágoras:

$x^2 + y^2 = (x + 8)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + y^2 = x^2 + 16x + 64 \Rightarrow y^2 - 16x - 64 = 0$

sustituyendo x por $8 + y$

$y^2 - 16(8 + y) - 64 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow y^2 - 16y - 192 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow y = \frac{16 \pm \sqrt{16^2 - 4(-192)}}{2} = \frac{16 \pm \sqrt{1024}}{2} = \frac{16 \pm 32}{2} =$$

$$= \begin{cases} \frac{48}{2} = 24 \\ -\frac{16}{2} = -8 \end{cases}$$

Como y no puede ser negativo $y = 24$ cm y $x = 32$ cm.

97. Tres segmentos miden, respectivamente, 8, 22 y 24 cm. Si se añade a los tres una misma longitud, se puede construir con ellos un triángulo rectángulo. Halla dicha longitud.

Si la longitud añadida es x, los segmentos miden ahora $8 + x$, $22 + x$ y $24 + x$ y sus longitudes verifican ahora el teorema de Pitágoras.

$(8 + x)^2 + (22 + x)^2 = (24 + x)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 64 + 16x + x^2 + 484 + 44x + x^2 = 576 + 48x + x^2 \Rightarrow$

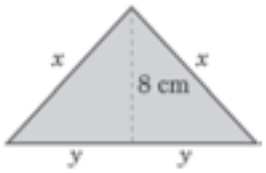
$\Rightarrow x^2 + 12x - 28 = 0 \Rightarrow$

$$x = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4(-28)}}{2} = \frac{-12 \pm \sqrt{144 + 112}}{2} = \frac{-12 \pm \sqrt{256}}{2} =$$

$$= \frac{-12 \pm 16}{2} = \begin{cases} \frac{11}{2} = 2 \\ -\frac{28}{2} = -14 \end{cases}$$

Una solución negativa no tiene sentido, luego la longitud añadida es 2 cm.

98. Calcula los lados y el área de un triángulo isósceles de perímetro 32 cm y altura sobre el lado desigual de 8 cm.



El área de este triángulo es $\frac{2y \cdot 8}{2} = 8y$

Para calcular y se tiene que:

$2x + 2y = 32 \Rightarrow x + y = 16$

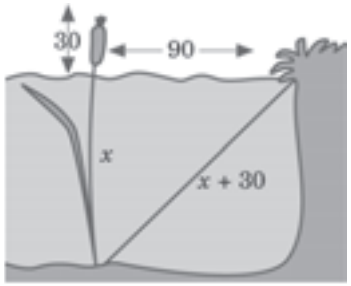
y por el teorema de Pitágoras

$y^2 = x^2 - 8^2 = (16 - y)^2 - 8^2 = y^2 - 32y + 256 - 64 \Rightarrow$

$\Rightarrow 32y = 192 \Rightarrow y = 6$. Por tanto $\boldsymbol{x = 10}$ **cm**

El área es $8y = 8 \cdot 6 = 48$ cm^2

99. Un junco está en un estanque a 90 cm de la orilla y sobresale del agua 30 cm. Cuando sopla el viento se inclina de forma que su cabeza llega a tocar la orilla a la altura del agua. ¿Cuál es la profundidad del estanque? (*Problema indio*, s. IX)



Aplicando el teorema de Pitágoras

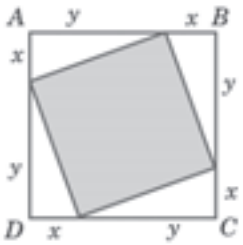
$x^2 + 90^2 = (x + 30)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + 8100 = x^2 + 60x + 900 \Rightarrow$

$\Rightarrow 60x = 7200 \Rightarrow x = 120$

El junco mide 120 cm.

100. El cuadrado *ABCD* tiene 10 m de lado. Determina x para que el cuadrado interior tenga 90 m^2 de área. Da un valor exacto y un redondeo a centésimas.



$x + y = 10$

Por otra parte $90 + 4 \cdot \frac{xy}{2} = 100 \Rightarrow 2xy = 10 \Rightarrow xy = 5$

como $y = 10 - x$ se tiene

$x(10 - x) = 5 \Rightarrow 10x - x^2 = 5 \Rightarrow x^2 - 10x + 5 = 0 \Rightarrow$

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \cdot 5}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{80}}{2} = \frac{10 \pm 4\sqrt{5}}{2} = 5 \pm 2\sqrt{5} =$$

$$= \begin{cases} 5 + 2\sqrt{5} \simeq \mathbf{9,47} \\ 5 - 2\sqrt{5} \simeq \mathbf{0,53} \end{cases}$$

El valor exacto es $5 + 2\sqrt{5}$ cm. Un redondeo a centésimas es 9,47 cm.

Igual para la otra solución $5 - 2\sqrt{5}$ y 0,53 cm, respectivamente.

101. Un padre tiene 28 años más que su hijo. Dentro de 16 años la edad del padre será doble que la de su hijo. ¿Cuál es la edad de cada uno?

Si x es la edad del hijo se tiene:

$2(x + 16) = x + 28 + 16 \Rightarrow 2x + 32 = x + 44 \Rightarrow x = 12$

El hijo tiene 12 años y el padre 40.

102. Un padre tiene 49 años y su hijo 21. ¿Cuántos años hace que la edad del padre era triple que la del hijo?

Si x es el número de años que han transcurrido se tiene:

$49 - x = 3(21 - x) \Rightarrow 49 - x = 63 - 3x \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x = 14 \Rightarrow x = 7$

Fue hace 7 años.

103. Quince amigos van a merendar y eligen entre dos menús diferentes que cuestan 1,2 y 1,4 €, respectivamente. A la hora de pagar uno de ellos calcula y dice que hay que pagar un total de 19 €. ¿Cuántos tomaron cada tipo de menú?

Si x es el número de amigos que tomaron el menú de 1,2 €, se tiene:

$$1,2x + 1,4\,(15 - x) = 19 \Rightarrow 1,2x + 21 - 1,4x = 19 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0,2x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{0,2} = 10$$

Diez tomaron el menú de 1,2 € y 5 el de 1,4 €.

104. Treinta personas van al fútbol. Los precios de las entradas son 16 € y 12 €. En total les cuesta 380 €. ¿Cuántas entradas sacaron de cada precio? Si ellos aseguran haber pagado 300 €, ¿piensas que es posible?

Si x es el número de entradas que sacaron de 16 €, se tiene

$$16x + 12(30 - x) = 380 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 16x + 360 - 12x = 380 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 4x = 20 \Rightarrow x = 5$$

Sacaron 5 entradas de 16 € y 25 entradas de 12 €.

Si aseguran que han pagado 300 € se tiene

$$16x + 12(30 - x) = 300 \Rightarrow 4x = -60$$

que no tiene sentido porque el número de entradas x tiene que ser entero y positivo.

105. Un grupo de amigos han de pagar una merienda cuya factura asciende a 90 €. Como seis de ellos no tiene dinero, cada uno de los restantes ha pagado 4 € más de lo que le correspondían. ¿Cuántos amigos forman el grupo?

Sea x el número de amigos, entonces:

$$(x - 6)\left(\frac{90}{x} + 4\right) = 90 \Rightarrow 90 + 4x - \frac{540}{x} - 24 = 90 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x^2 - 540 - 24x = 0 \Rightarrow x^2 - 6x - 135 = 0 \Rightarrow$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{6^2 - 4(-135)}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{576}}{2} = \frac{6 \pm 24}{2} = \begin{cases} \frac{30}{2} = 15 \\ -\frac{18}{2} = -9 \end{cases}$$

Como x tiene que ser entero positivo, el número de amigos es 15.

106. Un grupo de estudiantes organiza una excursión, para lo cual alquilan un autobús cuyo coste total es de 1008 €. Al salir aparecen 6 estudiantes más y esto hace que cada uno de los anteriores pague 4 € menos. Calcular el número de estudiantes que fueron a la excursión y qué cantidad pagó cada uno.

Si x es el número de estudiantes que organizan la excursión e y lo que le cuesta a cada uno, se tiene $xy = 1008$

Al aparecer los 6 estudiantes:

$$(x + 6)(y - 4) = 1008 \Rightarrow$$
$$xy - 4x + 6y - 24 = 1008 \Rightarrow -4x + 6y - 24 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2x - 3y + 12 = 0$$

Sustituyendo y por $\frac{1008}{x}$ (pues $xy = 1008$)

$$\Rightarrow 2x - 3\,\frac{1008}{x} + 12 = 0 \Rightarrow 2x^2 - 3024 + 12x = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2 + 6x - 1512 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4(-1512)}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{6084}}{2} =$$
$$= \frac{-6 \pm 78}{2} = \begin{cases} \frac{72}{2} = 36 \\ -\frac{84}{2} = -42 \end{cases}$$

Como x no puede ser negativo se tiene que el número de estudiantes que fueron a la excursión es $x + 6 = 36 + 6 = 42$ y cada uno pagó $\frac{1008}{42} = 24$ €

107. Carla y Lucas tienen el mismo número de fichas. Cada uno intenta ponerlas formando un cuadrado. Carla observa que una vez que ha colocado las suyas le sobran 20. Lucas intenta confeccionar un cuadrado de una fila y una columna más pero no puede terminarlo pues le faltan 33 fichas. ¿Cuántas fichas tienen cada uno?

Si Carla hace un cuadrado de x fichas de lado, se tiene

$$x^2 + 20 = (x + 1)^2 - 33 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2 + 20 = x^2 + 2x + 1 - 33 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2x = 52 \Rightarrow x = 26$$

El número de fichas que tiene cada uno es $26^2 + 20 = 696$.

Tema 5

Sistemas de ecuaciones

▸ Programación de aula

Objetivos

- Definir los elementos que intervienen en un sistema de ecuaciones lineales.
- Conocer las propiedades de las transformaciones de equivalencia de un sistema de ecuaciones lineales.
- Resolver por sustitución un sistema de ecuaciones lineales.
- Resolver por reducción un sistema de ecuaciones lineales.
- Resolver por igualación un sistema de ecuaciones lineales.
- Definir y resolver sistemas de ecuaciones lineales sin solución única.
- Definir y resolver otros sistemas de ecuaciones no lineales.

Criterios de evaluación

- Usar adecuadamente del vocabulario algebraico.
- Identificar un sistema de ecuaciones lineales.
- Transformar equivalentemente un sistema de ecuaciones lineales.
- Resolver por sustitución un sistema de ecuaciones lineales.
- Resolver por reducción un sistema de ecuaciones lineales.
- Resolver por igualación un sistema de ecuaciones lineales.
- Resolver un sistema de ecuaciones lineales que no tiene solución única.
- Resolver otros sistemas de ecuaciones no lineales.
- Aplicar los sistemas de ecuaciones lineales para resolver problemas.
- Adquirir hábitos automáticos de cálculo en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

Contenidos

- **Conceptos** ("saber")
  - Sistemas de ecuaciones lineales.
  - Métodos de resolución de un sistema de ecuaciones.
  - Clasificación de los sistemas de ecuaciones en función de su solución.
  - Sistemas con otras soluciones.
- **Procedimientos** ("Saber hacer")
  - Formulación de problemas o situaciones que impliquen un planteamiento con ecuaciones del tipo $ax + by = c$.
  - Transformación al lenguaje algebraico de situaciones resolubles mediante un sistema de ecuaciones.
  - Representación y estudio gráfico de la ecuación lineal con dos incógnitas.
  - Resolución de sistemas de ecuaciones por los métodos de sustitución, reducción e igualación.
  - Resolución gráfica de sistemas de ecuaciones.
  - Discusión y valoración de las soluciones de un sistema de ecuaciones.
  - Estudio de distintas alternativas en el tratamiento alge-braico de un problema.
  - Explicación oral del proceso seguido en la resolución de problemas numéricos.
  - Reducción de problemas complejos a otros más sencillos para facilitar la comprensión y solución de los mismos.
  - Planteamiento —en grupo— de problemas algebraicos y discusión de las diferentes ecuaciones propuestas hasta obtener la verdadera.
  - Explicación oral del procedimiento seguido en la resolución de problemas.
- **Actitudes** ("Saber ser")
  - Valoración de la utilidad de los métodos de resolución de sistemas de ecuaciones.
  - Reflexión sobre la validez de las soluciones obtenidas.
  - Confianza en las propias capacidades y gusto por la elaboración y uso de estrategias personales de cálculo.
  - Tenacidad y perseverancia en la búsqueda de solución a los problemas.

▸ Programación por competencias

COMPETENCIA MATEMÁTICA

PENSAMIENTO Y RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

Descriptores

1. Entender la extensión y las limitaciones de los conceptos matemáticos y saber utilizarlos.
2. Transformar al lenguaje algebraico situaciones resolubles mediante un sistema de ecuaciones.

Desempeño

1. Comprende la utilidad de los sistemas de ecuaciones.	- Modeliza las relaciones lineales entre variables a partir de un sistema de ecuaciones lineales. - Formaliza la expresión de esas relaciones lineales.	- **Ejemplos y ejercicios del tema** (pág. 84 a 96)
2. Interpreta adecuadamente un sistema de ecuaciones.	- Identifica las incógnitas. - Identifica el tipo de relación existente entre las incógnitas.	
3. Transforma adecuadamente un sistema de ecuaciones en otro equivalente.	- Utiliza una transformación conveniente. - Distingue entre posibles transformaciones equivalentes.	

ARGUMENTAR MATEMÁTICAMENTE

Descriptores

1. Resolver sistemas de ecuaciones lineales por los métodos de sustitución, reducción e igualación.
2. Valorar la utilidad de los métodos de resolución de sistemas de ecuaciones.

Desempeño

1. Elige el método de resolución más adecuado.	- Resuelve un sistema de ecuaciones lineales tras la elección del método de resolución.	- **Ejercicios 30 a 60** (pág. 95 y 96)
2. Reduce un sistema de ecuaciones no lineales a otro lineal.	- Transforma un sistema de ecuaciones lineales en otro u otros equivalentes.	- **Ejemplos 1 y 2** (pág. 91) - **Ejercicios 37 a 41** (pág. 95)
3. Valora el resultado obtenido en el caso de que la solución no exista o no sea única.	- Resuelve un sistema de ecuaciones lineales sin solución única. - Clasifica el sistema de ecuaciones lineales atendiendo a su solución. - Valora la solución obtenida.	- **Ejercicios 7, 32 y 38 a 40** (pág. 90 y 95)

PLANTEAR Y RESOLVER PROBLEMAS MATEMÁTICOS

Descriptores

1. Formular problemas o situaciones que impliquen un planteamiento con ecuaciones del tipo $ax + by = c$.
2. Reducir problemas complejos a otros más sencillos para facilitar la comprensión y solución de los mismos.
3. Reflexionar sobre la validez de las soluciones obtenidas.

Desempeño

1. Plantea una situación concreta utilizando un sistema de ecuaciones lineales.	- Describe la relación o relaciones entre las incógnitas.	- **Ejemplos y ejercicios del tema** (pág. 84 a 96)
2. Identifica los elementos del sistema que intervienen en la situación planteada.	- Considera el papel asignado a cada una de las variables.	
3. Resuelve la cuestión planteada.	- Elige el sistema de resolución. - Obtiene la solución.	

COMPETENCIA LINGÜÍSTICA

COMPETENCIA LINGÜÍSTICA

Descriptores

1. Comprender el enunciado de un problema en el que interviene un sistema de ecuaciones y diferenciar las ideas fundamentales que nos permitan expresarlas en lenguaje algebraico.
2. Aportar vocabulario específico y preciso relacionado con los sistemas de ecuaciones lineales.
3. Describir verbalmente el proceso seguido en la resolución de un problema, confrontándolas con otras posibles.

Desempeño

1. Comprende lo que lee.	- Identifica la pregunta que se le hace. - Identifica los elementos algebraicos esenciales que intervienen.	- **Ejemplos y ejercicios del tema** (pág. 84 a 96)
2. Discrimina e interpreta la información que le da el enunciado de un problema.	- Diferencia los datos de las incógnitas. - Determina la variable que le otorga a la incógnita y enuncia su significado.	
3. Se expresa por escrito de manera adecuada y correcta, con claridad y coherencia; utilizando un lenguaje preciso.	- Presenta el texto con la solución del problema de forma adecuada y correcta. - Selecciona la información adecuada.	

COMPETENCIA SOCIAL Y CIUDADANA

COMPETENCIA SOCIAL Y CIUDADANA

Descriptores

1. Plantear en grupo problemas algebraicos y discutir las diferentes ecuaciones propuestas, hasta obtener la verdadera.

Desempeño

1. Desarrolla habilidades de trabajo en grupo.	- Respeta el trabajo en grupo. - Acepta los criterios fundados de los demás.	- **Ejercicios 42 a 60** (pág. 95 y 96)

COMPETENCIA EN CONOCIMIENTO E INTERACCION CON EL MEDIO FISICO

COMPETENCIA EN CONOCIMIENTO E INTERACCION...

Descriptores

1. Advertir el papel de los sistemas de ecuaciones lineales que pueden aplicarse a la resolución de situaciones de la vida cotidiana y del entorno y medio físicos.

Desempeño

1. Interpreta situaciones del mundo físico y las conceptualiza en términos de un sistema de ecuaciones lineales.	- Sintetiza la información. - Expone la información con precisión. - Expone adecuadamente el proceso que traslada la información al modelo matemático expresado por el sistema de ecuaciones lineales.	- **Ejercicios 42 a 60** (pág. 95 y 96)

COMPETENCIA DIGITAL Y TRATAMIENTO DE LA INFORMACION

COMPETENCIA DIGITAL Y TRATAMIENTO DE LA INFORMACION

Descriptores

1. Confeccionar esquemas lógicos de cálculo aplicables a la resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

Desempeño

1. Interpreta situaciones del mundo físico y las conceptualiza en términos de un sistema de ecuaciones lineales.	- Resume y sintetiza la información. - Realiza actividades que requieren organización, relación o análisis de la información.	- **Ejemplos y ejercicios del tema** (pág. 84 a 96)
2. Expone y presenta los resultados de manera ordenada y clara, transmitiéndola así oralmente o por escrito.	- Presenta los resultados de forma clara y ordenada. - Respeta y cumple el lenguaje matemático.	
3. Codifica el lenguaje algebraico.	- Reconoce que el lenguaje algebraico supone codificar la información que nos proporciona la realidad.	- **Ejercicios 42 a 60** (pág. 95 y 96)

COMPETENCIA APRENDER A APRENDER

COMPETENCIA APRENDER A APRENDER

Descriptores

1. Adquirir conciencia y hacer uso de las propias capacidades y conocimientos para iniciarse en el aprendizaje de la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, capacitándose para continuar aprendiendo de manera cada vez más eficaz y autónoma de acuerdo a los propios objetivos y necesidades.
2 Desarrollar la curiosidad de plantearse preguntas, formalizarlas y resolverlas con la metodología estudiada.
3. Utilizar estrategias de aprendizaje, utilizando técnicas de apoyo diversas, para afrontar la toma de decisiones.

Desempeño

1. Desarrolla habilidades de obtención, análisis y elaboración de la información.	- Lee los enunciados de los ejercicios con la intención de comprender, relacionar y sintetizar contenidos. - Maneja adecuadamente recursos y técnicas de aprendizaje individual.	- **Ejemplos y ejercicios del tema** (pág. 84 a 96)
2. Mejora la atención y motivación.	- Se fija en cada paso y lo analiza, afianzando el proceso de aprendizaje. - Cuida la expresión y la presentación de los trabajos.	

COMPETENCIA CULTURAL Y ARTÍSTICA

COMPETENCIA CULTURAL Y ARTÍSTICA

Descriptores

1. Mostrar autores y hechos históricos relacionados con los sistemas de ecuaciones lineales.

Desempeño

1. Relaciona los conceptos matemáticos con un hecho histórico.	- Muestra autores matemáticos relacionados con el Algebra y los sistemas de ecuaciones.	- **Introducción** (pág. 82)

COMPETENCIA AUTONOMÍA E INICIATIVA PERSONAL

COMPETENCIA AUTONOMÍA E INICIATIVA PERSONAL

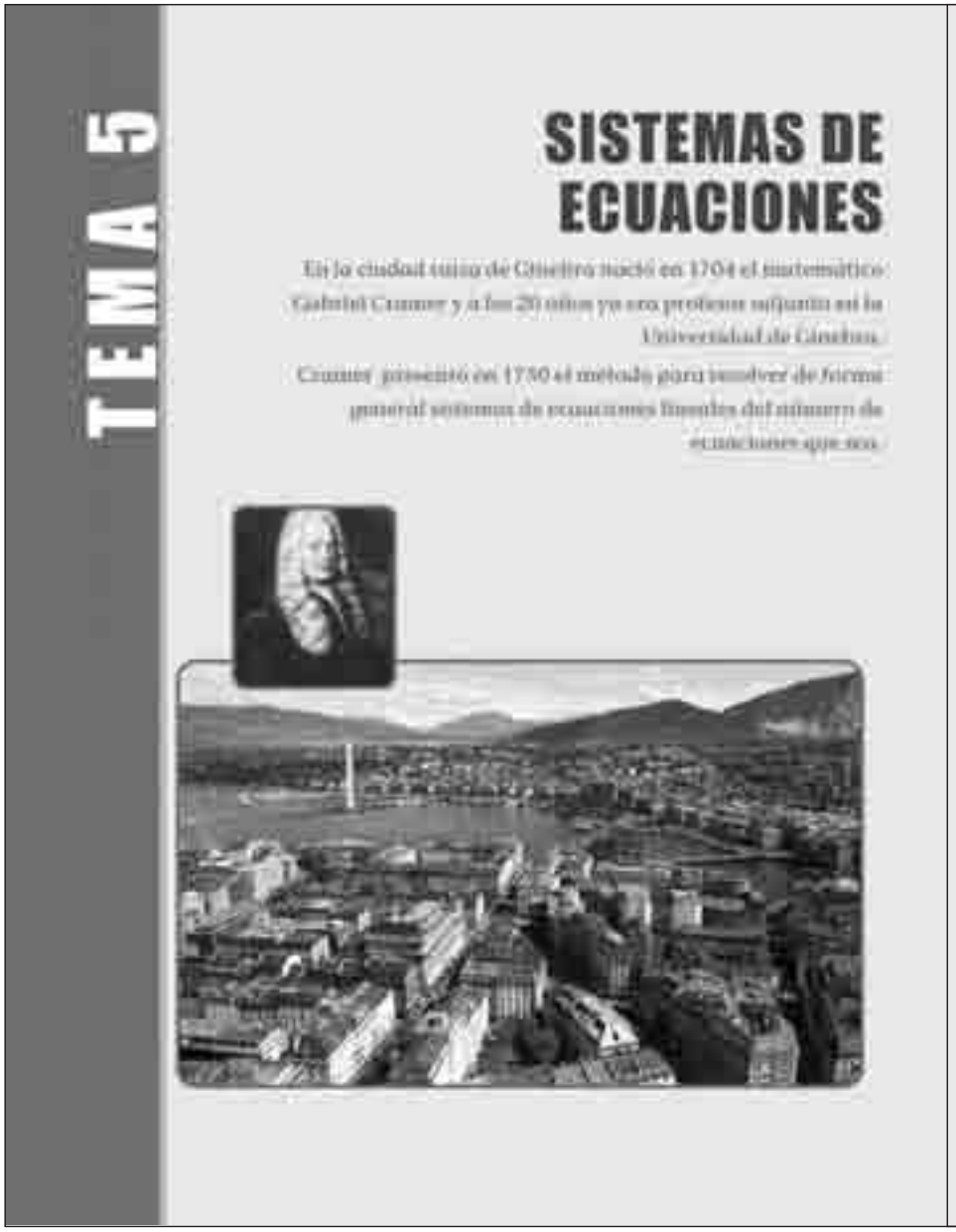
Descriptores

1. Confiar en las propias capacidades y gusto por la elaboración y uso de estrategias personales de cálculo.
2. Tener tenacidad y perseverancia en la búsqueda de solución a los problemas de cálculo en los que intervienen sistemas de ecuaciones lineales.

Desempeño

1. Idea y planifica el desarrollo de un ejercicio.	- Elige la opción adecuada para la resolución de los ejercicios. - Mantiene la opción hasta llegar a la conclusión final.	- **Ejemplos y ejercicios del tema** (pág. 84 a 96)
2. Evalúa la solución obtenida.	- Valora el resultado y lo pone en relación con su enunciado del problema resuelto.	
3. Toma decisiones en función del resultado obtenido.	- Decide en función del resultado.	

▶ Pág. 82 - 83. Sistemas de ecuaciones



SOLUCIONARIO

SOLUCIÓN DE UN SISTEMA

Sea la ecuación $2x - y = 12$.

Completa la siguiente tabla con parejas de valores que sean solución de la ecuación:

x	1	6	5	4	8	7	–1	–3
y	–10	0	–2	–4	4	2	–14	–18

Sea la ecuación $3x + y = 23$

Completa la siguiente tabla con parejas de valores que sean solución de la ecuación:

x	6	4	0	–2	8	10	7	19/3
y	5	11	23	29	–1	–7	2	4

¿Cuál crees que puede ser la solución del sistema $\left.\begin{matrix} 2x - y = 12 \\ 3x + y = 23 \end{matrix}\right\}$**?**

$x = 7,\ y = 2$



CADA OVEJA CON SU PAREJA

Identifica cada sistema de ecuaciones con su solución.

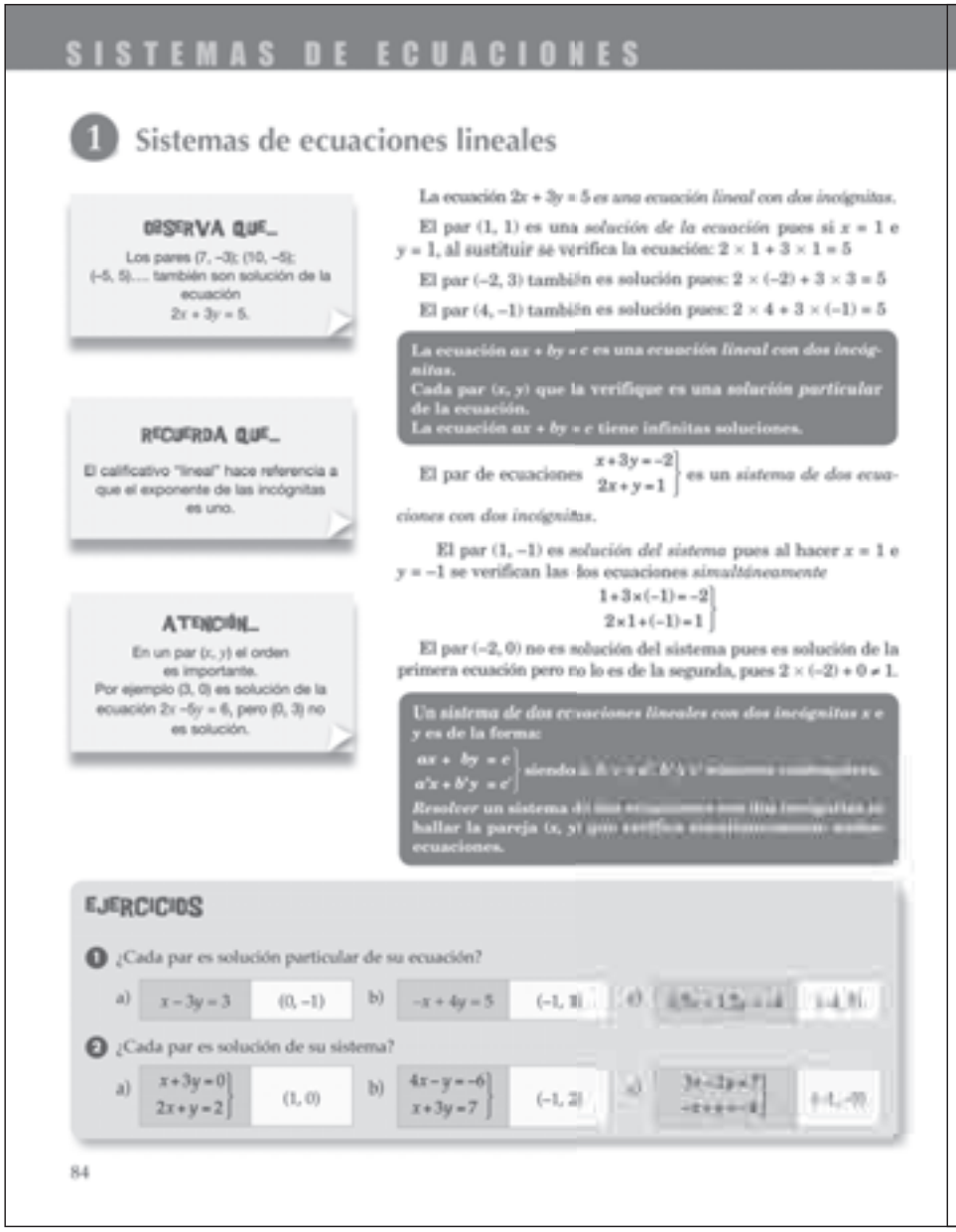
$$\left.\begin{matrix} x+y=2 \\ x-y=0 \end{matrix}\right\} \longrightarrow (1, 1)$$

$$\left.\begin{matrix} -x+3y=1 \\ 2x-y=3 \end{matrix}\right\} \longrightarrow (2, 1)$$

$$\left.\begin{matrix} -x-3y=2 \\ 2x+y=-9 \end{matrix}\right\} \longrightarrow (-5, 1)$$

$$\left.\begin{matrix} x+5y=2 \\ x-8y=2 \end{matrix}\right\} \longrightarrow (2, 0)$$

▶ Pág. 84. 1 Sistemas de ecuaciones



SISTEMAS DE ECUACIONES

1 Sistemas de ecuaciones lineales

OBSERVA QUE...

Los pares (7, –3); (10, –5); (–5, 5)... también son solución de la ecuación $2x + 3y = 5$.

RECUERDA QUE...

El calificativo "lineal" hace referencia a que el exponente de las incógnitas es uno.

ATENCIÓN...

En un par (x, y) el orden es importante. Por ejemplo (3, 0) es solución de la ecuación $2x - 5y = 6$, pero (0, 3) no es solución.

La ecuación $2x + 3y = 5$ *es una ecuación lineal con dos incógnitas.*

El par (1, 1) es una *solución de la ecuación* pues si $x = 1$ e $y = 1$, al sustituir se verifica la ecuación: $2 \times 1 + 3 \times 1 = 5$

El par (–2, 3) también es solución pues: $2 \times (-2) + 3 \times 3 = 5$

El par (4, –1) también es solución pues: $2 \times 4 + 3 \times (-1) = 5$

La ecuación $ax + by = c$ es una *ecuación lineal con dos incógnitas.*
Cada par (x, y) que la verifique es una *solución particular* de la ecuación.
La ecuación $ax + by = c$ tiene infinitas soluciones.

El par de ecuaciones $\left.\begin{matrix} x+3y=-2 \\ 2x+y=1 \end{matrix}\right\}$ es un *sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.*

El par (1, –1) es *solución del sistema* pues al hacer $x = 1$ e $y = -1$ se verifican las dos ecuaciones *simultáneamente*

$$\left.\begin{matrix} 1+3\times(-1)=-2 \\ 2\times 1+(-1)=1 \end{matrix}\right\}$$

El par (–2, 0) no es solución del sistema pues es solución de la primera ecuación pero no lo es de la segunda, pues $2 \times (-2) + 0 \neq 1$.

Un *sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas* x e y es de la forma:

$$\left.\begin{matrix} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{matrix}\right\}$$ siendo a, b, c, a', b' y c' números conocidos.

***Resolver* un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas es hallar la pareja (x, y) que verifica simultáneamente ambas ecuaciones.**

EJERCICIOS

1 ¿Cada par es solución particular de su ecuación?

a) $x - 3y = 3$ $(0, -1)$ b) $-x + 4y = 5$ $(-1, 1)$ c) [illegible]

2 ¿Cada par es solución de su sistema?

a) $\left.\begin{matrix} x+3y=0 \\ 2x+y=2 \end{matrix}\right\}$ $(1, 0)$ b) $\left.\begin{matrix} 4x-y=-6 \\ x+3y=7 \end{matrix}\right\}$ $(-1, 2)$ c) [illegible]

84

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS

Este epígrafe se presta al cálculo mental.

Los alumnos podrán proponer sus propios sistemas.

Proponer sistemas del tipo $\left.\begin{matrix} ax + by = ? \\ a'x + b'y = ?? \end{matrix}\right\}$ y completar dando una solución.

SOLUCIONARIO

1. ¿Cada par es solución particular de su ecuación?

a) $x - 3y = 3$ y $(0, -1)$. Sí, porque $0 - 3(-1) = 3$

b) $-x + 4y = 5$ y $(-1, 1)$. Sí, porque $-(-1) + 4(1) = 5$

c) $0{,}5x + 1{,}2y = -4$ y $(-4, 5)$. No, porque $0{,}5(-4) + 1{,}2(5) = -2 + 6 = 4 \neq -4$

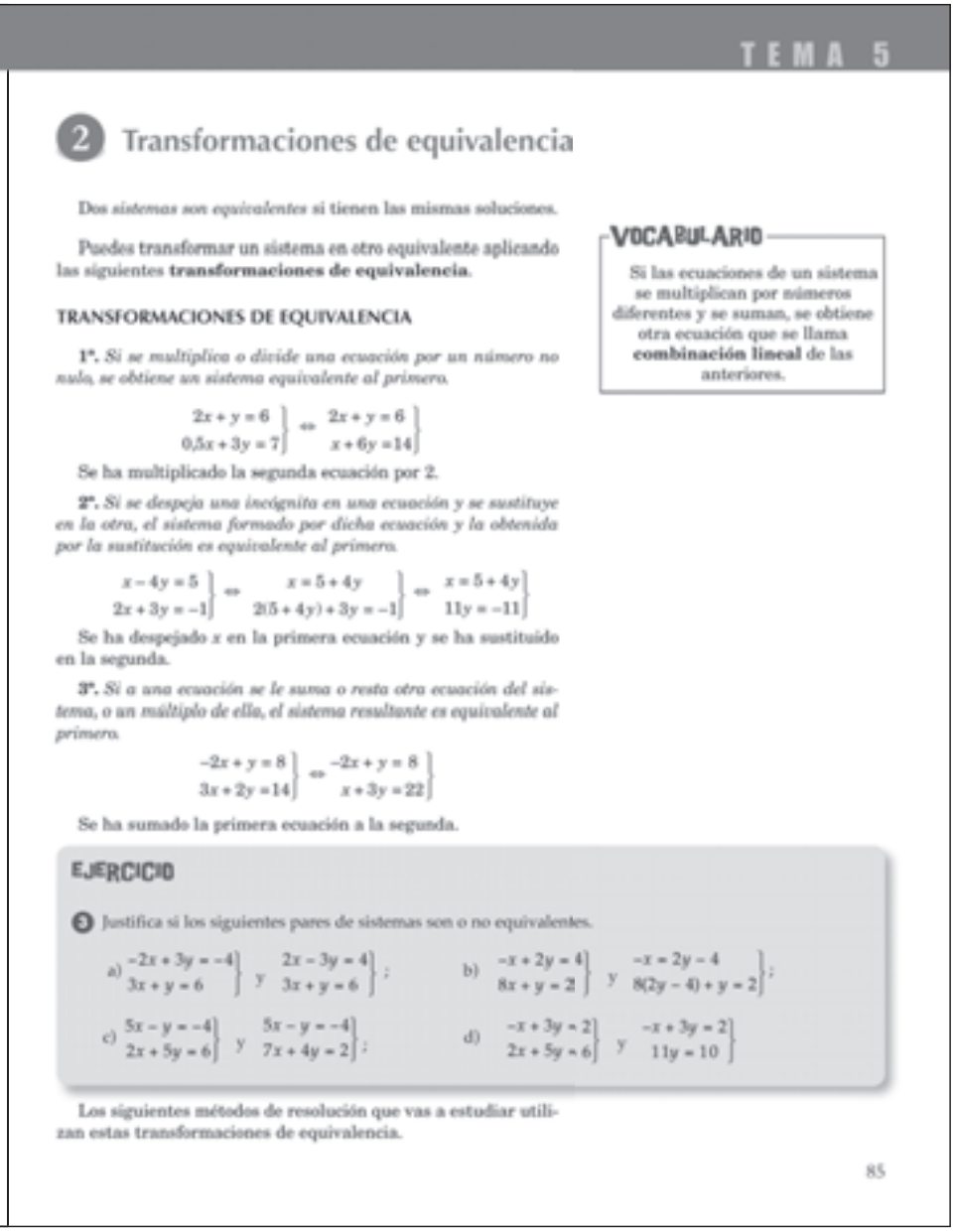
2. ¿Cada par es solución de su sistema?

a) $\left.\begin{matrix} x+3y=0 \\ 2x+y=2 \end{matrix}\right\}$ No, porque no se verifica la primera ecuación del sistema $1 + 3(0) = 1 \neq 0$

b) $\left.\begin{matrix} 4x-y=-6 \\ x+3y=7 \end{matrix}\right\}$ No, porque no se verifica la segunda ecuación del sistema $-1 + 3(2) = 5 \neq 7$

c) $\left.\begin{matrix} 3x-2y=7 \\ -x+y=-4 \end{matrix}\right\}$ Sí, porque se verifican las dos ecuaciones del sistema $3(-1) - 2(-5) = 7$ y $-(-1) + (-5) = -4$

▶ Pág. 85. 2 Transformaciones de equivalencia



TEMA 5

2 Transformaciones de equivalencia

Dos *sistemas son equivalentes* si tienen las mismas soluciones.

Puedes transformar un sistema en otro equivalente aplicando las siguientes **transformaciones de equivalencia**.

VOCABULARIO

Si las ecuaciones de un sistema se multiplican por números diferentes y se suman, se obtiene otra ecuación que se llama **combinación lineal** de las anteriores.

TRANSFORMACIONES DE EQUIVALENCIA

1ª. *Si se multiplica o divide una ecuación por un número no nulo, se obtiene un sistema equivalente al primero.*

$$\left.\begin{matrix} 2x+y=6 \\ 0{,}5x+3y=7 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} 2x+y=6 \\ x+6y=14 \end{matrix}\right\}$$

Se ha multiplicado la segunda ecuación por 2.

2ª. *Si se despeja una incógnita en una ecuación y se sustituye en la otra, el sistema formado por dicha ecuación y la obtenida por la sustitución es equivalente al primero.*

$$\left.\begin{matrix} x-4y=5 \\ 2x+3y=-1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} x=5+4y \\ 2(5+4y)+3y=-1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} x=5+4y \\ 11y=-11 \end{matrix}\right\}$$

Se ha despejado x en la primera ecuación y se ha sustituido en la segunda.

3ª. *Si a una ecuación se le suma o resta otra ecuación del sistema, o un múltiplo de ella, el sistema resultante es equivalente al primero.*

$$\left.\begin{matrix} -2x+y=8 \\ 3x+2y=14 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} -2x+y=8 \\ x+3y=22 \end{matrix}\right\}$$

Se ha sumado la primera ecuación a la segunda.

EJERCICIO

❸ Justifica si los siguientes pares de sistemas son o no equivalentes.

a) $\left.\begin{matrix} -2x+3y=-4 \\ 3x+y=6 \end{matrix}\right\}$ y $\left.\begin{matrix} 2x-3y=4 \\ 3x+y=6 \end{matrix}\right\}$; b) $\left.\begin{matrix} -x+2y=4 \\ 8x+y=2 \end{matrix}\right\}$ y $\left.\begin{matrix} -x=2y-4 \\ 8(2y-4)+y=2 \end{matrix}\right\}$;

c) $\left.\begin{matrix} 5x-y=-4 \\ 2x+5y=6 \end{matrix}\right\}$ y $\left.\begin{matrix} 5x-y=-4 \\ 7x+4y=2 \end{matrix}\right\}$; d) $\left.\begin{matrix} -x+3y=2 \\ 2x+5y=6 \end{matrix}\right\}$ y $\left.\begin{matrix} -x+3y=2 \\ 11y=10 \end{matrix}\right\}$

Los siguientes métodos de resolución que vas a estudiar utilizan estas transformaciones de equivalencia.

85

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS

Insistir en ejercicios como el nº 3

Resaltar transformaciones no válidas (tipo multiplicar cada miembro por un número, multiplicar unos coeficientes si y otros no)

SOLUCIONARIO

3. Justifica si los siguientes pares de sistemas son o no equivalentes.

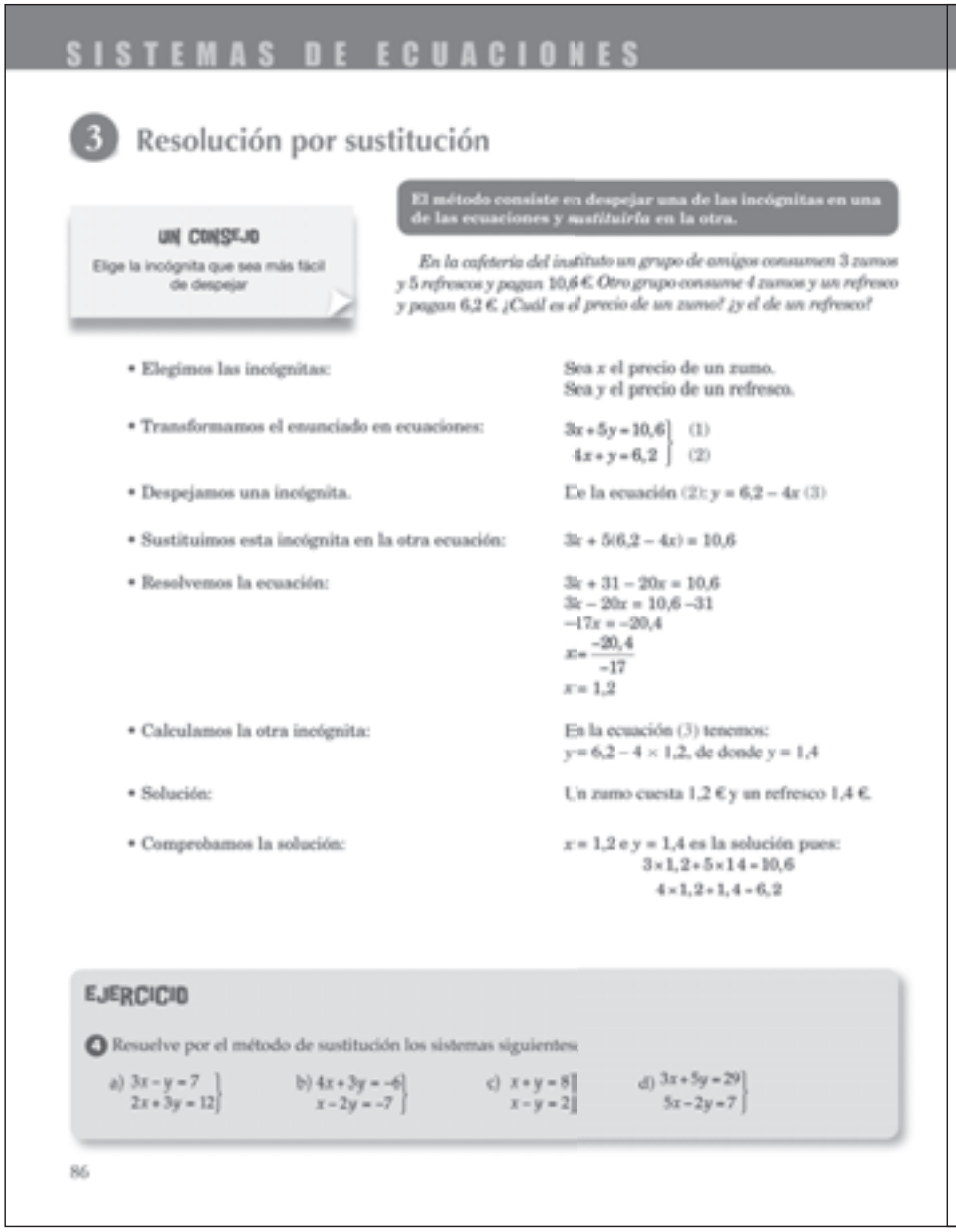
a) $\left.\begin{matrix} -2x+3y=-4 \\ 3x+y=6 \end{matrix}\right\}$ y $\left.\begin{matrix} 2x-3y=4 \\ 3x+y=6 \end{matrix}\right\}$ Son equivalentes porque la primera ecuación del segundo sistema es la suma de las dos ecuaciones del primer sistema.

b) $\left.\begin{matrix} -x+2y=4 \\ 8x+y=2 \end{matrix}\right\}$ y $\left.\begin{matrix} x=2y-4 \\ 8(2y-4)+y=2 \end{matrix}\right\}$ Son equivalentes porque la primera ecuación del segundo sistema es la primera del primer sistema en la que se ha despejado la incógnita x y la segunda ecuación del segundo sistema es la segunda del primer sistema en la que se ha sustituido el valor de x por el que se ha obtenido en la primera.

c) $\left.\begin{matrix} 5x-y=-4 \\ 2x+5y=6 \end{matrix}\right\}$ y $\left.\begin{matrix} 5x-y=-4 \\ 7x+4y=2 \end{matrix}\right\}$ Son equivalentes porque la segunda ecuación del segundo sistema es la suma de las dos ecuaciones del primer sistema.

d) $\left.\begin{matrix} -x+3y=2 \\ 2x+5y=6 \end{matrix}\right\}$ y $\left.\begin{matrix} -x+3y=2 \\ 11y=10 \end{matrix}\right\}$ Son equivalentes porque la segunda ecuación del segundo sistema es la suma del doble de la primera ecuación del primer sistema con la segunda ecuación del primer sistema.

▶ Pág. 86. 3 Resolución por sustitución



SISTEMAS DE ECUACIONES

3 Resolución por sustitución

UN CONSEJO

Elige la incógnita que sea más fácil de despejar

El método consiste en despejar una de las incógnitas en una de las ecuaciones y sustituirla en la otra.

En la cafetería del instituto un grupo de amigos consumen 3 zumos y 5 refrescos y pagan 10,6 €. Otro grupo consume 4 zumos y un refresco y pagan 6,2 €. ¿Cuál es el precio de un zumo? ¿y el de un refresco?

- Elegimos las incógnitas: Sea x el precio de un zumo. Sea y el precio de un refresco.
- Transformamos el enunciado en ecuaciones: $\left.\begin{matrix}3x+5y=10{,}6\\4x+y=6{,}2\end{matrix}\right\}$ (1) (2)
- Despejamos una incógnita. De la ecuación (2): $y = 6{,}2 - 4x$ (3)
- Sustituimos esta incógnita en la otra ecuación: $3x + 5(6{,}2 - 4x) = 10{,}6$
- Resolvemos la ecuación:
$3x + 31 - 20x = 10{,}6$
$3x - 20x = 10{,}6 - 31$
$-17x = -20{,}4$
$x = \frac{-20{,}4}{-17}$
$x = 1{,}2$
- Calculamos la otra incógnita: En la ecuación (3) tenemos: $y = 6{,}2 - 4 \times 1{,}2$, de donde $y = 1{,}4$
- Solución: Un zumo cuesta 1,2 € y un refresco 1,4 €.
- Comprobamos la solución: $x = 1{,}2$ e $y = 1{,}4$ es la solución pues:
$3 \times 1{,}2 + 5 \times 1{,}4 = 10{,}6$
$4 \times 1{,}2 + 1{,}4 = 6{,}2$

EJERCICIO

4 Resuelve por el método de sustitución los sistemas siguientes:

a) $\left.\begin{matrix}3x-y=7\\2x+3y=12\end{matrix}\right\}$ b) $\left.\begin{matrix}4x+3y=-6\\x-2y=-7\end{matrix}\right\}$ c) $\left.\begin{matrix}x+y=8\\x-y=2\end{matrix}\right\}$ d) $\left.\begin{matrix}3x+5y=29\\5x-2y=7\end{matrix}\right\}$

86

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS

Peligro: despejar en una ecuación y sustituir en la misma.

SOLUCIONARIO

4. Resuelve por el método de sustitución los sistemas siguientes:

a) $\left.\begin{matrix}3x-y=7\\2x+3y=12\end{matrix}\right\} \Rightarrow y = 3x - 7$

Sustituyendo en la segunda: $2x + 3(3x - 7) = 12 \Rightarrow$
$\Rightarrow 11x - 21 = 12 \Rightarrow 11x = 33 \Rightarrow x = 3$

Sustituyendo en la y despejada: $y = 3 \cdot 3 - 7 = 2$

Solución: $x = 3, \quad y = 2$

b) $\left.\begin{matrix}4x+3y=-6\\x-2y=-7\end{matrix}\right\} \Rightarrow x = 2y - 7$

Sustituyendo en la primera: $4(2y - 7) + 3y = -6 \Rightarrow$
$\Rightarrow 11y = 22 \Rightarrow y = 2$

Sustituyendo en la x despejada: $x = 2 \cdot 2 - 7 = -3$

Solución: $x = -3, \quad y = 2$

c) $\left.\begin{matrix}x+y=8\\x-y=2\end{matrix}\right\} \Rightarrow x = y + 2$

Sustituyendo en la primera: $y + 2 + y = 8 \Rightarrow 2y = 6 \Rightarrow y = 3$

Sustituyendo en la x despejada: $x = 3 + 2 = 5$

Solución: $x = 5, \quad y = 3$

d) $\left.\begin{matrix}3x+5y=29\\5x-2y=7\end{matrix}\right\}$ De la segunda $y = \frac{5x-7}{2}$

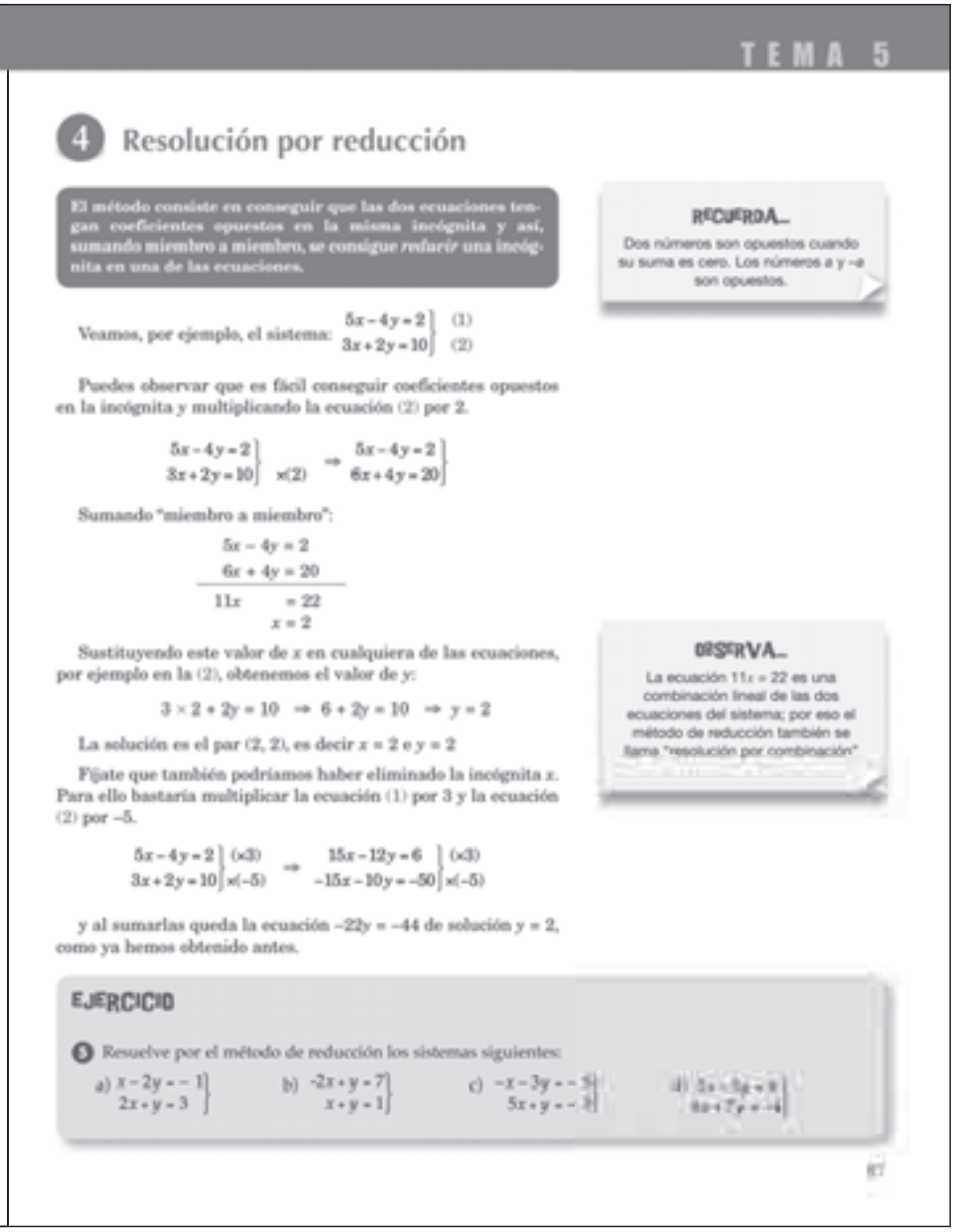
Sustituyendo en la primera: $3x + 5\,\frac{5x-7}{2} = 29 \Rightarrow$
$\Rightarrow 6x + 25x - 35 = 58 \Rightarrow 31x = 93 \Rightarrow x = 3$

Sustituyendo en la y despejada:

$$y = \frac{5 \cdot 3 - 7}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

Solución: $x = 3, y = 4$

▶ Pág. 87. 4 Resolución por reducción



TEMA 5

4 Resolución por reducción

El método consiste en conseguir que las dos ecuaciones tengan coeficientes opuestos en la misma incógnita y así, sumando miembro a miembro, se consigue *reducir* una incógnita en una de las ecuaciones.

RECUERDA...
Dos números son opuestos cuando su suma es cero. Los números a y $-a$ son opuestos.

Veamos, por ejemplo, el sistema: $\left.\begin{matrix}5x-4y=2\\3x+2y=10\end{matrix}\right\}$ (1) (2)

Puedes observar que es fácil conseguir coeficientes opuestos en la incógnita y multiplicando la ecuación (2) por 2.

$$\left.\begin{matrix}5x-4y=2\\3x+2y=10\end{matrix}\right\}\ \times(2) \Rightarrow \left.\begin{matrix}5x-4y=2\\6x+4y=20\end{matrix}\right\}$$

Sumando "miembro a miembro":

$$\begin{array}{r} 5x-4y=2\\ 6x+4y=20\\ \hline 11x\quad =22\\ x=2\end{array}$$

Sustituyendo este valor de x en cualquiera de las ecuaciones, por ejemplo en la (2), obtenemos el valor de y:

$$3\cdot 2+2y=10 \Rightarrow 6+2y=10 \Rightarrow y=2$$

La solución es el par (2, 2), es decir $x=2$ e $y=2$

OBSERVA...
La ecuación $11x = 22$ es una combinación lineal de las dos ecuaciones del sistema; por eso el método de reducción también se llama "resolución por combinación"

Fíjate que también podríamos haber eliminado la incógnita x. Para ello bastaría multiplicar la ecuación (1) por 3 y la ecuación (2) por -5.

$$\left.\begin{matrix}5x-4y=2\\3x+2y=10\end{matrix}\right\}\begin{matrix}(\times 3)\\(\times(-5))\end{matrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix}15x-12y=6\\-15x-10y=-50\end{matrix}\right\}\begin{matrix}(\times 3)\\(\times(-5))\end{matrix}$$

y al sumarlas queda la ecuación $-22y = -44$ de solución $y = 2$, como ya hemos obtenido antes.

EJERCICIO

5 Resuelve por el método de reducción los sistemas siguientes:

a) $\left.\begin{matrix}x-2y=-1\\2x+y=3\end{matrix}\right\}$ b) $\left.\begin{matrix}-2x+y=7\\x+y=1\end{matrix}\right\}$ c) $\left.\begin{matrix}-x-3y=-5\\5x+y=-3\end{matrix}\right\}$ d) $\left.\begin{matrix}2x-5y=6\\6x+7y=-4\end{matrix}\right\}$

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS

Este método tiene gran aceptación entre los alumnos.

Fomentar la determinación de los factores multiplicativos buscando el m.c.m. oportuno.

SOLUCIONARIO

5. Resuelve por el método de reducción los sistemas siguientes:

a) $\left.\begin{matrix}x-2y=-1\\2x+y=3\end{matrix}\right\}\times(-2) \Rightarrow \left.\begin{matrix}-2x+4y=2\\2x+y=3\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix}-2x+4y=2\\5y=5\end{matrix}\right\}$

De la segunda se obtiene $y = 1$ y de la primera deducimos

$-2x + 4 = 2 \Rightarrow x = 1$.

Solución: $x = 1,\quad y = 1$

b)

$$\left.\begin{matrix}-2x+y=7\\x+y=1\end{matrix}\right\}\times(-1) \Rightarrow \left.\begin{matrix}2x-y=-7\\x+y=1\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix}2x-y=-7\\3x=-6\end{matrix}\right\}$$

De la segunda se obtiene $x = -2$ y de la primera deducimos

$-4 - y = -7 \Rightarrow y = 3$.

Solución: $x = -2,\quad y = 3$

c)

$$\left.\begin{matrix}-x-3y=-5\\5x+y=-3\end{matrix}\right\}\times 3 \Rightarrow \left.\begin{matrix}-x-3y=-5\\15x+3y=-9\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix}-x-3y=-5\\14x=-14\end{matrix}\right\}$$

De la segunda se obtiene $x = -1$ y de la primera deducimos

$1 - 3y = -5 \Rightarrow -3y = -6 \Rightarrow y = 2$

Solución: $x = -1,\quad y = 2$

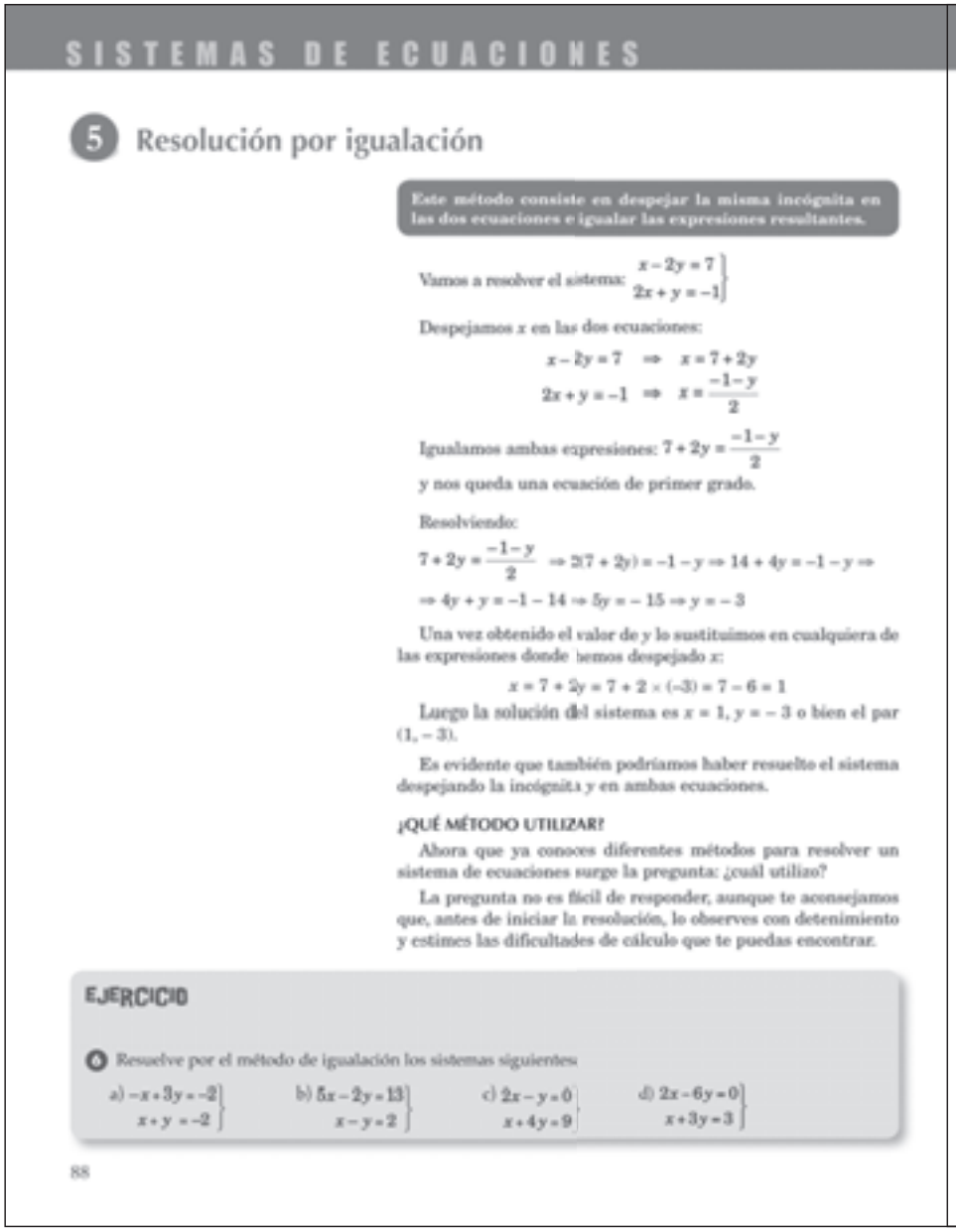
d)

$$\left.\begin{matrix}2x-5y=6\\6x+7y=-4\end{matrix}\right\}\times(-3) \Rightarrow \left.\begin{matrix}-6x+15y=-18\\6x+7y=-4\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix}-6x+15y=-18\\22y=-22\end{matrix}\right\}$$

De la segunda se obtiene $y = -1$ y de la primera deducimos $-6x - 15 = -18 \Rightarrow -6x = -3 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

Solución: $x = \frac{1}{2}; y = -1$

▶ Pág. 88. 5 Resolución por igualación



SISTEMAS DE ECUACIONES

5 Resolución por igualación

Este método consiste en despejar la misma incógnita en las dos ecuaciones e igualar las expresiones resultantes.

Vamos a resolver el sistema: $\left.\begin{matrix} x-2y=7 \\ 2x+y=-1 \end{matrix}\right\}$

Despejamos x en las dos ecuaciones:

$$x-2y=7 \Rightarrow x=7+2y$$
$$2x+y=-1 \Rightarrow x=\frac{-1-y}{2}$$

Igualamos ambas expresiones: $7+2y=\frac{-1-y}{2}$

y nos queda una ecuación de primer grado.

Resolviendo:

$7+2y=\frac{-1-y}{2} \Rightarrow 2(7+2y)=-1-y \Rightarrow 14+4y=-1-y \Rightarrow$

$\Rightarrow 4y+y=-1-14 \Rightarrow 5y=-15 \Rightarrow y=-3$

Una vez obtenido el valor de y lo sustituimos en cualquiera de las expresiones donde hemos despejado x:

$$x=7+2y=7+2\cdot(-3)=7-6=1$$

Luego la solución del sistema es $x=1$, $y=-3$ o bien el par $(1,-3)$.

Es evidente que también podríamos haber resuelto el sistema despejando la incógnita y en ambas ecuaciones.

¿QUÉ MÉTODO UTILIZAR?

Ahora que ya conoces diferentes métodos para resolver un sistema de ecuaciones surge la pregunta: ¿cuál utilizo?

La pregunta no es fácil de responder, aunque te aconsejamos que, antes de iniciar la resolución, lo observes con detenimiento y estimes las dificultades de cálculo que te puedas encontrar.

EJERCICIO

Resuelve por el método de igualación los sistemas siguientes:

a) $\left.\begin{matrix} -x+3y=-2 \\ x+y=-2 \end{matrix}\right\}$ b) $\left.\begin{matrix} 5x-2y=13 \\ x-y=2 \end{matrix}\right\}$ c) $\left.\begin{matrix} 2x-y=0 \\ x+4y=9 \end{matrix}\right\}$ d) $\left.\begin{matrix} 2x-6y=0 \\ x+3y=3 \end{matrix}\right\}$

88

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS

Discutir con los alumnos sobre ¿qué método utilizar?. La anticipación y la estimación de las dificultades de cálculo permitirán elegir el método adecuado.

SOLUCIONARIO

6. Resuelve por el método de igualación los sistemas siguientes:

a)

$$\left.\begin{matrix} -x+3y=-2 \\ x+y=-2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x=3y+2 \\ x=-y-2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 3y+2=-y-2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4y=-4 \Rightarrow y=-1$$

Sustituyendo en la primera: $x = 3(-1) + 2 = -1$.

Solución: $x=-1$, $y=-1$

b)

$$\left.\begin{matrix} 5x-2y=13 \\ x-y=2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x=\frac{13+2y}{5} \\ x=y+2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{13+2y}{5}=y+2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 13+2y=5y+10 \Rightarrow 3y=3 \Rightarrow y=1$$

Sustituyendo en la segunda: $x = 1 + 2 = 3$

Solución: $x=3$; $y=1$

c)

$$\left.\begin{matrix} 2x-y=0 \\ x+4y=9 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} y=2x \\ y=\frac{9-x}{4} \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2x=\frac{9-x}{4} \Rightarrow 8x=9-x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9x=9 \Rightarrow x=1$$

Sustituyendo en la primera: $y = 2$

Solución: $x=1$; $y=2$

d) $\left.\begin{matrix} 2x-6=0 \\ x+3y=3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x=3y \\ x=3-3y \end{matrix}\right\} \Rightarrow 3y=3-3y \Rightarrow$

$$\Rightarrow 6y=3 \Rightarrow y=\frac{1}{2}$$

▶ Pág. 89. 6 Sistemas sin solución única

6 Sistemas sin solución única

Todos los sistemas que hemos resuelto hasta ahora han tenido solución única, pero no ocurre siempre así. Vamos a ver qué otras posibilidades se nos presentan y cómo poder distinguirlas.

Sistemas con infinitas soluciones

Veamos qué pasa al intentar resolver el sistema siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} x-3y=2 \\ -2x+6y=-4 \end{array}\right\}$$

Vamos a resolverlo por el método de reducción, multiplicando la primera ecuación por 2

$$\left.\begin{array}{l} x-3y=2 \\ -2x+6y=-4 \end{array}\right\} \times(2) \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x-6y=4 \\ -2x+6y=-4 \end{array}\right\}$$

Sumando: $0x+0y=0 \Rightarrow 0=0$

El resultado obtenido, $0 = 0$, nos indica que el sistema propuesto consta en realidad de *una única ecuación* pero escrita de dos formas distintas (observa que la segunda ecuación se obtiene al multiplicar la primera por –2). Por tanto el "sistema" tendrá *infinitas soluciones* que son las correspondientes a una sola ecuación lineal con dos incógnitas.

Si trabajamos únicamente con la primera ecuación (igualmente lo podríamos hacer con la segunda) ésta se puede escribir como

$$x = 2 + 3y$$

En ella puedes dar a y los valores que desees y obtendrás los correspondientes valores de x.

Por ejemplo: si $y = 0$ es $x = 2$; si $y = 1$ es $x = 5$; si $y = -1$ es $x = -1$ y así sucesivamente puedes hallar soluciones particulares al "sistema" propuesto.

Diremos que un sistema es *compatible indeterminado* cuando tenga *infinitas soluciones*.

Un sistema compatible indeterminado se caracteriza por tener todos los coeficientes proporcionales. Observa que el sistema propuesto

$$\left.\begin{array}{l} x-3y=2 \\ -2x+6y=-4 \end{array}\right\}$$ verifica lo dicho, pues $\frac{1}{-2}=\frac{-3}{6}=\frac{2}{-4}$

89

Sustituyendo en la primera $x = 3 \cdot (\frac{1}{2}) = \frac{3}{2}$

Solución: $x = \frac{3}{2}, y = \frac{1}{2}$

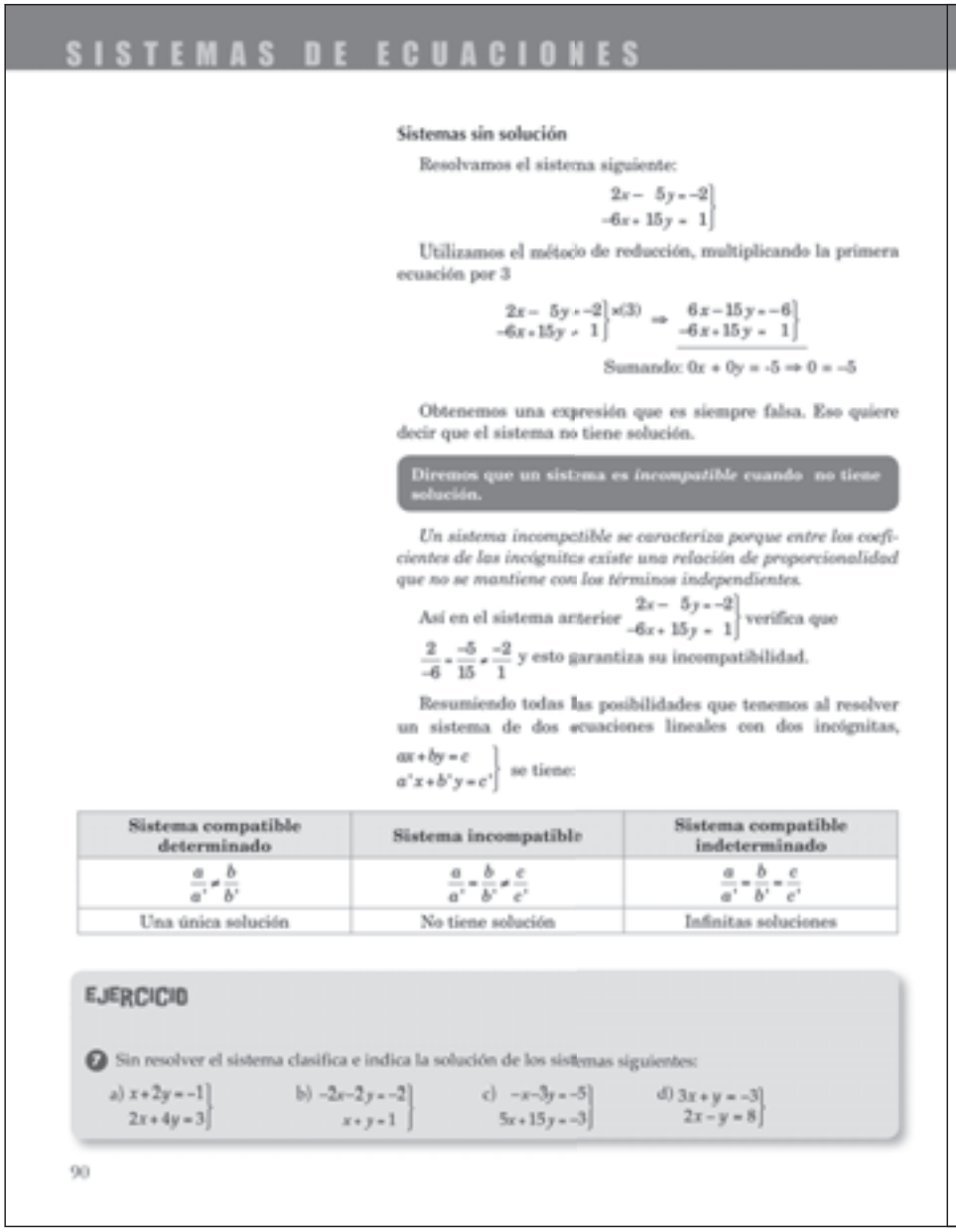
ORIENTACIONES DIDÁCTICAS

Es fundamental el recuadro de la página 90.

Discutir en clase expresiones del tipo

$$\left.\begin{array}{l} x+y=1 \\ x+y=0 \end{array}\right\} \text{ o } \left.\begin{array}{l} x+y=1 \\ x+y=1 \end{array}\right\}$$

▶ Pág. 90.



SISTEMAS DE ECUACIONES

Sistemas sin solución

Resolvamos el sistema siguiente:

$$\left.\begin{matrix} 2x - 5y = -2 \\ -6x + 15y = 1 \end{matrix}\right\}$$

Utilizamos el método de reducción, multiplicando la primera ecuación por 3

$$\left.\begin{matrix} 2x - 5y = -2 \\ -6x + 15y = 1 \end{matrix}\right\} \times(3) \Rightarrow \left.\begin{matrix} 6x - 15y = -6 \\ -6x + 15y = 1 \end{matrix}\right\}$$

Sumando: $0x + 0y = -5 \Rightarrow 0 = -5$

Obtenemos una expresión que es siempre falsa. Eso quiere decir que el sistema no tiene solución.

Diremos que un sistema es *incompatible* cuando no tiene solución.

Un sistema incompatible se caracteriza porque entre los coeficientes de las incógnitas existe una relación de proporcionalidad que no se mantiene con los términos independientes.

Así en el sistema anterior $\left.\begin{matrix} 2x - 5y = -2 \\ -6x + 15y = 1 \end{matrix}\right\}$ verifica que $\frac{2}{-6} = \frac{-5}{15} \neq \frac{-2}{1}$ y esto garantiza su incompatibilidad.

Resumiendo todas las posibilidades que tenemos al resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, $\left.\begin{matrix} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{matrix}\right\}$ se tiene:

Sistema compatible determinado	Sistema incompatible	Sistema compatible indeterminado
$\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$	$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$	$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$
Una única solución	No tiene solución	Infinitas soluciones

EJERCICIO

Sin resolver el sistema clasifica e indica la solución de los sistemas siguientes:

a) $\left.\begin{matrix} x + 2y = -1 \\ 2x + 4y = 3 \end{matrix}\right\}$ b) $\left.\begin{matrix} -2x - 2y = -2 \\ x + y = 1 \end{matrix}\right\}$ c) $\left.\begin{matrix} -x - 3y = -5 \\ 5x + 15y = -3 \end{matrix}\right\}$ d) $\left.\begin{matrix} 3x + y = -3 \\ 2x - y = 8 \end{matrix}\right\}$

90

SOLUCIONARIO

7. Sin resolver el sistema clasifica e indica la solución de los sistemas siguientes:

a) $\left.\begin{matrix} x + 2y = -1 \\ 2x + 4y = 3 \end{matrix}\right\}$ Incompatible puesto que $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} \neq -\frac{1}{3}$

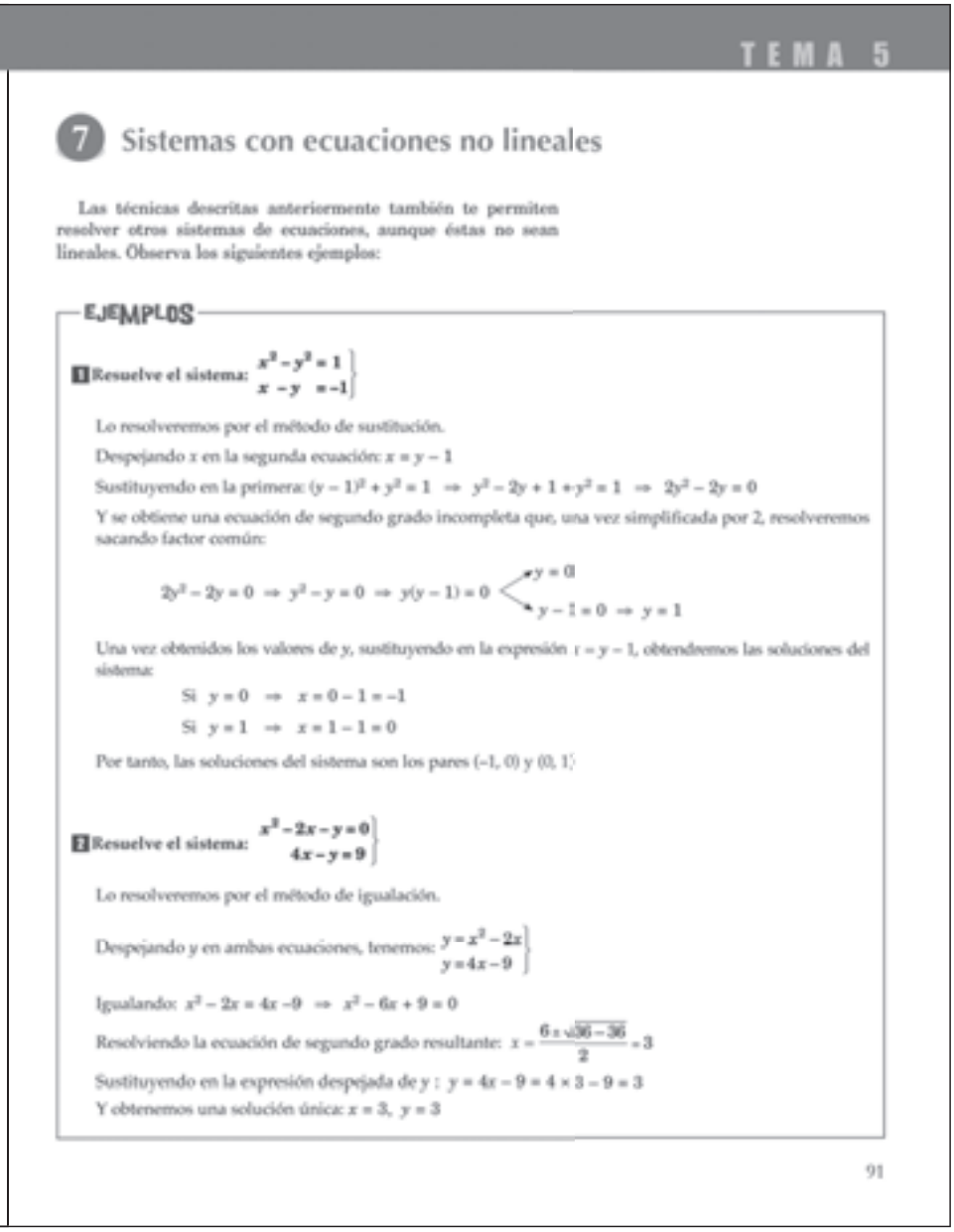
b) $\left.\begin{matrix} -2x - 2y = -2 \\ x + y = 1 \end{matrix}\right\}$ Compatible indeterminado puesto que

$$\frac{-2}{1} = \frac{-2}{1} = \frac{-2}{1}$$

c) $\left.\begin{matrix} -x - 3y = -5 \\ 5x + 15y = -3 \end{matrix}\right\}$ Incompatible puesto que $\frac{-1}{5} = \frac{-3}{15} \neq \frac{-5}{-3}$

d) $\left.\begin{matrix} 3x + y = -3 \\ 2x - y = 8 \end{matrix}\right\}$ Compatible determinado puesto que $\frac{3}{2} \neq \frac{1}{-1}$

▶ Pág. 91. 7 Sistemas con ecuaciones no lineales



TEMA 5

7 Sistemas con ecuaciones no lineales

Las técnicas descritas anteriormente también te permiten resolver otros sistemas de ecuaciones, aunque éstas no sean lineales. Observa los siguientes ejemplos:

EJEMPLOS

1 **Resuelve el sistema:** $\left.\begin{matrix} x^2 - y^2 = 1 \\ x - y = -1 \end{matrix}\right\}$

Lo resolveremos por el método de sustitución.

Despejando x en la segunda ecuación: $x = y - 1$

Sustituyendo en la primera: $(y-1)^2 + y^2 = 1 \Rightarrow y^2 - 2y + 1 + y^2 = 1 \Rightarrow 2y^2 - 2y = 0$

Y se obtiene una ecuación de segundo grado incompleta que, una vez simplificada por 2, resolveremos sacando factor común:

$$2y^2 - 2y = 0 \Rightarrow y^2 - y = 0 \Rightarrow y(y-1) = 0 \begin{cases} y = 0 \\ y - 1 = 0 \Rightarrow y = 1 \end{cases}$$

Una vez obtenidos los valores de y, sustituyendo en la expresión $x = y - 1$, obtendremos las soluciones del sistema:

Si $y = 0 \Rightarrow x = 0 - 1 = -1$

Si $y = 1 \Rightarrow x = 1 - 1 = 0$

Por tanto, las soluciones del sistema son los pares $(-1, 0)$ y $(0, 1)$.

2 **Resuelve el sistema:** $\left.\begin{matrix} x^2 - 2x - y = 0 \\ 4x - y = 9 \end{matrix}\right\}$

Lo resolveremos por el método de igualación.

Despejando y en ambas ecuaciones, tenemos: $\left.\begin{matrix} y = x^2 - 2x \\ y = 4x - 9 \end{matrix}\right\}$

Igualando: $x^2 - 2x = 4x - 9 \Rightarrow x^2 - 6x + 9 = 0$

Resolviendo la ecuación de segundo grado resultante: $x = \dfrac{6 \pm \sqrt{36 - 36}}{2} = 3$

Sustituyendo en la expresión despejada de y: $y = 4x - 9 = 4 \cdot 3 - 9 = 3$

Y obtenemos una solución única: $x = 3$, $y = 3$

91

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS

Es importante llegar a obtener todas las soluciones.

▶ Pág. 94. Ejercicios



SISTEMAS DE ECUACIONES

EJERCICIOS

SOLUCIONARIO

Del 8 al 13, da en cada caso cuatro pares (*x*, y) de soluciones particulares de la ecuación propuesta:

8. $2x - 5y = 7$

$\left(0,-\frac{7}{5}\right)$, $(1,-1)$, $\left(2,-\frac{3}{5}\right)$, $\left(3,-\frac{1}{5}\right)$ en general:

$\left(x,\frac{2x-7}{5}\right)$

9. $-x + 6y = -1$

(1, 0), (7, 1), (13, 2), (19, 3); en general:

$\left(x,\frac{-1+x}{6}\right)$

10. $4x + 3y = 9$

$(0,3)$, $\left(1,\frac{5}{3}\right)$, $\left(2,\frac{1}{3}\right)$, $(3,-1)$ en general: $\left(x,\frac{9-4x}{3}\right)$

11. $x - 3y = 4$

(4, 0), (7, 1), (10, 2), (13, 3), en general:

$\left(x,\frac{x-4}{3}\right)$

12. $-3x + y = 3$

(0, 3), (1, 6), (2, 9), (3, 12), en general: $(x, 3 + 3x)$

13. $x - y = 4$

(0, –4), (1, –3), (2, –2), (3, –1), en general: $(x, x - 4)$

Del 14 al 16, copia y completa los pares dados para que sean solución particular de la ecuación propuesta.

14. $-2x + y = 3$; (0, 3) (–1, 1) (2, 7) (1, 5)

15. $x + y = 5$; (0, 5) (5, 0) (3, 2) (2, 3)

16. $x - 3y = 0$; (0, 0) $(1, \frac{1}{3})$ $(1, \frac{1}{3})$ (6, 2)

17. Calcula el valor de *m* y *n* para que los sistemas siguientes tengan como solución la que se indica:

a) $\left.\begin{matrix} x-2y=m \\ 2x+y=n \end{matrix}\right\}$ solución (–1, 2)

$-1 - 2\,(2) = m \Rightarrow\ m = -5$

$2(-1) + 2 = n \Rightarrow\ n = 0$

b) $\left.\begin{matrix} -5x+4y=m \\ 3x-4y=n \end{matrix}\right\}$ solución (2, –3)

$-5 \cdot 2 + 4\,(-3) = m \Rightarrow\ m = -22$

$3 \cdot 2 - 4\,(-3) = n \Rightarrow\ n = 18$

c) $\left.\begin{matrix} \frac{x}{5}-2y=m \\ x+\frac{y}{3}=n \end{matrix}\right\}$ solución (5, 3)

$\frac{5}{5} - 2 \cdot 3 = m \Rightarrow m = -5$

$5 + \frac{3}{3} = n \Rightarrow n = 6$

d) $\left.\begin{matrix} \frac{x}{2}-\frac{y}{3}=m \\ \frac{x}{3}+\frac{5y}{2}=n \end{matrix}\right\}$ solución (6, 6)

$\frac{6}{2} - \frac{6}{3} = m \Rightarrow m = 1$

$\frac{6}{3} + \frac{5 \cdot 6}{2} = n \Rightarrow n = 17$

18. Comprueba cuál de las soluciones es la correcta en los sistemas siguientes:

a) $\left.\begin{matrix} -2x-3y=5 \\ 5x+2y=-7 \end{matrix}\right\}$ **solución (2, – 1) (–1, – 1) (–1, 2)**

Para el par (2, –1)

$-2 \cdot 2 - 3\,(-1) \neq 5 \Rightarrow$ (2, –1) no es la solución

Para el par (–1, –1)

$\left.\begin{matrix} -2(-1)-3(-1)=5 \\ 5(-1)+2(-1)=-7 \end{matrix}\right\} \Rightarrow (-1,-1)$ sí es solución

Para el par (–1, 2)

$-2\,(-1) - 3 \cdot 2 \neq 5 \Rightarrow$ (–1, 2) no es la solución

La solución es el par (–1, –1)

b) $\left.\begin{matrix} x+5y=2 \\ 4x-y=-13 \end{matrix}\right\}$ **solución (–3, 1) (–3, – 1) (3, – 1)**

Para el par (–3, 1)

$\left.\begin{matrix} -3+5 \cdot 1=2 \\ 4 \cdot (-3)-1=-13 \end{matrix}\right\} \Rightarrow (-3,\ 1)$ sí es solución

Para el par (–3, –1)

$-3 + 5\,(-1) \neq 2 \Rightarrow$ (–3, –1) no es la solución

Para el par (3, –1)

$3 + 5\,(-1) \neq 2 \Rightarrow$ (3, –1) no es la solución

La solución es el par (–3, 1)

c) $\left.\begin{matrix} 7x-y=-11 \\ 2x+y=-7 \end{matrix}\right\}$ **solución (2, 3) (–2, 3) (–2, –3)**

Para el par (2, 3)

$7 \cdot 2 - 3 \neq -11 \Rightarrow$ (2, 3) no es la solución

Para el par (–2, 3)

$7 \cdot (-2) - 3 \neq -11 \Rightarrow$ (–2, 3) no es la solución

Para el par (–2, –3)

$\left.\begin{matrix} 7(-2)-(-3)=-11 \\ 2(-2)+(-3)=-7 \end{matrix}\right\} \Rightarrow (-2,-3)$ sí es solución

La solución es el par (–2, –3)

d) $\left.\begin{matrix} x+4y=10 \\ 4x-y=23 \end{matrix}\right\}$ **solución (1, 6) (6, 1) (6, 6)**

Para el par (1, 6)

$1 + 4 \cdot 6 \neq 10 \Rightarrow$ (1, 6) no es la solución

Para el par (6, 1)

$\left.\begin{matrix} 6+4 \cdot 1=10 \\ 4 \cdot 6-1=23 \end{matrix}\right\} \Rightarrow (6,\ 1)$ sí es solución

Para el par (6, 6)

$6 + 4 \cdot 6 \neq 10 \Rightarrow$ (3, –1) no es la solución

La solución es el par (6, 1)

19. Resuelve mentalmente los siguientes sistemas:

a) $\left.\begin{matrix} x-3y=4 \\ 3y=2 \end{matrix}\right\}$ $x = 6,\ y = \frac{2}{3}$

b) $\left.\begin{matrix} x-y=0 \\ 3x+y=8 \end{matrix}\right\}$ $x = 2,\ y = 2$

c) $\left.\begin{matrix} 3x-y=5 \\ 3x=9 \end{matrix}\right\}$ $x = 3,\ y = 4$

d) $\left.\begin{matrix} x=3y \\ x+4y=2 \end{matrix}\right\}$ $x = 6,\ y = 2$

e) $\left.\begin{matrix} x=4 \\ 3x+y=2 \end{matrix}\right\}$ $x = 4,\ y = -10$

f) $\left.\begin{matrix} x+y=0 \\ x-y=6 \end{matrix}\right\}$ $x = 3,\ y = -3$

20. En el sistema siguiente: $\left.\begin{matrix} ax+2y=3 \\ x-y=b \end{matrix}\right\}$ **determina si es posible los valores que puedan tomar a y b para que:**

a) El par (3, –1) sea solución del sistema

b) El par (0, 0) sea solución del sistema

a) $3a + 2(-1) = 3 \Rightarrow 3a = 5 \Rightarrow a = \frac{5}{3}$;
$3 - (-1) = b \Rightarrow b = 4$

b) El par (0, 0) nunca puede ser solución porque $a \cdot 0 + 2 \cdot 0 \neq 3$ independientemente del valor de a.

Del 21 al 23. Resuelve por el método de reducción los sistemas siguientes:

21. a) $\left.\begin{matrix} -4x+y=-7 \\ x-2y=0 \end{matrix}\right\} \times 4 \Rightarrow \left.\begin{matrix} -4x+y=-7 \\ 4x-8y=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} -7y=-7 \\ 4x-8y=0 \end{matrix}\right\}$

de la primera ecuación se obtiene $y = 1$ y de la segunda deducimos

$4x = 8 \Rightarrow x = 2$

Solución: $x = 2, y = 1$

b) $\left.\begin{matrix} x-y=5 \\ 3x-2y=13 \end{matrix}\right\} \times(-3) \Rightarrow \left.\begin{matrix} -3x+3y=-15 \\ 3x-2y=13 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} y=-2 \\ 3x-2y=13 \end{matrix}\right\}$

El valor obtenido de y se sustituye en la segunda ecuación y se obtiene:

$3x = 9 \Rightarrow x = 3$

Solución: $x = 3, \ y = -2$

22. a) $\left.\begin{matrix} x+2y=5 \\ 2x-y=-5 \end{matrix}\right\} \times(-2) \Rightarrow \left.\begin{matrix} -2x-4y=-10 \\ 2x-y=-5 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} -5y=-15 \\ 2x-y=-5 \end{matrix}\right\}$

De la primera se obtiene $y = 3$ y de la segunda ecuación deducimos:

$2x = -2 \Rightarrow x = -1$

Solución: $x = -1, \ y = 3$

b) $\left.\begin{matrix} 4x+y=0 \\ 2x+3y=7 \end{matrix}\right\} \times(-2) \Rightarrow \left.\begin{matrix} 4x+y=0 \\ -4x-6y=-14 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 4x+y=0 \\ -5y=-14 \end{matrix}\right\}$

De la segunda ecuación se deduce $y = \frac{14}{5}$ y de la primera deducimos

$4x = -\frac{14}{5} \Rightarrow x = -\frac{7}{10}$

Solución: $x = -\frac{7}{10}; \ y = \frac{14}{5}$

23. a) $\left.\begin{matrix} 3x+3y=4 \\ x+6y=3 \end{matrix}\right\} \times(-3) \Rightarrow \left.\begin{matrix} 3x+3y=4 \\ -3x-18y=-9 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 3x+3y=4 \\ -15y=-5 \end{matrix}\right\}$

De la segunda ecuación se deduce $y = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$ y de la primera deducimos

$3x = 4 - 3\left(\frac{1}{3}\right) \Rightarrow x = 1$

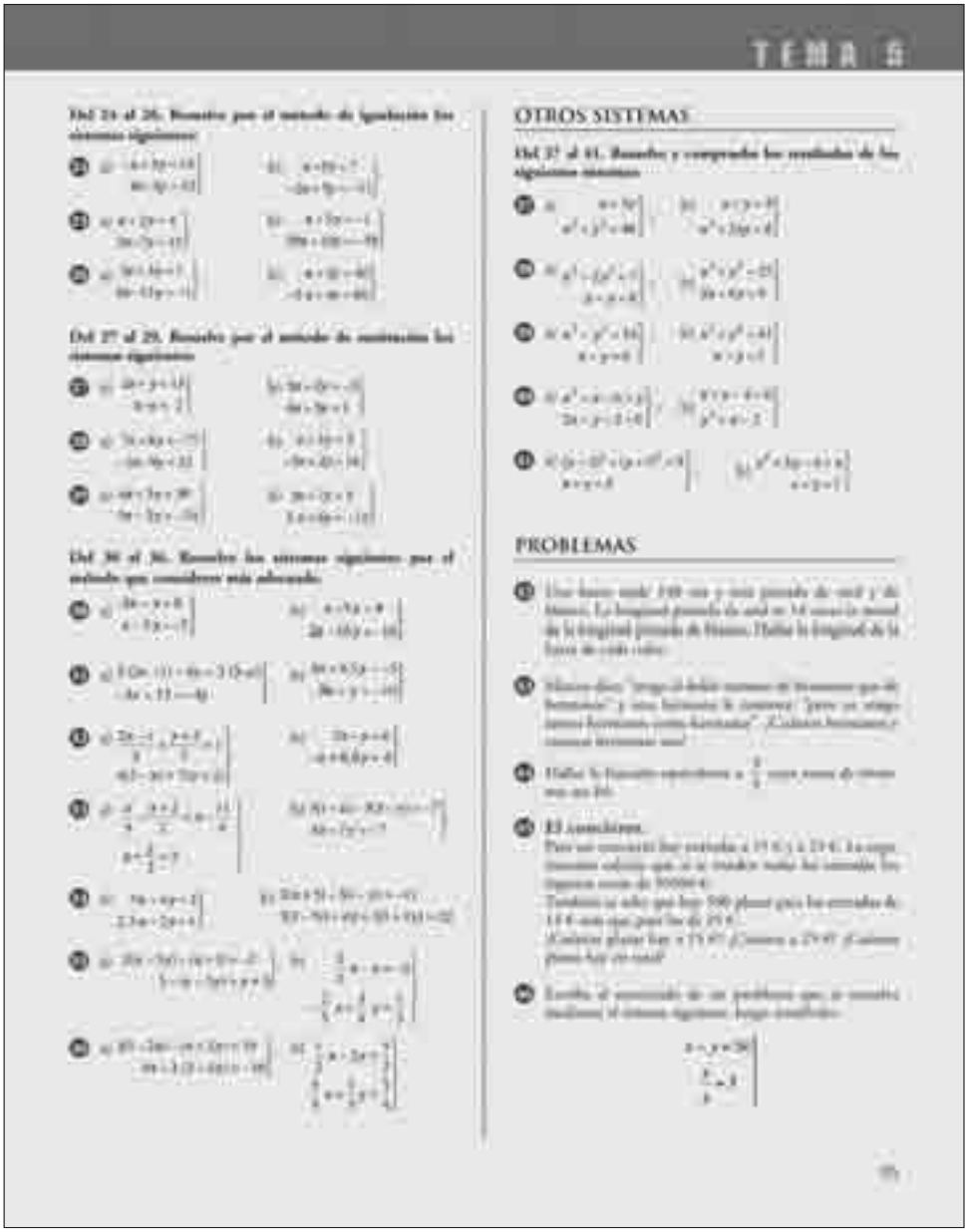
Solución: $x = 1, \ y = \frac{1}{3}$

b) $\left.\begin{matrix} 5x-y=-1 \\ -10x-y=0 \end{matrix}\right\} \times 2 \Rightarrow \left.\begin{matrix} 10x-2y=-2 \\ -10x-y=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} -3y=-2 \\ -10x-y=0 \end{matrix}\right\}$

De la primera ecuación se deduce $y = \frac{2}{3}$ y de la segunda deducimos $10x = -\frac{2}{3} \Rightarrow x - \frac{1}{15}$

Solución: $x = -\frac{1}{15}, \quad y = \frac{2}{3}$

▶ Pág. 95. Ejercicios


TEMA 5

OTROS SISTEMAS

PROBLEMAS

SOLUCIONARIO

Del 24 al 26. Resuelve por el método de igualación los sistemas siguientes:

24. a) $\left.\begin{matrix} -x+3y=19 \\ 4x-3y=32 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x=3y-19 \\ x=\dfrac{32+3y}{4} \end{matrix}\right\} \Rightarrow 3y-19=\dfrac{32+3y}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow 9y=108 \Rightarrow y=12$

Sustituyendo en la primera ecuación
$x = 3(-12) - 19 = 17$

Solución: $x = 17,\ y = 12$

b) $\left.\begin{matrix} x-3y=7 \\ -2x+5y=-11 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x=3y+7 \\ x=\dfrac{5y+11}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow 3y+7=\dfrac{5y+11}{2}$

$\Rightarrow\ 6y + 14 = 5y + 11 \Rightarrow\ y = -3$

Sustituyendo en la primera $x = 3\ (-3) + 7 = -2$

Solución: $x = -2, y = -3$

25. a) $\left.\begin{matrix} x+2y=4 \\ 3x-7y=12 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x=4-2y \\ x=\dfrac{12+7y}{3} \end{matrix}\right\} \Rightarrow 4-2y=\dfrac{12+7y}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow 12 - 6y = 12 + 7y \Rightarrow\ 13y = 0 \Rightarrow\ y = 0$

Sustituyendo en la primera $x = 4$

Solución: $x = 4,\quad y = 0$

b) $\left.\begin{matrix} x+5y=-1 \\ 30x+10y=-58 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x+5y=-1 \\ 15x+5y=-29 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x=-1-5y \\ x=\dfrac{-29-5y}{15} \end{matrix}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow -1-5y=\dfrac{-29-5y}{15} \Rightarrow 15+75y=29+5y \Rightarrow$

$\Rightarrow 70y=14 \Rightarrow \ y=\dfrac{14}{70}=\dfrac{1}{5}$

Sustituyendo en la primera $x = -1 - 1 = -2$

Solución: $x = -2,\ y=\dfrac{1}{5}$

26. a) $\left.\begin{matrix} 2x+3y=1 \\ 6x-12y=-1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x=\dfrac{1-3y}{2} \\ x=\dfrac{-1+12y}{6} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \dfrac{1-3y}{2}=\dfrac{-1+12y}{6} \Rightarrow$

$\Rightarrow 3-9y=-1+12y \Rightarrow \ 21y=4 \Rightarrow y=\dfrac{4}{21}$

Sustituyendo en la primera $x=\dfrac{1-3\frac{4}{21}}{2}=\dfrac{1-\frac{4}{7}}{2}=\dfrac{3}{14}$

Solución: $x=\dfrac{3}{14}, \quad y=\dfrac{4}{21}$

b) $\left.\begin{matrix} x+2y=40 \\ -3x+4y=60 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} y=\dfrac{40-x}{2} \\ y=\dfrac{60+3x}{4} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \dfrac{40-x}{2}=\dfrac{60+3x}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow 80 - 2x = 60 + 3x \Rightarrow 5x = 20 \Rightarrow \ x = 4$

Sustituyendo en la primera $y=\dfrac{40-4}{2}=18$

Solución: $x = 4,\ \ y = 18$

Del 27 al 29. Resuelve por el método de sustitución los sistemas siguientes:

27. a) $\left.\begin{matrix} 2x+y=13 \\ x-y=2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x=2+y$

Sustituyendo en la primera $2\ (2 + y) + y = 13 \Rightarrow$
$\Rightarrow 3y = 9 \Rightarrow y = 3$

Sustituyendo en la x despejada $x = 2 + 3 = 5$

Solución: $x = 5,\ \ y = 3$

b) $\left.\begin{matrix} 3x+2y=-3 \\ 6x+3y=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x=\dfrac{-3-2y}{3}$

Sustituyendo en la segunda

$6\left(\dfrac{-3-2y}{3}\right)+3y=1 \Rightarrow -6-4y+3y=1 \Rightarrow y=-7$

Sustituyendo en la x despejada: $x=\dfrac{-3+14}{3}=\dfrac{11}{3}$

Solución: $x=\dfrac{11}{3}, \quad y=-7$

28. a) $\left.\begin{matrix} 7x+8y=-77 \\ -2x-9y=22 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x=\dfrac{-9y-22}{2}$

Sustituyendo en la primera

$7\left(\dfrac{-9y-22}{2}\right)+8y=-77 \Rightarrow -63y-154+16y=-154 \Rightarrow$

$\Rightarrow 47y=0 \Rightarrow y=0$

Sustituyendo en la x despejada $x=-\dfrac{22}{2}=-11$

Solución: $x = -11,\ \ y = 0$

b) $\left.\begin{matrix} x+3y=2 \\ -3x+2y=16 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x=2-3y$

Sustituyendo en la segunda $-3(2 - 3y) + 2y = 16 \Rightarrow$
$\Rightarrow 11y = 22 \Rightarrow \ y = 2$

Sustituyendo en la x despejada $x = 2 - 6 = -4$

Solución: $x = -4,\ \ y = 2$

29. a) $\left.\begin{matrix} 6x+5y=30 \\ 5x-2y=-24 \end{matrix}\right\} \Rightarrow y=\dfrac{5x+24}{2}$

Sustituyendo en la primera

$6x+5\left(\dfrac{5x+24}{2}\right)=30 \Rightarrow 12x+25x+120=60 \Rightarrow$

$\Rightarrow 37x=-60 \Rightarrow x=-\dfrac{60}{37}$

Sustituyendo en la y despejada

$y=\dfrac{-\frac{300}{37}+24}{2}=\dfrac{-300+888}{2\circ 37}=\dfrac{588}{2\circ 37}=\dfrac{294}{37}$

Solucion: $x=-\dfrac{60}{37}, \quad y=\dfrac{294}{37}$

b) $\left.\begin{matrix} 3x+7y=3 \\ 5x+6y=-12 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x=\dfrac{3-7y}{3}$

Sustituyendo en la segunda

$5\left(\dfrac{3-7y}{3}\right)+6y=-12 \Rightarrow 15-35y+18y=-36 \Rightarrow$

$\Rightarrow 17y=51 \Rightarrow y=3$

Sustituyendo en la x despejada $x=\dfrac{3-21}{3}=-6$

Solución: $x = -6,\ \ y = 3$

Del 30 al 36. Resuelve los sistemas siguientes por el método que consideres más adecuado.

30. a) $\left.\begin{matrix} -3x+y=0 \\ x-5y=-5 \end{matrix}\right\} \Rightarrow y=3x$

Sustituyendo en la segunda $x - 15x = -5 \Rightarrow$
$\Rightarrow 14x = = 5 \Rightarrow x = \dfrac{5}{14}$ Asi: $y = \dfrac{15}{14}$

Solución: $x=\dfrac{5}{14}, \quad y=\dfrac{15}{14}$. Resuelto por el método de sustitución.

b) $\left.\begin{array}{l} x+5y=8 \\ 2x-10y=-16 \end{array}\right\} \Rightarrow x=8-5y$

Sustituyendo en la segunda

$16-10y-10y=-16 \Rightarrow 20y=32 \Rightarrow y=\frac{8}{5}$

Asi: $x=8-\frac{40}{5}=0$

Solución: $x=0,\ y=\frac{8}{5}$. Resuelto por el método de sustitución.

31. a) $\left.\begin{array}{l} 3(2x-1)-4y=3(3-x) \\ -3x+12=-4y \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 6x-3-4y=9-3x \\ -3x+4y=-12 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\left.\begin{array}{l} 9x-4y=12 \\ -3x+4y=-12 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 9x-4y=12 \\ 6x=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 9x-4y=12 \\ x=0 \end{array}\right\}$

Sustituyendo el valor de la x en la primera $-4y=12 \Rightarrow y=-3$

Solución: $x=0, y=-3$. Resuelto por el método de reducción.

b) $\left.\begin{array}{l} 4x+0,5y=-5 \\ 8x+y=-10 \end{array}\right\} \begin{array}{l}\times 2 \\ \ \end{array} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 8x+y=-10 \\ 8x+y=-10 \end{array}\right\}$

Las dos ecuaciones son la misma, el sistema es compatible indeterminado

$8x+y=-10 \Rightarrow y=-8x-10$

Solución: x puede tomar cualquier valor, $y=-8x+10$. Resuelto por el método de reducción.

32. a)

$\left.\begin{array}{l} \frac{2x-1}{3}+\frac{y+2}{5}=1 \\ 4(2-x)=7(y+2) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 10x-5+3y+6=15 \\ 8-4x=7y+14 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 10x+3y=14 \\ 4x+7y=-6 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\left.\begin{array}{l} x=\frac{14-3y}{10} \\ x=\frac{-6-7y}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{14-3y}{10}=\frac{-6-7y}{4} \Rightarrow 28-6y=-30-35y \Rightarrow$

$\Rightarrow 29y=-58 \Rightarrow y=-2$

Sustituyendo en la primera $x=\frac{14+6}{10}=2$

Solución: $x=2, y=-2$. Resuelto por el método de deducción.

b) $\left.\begin{array}{l} 2x-y=6 \\ -x+0,5=6 \end{array}\right\} \begin{array}{l}\ \\ \times 2\end{array} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x-y=6 \\ -2x+y=12 \end{array}\right\} \Rightarrow 0=18$

El sistema es incompatible, no tiene solución. Resuelto por el método de reducción.

33. a) $\left.\begin{array}{l} \frac{x}{3}-\frac{y+2}{2}=x-\frac{11}{6} \\ x+\frac{y}{2}=3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x-3(y+2)=6x-11 \\ 2x+y=6 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} 4x+3y=5 \\ 2x+y=6 \end{array}\right\} \Rightarrow y=6-2x$

Sustituyendo en la primera

$4x+3(6-2x)=5 \Rightarrow 2x=13 \Rightarrow x=\frac{13}{2}$

Sustituyendo en la y despejada $y=6-2\cdot\frac{13}{2}=-7$

Solucion: $x=\frac{13}{2}$, $y=-7$. Resuelto por el método de sustitución.

b) $\left.\begin{array}{l} 5(1-x)-3(3-y)=-7 \\ 3x+7y=-7 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 5-5x-9+3y=-7 \\ 3x+7y=-7 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} 5x-3y=3 \\ 3x+7y=-7 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=\frac{3+3y}{5} \\ x=\frac{-7-7y}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{3+3y}{5}=\frac{-7-7y}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow 9+9y=-35-35y \Rightarrow 44y=-44 \Rightarrow y=-1$

Sustituyendo en la primera $x=\frac{3+3(-1)}{5}=0$

Solución: $x=0, y=-1$. Resuelto por el método de igualación.

34. a) $\left.\begin{array}{l} 5x-4y=2 \\ 2,5x-2y=1 \end{array}\right\} \begin{array}{l}\ \\ \times 2\end{array} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 5x-4y=2 \\ 5x-4y=2 \end{array}\right\}$

Las dos ecuaciones son la misma, el sistema es compatible indeterminado

$5x-4y=2 \Rightarrow y=\frac{5x-2}{4}$

Solución: x puede tomar cualquier valor, $y=\frac{5x-2}{4}$. Resuelto por el método de reducción.

b) $\left.\begin{array}{l} 2(x+5)-3(1-y)=-11 \\ 3(2-5(1+x))+2(1+2y)=22 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\left.\begin{array}{r} 2x+10-3+3y=-11 \\ 3(2-5-5x)+2+4y=22 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x+3y=-18 \\ 15x-4y=-29 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=\frac{-18-3y}{2} \\ x=\frac{-29+4y}{15} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{-18-3y}{2}=\frac{-29+4y}{15} \Rightarrow$

$\Rightarrow x=\frac{-18-3(-4)}{2}=\frac{-6}{2}=-3 \Rightarrow -207-45y=-58+8y \Rightarrow$

$\Rightarrow 53y=-212 \Rightarrow y=-4$

Sustituyendo en la primera $x=\frac{-18-3(-4)}{2}=\frac{-6}{2}=-3$

Solución: $x=-3,\ y=-4$. Resuelto por el método de igualación.

35. a) $\left.\begin{array}{l} 2(x-5y)-(x+1)=-2 \\ 5-(x-2y)=x+3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x-10y-x-1=-2 \\ 5-x+2y=x+3 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} x-10y=-1 \\ -2x+2y=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x-10y=-1 \\ -x+y=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} x-10y=-1 \\ -9y=-2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x-10y=-1 \\ y=\dfrac{2}{9} \end{matrix}\right\}$$

Sustituyendo el valor de y en la primera

$$x-10\left(\frac{2}{9}\right)=-1 \Rightarrow x=-1+\frac{20}{9}=\frac{11}{9}$$

Solución: $x=\dfrac{11}{9}$, $y=\dfrac{2}{9}$ Resuelto por el método de reducción.

b) $\left.\begin{matrix} \dfrac{2}{3}x-y=-2 \\ -\dfrac{2}{5}x+\dfrac{3}{4}y=\dfrac{1}{3} \end{matrix}\right\} \begin{matrix} \times 3 \\ \times 60 \end{matrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 2x-3y=-6 \\ -24x+45y=20 \end{matrix}\right\} \times 12 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} 24x-36y=-72 \\ -24x+45y=20 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 24x-36y=-72 \\ 9y=-52 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} 24x-36y=-72 \\ y=-\dfrac{52}{9} \end{matrix}\right\}$$

Sustituimos el valor de y en la ecuación $2x - 3y = -6$ que es equivalente a $24x - 36y = -72$

$$2x-3\left(-\frac{52}{9}\right)=-6 \Rightarrow 2x=-6-\frac{52}{3}=-\frac{70}{3} \Rightarrow x=-\frac{35}{3}$$

Solución: $x=-\dfrac{35}{3}$, $y=-\dfrac{52}{9}$. Resuelto por el método de reducción

36. a) $\left.\begin{matrix} 3(1-2x)-(x+2y)=10 \\ 4x-3(2-4y)=-10 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 3-6x-x-2y=10 \\ 4x-6+12y=-10 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} 7x+2y=-7 \\ 4x+12y=-4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x=-1-3y$$

Sustituyendo en la primera

$7(-1 - 3y) + 2y = -7 \Rightarrow 19y = 0 \Rightarrow y = 0$

Sustituyendo en la x despejada $x = -1$

Solución: $x = -1$, $y = 0$. Resuelto por el método de sustitución.

b) $\left.\begin{matrix} \dfrac{1}{2}x-2y=\dfrac{5}{2} \\ \dfrac{3}{4}x+\dfrac{1}{3}y=\dfrac{5}{4} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x-4y=5 \\ 9x+4y=15 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x=5+4y$

Sustituyendo en la segunda $9(5 + 4y) + 4y = 15 \Rightarrow$

$40y = -30 \Rightarrow y = -\dfrac{3}{4}$

Sustituyendo en la x despejada $x=5+4\left(-\dfrac{3}{4}\right)=2$

Solución: $x = 2$, $y=-\dfrac{3}{4}$. Resuelto por el método de sustitución

Del 37 al 41. Resuelve y comprueba los resultados de los siguientes sistemas.

37. a) $\left.\begin{matrix} x=3y \\ x^2+y^2=40 \end{matrix}\right\}$

Sustituyendo el valor de x en la segunda

$10x^2 = 40 \Rightarrow y^2 = 4 \Rightarrow y = 2$ e $y = -2$

Para $y = 2 \Rightarrow x = 6$

Para $y = -2 \Rightarrow x = -6$

El sistema tiene dos soluciones (6, 2) y (–6, –2)

Evidentemente las dos satisfacen las dos ecuaciones del sistema.

b) $\left.\begin{matrix} x+y=3 \\ x^2+2xy=8 \end{matrix}\right\} \Rightarrow y=3-x$

Sustituyendo en la segunda $x^2 + 2x(3 - x) = 8 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + 6x - 2x^2 = 8 \Rightarrow x^2 - 6x + 8 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x=\frac{6\pm\sqrt{36-32}}{2}=\frac{6\pm\sqrt{4}}{2}=\frac{6\pm 2}{2}=3\pm 1=\begin{cases}4\\2\end{cases}$$

Para $x = 4 \Rightarrow y = 3 - 4 = -1$

Para $x = 2 \Rightarrow y = 3 - 2 = 1$

El sistema tiene dos soluciones (4, –1) y (2, 1)

Evidentemente las dos satisfacen las dos ecuaciones del sistema.

38. a) $\left.\begin{matrix} x^2-2y^2=7 \\ x-y=8 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x=8+y$

Sustituyendo en la primera

$64 + 16y + y^2 - 2y^2 = 7 \Rightarrow y^2 - 16y - 57 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow y=\frac{16\pm\sqrt{256+228}}{2}=\frac{16\pm\sqrt{484}}{2}=\frac{16\pm 22}{2}=8\pm 11=\begin{cases}19\\-3\end{cases}$$

Para $y = 19 \Rightarrow x = 8 + 19 = 27$

Para $y = -3 \Rightarrow x = 8 - 3 = 5$

El sistema tiene dos soluciones (27, 19) y (5, –3)

(27, 19) es solución pues $27^2 - 2 \cdot 19^2 = 729 - 2 \cdot 361 = 7$ y la segunda ecuación evidentemente la verifica

(5, –3) es solución pues $5^2 - 2 \cdot (-3)^2 = 25 - 2 \cdot 9 = 7$ y la segunda ecuación evidentemente la verifica.

b) $\left.\begin{matrix} x^2+y^2=25 \\ 3x+4y=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow y=-\dfrac{3}{4}x$

Sustituyendo en la primera

$$x^2+\frac{9}{16}x^2=25 \Rightarrow 25x^2=16\cdot 25 \Rightarrow x^2=16 \Rightarrow x=4 \text{ y } x=-4$$

Para $x = 4 \Rightarrow y = -\dfrac{3}{4} \times 4 = -3$

Para $x = -4 \Rightarrow y = -\frac{3}{4}(-4) = 3$

El sistema tiene dos soluciones: (4, –3) y (–4, 3)

Evidentemente las dos satisfacen las dos ecuaciones del sistema.

39. a) $\left.\begin{matrix} x^2 - y^2 = 54 \\ x - y = 6 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x = 6 + y$

Sustituyendo en la primera

$36 + 12y + y^2 - y^2 = 54 \Rightarrow 12y = 18 \Rightarrow y = \frac{3}{2}$

Sustituyendo en la x despejada $x = 6 + \frac{3}{2} = \frac{15}{2}$

Solución: $x = \frac{15}{2}$, $y = \frac{3}{2}$

Efectivamente es solución porque $\left(\frac{15}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{225}{4} - \frac{9}{4} = \frac{216}{4} = 54$ y la otra ecuación evidentemente la satisface.

b) $\left.\begin{matrix} x^2 + y^2 = 41 \\ x - y = 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x = 1 + y$

Sustituyendo en la primera

$1 + 2y + y^2 + y^2 = 41 \Rightarrow 2y^2 + 2y - 40 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow y^2 + y - 20 = 0 \Rightarrow y = \frac{-1 \pm \sqrt{1+80}}{2} = \frac{-1 \pm 9}{2} \left\langle \begin{matrix} 4 \\ -5 \end{matrix}\right.$

Para $y = 4 \Rightarrow x = 1 + 4 = 5$

Para $y = -5 \Rightarrow x = 1 - 5 = -4$

El sistema tiene dos soluciones: (5, 4) y (– 4, – 5)

Evidentemente las dos satisfacen las dos ecuaciones del sistema.

40. a) $\left.\begin{matrix} x^2 - x - 6 = y \\ 2x - y - 2 = 0 \end{matrix}\right\}$

Sustituimos en la segunda el valor de y de la primera

$2x - (x^2 - x - 6) - 2 = 0 \Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} = \left\langle \begin{matrix} 4 \\ -1 \end{matrix}\right.$

Para $x = 4 \Rightarrow y = 16 - 4 - 6 = 6$

Para $x = -1 \Rightarrow y = 1 + 1 - 6 = -4$

Comprobamos que son soluciones.

Para la (4, 6) $\Rightarrow$ $\left.\begin{matrix} 16 - 4 - 6 = 6 \\ 8 - 6 - 2 = 0 \end{matrix}\right\}$

Para la (–1, –4) $\Rightarrow$ $\left.\begin{matrix} 1 - (-1) - 6 = -4 \\ 2(-1) - (-4) - 2 = 0 \end{matrix}\right\}$

b) $\left.\begin{matrix} x + y - 4 = 0 \\ y^2 = x - 2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x = 4 - y$

Sustituimos en la segunda

$y^2 = 4 - y - 2 \Rightarrow y^2 + y - 2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow y = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \left\langle \begin{matrix} 1 \\ -2 \end{matrix}\right.$

Para $y = 1 \Rightarrow x = 4 - 1 = 3$

Para $y = -2 \Rightarrow x = 4 - (-2) = 6$

El sistema tiene dos soluciones: (3, 1) y (6, –2)

Evidentemente las dos satisfacen las dos ecuaciones del sistema.

41. a) $\left.\begin{matrix} (x-2)^2 + (y+1)^2 = 9 \\ x + y = 4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x = 4 - y$

Sustituyendo en la primera $(4 - y - 2)^2 + (y + 1)^2 = 9 \Rightarrow$

$\Rightarrow (2 - y)^2 + (y + 1)^2 = 9 \Rightarrow 4 - 4y + y^2 + y^2 + 2y + 1 =$

$= 9 \Rightarrow y^2 - y - 2 = 0 \Rightarrow y = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \left\langle \begin{matrix} 2 \\ -1 \end{matrix}\right.$

Para $y = 2 \Rightarrow x = 4 - 2 = 2$

Para $y = -1 \Rightarrow x = 4 + 1 = 5$

El sistema tiene dos soluciones: (2, 2) y (5, –1)

Evidentemente las dos satisfacen las dos ecuaciones del sistema.

b) $\left.\begin{matrix} y^2 + 3y - 4 = x \\ x + y = 1 \end{matrix}\right\}$

Sustituimos en la segunda el valor de x de la primera $y^2 + 3y - 4 + y = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow y^2 + 4y - 5 = 0 \Rightarrow y = \frac{-4 \pm \sqrt{16+20}}{2} = \frac{-4 \pm 6}{2} = \left\langle \begin{matrix} 1 \\ -5 \end{matrix}\right.$

Para $y = 1 \Rightarrow x = 1 + 3 - 4 = 0$

Para $y = -5 \Rightarrow x = 25 - 15 - 4 = 6$

El sistema tiene dos soluciones: (0, 1) y (6, –5)

Evidentemente las dos satisfacen las dos ecuaciones del sistema.

42. Una barra mide 148 cm y está pintada de azul y de blanco. La longitud pintada de azul es 14 veces la mitad de la longitud pintada de blanco. Hallar la longitud de la barra de cada color.

Si x es la longitud de la barra pintada de azul se tiene:

$x = 14\left(\frac{148 - x}{2}\right) \Rightarrow x = 1036 - 7x \Rightarrow 8x = 1036 \Rightarrow x = 129,5$

129,5 cm estan pintados de azul y 148 – 129,5 = = 18,5 cm estan pintados de blanco.

43. Marcos dice: "tengo el doble número de hermanas que de hermanos" y una hermana le contesta: "pero yo tengo tantos hermanos como hermanas". ¿Cuántos hermanos y cuántas hermanas son?

Si x es el número de hermanos y el de hermanas, se tiene según Marcos que $y = 2(x - 1)$ y según la hermana que $x = y - 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left.\begin{matrix} y = 2x - 2 \\ x = y - 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow y = 2(y - 1) - 2 \Rightarrow y = 2y - 2 - 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow y = 4$ y por tanto $x = 4 - 1 = 3$

Solución: son 3 hermanos y 4 hermanas.

44. Hallar la fracción equivalente a $\frac{3}{5}$ cuya suma de términos sea 64.

Si la fracción es $\frac{x}{y}$, se tiene:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{x}{y}=\frac{3}{5}\\ x+y=64\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}5x-3y=0\\ x+y=64\end{array}\right\}\Rightarrow y=64-x$$

Sustituyendo en la primera:

$5x - 3(64 - x) = 0 \Rightarrow 5x - 192 + 3x = 0 \Rightarrow 8x = 92 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = 24$

Entonces: $y = 64 - 24 = 40$

La fracción es: $\frac{24}{40}$

45. El concierto. Para un concierto hay entradas a 15 € y a 25 €. La organización calcula que si se venden todas las entradas los ingresos serán de 59500 €.

También se sabe que hay 500 plazas para las entradas de 15 € más que para las de 25 €.

¿Cuántas plazas hay a 15 €? ¿Cuántas a 25 €? ¿Cuántas plazas hay en total?

Si x es el número de entradas de 15 € e y el de 25 €, se tiene:

$$\left.\begin{array}{r}15x+25y=59500\\ x=y+500\end{array}\right\}$$ Sustituyendo el valor de x en la primera ecuación:

$15\ (y + 500) + 25y = 59500 \Rightarrow 40y = 52000 \Rightarrow$
$\Rightarrow y = 1300$

Sustituyendo en la segunda ecuación
$x = 1300 + 500 = 1800$.

Solución: hay 1800 entradas de 15 € y 1300 de 25 €

46. Escribe el enunciado de un problema que se resuelva mediante el sistema siguiente, luego resuélvelo: $\left.\begin{array}{r}\boldsymbol{x-y=56}\\ \boldsymbol{\frac{x}{y}=3}\end{array}\right\}$

Por ejemplo: la diferencia entre dos números es 56 y su cociente es 3. Calcular dichos números.

$$\left.\begin{array}{l}x-y=56\\ \frac{x}{y}=3\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}x-y=56\\ x=3y\end{array}\right\}\Rightarrow 3y-y=56\Rightarrow y=28$$

y por tanto $x = 3 \cdot 28 = 84$

▶ Pág. 96. Ejercicios


SISTEMAS DE ECUACIONES

47. Con una balanza. Las balanzas de las figuras siguientes están en equilibrio. Si cada manzana tiene masa *m* y cada pera tiene masa *p*, se pide:

a) Escribe las ecuaciones correspondientes a cada situación.

b) Resuelve el sistema formado por las dos ecuaciones y determina la masa de una manzana y la masa de una pera.

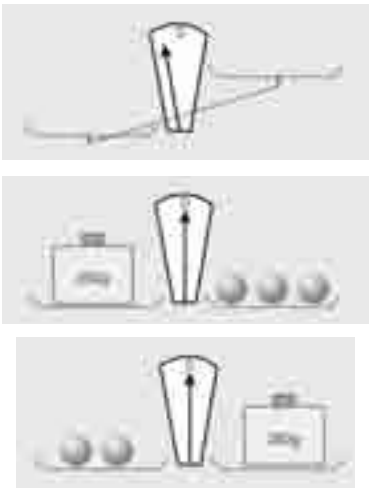


a) $m = p + 20$ y $2m = 3p$

b) $\left.\begin{matrix} m = p + 20 \\ 2m = 3p \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2(p + 20) = 3p \Rightarrow p = 40$

Sustityendo en la primera ecuación m = 40 +20 = 60.
Solución: la masa de la manzana es de 60g y la de la pera 40g.

48. Con otra balanza. Se dispone de una balanza mal construida pues el plato de la izquierda pesa más que el de la derecha. Sin embargo se consigue equilibrarla como muestran las figuras. ¿Cuál es la masa de cada bola?



Si el plato de la izuierda pesa x gramos más que el de la derecha, de las dos últimas figuras se tiene:

$$\left.\begin{matrix} x + 250 = 3b \\ x + 2b = 250 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x = 250 - 2b \Rightarrow 250 - 2b + 250 =$$

$= 3b \Rightarrow 5b = 500 \Rightarrow b = 100$

Solución: la masa de cada bola es de 100 g.

49. Un terreno rectangular tiene 140 m de perímetro. Si disminuye su longitud en 2 m y su anchura aumenta 2 m, su superficie aumenta en 16 m2. ¿Qué dimensiones tenía inicialmente el rectángulo?

Si x es la longitud e y la anchura del rectángulo, se tiene $2x + 2y = 140 \Rightarrow x + y = 70$.

Por otra parte $xy = 5$ (superficie del rectángulo)

$(x - 2)(y + 2) = 5 + 16 \Rightarrow xy + 2x - 2y - 4 = 5 + 16$

simplificando $2x - 2y = 20 \Rightarrow x - y = 10$

Hay que resolver el sistema:

$$\left.\begin{matrix} x + y = 70 \\ x - y = 10 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x = 10 + y \Rightarrow 10 + y + y = 70 \Rightarrow y = 30 \Rightarrow$$

$\Rightarrow x = 40$

Solución: la longitud del rectángulo es de 40 m y la anchura 3 m.

50. De compras. Dos amigos van de compras y uno lleva 12 € más que el otro. Después de haber gastado cada uno 36 €, el primero tiene el doble de lo que le queda al segundo.

¿Con cuánto dinero habían ido a comprar?

Si el que menos dinero lleva es x €, el otro lleva x +12 € y después de gastar 36 €, tienen $x - 36$ y $x - 24$, por tanto $x - 24 = 2(x - 36) \Rightarrow x = 48$

Solución: habían ido a comprar uno con 48 € y el otro con 60 €.

51. Un librero vendió 84 libros a dos precios diferentes: unos a 5,4 € y otros a 4,32 € y obtuvo por la venta 378 €. ¿Cuántos libros vendió de cada clase?

Si x es el número de libros que vendió a 5,4 € e y el número de los que vendió a 4,32 €, se tiene:

$$\left.\begin{matrix} x + y = 84 \\ 5,4x + 4,32y = 378 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x = 84 - y \\ 540x + 432y = 37800 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

Sustituyendo en la segunda: $540(84 - y) + 432y = 37800 \Rightarrow 45360 - 540y + 432y = 37800 \Rightarrow$ $\Rightarrow 108y = 7560 \Rightarrow y = 70$

Entonces $x = 84 - 70 = 14$

Vendió 14 libros a 5,4 € y 70 a 4,32 €

52. En un garaje hay 110 vehículos entre coches y motos, con un total de 396 ruedas, ¿cuántos coches y cuántas motos hay?

Si x es el número de coches e y el de motos, se tiene:

$$\left.\begin{matrix} x + y = 110 \\ 4x + 2y = 396 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} y = 110 - x \\ 2x + y = 198 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2x + 110 - x = 198 \Rightarrow$$

$\Rightarrow x = 88$ e $y = 110 - 88 = 22$

Solución: hay 88 coches y 22 motos.

53. En un viejo desván. En el desván de una casa se ha descubierto un documento de 1890 en el que se anotó la compra de 15 kg de azúcar y 7 kg de café por 42 ptas.; en otro documento de la misma época figura la compra de 8 kg de azúcar y de 3 kg de café por 20,20 ptas. ¿Cuáles eran los precios de un kg de azúcar y de un kg de café en 1890?

Si x es el precio del azúcar e y el del café, se tiene:

$$\left.\begin{matrix} 15x + 7y = 42 \\ 8x + 3y = 20,20 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 15x + 7y = 42 \\ 40x + 15y = 101 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x = \frac{42 - 7y}{15} \Rightarrow$$

Sustituyendo en la segunda:

$$40\frac{42 - 7y}{15} + 15y = 101 \Rightarrow 8(42 - 7y) + 45y = 303 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ 336 – 56y + 45y = 303 $\Rightarrow$ 11y = 33 $\Rightarrow$ y = 3

Entonces: $x = \frac{42 - 7 \cdot 3}{15} = \frac{21}{15} = \frac{7}{5} = 1,4$

El precio del kilo de azúcar es 1,4 ptas. y el del café 3 ptas.

54. Ángel y Ernesto tienen 45 cromos. Dice Ángel a Ernesto: «dame cinco cromos así tendré el doble que tú». ¿Cuántos tiene cada uno?

Si Ángel tiene x cromos y Ernesto y se tiene:

$$\left.\begin{matrix} x + y = 45 \\ x + 5 = 2(y - 5) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x + y = 45 \\ -x + 2y = 15 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x + y = 45 \\ 3y = 60 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$y = 20$ y $x = 45 - 20 = 25$

Ángel tiene 25 cromos y Ernesto 20.

55. Pedro compró 60 cuadernos a dos precios diferentes: unos a 2,4 € y otros a 3,1 € y le costaron 168,5 €. ¿Cuántos compró de cada precio?

Si x es el número de cuadernos de 2,4 € e y el de 3,1 €, se tiene:

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 60 \\ 2,4x + 3,1y = 168,5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = 60 - y \\ 24x + 31y = 1685 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow 24\ (60 - y) + 31y = 1685 \Rightarrow 1440 - 24y + 31y = 1685 \Rightarrow 7y = 245 \Rightarrow y = 35$ y por tanto $x = 60 - 35 = 25$.

Solución: compró 25 cuadernos de 2,4 € y 35 de 3,1 €

56. En una granja donde hay conejos y gallinas que hacen en total 2 250 cabezas y 7 500 patas, ¿cuántas conejos y cuántas gallinas hay?

Si x es el número de conejos e y el de gallinas, se tiene:

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 2250 \\ 4x + 2y = 7500 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y = 2250 - x \\ 2x + y = 3750 \end{array}\right\}$$

Sustituyendo en la segunda:

$2x + 2250 - x = 3750 \Rightarrow x = 1500$

Entonces $y = 2250 - 1500 = 750$

Solución: hay 1500 conejos y 750 gallinas.

57. Hallar la fracción equivalente a $\frac{54}{63}$ cuya suma de términos sea 13.

$$\left.\begin{array}{r} \frac{54}{63} = \frac{x}{y} \\ x + y = 13 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 54y = 63x \\ x = 13 - y \end{array}\right\} \Rightarrow 54y = 63(13 - y) \Rightarrow$$

$\Rightarrow 117y = 819 \Rightarrow y = 7 \Rightarrow x = 13 - 7 = 6$

Solución: la fracción equivalente pedida es $\frac{6}{7}$

58. La diferencia entre el denominador y el numerador de una fracción es 4. Hallarla, sabiendo que si sumamos 7 unidades a cada uno de los términos, la fracción resultante es equivalente a $\frac{2}{3}$

Si la fracción es $\frac{x}{y}$, se tiene:

$$\left.\begin{array}{r} y - x = 4 \\ \frac{x+7}{y+7} = \frac{2}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y = x + 4 \\ 3x + 21 = 2y + 14 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y = x + 4 \\ 3x - 2y = -7 \end{array}\right\}$$

Sustituyendo el valor de y en la segunda:

$3x - 2(x + 4) = -7 \Rightarrow x = 1$

Entonces: $y = 1 + 4 = 5$

Solución: la fracción es: $\frac{1}{5}$

59. La suma de las dos cifras de un número es 7. Si se invierte el orden de sus cifras, el número aumenta en 27. Hallar este número.

Ayuda: Si xy es un número de dos cifras, su valor es $10x + y$. Si se invierten las cifras y ahora se escribe yx, su valor es $10y + x$.

Si el número es xy su valor es $10x + y$.

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 7 \\ 10y + x = 10x + y + 27 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x + y = 7 \\ -9x + 9y = 27 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x + y = 7 \\ -x + y = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} x + y = 7 \\ 2y = 10 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x + y = 7 \\ y = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = 2 \\ y = 5 \end{array}\right\}$$

Solución: el número es 25.

60. Descomponer el número 48 en dos partes tales, que al dividir una entre la otra, se obtengan 3 de cociente y 4 de resto.

Si las partes son x e y, se tiene:

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 48 \\ x = 3y + 4 \end{array}\right\}$$

Sustituyendo en la primera: $4y + 4 = 48 \Rightarrow y = 11$

Entonces $x = 48 - 11 = 37$

Solución: las partes son 37 y 11.

Tema 6

Sucesiones numéricas. Progresiones

▸ Programación de aula

Objetivos

- Identificar las leyes internas que siguen una sucesión de números.
- Expresar una sucesión por su término general o por recurrencia.
- Definir una progresión aritmética.
- Calcular la suma de términos consecutivos de una progresión aritmética.
- Definir una progresión geométrica.
- Calcular la suma de términos consecutivos de una progresión geométrica.
- Calcular la suma de los infinitos términos de una progresión geométrica.
- Utilizar las progresiones para formalizar y resolver situaciones prácticas.

Criterios de evaluación

- Formalizar sucesiones en situaciones reales a través de su término general.
- Definir sucesiones por recurrencia.
- Identificar progresiones aritméticas.
- Calcular la suma de términos consecutivos de una progresión aritmética.
- Identificar progresiones geométricas.
- Calcular la suma de términos consecutivos de una progresión geométrica.
- Calcular los infinitos términos consecutivos de una progresión geométrica.
- Identificar sucesiones en situaciones próximas al entorno del alumno.

Contenidos

- **Conceptos** ("saber")
  - Sucesiones numéricas.
  - Formas de definir una sucesión.
  - Representación gráfica de una sucesión.
  - Progresiones aritméticas.
  - Término general de una progresión aritmética.
  - Suma de los n términos de una progresión aritmética.
  - Progresiones geométricas.
  - Término general de una progresión geométrica.
  - Suma de los n términos de una progresión geométrica.
  - Sumas infinitas
- **Procedimientos** ("Saber hacer")
  - Establecimiento de la aplicación entre naturales y reales para la formación de una sucesión.
  - Identificación de la pauta que origina una sucesión numérica en una expresión algebraica.
  - Análisis del criterio de identificación de una sucesión numérica en una sucesión aritmética o geométrica.
  - Razonamiento inductivo para obtener el término general en ambos tipos de progresiones.
  - Obtención de las diversas fórmulas para la suma de los términos de una progresión geométrica con razón positiva menor que la unidad.
  - Posibilidad de análisis del comportamiento de una sucesión a través de su representación gráfica.
- **Actitudes** ("Saber ser")
  - Interés por el análisis en la detección de pautas numéricas.
  - Apreciar la aportación del lenguaje algebraico en la generalización de resultados.
  - Perseverar en la búsqueda de la recurrencia en las progresiones.
  - Satisfacción del hallazgo del resultado de un problema tras el estudio de sus datos.

▸ Programación por competencias

COMPETENCIA MATEMÁTICA

PENSAMIENTO Y RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

Descriptores

1. Entender la extensión y las limitaciones de los conceptos matemáticos y saber utilizarlos.
2. Ampliar la extensión de un concepto mediante la abstracción de sus propiedades, generalizando los resultados a un conjunto más amplio de objetos.

Desempeño

1. Comprende el concepto de sucesión numérica.	- Identifica un conjunto de números como sucesión numérica. - Formaliza la expresión de una serie numérica. - Identifica un término concreto dentro de la serie.	- **Ejercicios 1, 2 y 3** (pág. 118 y 119) - **Ejercicios** (pág. 128 y siguientes)
2. Interpreta adecuadamente el infinito.	- Comprende el sentido de infinitud en una sucesión de números.	- **Ejercicios 1** (pág. 118) - **Ejercicio 17** (pág. 128) - **Ejercicios 42 y 54** (pág. 130)
3. Advierte criterios de formación en ciertas series numéricas.	- Determina cómo se comporta una serie numérica a partir de un criterio determinado. - Distingue entre diferentes criterios de formación de una serie numérica. - Es capaz de construir una serie numérica a partir de su criterio de formación.	- **Ejemplo 1 y ejercicios 2 y 3** (pág. 119) - **Ejemplo 2 y ejercicio 4** (pág. 120) - **Ejemplo 3 y ejercicio 7** (pág. 122) - **Ejercicios 10 a 17** (pág. 128)

REPRESENTAR ENTIDADES MATEMÁTICAS

Descriptores

1.Utilizar y entender la relación interna entre los términos de una serie numérica.
2. Escoger entre una progresión aritmética o una progresión geométrica para describir el comportamiento de una sucesión de números.

Desempeño

1. Determina el término general de una progresión aritmética o geométrica.	- Calcula el término general de una progresión aritmética o geométrica. - Describe la serie numérica a partir del término general.	- **Ejemplo 1 y ejercicios 2 y 3** (pág. 119) - **Ejemplo 2 y ejercicio 4** (pág. 120) - **Ejemplo 3 y ejercicio 7** (pág. 122) - **Ejercicios 18 a 56** (pág. 128 a 130)
2. Elige el criterio de formación adecuado para decidir sobre si una serie de números tiene un comportamiento aditivo o multiplicativo.	- Identifica la *diferencia* en una progresión aritmética. - Describe la serie numérica a partir del primer término y de la diferencia. - Identifica la *razón* en una progresión geométrica. - Describe la serie numérica a partir del primer término y de la razón.	

<table>
<tr><td rowspan="4">ARGUMENTAR MATEMÁTICAMENTE</td><td colspan="3">Descriptores</td></tr>
<tr><td colspan="3">1. Analizar las propiedades de las progresiones aritméticas.
2. Analizar las propiedades de las progresiones geométricas.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Desempeño</td></tr>
<tr><td>1. Demuestra formalmente la expresión de cálculo de una suma de términos consecutivos de una progresión aritmética.</td><td>- Calcula la suma de términos consecutivos de una progresión aritmética.</td><td>- Ejercicios 5 y 6 (pág. 121)
- Ejercicios 18 a 38 (pág. 128 y 129)</td></tr>
<tr><td>2. Demuestra formalmente la expresión de cálculo de una suma de términos consecutivos de una progresión geométrica.</td><td>- Calcula la suma de términos consecutivos de una progresión geométrica.
- Calcula la suma de los infinitos términos de una serie geométrica de razón menor que la unidad.</td><td>- Ejemplo 4 y ejercicio 8 (pág. 123)
- Ejemplo 5 y ejercicio 9 (pág. 124)
- Ejercicios 39 a 56 (pág. 130)</td></tr>
<tr><td rowspan="4">PLANTEAR Y RESOLVER PROBLEMAS MATEMÁTICOS</td><td colspan="3">Descriptores</td></tr>
<tr><td colspan="3">1. Identificar, definir y plantear problemas matemáticos en los que intervienen series numéricas.
2. Resolver diferentes problemas matemáticos en los que intervienen series numéricas.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Desempeño</td></tr>
<tr><td>1. Plantea en una situación concreta utilizando una serie numérica.</td><td>- Escribe una serie numérica ajustada a las hipótesis concretas del problema.</td><td rowspan="2">- Ejercicios 6, 7 y 8 (pág. 125)
- Ejercicios 31, 32 y 38 (pág. 129)
- Ejercicios 54 a 56 (pág. 130)</td></tr>
<tr><td>2. Identifica los elementos de la serie que intervienen en la situación planteada y la resuelve.</td><td>- Describe el término general y la diferencia de una serie aritmética.
- Describe el término general y la razón de una serie geométrica.
- Obtiene la solución.</td></tr>
</table>

COMPETENCIA LINGÜÍSTICA

COMPETENCIA LINGÜÍSTICA

Descriptores

1. Comprender el enunciado de un problema y diferenciar las ideas fundamentales que nos permitan expresarlas en lenguaje algebraico
2. Ser capaces de indicar con un texto breve las soluciones del problema

Desempeño

1. Comprende lo que lee.	- Identifica la pregunta que se le hace. - Identifica los elementos que intervienen.	- **Ejemplo 1 y ejercicios 2 y 3** (pág. 119) - **Ejemplo 2 y ejercicio 4** (pág. 120) - **Ejemplo 3 y ejercicio 7** (pág. 122) - **Ejercicios 18 a 56 (** (pág. 128 a 130)
2. Discrimina e interpreta la información que le da el enunciado de un problema.	- Diferencia los elementos que intervienen en una serie numérica. - Determina la carácterística buscada en el enunciado del problema.	- **Ejemplo 1 y ejercicios 2 y 3** (pág. 119) - **Ejemplo 3 y ejercicio 7** (pág. 122) - **Ejercicios 39 a 56** (pág. 130)
3. Se expresa por escrito de manera adecuada y correcta, con claridad y coherencia, utilizando un lenguaje preciso.	- Presenta el texto con la solución del problema de forma adecuada y correcta. - Selecciona la información adecuada.	- **Ejercicios 6, 7 y 8** (pág. 125) - **Ejercicios 10 a 56** (pág. 128 a 130)

COMPETENCIA EN CONOCIMIENTO E INTERACCION CON EL MEDIO FISICO

COMPETENCIA EN CONOCIMIENTO E INTERACCION...

Descriptores

1. Interpretar conceptos, procesos y mensajes del medio natural, social y cultural, y relacionarlos con el concepto matemático de serie numérica.
2. Fomentar la reflexión para poder intervenir en la sociedad desde una perspectiva crítica y reflexiva.

Desempeño

1. Interpreta situaciones del mundo físico y las conceptualiza en términos de series numéricas.	- Sintetiza la información. - Expone la información con precisión. - Expone adecuadamente el proceso que traslada la información al modelo matemático expresado por las progresiones.	- **Ejercicio 8** (pág. 125) - **Ejercicios 31, 38, 42, 54 y 56** (pág. 129 y 130)

COMPETENCIA APRENDER A APRENDER

COMPETENCIA APRENDER A APRENDER

Descriptores

1. Adquirir conciencia y hacer uso de las propias capacidades y conocimientos para iniciarse en el aprendizaje y ser capaz de continuar aprendiendo de manera cada vez más eficaz y autónoma de acuerdo a los propios objetivos y necesidades.
2 Desarrollar la curiosidad de plantearse preguntas, formalizarlas y resolverlas con la metodología estudiada.
3. Utilizar estrategias de aprendizaje, utilizando técnicas de apoyo diversas, para afrontar la toma de decisiones.

Desempeño

1. Desarrolla habilidades de obtención, análisis y elaboración de la información.	- Lee los enunciados de los ejercicios con la intención de comprender, relacionar y sintetizar contenidos. - Maneja adecuadamente recursos y técnicas de aprendizaje individual.	- **Ejercicios 6, 7 y 8** (pág. 125) - **Ejercicios 31, 32 y 38** (pág. 129) - **Ejercicios 54 a 56** (pág. 130)

COMPETENCIA CULTURAL Y ARTÍSTICA

COMPENTENCIA CULTURAL Y ARTÍSTICA

Descriptores

1. Muestra el origen histórico de los conceptos matemáticos y los relaciona con la figura matemática autora de los mismos.
2. Relaciona gráficos y dibujos con los conceptos matemáticos desarrollados.

Desempeño

1. Relaciona los conceptos matemáticos con su origen.	- Valora la relación entre historia y matemáticas.	- **Suma de términos consecutivos de una progresión aritmética** (pág. 121) - **Ejercicio 17** (pág. 128) - **Ejercicio 32** (pág. 129)
2. Relaciona los conceptos matemáticos con la figura matemática autora de los mismos.	- Valora la investigación matemática personalizada en figuras destacadas de la historia de las matemáticas.	
3. Relaciona los conceptos matemáticos con manifestaciones históricas, culturales y/o sociales.	- Asocia el concepto de serie numérica con situaciones culturales de los pueblos. - Comprende y valora el sentido social de las matemáticas. - Relaciona el contenido con su propia experiencia.	- **Introducción** (pág. 116)
4. Identifica representaciones gráficas y dibujos con los conceptos matemáticos.	- Interpreta en un gráfico una serie numérica. - Relaciona dibujo y matemáticas.	- **De 2º a 3ª** (pág. 117) - **Ejercicio 8** (pág. 125) - **Ejercicio 38** (pág. 129) - **Ejercicios 42 y 54** (pág. 130)

Competencia autonomía e iniciativa personal

Competencia autonomía e iniciativa personal

Descriptores

1. Utiliza el lenguaje matemático como instrumento para representar, interpretar y comprender la realidad, a fin de emprender, desarrollar y valorar situaciones en las que intervienen las series numéricas.
2. Utiliza el lenguaje matemático como instrumento que orienta la propia actividad con autonomía.
3. Contribuye a organizar el pensamiento, a elaborar planes y tomar decisiones.

Desempeño

1. Idea y planifica el desarrollo de un ejercicio.	- Elige la opción adecuada para la resolución de los ejercicios. - Mantiene la opción hasta llegar a la conclusión final.	- **Ejercicios 6, 7 y 8** (pág. 125) - **Ejercicios 10 a 56** (pág. 128 a 130)
2. Evalúa la solución obtenida.	- Valora el resultado y lo pone en relación con su enunciado del problema resuelto.	
3. Toma decisiones en función del resultado obtenido.	- Decide en función del resultado.	- **Ejercicios 31 y 56** (pág. 129 y 130)

▶ Pág. 116 - 117. Sucesiones numéricas. Progresiones



SOLUCIONARIO

SERIES NUMÉRICAS

Completa en cada caso con el número o los números que faltan:

a) 1 6 10 13 15 16 **16**
$a_1 = 1$; $a_n = a_{n-1} + (7 - n)$

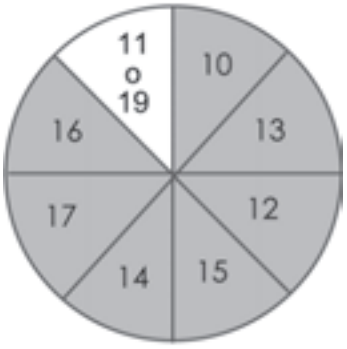
b) 6 12 18 24 30 **36**
$a_n = 6n$

c) 1 3 7 15 31 **63**
$a_1 = 1$; $a_n = a_{n-1} + 2^{n-1}$

d) 8 15 10 13 12 11 14 9 16 7 **18** **5**
$a_{2n-1} = 8 + 2\,(n - 1)$; $a_{2n} = 15 - 2(n - 1)$

e) 11 21 1211 111221 312211 **13112221** Se cuentan ordenadamente el número de veces que aparece cada dígito.

f)



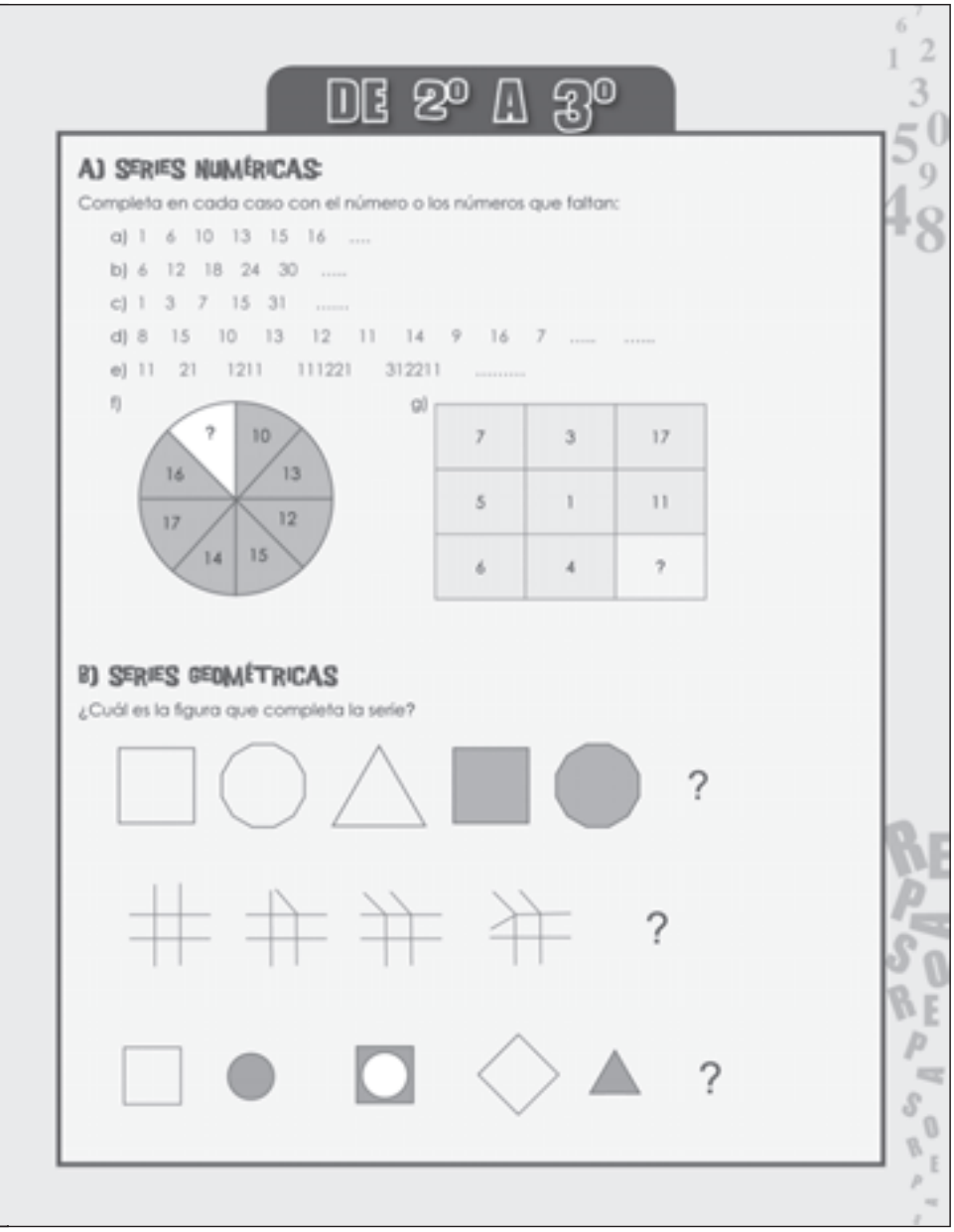
11 en el sentido contrario de las agujas del reloj.

19 en el sentido de las agujas del reloj.

g)

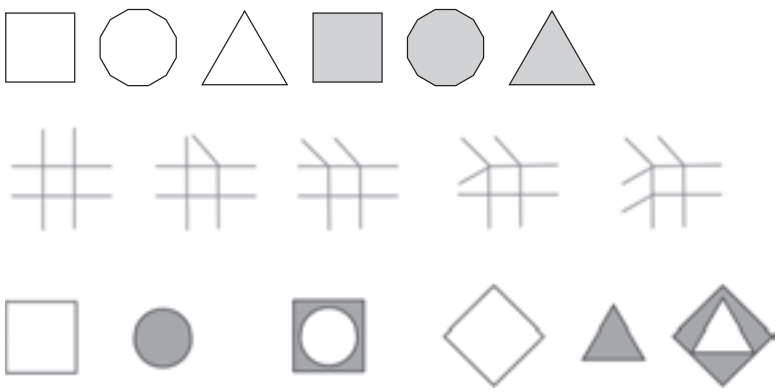
7	3	17
5	1	11
6	4	16

2 veces la primera columna más la segunda.



SERIES GEOMÈTRICAS

¿Cuál es la figura que completa la serie?



▶ Pág. 118. 1 Sucesiones numéricas



SUCESIONES NUMÉRICAS. PROGRESIONES

1 Sucesiones numéricas

Las siguientes listas de números se llaman **sucesiones numéricas**. Sus elementos siguen una determinada ley o secuencia que en algunos casos es fácil de detectar.

- *Sucesión natural*: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...
- *Sucesión de números pares*: 2, 4, 6, 8, 10, ...
- *Sucesión de múltiplos de 3*: 3, 6, 9, 12, 15, ...
- 1, 2, 4, 7, 10, 14, ...
- 10, 7, 4, 1, 0, –3, ...

Una *sucesión numérica* es una lista ordenada de números formada siguiendo un criterio determinado.

Los números que forman una sucesión se llaman **términos**. Cuando hablamos de una sucesión en general, ésta se suele representar por

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots a_n, \ldots$$

Cada subíndice es un número natural e indica qué lugar ocupa el término en la sucesión.

En la sucesión: 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, ... es:

este es a_1 pues ocupa el primer lugar

1, 3, 6, 10, 15, 21, 28,...

este es a_3 pues ocupa el lugar 3

este es a_7

OBSERVA

La forma de nombrar los términos es:

$a_1 = 1$

$a_2 = 3$

$a_3 = 6$

$a_4 = 10$

...

EJERCICIO

1 Intenta encontrar el criterio de las siguientes sucesiones y escribe al menos los tres términos siguientes de cada una de ellas:

a) 3, 6, 12, 24, 48,.....;

b) 1, 4, 9, 16, 25,.....;

c) 1, 3, 5, 7, 9,.....;

d) $1, \frac{3}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots\ldots$;

e) 2,3; 2,31; 2,313; 2,3131;.....;

f) $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \ldots\ldots$

118

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS

Introducción al vocabulario específico.

El comentario del margen hace referencia a la sucesión indicada en el texto.

Los alumnos pueden proponer sus propias sucesiones.

SOLUCIONARIO

1. Intenta encontrar el criterio de las siguientes sucesiones y escribe al menos los tres términos siguientes de cada una de las sucesiones siguientes:

a) 3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, 384, ...

b) 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, ...

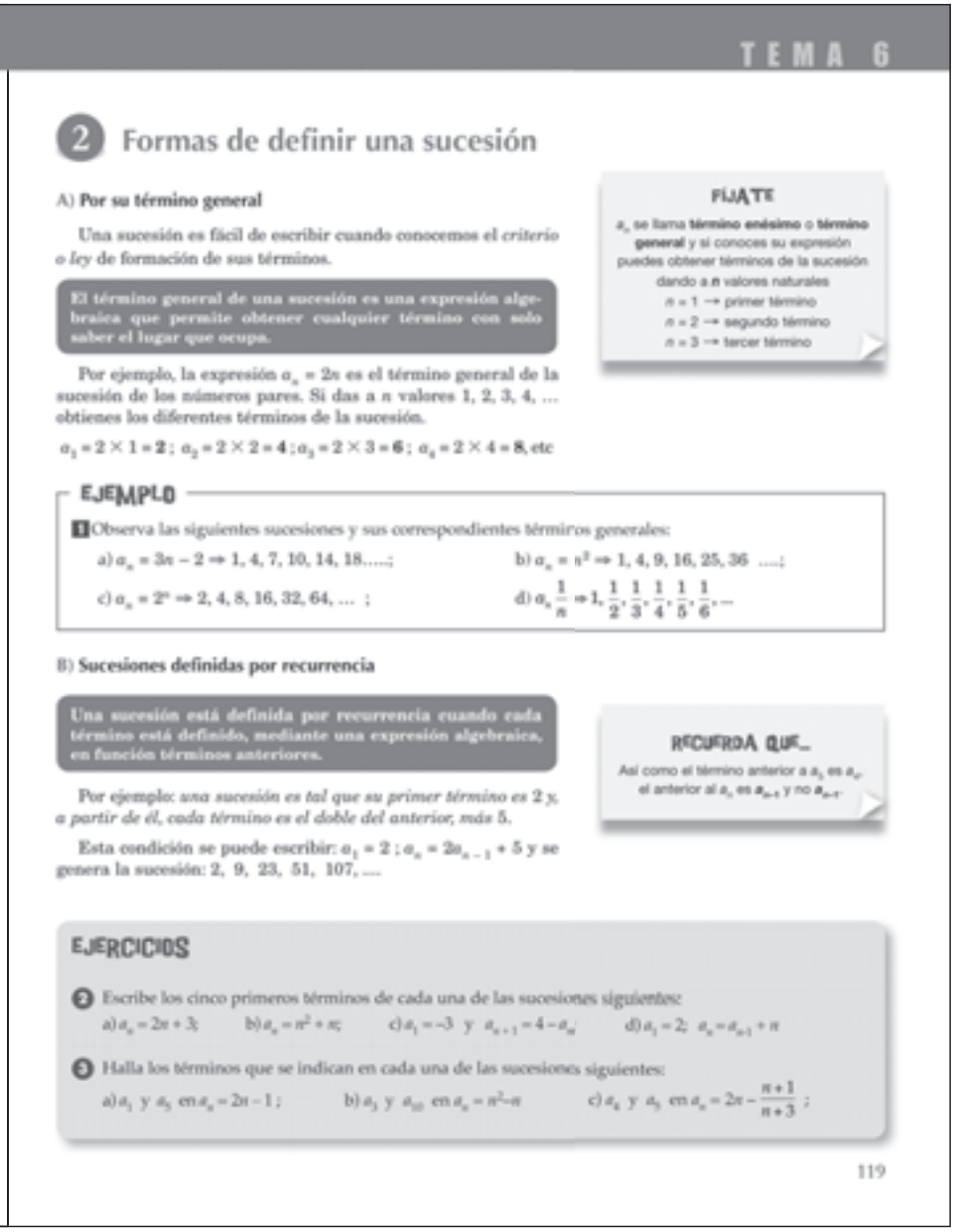
c) 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, ...

d) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}$...

e) 2,3; 2,31; 2,313; 2,3131; 2,31313; 2,313131; 2.3131313. ...

f) $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \frac{7}{6}, \frac{8}{7}, \ldots$

▶ Pág. 31. 2 Formas de definir una sucesión



TEMA 6

2 Formas de definir una sucesión

A) Por su término general

Una sucesión es fácil de escribir cuando conocemos el *criterio o ley* de formación de sus términos.

El término general de una sucesión es una expresión algebraica que permite obtener cualquier término con solo saber el lugar que ocupa.

Por ejemplo, la expresión $a_n = 2n$ es el término general de la sucesión de los números pares. Si das a n valores 1, 2, 3, 4, ... obtienes los diferentes términos de la sucesión.

$a_1 = 2 \times 1 = 2$; $a_2 = 2 \times 2 = 4$; $a_3 = 2 \times 3 = 6$; $a_4 = 2 \times 4 = 8$, etc

FÍJATE

a_n se llama **término enésimo** o **término general** y si conoces su expresión puedes obtener términos de la sucesión dando a n valores naturales

$n = 1 \rightarrow$ primer término

$n = 2 \rightarrow$ segundo término

$n = 3 \rightarrow$ tercer término

EJEMPLO

1 Observa las siguientes sucesiones y sus correspondientes términos generales:

a) $a_n = 3n - 2 \Rightarrow 1, 4, 7, 10, 14, 18 \ldots$;

b) $a_n = n^2 \Rightarrow 1, 4, 9, 16, 25, 36 \ldots$;

c) $a_n = 2^n \Rightarrow 2, 4, 8, 16, 32, 64, \ldots$;

d) $a_n \frac{1}{n} \Rightarrow 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots$

B) Sucesiones definidas por recurrencia

Una sucesión está definida por recurrencia cuando cada término está definido, mediante una expresión algebraica, en función términos anteriores.

Por ejemplo: *una sucesión es tal que su primer término es 2 y, a partir de él, cada término es el doble del anterior, más 5.*

Esta condición se puede escribir: $a_1 = 2$; $a_n = 2a_{n-1} + 5$ y se genera la sucesión: 2, 9, 23, 51, 107, ...

RECUERDA QUE...

Así como el término anterior a a_5 es a_4, el anterior al a_n es a_{n-1} y no a_{n-1}.

EJERCICIOS

2 Escribe los cinco primeros términos de cada una de las sucesiones siguientes:

a) $a_n = 2n + 3$; b) $a_n = n^2 + n$; c) $a_1 = -3$ y $a_{n+1} = 4 - a_n$; d) $a_1 = 2$; $a_n = a_{n-1} + n$

3 Halla los términos que se indican en cada una de las sucesiones siguientes:

a) a_1 y a_5 en $a_n = 2n - 1$; b) a_3 y a_{10} en $a_n = n^2 - n$ c) a_4 y a_5 en $a_n = 2n - \frac{n+1}{n+3}$;

119

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS

Resaltar la importancia de conocer el término general (si es posible) para un mejor estudio de la sucesión.

Consolidar el vocabulario específico: a_n; a_{n+1}; a_{n-1}; etc.

La sucesión de Fibonacci aparece en el ejercicio 17 (pág. 128).

Sugerir la visita a:

http://www.etereaestudios.com/movies/nbyn_movies/nbyn_mov_vimeo.htm

SOLUCIONARIO

2. Escribe los cinco primeros términos de cada una de las sucesiones cuyo término general viene expresado por la fórmula:

a) $a_n = 2n + 3 \Rightarrow 5, 7, 9, 11, 13, \ldots$

b) $a_n = n^2 + n \Rightarrow 2, 6, 12, 20, 30, \ldots$

c) $a_1 = -3$ y $a_{n+1} = 4 - a_n \Rightarrow -3, 7, -3, 7, -3, 7, \ldots$

d) $a_1 = 2$; $a_n = a_{n-1} + n \Rightarrow 2, 4, 7, 11, 16, \ldots$

3. Halla los términos que se indican en cada una de las sucesiones siguientes:

a) a_1 **y** a_5 **en** $a_n = 2n - 1$ **;**

$a_1 = 2 \times 1 - 1 = 1$

$a_5 = 2 \times 5 - 1 = 9$

b) a_3 **y** a_{10} **en** $a_n = n^2 - n$

$a_3 = 3^2 - 3 = 6$

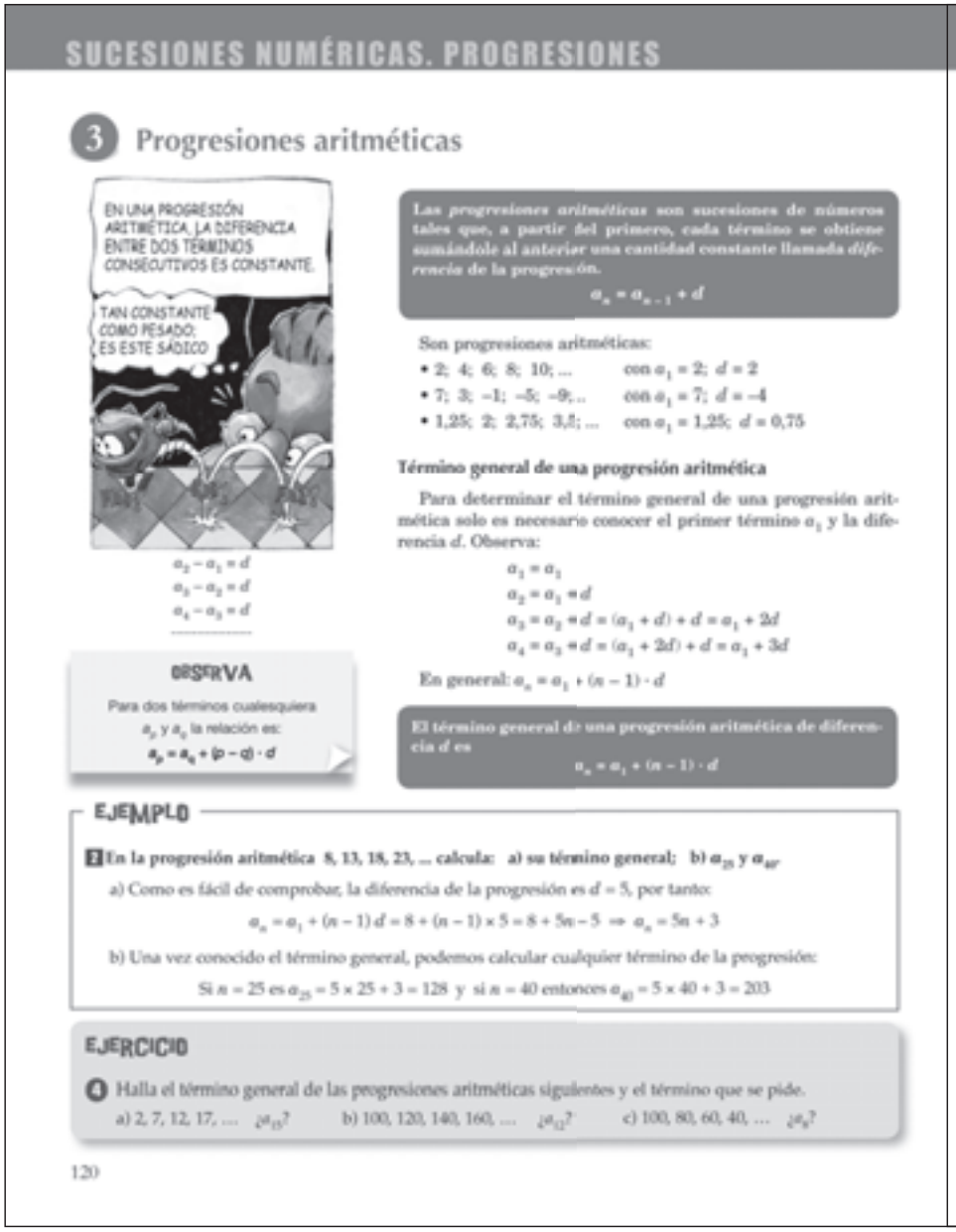
$a_{10} = 10^2 - 10 = 90$

c) a_4 **y** a_5 **en** $a_n = 2n - \frac{n+1}{n+3}$;

$$a_4 = 2 \times 4 - \frac{4+1}{4+3} = 8 - \frac{5}{7} = \frac{51}{7}$$

$$a_5 = 2 \times 5 - \frac{5+1}{5+3} = 10 - \frac{6}{8} = \frac{37}{4}$$

▶ Pág. 120. 3 Progresiones aritméticas



SUCESIONES NUMÉRICAS. PROGRESIONES

3 Progresiones aritméticas

Las *progresiones aritméticas* son sucesiones de números tales que, a partir del primero, cada término se obtiene sumándole al anterior una cantidad constante llamada *diferencia* de la progresión.

$$a_n = a_{n-1} + d$$

Son progresiones aritméticas:

- 2; 4; 6; 8; 10; ... con $a_1 = 2$; $d = 2$
- 7; 3; –1; –5; –9; ... con $a_1 = 7$; $d = -4$
- 1,25; 2; 2,75; 3,5; ... con $a_1 = 1{,}25$; $d = 0{,}75$

$a_2 - a_1 = d$
$a_3 - a_2 = d$
$a_4 - a_3 = d$

OBSERVA

Para dos términos cualesquiera a_p y a_q la relación es:

$a_p = a_q + (p - q) \cdot d$

Término general de una progresión aritmética

Para determinar el término general de una progresión aritmética solo es necesario conocer el primer término a_1 y la diferencia d. Observa:

$a_1 = a_1$
$a_2 = a_1 + d$
$a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d$
$a_4 = a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d$

En general: $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$

El término general de una progresión aritmética de diferencia d es

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$$

EJEMPLO

1 En la progresión aritmética 8, 13, 18, 23, ... calcula: a) su término general; b) a_{25} y a_{40}.

a) Como es fácil de comprobar, la diferencia de la progresión es $d = 5$, por tanto:

$$a_n = a_1 + (n - 1)\,d = 8 + (n - 1) \times 5 = 8 + 5n - 5 \Rightarrow a_n = 5n + 3$$

b) Una vez conocido el término general, podemos calcular cualquier término de la progresión:

Si $n = 25$ es $a_{25} = 5 \times 25 + 3 = 128$ y si $n = 40$ entonces $a_{40} = 5 \times 40 + 3 = 203$

EJERCICIO

4 Halla el término general de las progresiones aritméticas siguientes y el término que se pide.

a) 2, 7, 12, 17, ... ¿a_{15}? b) 100, 120, 140, 160, ... ¿a_{12}? c) 100, 80, 60, 40, ... ¿a_8?

120

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS

El alumno debe observar que es una definición por recurrencia.

En las relaciones $a_n = a_1 + (n - 1)d$ y $a_n = a_p + (n - p)d$ resaltar que la diferencia de la progresión está multiplicada por la diferencia de lugares que ocupan los términos.

También sería correcto $a_1 = a_n + (1 - n)d$

SOLUCIONARIO

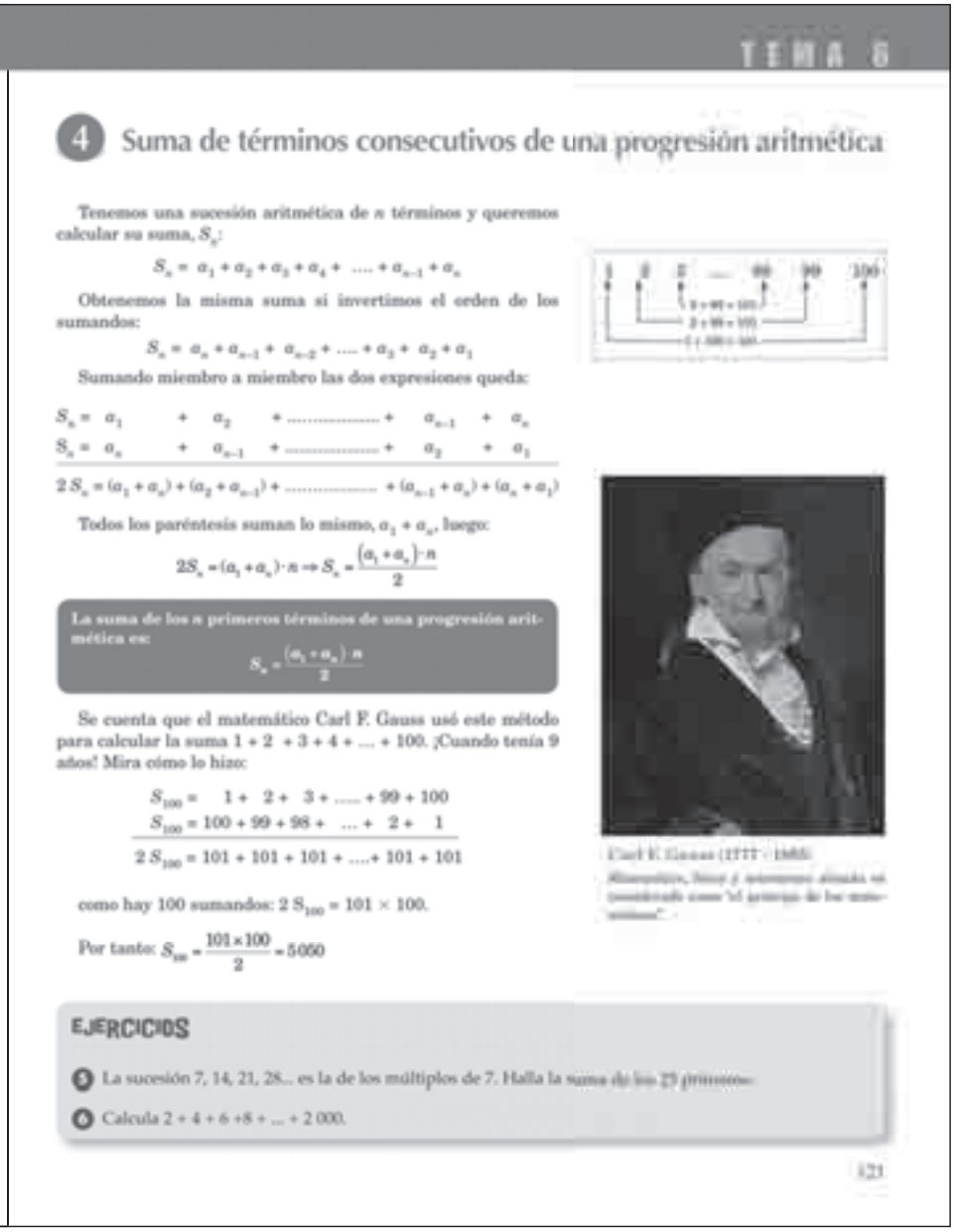
4. Halla el término general de las progresiones aritméticas siguientes y el término que se pide.

a) 2, 7, 12, 17, ... $a_n = 5n - 3$; $a_{15} = 72$

b) 100, 120, 140, 160, ... $a_n = 20n + 80$; $a_{12} = 320$

c) 100, 80, 60, 40, ... $a_n = -20n + 120$; $a_8 = -40$

▶ Pág. 121. 4 Suma de términos consecutivos de una progresión aritmética



TEMA 6

4 Suma de términos consecutivos de una progresión aritmética

Tenemos una sucesión aritmética de n términos y queremos calcular su suma, S_n:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_{n-1} + a_n$$

Obtenemos la misma suma si invertimos el orden de los sumandos:

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_3 + a_2 + a_1$$

Sumando miembro a miembro las dos expresiones queda:

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n \\ S_n &= a_n + a_{n-1} + \ldots + a_2 + a_1 \end{aligned}$$

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \ldots + (a_{n-1} + a_n) + (a_n + a_1)$$

Todos los paréntesis suman lo mismo, $a_1 + a_n$, luego:

$$2S_n = (a_1 + a_n) \cdot n \Rightarrow S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

La suma de los n primeros términos de una progresión aritmética es:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

Se cuenta que el matemático Carl F. Gauss usó este método para calcular la suma $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 100$. ¡Cuando tenía 9 años! Mira cómo lo hizo:

$$\begin{aligned} S_{100} &= 1 + 2 + 3 + \ldots + 99 + 100 \\ S_{100} &= 100 + 99 + 98 + \ldots + 2 + 1 \end{aligned}$$

$$2S_{100} = 101 + 101 + 101 + \ldots + 101 + 101$$

como hay 100 sumandos: $2S_{100} = 101 \times 100$.

Por tanto: $S_{100} = \frac{101 \times 100}{2} = 5050$

Carl F. Gauss (1777 - 1855)

EJERCICIOS

5 La sucesión 7, 14, 21, 28... es la de los múltiplos de 7. Halla la suma de los 25 primeros.

6 Calcula $2 + 4 + 6 + 8 + \ldots + 2\,000$.

123

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS

También puede usarse la técnica de Gauss para resolver los ejercicios 5 y 6.

SOLUCIONARIO

5. La sucesión 7, 14, 21, 28... es la de los múltiplos de 7. Halla la suma de los 25 primeros.

$a_n = 7n \Rightarrow a_{25} = 175$

$$S_{25} = \frac{(7 + 175)25}{2} = 2275$$

6. Calcula $2 + 4 + 6 + 8 + \ldots + 2\,000$.

$a_1 = 2$; $d = 2$; $a_n = 2\,000$

Calculemos n con la fórmula del término general

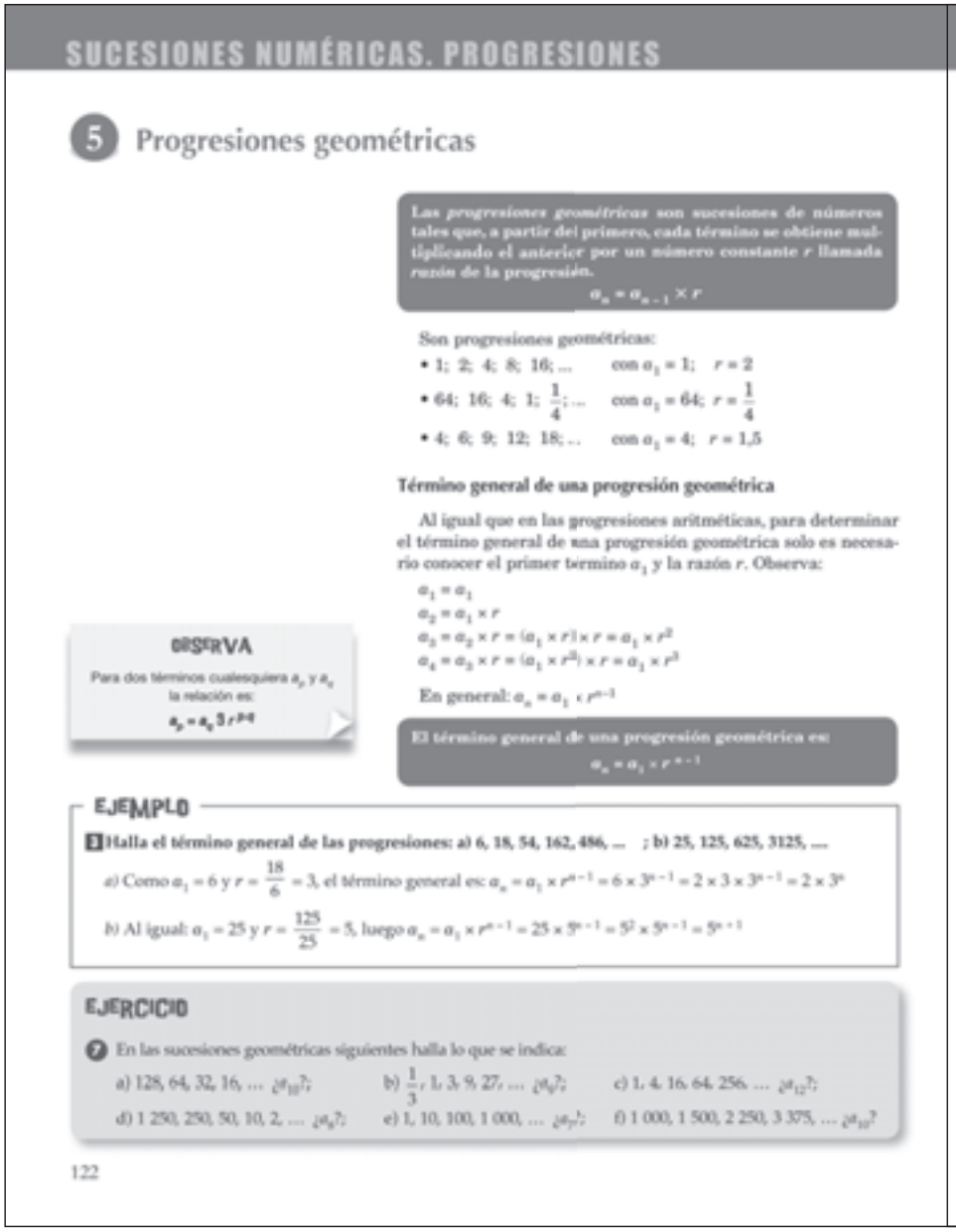
$a_n = a_1 + (n - 1)\, d$

$2\,000 = 2 + (n - 1)\, 2 \Rightarrow n = 1\,000$

Aplicando la fórmula de la suma obtenemos

$$S_{1000} = \frac{2 + 2000}{2} \times 1000 = 100100$$

▶ Pág. 122. 5 Progresionenes geométricas



SUCESIONES NUMÉRICAS. PROGRESIONES

5 Progresiones geométricas

Las *progresiones geométricas* son sucesiones de números tales que, a partir del primero, cada término se obtiene multiplicando el anterior por un número constante r llamada *razón* de la progresión.

$a_n = a_{n-1} \times r$

Son progresiones geométricas:

- 1; 2; 4; 8; 16; ... con $a_1 = 1$; $r = 2$
- 64; 16; 4; 1; $\frac{1}{4}$; ... con $a_1 = 64$; $r = \frac{1}{4}$
- 4; 6; 9; 12; 18; ... con $a_1 = 4$; $r = 1,5$

Término general de una progresión geométrica

Al igual que en las progresiones aritméticas, para determinar el término general de una progresión geométrica solo es necesario conocer el primer término a_1 y la razón r. Observa:

$a_1 = a_1$
$a_2 = a_1 \times r$
$a_3 = a_2 \times r = (a_1 \times r) \times r = a_1 \times r^2$
$a_4 = a_3 \times r = (a_1 \times r^2) \times r = a_1 \times r^3$

En general: $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$

OBSERVA
Para dos términos cualesquiera a_p y a_q la relación es:
$a_p = a_q \cdot r^{p-q}$

El término general de una progresión geométrica es:
$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$

EJEMPLO

1 Halla el término general de las progresiones: a) 6, 18, 54, 162, 486, ... ; b) 25, 125, 625, 3125, ...

a) Como $a_1 = 6$ y $r = \frac{18}{6} = 3$, el término general es: $a_n = a_1 \times r^{n-1} = 6 \times 3^{n-1} = 2 \times 3 \times 3^{n-1} = 2 \times 3^n$

b) Al igual: $a_1 = 25$ y $r = \frac{125}{25} = 5$, luego $a_n = a_1 \times r^{n-1} = 25 \times 5^{n-1} = 5^2 \times 5^{n-1} = 5^{n+1}$

EJERCICIO

7 En las sucesiones geométricas siguientes halla lo que se indica:

a) 128, 64, 32, 16, ... $\quad a_{10}$?
b) $\frac{1}{3}$, 1, 3, 9, 27, ... $\quad a_9$?
c) 1, 4, 16, 64, 256, ... $\quad a_{12}$?
d) 1 250, 250, 50, 10, 2, ... $\quad a_8$?
e) 1, 10, 100, 1 000, ... $\quad a_7$?
f) 1 000, 1 500, 2 250, 3 375, ... $\quad a_{10}$?

122

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS

El alumno debe observar que es una definición por recurrencia.

Resaltar el paralelismo de las expresiones $a_n = a_1 \times r^{n-1}$ y $a_n = a_1 \times r^{n-p}$ con las de las progresiones aritméticas.

En muchos ejercicios es aconsejable el uso de calculadora.

SOLUCIONARIO

7. En las sucesiones geométricas siguientes halla lo que se indica:

a) 128, 64, 32, 16, ... ¿a_{10}?

$a_1 = 128$; $r = \frac{1}{2}$ utilizando la fórmula $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$

$a_{10} = 128 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^9 = \frac{1}{4}$

b) $\frac{1}{3}$, 1, 3, 9, 27... , ... ¿a_{12}?

$a_1 = \frac{1}{3}$; $\quad r = 3 \quad \Rightarrow \quad a_9 = \frac{1}{3} \times 3^8 = 3^7 = 2187$

c) 1, 4, 16, 64, 256, ... ¿a_{12}?

$a_1 = 1$; $\quad r = 4 \quad \Rightarrow \quad a_{12} = 1 \cdot 4^{11} = 4194304$

d) 1 250, 250, 50, 10, 2, ... ¿a_8?

$a_1 = 1250$; $\quad r = \frac{1}{5} \Rightarrow a_8 = 1250 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^7 = 0,016$

e) 1, 10, 100, 1 000, ... ¿a_7?

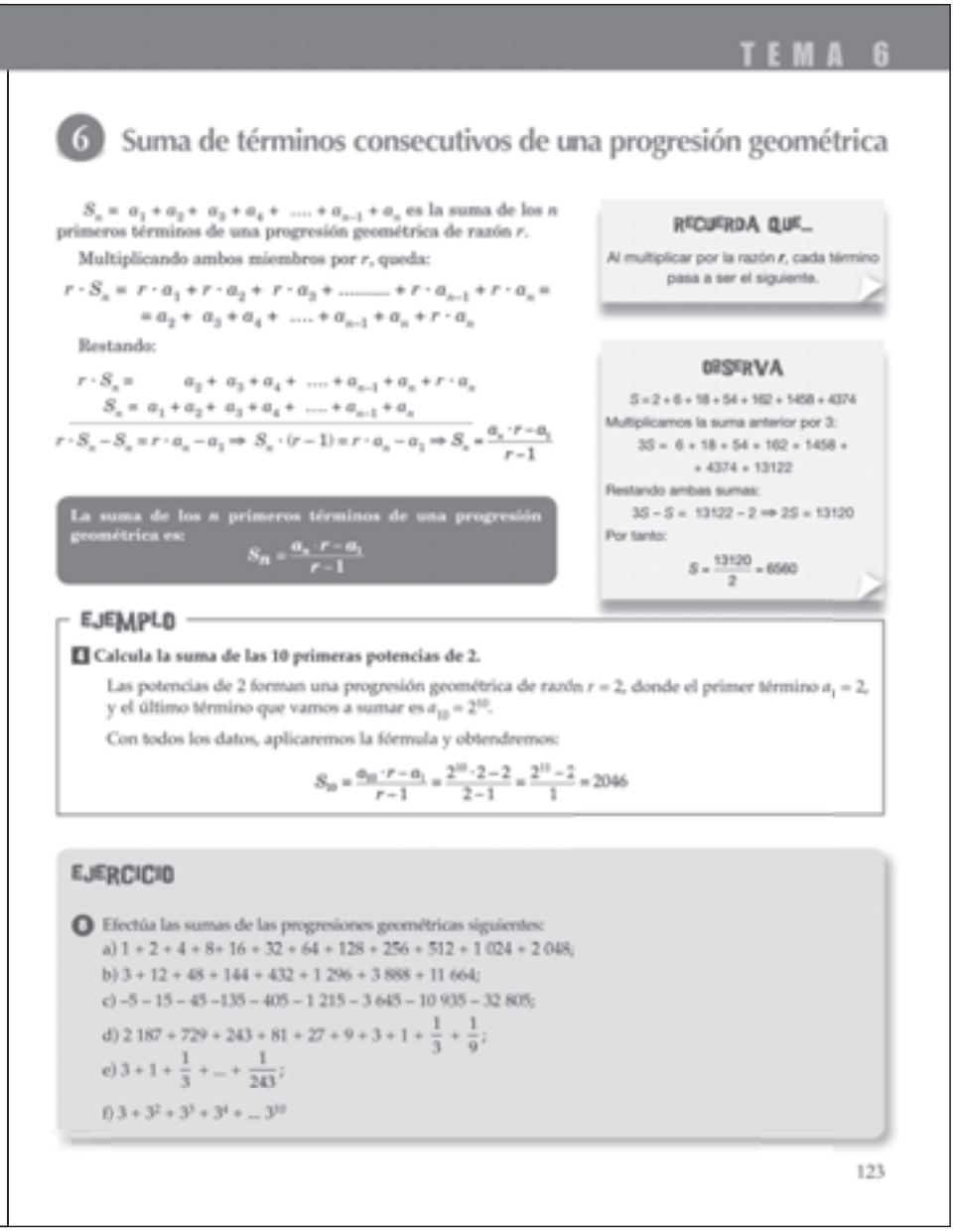
$a_1 = 1$; $\quad r = 10 \quad \Rightarrow a_7 = 1 \cdot 10^6 = 1\,000\,000$

f) 1 000, 1 500, 2 250, 3 375, ... ¿a_{10}?

$a_1 = 1000$; $\quad r = 1,5 = \frac{3}{2} \Rightarrow a_{10} = 1000 \cdot (1,5)^9 =$

$= 38443,359$

▶ Pág. 123. 6 Suma de términos consecutivos de una progresión geométrica



TEMA 6

6 Suma de términos consecutivos de una progresión geométrica

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_{n-1} + a_n$ es la suma de los n primeros términos de una progresión geométrica de razón r.

Multiplicando ambos miembros por r, queda:

$$r \cdot S_n = r \cdot a_1 + r \cdot a_2 + r \cdot a_3 + \ldots + r \cdot a_{n-1} + r \cdot a_n = a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_{n-1} + a_n + r \cdot a_n$$

Restando:

$$\begin{array}{r} r \cdot S_n = \quad a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_{n-1} + a_n + r \cdot a_n \\ S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_{n-1} + a_n \end{array}$$

$$r \cdot S_n - S_n = r \cdot a_n - a_1 \Rightarrow S_n \cdot (r-1) = r \cdot a_n - a_1 \Rightarrow S_n = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r-1}$$

La suma de los n primeros términos de una progresión geométrica es:

$$S_n = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r-1}$$

RECUERDA QUE...

Al multiplicar por la razón r, cada término pasa a ser el siguiente.

OBSERVA

$S = 2 + 6 + 18 + 54 + 162 + 1458 + 4374$

Multiplicamos la suma anterior por 3:

$3S = 6 + 18 + 54 + 162 + 1458 + 4374 + 13122$

Restando ambas sumas:

$3S - S = 13122 - 2 \Rightarrow 2S = 13120$

Por tanto:

$$S = \frac{13120}{2} = 6560$$

EJEMPLO

1 Calcula la suma de las 10 primeras potencias de 2.

Las potencias de 2 forman una progresión geométrica de razón $r = 2$, donde el primer término $a_1 = 2$, y el último término que vamos a sumar es $a_{10} = 2^{10}$.

Con todos los datos, aplicaremos la fórmula y obtendremos:

$$S_{10} = \frac{a_{10} \cdot r - a_1}{r-1} = \frac{2^{10} \cdot 2 - 2}{2-1} = \frac{2^{11} - 2}{1} = 2046$$

EJERCICIO

O Efectúa las sumas de las progresiones geométricas siguientes:

a) $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256 + 512 + 1\,024 + 2\,048$;

b) $3 + 12 + 48 + 144 + 432 + 1\,296 + 3\,888 + 11\,664$;

c) $-5 - 15 - 45 - 135 - 405 - 1\,215 - 3\,645 - 10\,935 - 32\,805$;

d) $2\,187 + 729 + 243 + 81 + 27 + 9 + 3 + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9}$;

e) $3 + 1 + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{243}$;

f) $3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \ldots 3^{10}$

123

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS

Puede ser necesaria una ejemplificación práctica de la demostración. Puede servir el ejercicio 8 a)

Indicar que la fórmula $S_n = \dfrac{a_1 - a_n \cdot r}{1 - r}$ también es correcta.

SOLUCIONARIO

8. Efectúa las sumas de las progresiones geométricas siguientes:

a) 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256 + 512 + + 1 024 + 2 048;

$a_1 = 1$; $a_n = 2048$; $r = 2$

Aplicando la fórmula de la suma

$$S_n = \frac{a_n r - a_1}{r-1} = \frac{2048 \cdot 2 - 1}{2-1} = 4095$$

b) 3 + 12 + 48 + 144 + 432 + 1 296 + + 3 888 + 11 664;

$a_1 = 3$; $a_n = 11664$; $r = 4$

Aplicando la fórmula de la suma

$$S_n = \frac{11664 \cdot 4 - 3}{4-1} = 15551$$

c) –5 – 15 – 45 – 135 – 405 – 1 215 – 3 645 – 10 935 – 32 805;

Aplicando la fórmula de la suma

$a_1 = -5$; $a_n = -32805$; $r = 3$

$$S_n = \frac{-32805 \cdot 3 + 5}{3-1} = -49205$$

d) $2187 + 729 + 243 + 81 + 27 + 9 + 3 + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9}$;

$a_1 = 2187$; $a_n = \dfrac{1}{9}$; $r = \dfrac{1}{3}$

Aplicando la fórmula de la suma

$$S_n = \frac{\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{3} - 2187}{\frac{1}{3} - 1} = \frac{29524}{9} = 3280,44$$

e) $3 + 1 + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{243}$;

$a_1 = 3$; $a_n = \dfrac{1}{243}$; $r = \dfrac{1}{3}$

Aplicando la fórmula de la suma

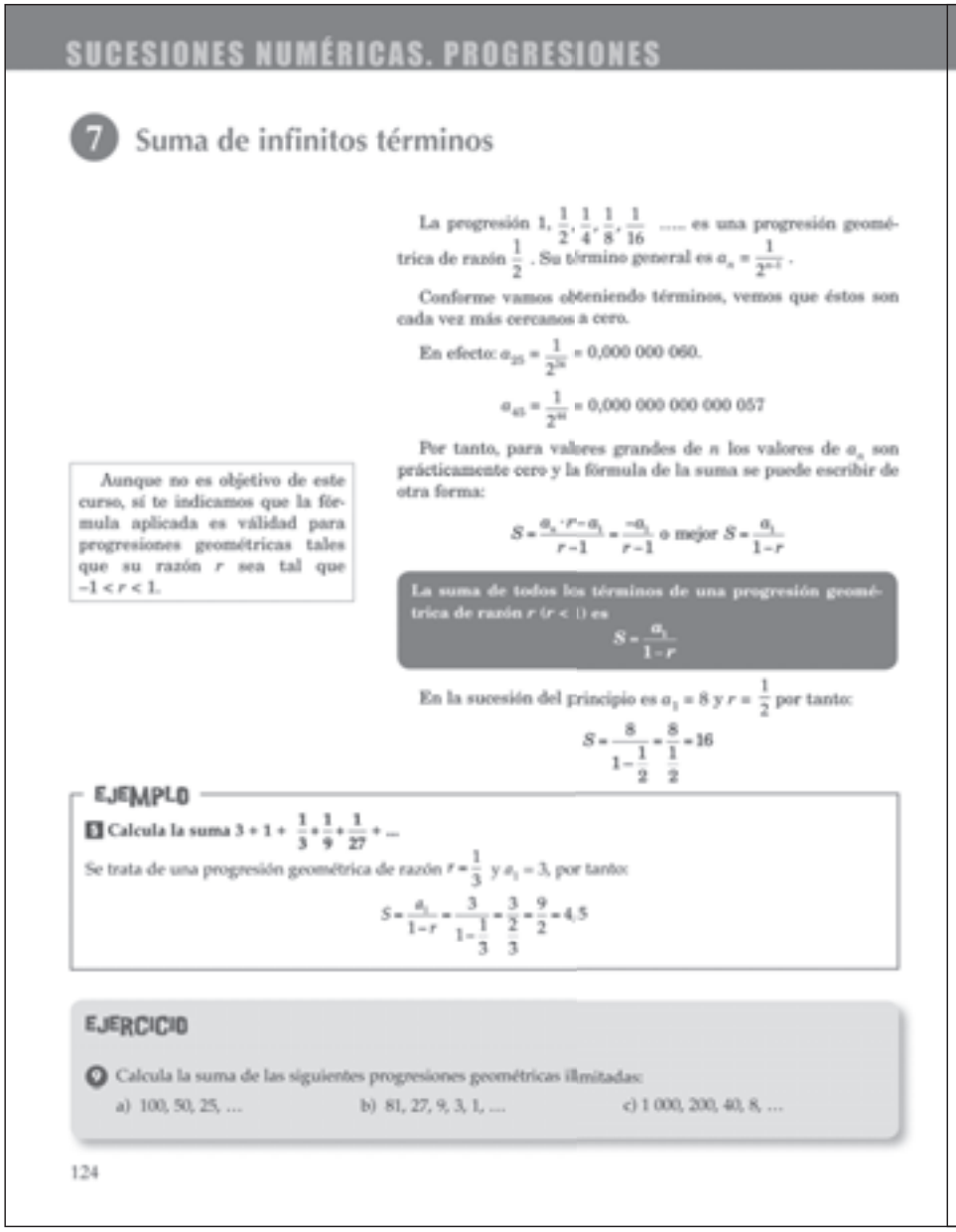
$$S_n = \frac{\frac{1}{243} \cdot \frac{1}{3} - 3}{\frac{1}{3} - 1} = \frac{1093}{243} \simeq 4,5$$

f) $3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \ldots + 3^{10}$

$a_1 = 3$; $a_n = 3^{10}$; $r = 3$

$$S_n = \frac{3^{10} \cdot 3 - 3}{3-1} = \frac{3^{11} - 3}{2} = 88572$$

▶ Pág. 124. 7 Suma de infinitos términos



SUCESIONES NUMÉRICAS. PROGRESIONES

7 Suma de infinitos términos

La progresión $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$ ..... es una progresión geométrica de razón $\frac{1}{2}$. Su término general es $a_n = \frac{1}{2^{n-1}}$.

Conforme vamos obteniendo términos, vemos que éstos son cada vez más cercanos a cero.

En efecto: $a_{25} = \frac{1}{2^{24}} = 0{,}000\,000\,060$.

$$a_{45} = \frac{1}{2^{44}} = 0{,}000\,000\,000\,000\,057$$

Por tanto, para valores grandes de n los valores de a_n son prácticamente cero y la fórmula de la suma se puede escribir de otra forma:

$$S = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r-1} = \frac{-a_1}{r-1} \text{ o mejor } S = \frac{a_1}{1-r}$$

Aunque no es objetivo de este curso, sí te indicamos que la fórmula aplicada es válidad para progresiones geométricas tales que su razón r sea tal que $-1 < r < 1$.

La suma de todos los términos de una progresión geométrica de razón r ($r <$ 1) es

$$S = \frac{a_1}{1-r}$$

En la sucesión del principio es $a_1 = 8$ y $r = \frac{1}{2}$ por tanto:

$$S = \frac{8}{1-\frac{1}{2}} = \frac{8}{\frac{1}{2}} = 16$$

EJEMPLO

1 Calcula la suma $3 + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \ldots$

Se trata de una progresión geométrica de razón $r = \frac{1}{3}$ y $a_1 = 3$, por tanto:

$$S = \frac{a_1}{1-r} = \frac{3}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{\frac{2}{3}} = \frac{9}{2} = 4{,}5$$

EJERCICIO

9 Calcula la suma de las siguientes progresiones geométricas ilimitadas:

a) 100, 50, 25, ... b) 81, 27, 9, 3, 1, ... c) 1 000, 200, 40, 8, ...

124

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS

Epígrafe con gran contenido intuitivo.

Hacer hincapié en que la restricción $-1 < r < 1$ implica que $a_n \to 0$.

SOLUCIONARIO

9. Calcula la suma de las siguientes progresiones geométricas ilimitadas:

a) 100, 50, 25, ...

$a_1 = 100;\ r = \frac{1}{2}$

Aplicando la fórmula de la suma

$$S = \frac{a_1}{1-r} = \frac{100}{1-\frac{1}{2}} = 200$$

b) 81, 27, 9, 3, 1, ...

$a_1 = 81;\ r = \frac{1}{3}$

Aplicando la fórmula de la suma

$$S = \frac{81}{1-\frac{1}{3}} = \frac{243}{2} = 121{,}5$$

c) 1 000, 200, 40, 8, ...

$a_1 = 1000;\ r = \frac{1}{5}$

Aplicando la fórmula de la suma

$$S = \frac{1000}{1-\frac{1}{5}} = \frac{1000}{\frac{4}{5}} = \frac{5000}{4} = 1250$$

▶ Pág. 125. 8 Ejercicios resueltos

8 Ejercicios resueltos

1 **En una progresión geométrica se conoce el término $a_6 = 7$ y $a_{12} = 25$. Halla a_1, d y la expresión del término general.**

Aplicamos la fórmula $a_n = a_1 + (n-i)\cdot d$ que para este caso sería: $a_{12} = a_6 + (12-6)\cdot d$. Sustituyendo los datos queda:

$$25 = 7 + 6d \Rightarrow 18 = 6d \Rightarrow d = 3.$$

La fórmula inicial también se puede escribir $a_6 = a_1 + (6-1)d$

y tenemos:

$$7 = a_1 + 5\cdot 3 \Rightarrow a_1 = 7 - 15 = -8$$

El término general será $a_n = a_1 + (n-1)d$ es decir:

$$a_n = -8 + (n-1)\cdot 3 \Rightarrow a_n = 3n - 11$$

2 **Calcula el término a_1 y el término general de una progresión geométrica de términos positivos sabiendo que $a_3 = 1$ y $a_5 = 4$. Utiliza la fórmula del término general para calcular a_9.**

Aplicamos la fórmula $a_p = a_q \times r^{p-q}$ a los datos:

$$a_5 = a_3 \times r^{5-3} \Rightarrow 4 = 1 \times r^2 \Rightarrow r^2 = 4 \Rightarrow r = 2$$

La posible solución $r = -2$ no se considera pues el enunciado habla de términos positivos.

Conocida r podemos obtener a_1 haciendo: $a_3 = a_1 \cdot r^2$, es decir: $1 = a_1 \cdot 2^2 \Rightarrow a_1 = \frac{1}{4}$

El término general queda:

$$a_n = a_1 \times r^{n-1} \Rightarrow a_n = \frac{1}{4} \times 2^{n-1} \Rightarrow a_n = \frac{2^{n-1}}{2^2} = 2^{n-3} \Rightarrow a_n = 2^{n-3}$$

3 **Uniendo los puntos medios de los lados de un triángulo equilátero de lado 10 cm, se obtiene otro triángulo equilátero. Si repetimos el proceso indefinidamente se obtiene una sucesión de triángulos equiláteros. Halla la suma de las áreas de los infinitos triángulos equiláteros que se pueden obtener:**



La altura del primer triángulo es $h = \sqrt{10^2 - 5^2} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$ cm y su área será:

$$A_1 = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2} = \frac{10 \times 5\sqrt{3}}{2} = 25\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

La siguiente construcción genera un triángulo de área igual a la cuarta parte del anterior, por tanto el área del segundo triángulo será la cuarta parte del anterior, es decir: $A_2 = \frac{25\sqrt{3}}{4}$ cm^2.

Las áreas forman una progresión geométrica de razón $r = \frac{1}{4}$, luego la suma de las áreas de los infinitos triángulos que se pueden formar es: $S = \frac{a_1}{1-r} = \frac{25\sqrt{3}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{25\sqrt{3}}{\frac{3}{4}} = \frac{100\sqrt{3}}{3} = 57{,}74$ cm^2.

125

▶ Pág. 128. Ejercicios



SUCESIONES NUMÉRICAS. PROGRESIONES

EJERCICIOS

SUCESIONES. TÉRMINO GENERAL

PROGRESIONES ARITMÉTICAS

128

SOLUCIONARIO

10. Calcula los cinco primeros términos de cada una de las siguientes sucesiones cuyo término general es:

a) $a_n = 2 + 3n$; $a_1 = 5$; $a_2 = 8$; $a_3 = 11$; $a_4 = 14$; $a_5 = 17$;

b) $b_n = 3n^2 - 15$; $b_1 = -12$; $b_2 = -3$; $b_3 = 12$; $b_4 = 33$; $b_5 = 60$;

c) $c_n = (-1)^n$ $c_1 = -1$; $c_2 = 1$; $c_3 = -1$; $c_4 = 1$; $c_5 = -1$;

d) $d_n = \dfrac{3n+4}{2n-3}$

$d_1 = -7$; $d_2 = 10$; $d_3 = \dfrac{13}{3}$; $d_4 = \dfrac{16}{5}$; $d_5 = \dfrac{19}{7}$;

11. La sucesión 1, 3, 7, 13, 21, 31, ... tiene como término general;

a) $a_n = 2n - 1$ **b)** $a_n = 2^n - 1$

c) $a_n = n^2 - n + 1$ **d)** $a_n = 3n - 2$

La sucesión 1, 3, 7, 13, 21, 31, ... tiene como término general la respuesta c) $a_n = n^2 - n + 1$

12. Una sucesión está definida por recurrencia de la forma $a_1 = 1$ y $a_{n+1} = 3 + a_n$. Determina: a_2, a_3, a_4 y a_5.

$a_1 = 1$; $a_{n+1} = 3 + a_n$;

luego $a_2 = 3 + a_1 = 3 + 1 = 4$

$a_3 = 3 + a_2 = 3 + 4 = 7$

$a_4 = 3 + a_3 = 3 + 7 = 10$

$a_5 = 3 + a_4 = 3 + 10 = 13$

13. Una sucesión tal que $a_1 = 2$ y, a partir del primero, cada término es el doble del anterior, menos 4.

a) Escribe la fórmula de recurrencia que defina esta sucesión.

b) Escribe sus cinco primeros términos.

c) ¿Puede ser $a_n = 4 - 2^n$?

a) $a_1 = 2 \quad a_{n+1} = 2a_n - 4$

b) $a_1 = 2 \quad a_2 = 2 \cdot 2 - 4 = 0 \qquad a_3 = 2 \cdot 0 - 4 = -4$

$a_4 = 2(-4) - 4 = -12 \quad a_5 = 2(-12) - 4 = -28$

c) Sí, es $a_n = 4 - 2^n$ su término general.

14. Escribe los cinco primeros términos de las sucesiones definidas por recurrencia de la forma:

a) $a_1 = 4$; $a_{n+1} = a_n + 2$;

$a_2 = a_1 + 2 = 4 + 2 = 6$

$a_3 = a_2 + 2 = 6 + 2 = 8$

$a_4 = a_3 + 2 = 8 + 2 = 10$

$a_5 = a_4 + 2 = 10 + 2 = 12$

b) $a_1 = -3$; $a_{n+1} = -2a_n$;

$a_2 = -2a_1 = -2(-3) = 6$

$a_3 = -2a_1 = -2(6) = -12$

$a_4 = -2a_1 = -2(-12) = 24$

$a_5 = -2a_1 = -2(24) = -48$

c) $a_1 = 1$; $a_2 = 3$; $a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n$;

$a_3 = a_2 + 2a_1 = 3 + 2 \cdot 1 = 5$

$a_4 = a_3 + 2a_2 = 5 + 2 \cdot 3 = 11$

$a_5 = a_4 + 2a_3 = 11 + 2 \cdot 5 = 21$

d) $a_1 = 2$; $a_{n+1} = 1 + (a_n)^2$;

$a_2 = 1 + (a_1)^2 = 1 + 2^2 = 5$

$a_3 = 1 + (a_2)^2 = 1 + 5^2 = 26$

$a_4 = 1 + (a_3)^2 = 1 + 26^2 = 677$

$a_5 = 1 + (a_4)^2 = 1 + 677^2 = 458330$

15. A continuación se dan los primeros términos de una sucesión. Intenta determinar en cada caso su término general o una ley de recurrencia que permita obtener los términos siguientes:

a) –3, 0 , 3, 6, 9, 12, ... $a_n = 3_n - 6$

b) 2, 5, 0, 17, 26, 37, ... $a_n = n^2 + 1$

c) 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ... $a_n = n + 2$

d) –1, 1, –1, 1, –1, 1, –1, ... $a_n = (-1)^n$

e) $2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$ $a_n = 2^{2-n}$

f) –1, 2, 7, 14, 23, 34, ... $a_n = n^2 - 2$

16. Identifica cada una de las sucesiones con su término general:

Sucesión	*Término general*
1) $\frac{5}{3}, \frac{7}{6}, 1, \frac{11}{12}, \ldots$	A) $a_n = (-1)^{n+1} \times n$
2) $1, -2, 3, -4, 5, \ldots$	B) $a_n = \frac{2n+3}{3n}$
3) $0, \frac{-1}{3}, \frac{-8}{11}, \frac{-15}{13}, \ldots$	C) $a_n = \frac{4}{3^{n-1}}$
4) $14, 12, 10, 8, \ldots$	D) $a_n = \frac{n^2}{n+1}$
5) $\frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{9}{4}, \frac{16}{5}, \ldots$	E) $a_n = 16 - 2n$
6) $4, \frac{4}{3}, \frac{4}{9}, \frac{4}{27}, \ldots$	F) $a_n = \frac{1-n^2}{2n+5}$

17. La sucesión de Fibonacci.

La sucesión de Fibonacci (Leonardo Pisano, 1170 – 1250) está definida por recurrencia: "conocidos los dos primeros términos, cada uno de los siguientes es la suma de los dos anteriores".

Por ejemplo, si $a_1 = 1$ y $a_2 = 1$, la sucesión es:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...

Escribe la fórmula de recurrencia.

$a_1 = 1, a_2 = 1$ y $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$

18. ¿Cuáles de los siguientes términos generales corresponden a una progresión aritmética? En los casos que sí corresponda a una progresión aritmética, señala la diferencia de la progresión.

a) $a_n = 3 - 2n$

$a_{n+1} - a_n = 3 - 2(n+1) - (3 - 2n) = -2$

Si es una progresión aritmética de $d = -2$

b) $b_n = 2n$

$b_{n+1} - b_n = 2(n+1) - 2n = 2$

Si es una progresión aritmética de $d = 2$

c) $c_n = (n+1)(n-1)$

$c_{n+1} - c_n = ((n+1)+1)((n+1)-1) - (n+1)(n-1) =$

$= (n+2)n - (n+1)(n-1) = 2n + 1$

No es una progresión aritmética.

d) $d_n = n^2 + 3n$

$d_{n+1} - d_n = (n+1)^2 + 3(n+1) - (n^2 + 3n) = 2n + 4$

No es una progresión aritmética.

e) $e_n = 5n - 23$

$e_{n+1} - e_n = 5(n+1) - 23 - (5n - 23) = 5$

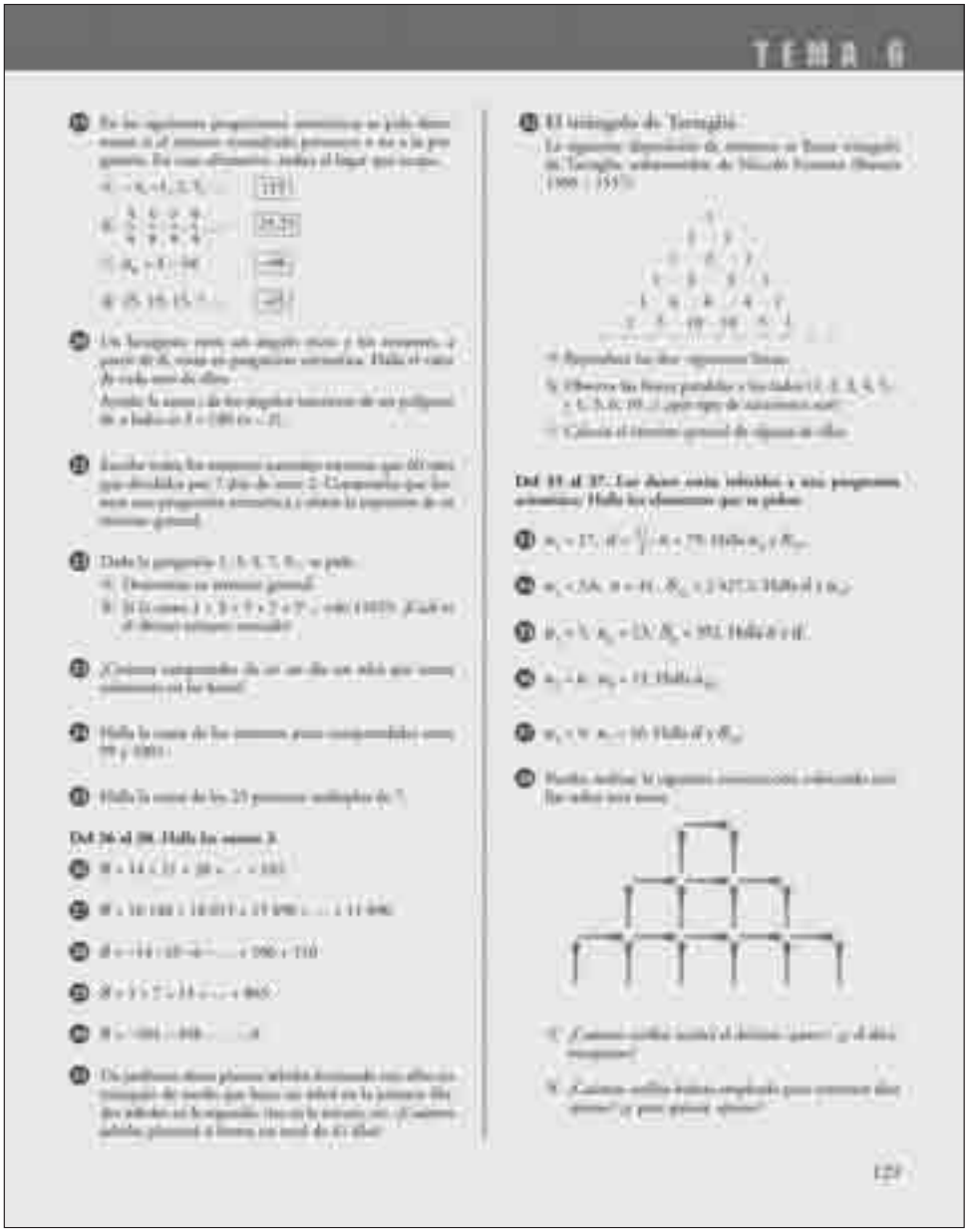
Sí es una progresión aritmética de $d = 5$

f) $f_n = \frac{6n-5}{2}$

$f_{n+1} - f_n = \frac{6(n+1)-5}{2} - \frac{6n-5}{2} = 3$

Sí es una progresión aritmética de $d = 3$

▶ Pág. 129. Ejercicios



SOLUCIONARIO

19. En las siguientes progresiones aritméticas se pide determinar si el número recuadrado pertenece o no a la progresión. En caso afirmativo, indica el lugar que ocupa.

a) $-4, -1, 2, 5, \ldots$ $\boxed{119}$

$a_1 = -4 \qquad d = 3$ y $a_n = 119$

Utilizando la fórmula del término general para obtener n

$a_n = a_1 + (n-1)\,d$

$119 = -4 + (n-1)\cdot 3$ despejando $n = 42$

Luego sí pertenece $a_{42} = 119$

b) $\frac{3}{4}, \frac{5}{4}, \frac{7}{4}, \frac{9}{4}, \ldots$ $\boxed{25{,}25}$

$a_1 = \frac{3}{4} \quad d = \frac{1}{2}$ y $a_n = 25{,}25$

Procediendo de igual forma que en el anterior

$25{,}25 = \frac{3}{4} + (n-1)\cdot \frac{1}{2}$ despejando $n = 50$

Luego sí pertenece $a_{50} = 25{,}25$

c) $a_n = 3 - 5n$ $\boxed{-48}$

Sustituyendo a_n por -48 obtenemos $-48 = 3 - 5n$, despejando $n = 10{,}2$, como n ha de ser un número natural, el -48 *no* pertenece a la progresión aritmétrica citada.

d) $25, 19, 13, 7, \ldots$ $\boxed{-65}$

$a_1 = 25$; $d = -6$ y $a_n = -65$

$-65 = 25 + (n-1)(-6)$, despejando $n = 16$

Luego sí pertenece $a_{16} = -65$

20. Un hexágono tiene un ángulo recto y los restantes, a partir de él, están en progresión aritmética. Halla el valor de cada uno de ellos.

Ayuda: la suma s de los ángulos interiores de un polígono de n lados es $S = 180\ (n - 2)$.

La suma de los ángulos interiores de un hexágono es $S = 180 \times 4 = 720$.

Como la suma de los ángulos interiores de este hexágono están en progresión aritmética, siendo $a_1 = 90$, se aplica ahora la fórmula de la suma de los términos de las progresiones aritméticas.

$$S_6 = \frac{a_1 + a_6}{2} \times 6 \Rightarrow 720 = \frac{90 + 96}{2} \times 6 \Rightarrow a_6 = 150$$

y como $a_6 = a_1 + 5d \Rightarrow 150 = 90 + 5d \Rightarrow d = 12$

Por tanto, los ángulos de este hexágono son: 90, 102, 114, 126, 138 y 150.

21. Escribe todos los números naturales menores que 60 tales que divididos por 7 den de resto 2. Comprueba que forman una progresión aritmética y obtén la expresión de su término general.

Estos números naturales son: 9, 16, 23, 30, 37, 44, 51 y 58. Si son una progresión aritmética y su término general es: $a_n = 7n + 2$.

22. Dada la progesión 1, 3, 5, 7, 9... se pide:

a) Determina su término general.

b) Si la suma 1 + 3 + 5 + 7 + 9 ... vale 11025. ¿Cuál es el último número sumado?

a) $a_n = 2n - 1$

b) Utilizamos ls fórmula de la suma: $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \times n$ y como $a_n = a_1 + (n - 1)\, d$ se tiene que

$$S_n = \frac{a_1 + a_1 + (n-1)d}{2} \times n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \times n$$

Como $S_n = 11025$, $a_1 = 1$ y $d = 2$, sustituimos

$$11025 = \frac{2 + (n-1)2}{2} \times n = n^2 \Rightarrow n = 105$$

Por tanto, el último sumando es:
$a_{105} = 1 + 104 \times 2 = 209$

23. ¿Cuántas campanadas da en un día un reloj que suena solamente en las horas?

El número de campanadas que da el reloj es: 1 + 2 + 3 + ... + 12 que es la suma de la progresión aritmética de $a_1 = 1$, $a_{12} = 12$ y $d = 1$, por tanto $S = \frac{1 + 12}{2} \times 12 = 78$. Da 78 campanadas.

24. Halla la suma de los números pares comprendidos entre 99 y 1001.

$a_1 = 100$; $a_n = 1000$; $d = 2$ y el número de elementos lo podemos obtener con la fórmula del término general.

$1000 = 100 + (n - 1)\, 2 \Rightarrow n = 451$

Aplicando la fórmula de la suma

$$S = \frac{100 + 1000}{2} \times 451 = 248050$$

25. Halla la suma de los 25 primeros números múltiplos de 7.

$a_1 = 7$; $a_{25} = 7 + 24 \cdot 7 = 175$; $n = 25$

Aplicando la fórmula de la suma:

$$S_{25} = \frac{14 + 182}{2} \times 25 = 2450$$

Del 26 al 30. Halla las sumas *S*.

26. $S = 14 + 21 + 28 + \ldots + 182$

$a_1 = 14$; $a_n = 182$; $d = 7$

$182 = 14 + (n - 1)\, 7 \Rightarrow n = 25$

$$S_{25} = \frac{14 + 182}{2} \times 25 = 2450$$

27. $S = 16\,140 + 16\,015 + 15\,890 + \ldots + 11\,890$

$a_1 = 16140$; $a_n = 11890$; $d = -125$

$11890 = 16140 + (n - 1)\,(-125) \Rightarrow n = 35$

$$S_{35} = \frac{16140 + 11890}{2} \times 35 = 490525$$

28. $S = -14 - 10 - 6 - \ldots + 106 + 110$

$a_1 = -14$ $a_n = 110$ $d = 4$

$110 = -14\,(n - 1)\, 4 \Rightarrow n = 32$

$$S_{32} = \frac{-14 + 110}{2} \times 32 = 1536$$

29. $S = 1 + 7 + 13 + \ldots + 865$

$a_1 = 1$; $a_n = 865$; $d = 6$

$865 = 1 + (n - 1)\, 6 \Rightarrow n = 145$

$$S = \frac{1 + 865}{2} \times 145 = 62785$$

30. $S = -504 - 498 - \ldots - 0$

$a_1 = -504$; $a_n = 0$; $d = 6$

$0 = -504 + (n - 1)\, 6 \Rightarrow n = 85$

$$S = \frac{-504 + 0}{2} \times 85 = -21420$$

31. Un jardinero desea plantar árboles formando con ellos un triángulo de modo que haya un árbol en la primera fila, dos árboles en la segunda, tres en la tercera, etc. ¿Cuántos árboles plantará si forma un total de 41 filas?

$a_1 = 1$; $n = 41$; $d = 1$; $a_{41} = 41$

$S_{41} = \frac{1 + 41}{2} \times 41 = 861$ plantará 861 árboles.

32. El triángulo de Tartaglia. La siguiente disposición de números se llama triángulo de Tartaglia, sobrenombre de Niccolò Fontana (Brescia 1500 – 1557)

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

a) Reproduce las dos siguientes líneas.

b) Observa las líneas paralelas a los lados (1, 2, 3, 4, 5... y 1, 3, 6, 10...) ¿qué tipo de sucesiones son?

c) Calcula el término general de alguna de ellas.

a) Cada uno de los números de una línea, exceptuando los de los extremos que son unos, son la suma de los dos que tiene encima. Así pues, las dos siguientes líneas son:

1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1

b) 1, 2, 3, 4... es una progresión aritmética de $d = 1$

1, 3, 6, 10 ... no es una progresión aritmética ni geométrica.

c) El término general de la 1, 2, 3, 4 ... es $a_n = n$

El término general de la 1, 3, 6, 10... es

$$a_n = \left(\frac{n+1}{2}\right) = \left(\frac{n+1}{n-1}\right) = \frac{n(n+1)}{2}$$

Del 33 al 37. Los datos están referidos a una progresión aritmética. Halla los elementos que se piden.

33. $a_1 = 17$, $d = \frac{11}{2}$, $n = 79$. Halla a_n y S_{79}.

$$a_n = a_{79} = a_1 + 78 \cdot d = 17 + 78 \cdot \frac{11}{2} = 446$$

$$S_{79} = \frac{17 + 446}{2} \times 79 = 18288,5$$

34. $a_1 = 3,6$, $n = 41$, $S_{41} = 2\,427,2$. Halla d y a_{41}.

Como $S_{41} = \frac{a_1 + a_{41}}{2} \times 41$, sustituyendo

$2427,2 = \frac{2,6 + a_{41}}{2} \times 41$ y despejando a_{41} se tiene:

$a_{41} = 114,8$

Utilizando la fórmula del término general

$114,8 = 3,6 + 40 \cdot d$ se tiene: $d = 2,78$

35. $a_1 = 5$, $a_n = 23$, $S_n = 392$. Halla n y d.

De la fórmula de la suma con los datos que tenemos

$$392 = \frac{5 + 29}{2} \times n \Rightarrow n = 28$$

De la fórmula del término general

$$23 = 5 + 27 \cdot d \Rightarrow d = \frac{2}{3}$$

36. $a_1 = 6$; $a_5 = 12$. Halla a_{20}.

De $a_5 = a_1 + 4d \Rightarrow 12 = 6 + 4d \Rightarrow d = \frac{3}{2}$

De $a_{20} = a_1 + 19d \Rightarrow a_{20} = 6 + 19 \cdot \frac{3}{2} = \frac{69}{2}$

37. $a_1 = 4$; $a_7 = 16$. Halla d y S_{40}.

De la fórmula del término general despejamos d

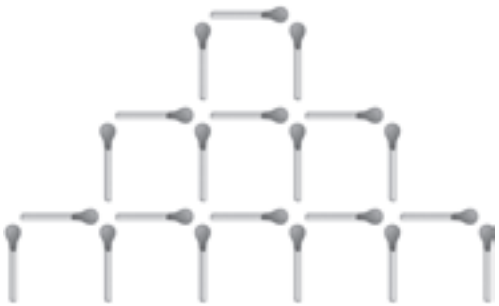
$16 = 4 + 6 \cdot d \Rightarrow d = 2$

luego $a_{40} = 4 + 39 \cdot 2 = 82$

Aplicamos los datos en la fórmula de la suma

$$S_{40} = \frac{4 + 82}{2} \times 40 = 1720$$

38. Puedes realizar la siguiente construcción colocando cerillas sobre una mesa.



a) ¿Cuántas cerillas tendrá el décimo «piso»?, ¿y el décimoquinto?

b) ¿Cuántas cerillas habrás empleado para construir diez «pisos»? ¿y para quince «pisos»?

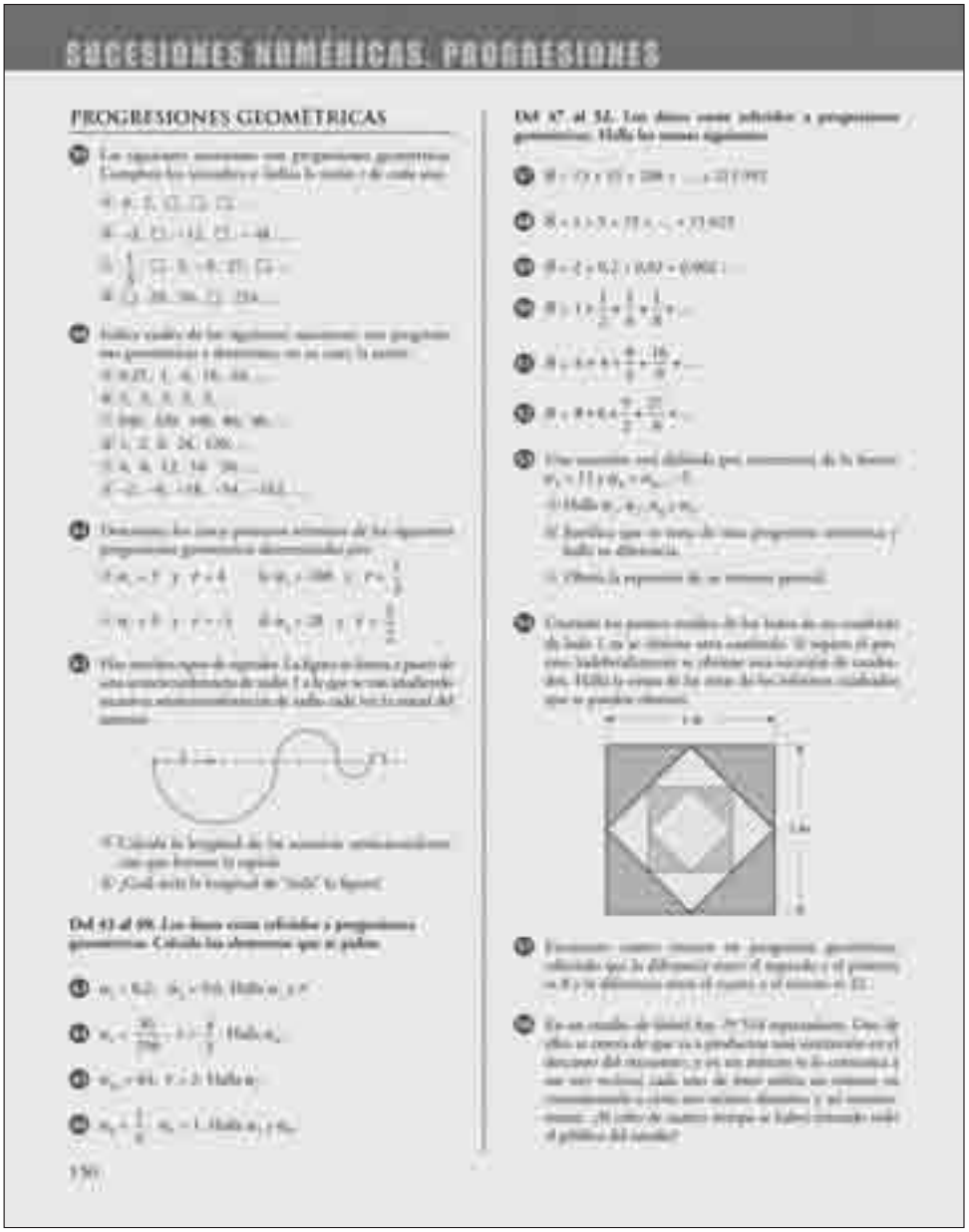
a) $a_{10} = 3 + 9 \cdot 4 = 39$

$a_{15} = 3 + 14 \cdot 4 = 59$

b) $S_{10} = \frac{3 + 39}{2} \times 10 = 210$

$S_{15} = \frac{3 + 59}{2} \times 15 = 465$

▶ Pág. 130. Ejercicios



SUCESIONES NUMÉRICAS. PROGRESIONES

PROGRESIONES GEOMÉTRICAS

130

39. Las siguientes sucesiones son progresiones geométricas. Completa los recuadros e indica la razón *r* de cada una.

a) 4, 2, □, □, □, … $r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{2}$ y la progresión es: 4 , 2 , 1, 1/2 , 1/4...

b) –3, □, –12, □, – 48, … $r^2 = \frac{a_3}{a_1} = 4 \Rightarrow r = \pm 2$

Para $r = 2$ la progresión es: – 3 , –6 , –12, –24 , –48 , … y para r = –2 la pregresión es: –3, 6, –12, 24, –48 ...

c) $\frac{1}{3}$**, □, 3, –9, 27, □, …** $r = \frac{a_4}{a_3} = -3$ y la progresión es: $\frac{1}{3}, -1, 3, -9, 27, -81$

d) □, 28, 56, □, 224, … $r = \frac{a_3}{a_2} = 2$ y la progresión es: 14 , 28 , 56 , 112 , 224 , …

40. Indica cuáles de las siguientes sucesiones son progresiones geométricas y determina, en su caso, la razón:

a) 0,25; 1; 4; 16; 64; … Sí, $r = 4$

b) 3, 3, 3, 3, 3, … Sí, $r = 1$

c) 640, 320, 160, 80, 40, … Sí, $r = \frac{1}{2}$

d) 1, 2, 6, 24, 120, … No

e) 4, 8,12, 16, 20, … No

f) – 2, – 6, – 18, – 54, – 162, … Sí, $r = 3$

41. Determina los cinco primeros términos de las siguientes progresiones geométricas determinadas por:

a) $a_1 = 5$ **y** $r = 4$

$a_1 = 5,\ a_2 = 20,\ a_3 = 80,\ a_4 = 320,\ a_5 = 1280$

b) $a_5 = 108$ **y** $r = \frac{1}{3}$

$a_5 = a_1 \cdot r^4$ sustituyendo $108 = a_1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4$ y despejando $\Rightarrow a_1 = 8748$

$a_1 = 8748,\ a_2 = 2916,\ a_3 = 972,\ a_4 = 324,\ a_5 = 108$

c) $a_7 = 9$ **y** $r = -1$

$a_7 = a_1 \cdot r^6,\quad 9 = a_1 \cdot (-1)^6 \Rightarrow a_1 = 9$

$a_1 = 9,\ a_2 = -9,\ a_3 = 9,\ a_4 = -9,\ a_5 = 9$

d) $a_3 = 28$ **y** $r = \frac{5}{2}$

$a_3 = a_1 \cdot r^2 \Rightarrow 28 = a_1 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2 \Rightarrow a_1 = 4{,}48$

$a_1 = 4{,}48;\ a_2 = 11{,}2;\ a_3 = 28;\ a_4 = 70;\ a_5 = 175$

42. Hay muchos tipos de espirales. La figura se forma a partir de una semicircunferencia de radio 1 a la que se van añadiendo sucesivas semicircunferencias de radio cada vez la mitad del anterior.



a) Calcula la longitud de las sucesivas semicircunferencias que forman la espiral.

b) ¿Cuál sería la longitud de "toda" la figura?

a) $\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{8}, \ldots$

b) Las longitudes de las semicircumferencias forman una progresión geométrica de razón $r = \frac{1}{2}$.

La suma de sus cuatro primeros términos es:

$$S_4 = \frac{a_4 r - a_1}{r - 1} = \frac{\frac{\pi}{8} \times \frac{1}{2} - \pi}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{15}{8}\pi$$

La suma de las infinitas semicircumferencias que foman la espiral es:

$$S = \frac{a_1}{1 - r} = \frac{\pi}{1 - \frac{1}{2}} = 2\pi$$

Del 43 al 49. Los datos están referidos a progresiones geométricas. Calcula los elementos que se piden.

43. $a_1 = 0{,}2 \quad a_2 = 0{,}6$. **Halla** a_5 **y** r.

$r = \frac{a_2}{a_1} = 3$

$a_5 = a_1 \cdot 3^4 = 0{,}2 \cdot 81 = 16{,}2$

44. $a_1 = \frac{81}{256}$, $r = \frac{4}{3}$. **Halla** a_6.

$a_6 = \frac{81}{256} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^5 = \frac{4}{3}$

45. $a_{10} = 64$, $r = 2$. **Halla** a_1.

$64 = a_1 \cdot 2^9 \Rightarrow a_1 = \frac{64}{29} = \frac{1}{8}$

46. $a_4 = \frac{1}{6}$, $a_5 = 1$. **Halla** a_2 **y** a_8.

$a_4 = \frac{1}{6} \qquad a_5 = 1$

$r = \frac{a_5}{a_4} = 6$

$a_4 = a_2 \cdot r^2 \quad \frac{1}{6} = a_2 \cdot 6^2 \Rightarrow a_2 = \frac{1}{6^3} = \frac{1}{216}$

$a_8 = a_5 \cdot r^3$

$a_8 = 1 \cdot 6^3 = 216$

Del 47 al 52. Los datos están referidos a progresiones geométricas. Halla las sumas siguientes.

47. $S = 13 + 52 + 208 + \ldots + 212\,992$

Aplicando la fórmula de la suma, sabiendo que $r = 4$

$$S = \frac{212992 \times 4 - 13}{4 - 1} = 283985$$

48. $S = 1 + 5 + 25 + \ldots + 15\,625$

Es $r = 5$; $S = \frac{15625 \times 5 - 1}{5 - 1} = 19531$

49. $S = 2 + 0{,}2 + 0{,}02 + 0{,}002 + \ldots$

S es la suma de los infinitos terminos de una progresión geométrica de razón

$r = \frac{1}{10} \Rightarrow S' = \frac{a_1}{1 - r} = \frac{2}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{20}{9}$

50. $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$

Es $r = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad S = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$

51. $S = 6 + 4 + \frac{8}{3} + \frac{16}{9} + \ldots$

$r = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad S = \frac{6}{1 - \frac{2}{3}} = 18$

52. $S = 8 + 6 + \frac{9}{2} + ...$

$r = \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad S = \frac{8}{1 - \frac{3}{4}} = 32$

53. Una sucesión está definida por recurrencia de la forma: $a_3 = 12$ y $a_n = a_{n+1} - 5$.

a) Halla a_1, a_2, a_4, y a_5.

b) Justifica que se trata de una progresión aritmética y halla su diferencia.

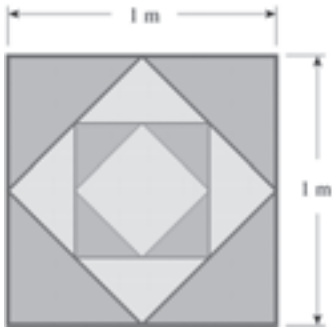
c) Obtén la expresión de su término general.

a) $a_1 = 2,\ a_2 = 7,\ a_4 = 17,\ a_5 = 22$

b) Si $a_n = a_{n+1} - 5$ obtenemos que $a_{n+1} - a_n = 5$ luego es una progresión aritmética de $d = 5$.

c) $a_n = 5n - 3$

54. Uniendo los puntos medios de los lados de un cuadrado de lado 1 m se obtiene otro cuadrado. Si repites el proceso indefinidamente se obtiene una sucesión de cuadrados. Halla la suma de las áreas de los infinitos cuadrados que se pueden obtener.



El primer cuadrado de $l = 1$m y su área es: $A = 1\text{m}^2$

El segundo cuadrado tiene el lado $l = \frac{\sqrt{2}}{2}$, y su área $A = \frac{1}{2}\text{m}^2$

El tercer cuadrado tiene de el lado $l = \frac{1}{2}$ y su área $A = \frac{1}{4}\text{m}^2$ luego estamos ante una progresión geométrica que forman las áreas de $r = \frac{1}{2}$, luego la suma de las áreas de los infinitos cuadrados será: $S = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2\ \text{m}^2$

55. Encuentra cuatro enteros en progresión geométrica, sabiendo que la diferencia entre el segundo y el primero es 8 y la diferencia entre el cuarto y el tercero es 32.

A los cuatro enteros que están en progresión geométrica los podemos nombrar como $x,\ x \cdot r,\ x \cdot r^2,\ x \cdot r^3$, utilizando la característica de la progresión.

Planteamos el problema $\left.\begin{matrix} xr - x = 8 \\ xr^3 - xr^2 = 32 \end{matrix}\right\}$ resolviendo el sistema obtenemos $r = \pm 2$, y $x = 8$ para $r = 2$ y $x = -\frac{8}{3}$ para $r = -2$

Como el enunciado nos pide números enteros sólo nos quedamos con el primer resultado $a_1 = 8$, $a_2 = 18$, $a_3 = 32$ y $a_4 = 64$.

56. En un estadio de fútbol hay 29 524 espectadores. Uno de ellos se entera de que va a producirse una sustitución en el descanso del encuentro, y en un minuto se lo comunica a sus tres vecinos; cada uno de éstos utiliza un minuto en comunicárselo a otros tres vecinos distintos, y así sucesivamente. ¿Al cabo de cuánto tiempo se habrá enterado el público del estadio?

Considerando que es una progresión geométrica con $a_1 = 1$, $r = 3$ y $S = 29524$, sabiendo que $a_n = 1 \cdot 3^{n-1}$ y sustituyendo en la fórmula de la suma obtenemos $29524 = \frac{3^{n-1} \times 3 - 1}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow 59049 = 3^n \Rightarrow n = 10$$

En 10 minutos se habrá enterado todo el público del estadio.

Tema 7

Movimientos en el plano

▸ Programación de aula

Objetivos

- Definir las componentes y módulo de un vector.
- Clasificar los vectores según su tipología.
- Operar con vectores.
- Caracterizar el punto medio de un segmento.
- Trasladar vectores en el plano.
- Efectuar giros en el plano.
- Definir la simetría axial y eje de simetría.
- Caracterizar el simétrico de un punto y de un segmento.
- Definir la simetría central y centro de simetría.
- Componer simetrías.
- Considerar la existencia de simetría en las figuras geométricas.

Criterios de evaluación

- Usar vectores.
- Calcular el módulo y componentes de un vector.
- Sumar vectores.
- Saber hallar el producto de un número por un vector.
- Obtener el punto medio de un segmento.
- Trasladar vectores.
- Componer traslaciones y vectores suma.
- Giros.
- Simetría axial: construir el punto simétrico respecto de un eje.
- Componer simetrías axiales.
- Componer de simetrías centrales.

Contenidos

- **Conceptos** ("saber")
  - Vectores.
  - Componentes y módulo de un vector.
  - Operaciones con vectores.
  - Punto medio de un segmento.
  - Traslaciones.
  - Giros.
  - Simetría axial. Eje de simetría.
  - Simétrico de un punto y de un segmento.
  - Simetría central. Centro de simetría.
  - Simétrico de un punto.
  - Simétrico de un segmento.
  - Simetría de figuras.
  - Composición de simetrías.
- **Procedimientos** ("Saber hacer")
  - Utilización diestra de los instrumentos de dibujo y medida habituales.
  - Utilización de los sistemas de referencia para situar y localizar objetos.
  - Búsqueda de propiedades, regularidades y relaciones en figuras y configuraciones geométricas.
  - Formulación y comprobación de conjeturas acerca de propiedades geométricas en figuras y solución de problemas geométricos en general.
  - Descripción verbal de problemas geométricos y del proceso seguido en su resolución, confrontándolo con otros posibles.
  - Generalización de resultados a partir de casos particulares.
  - Reducción de problemas geométricos complejos a otros más sencillos para facilitar su comprensión y resolución.
  - Utilización del método «hacia atrás» o «suponer el problema resuelto» para abordar problemas geométricos.
- **Actitudes** ("Saber ser")
  - Reconocimiento y valoración de la utilidad de la geometría para conocer y resolver diferentes situaciones relativas al entorno físico.
  - Curiosidad e interés por investigar sobre formas, configuraciones y relaciones geométricas.
  - Perseverancia en la búsqueda de soluciones a los problemas geométricos, y en la mejora de los ya encontrados.
  - Sensibilidad y gusto por la realización sistemática y presentación cuidadosa y ordenada de trabajos geométricos.
  - Sensibilidad ante las cualidades estéticas de las configuraciones geométricas, reconociendo su presencia en la naturaleza, en el arte y en la técnica.
  - Interés y gusto por la descripción verbal precisa de formas y características geométricas.
  - Flexibilidad para enfrentarse a situaciones geométricas desde distintos puntos de vista.
  - Sensibilidad y gusto por la realización sistemática y presentación cuidadosa y ordenada de trabajos geométricos.

▸ Programación por competencias

COMPETENCIA MATEMÁTICA

PENSAMIENTO Y RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

Descriptores

1. Utilizar la terminología y notación adecuadas para describir con precisión situaciones, formas, propiedades y configuraciones geométricas.
2. Buscar propiedades, regularidades y relaciones en figuras y configuraciones geométricas.

Desempeño

1. Utiliza la terminología y notación adecuadas para describir situaciones, formas, propiedades y configuraciones geométricas en el plano.	- Utiliza con precisión el vocabulario específico. - Clasifica las situaciones propuestas atendiendo a la tipología de los movimientos.	- **Ejemplos y ejercicios del tema** (pág. 134 a 152)
2. Busca las propiedades, regularidades y relaciones en figuras y configuraciones geométricas en el plano.	- Describe adecuadamente las propiedades y configuraciones de los distintos movimientos en el plano. - Establece comparaciones en la composición de movimientos en el plano.	
3. Caracteriza la simetría en el plano.	- Identifica la simetría en el plano de distintas figuras y configuraciones geométricas.	- **Ejemplo 7** (pág. 144) - **Ejercicios 11 a 14, 38, 41 a 45, 48 a 54** (pág. 142, 144, 150 a 152)

CONSTRUCCIÓN DE MODELOS

Descriptores

1.Utilizar con precisión los sistemas de referencia para situar y localizar objetos.
2. Utilizar con destreza los instrumentos de dibujo y medida habituales.

Desempeño

1. Modeliza distintos movimientos en el plano.	- Define los elementos definitorios de los movimientos de figuras en el plano.	- **Ejemplos 5 y 6** (pág. 138 y 140) - **Ejercicios 5 a 10, 27 a 32, 34, 35, 37 a 40 y 55** (pág. 139, 140, 149, 150 y 152)
2. Sitúa los puntos transformados por los distintos movimientos estudiados.	- Opera con los elementos definitorios de los movimientos de figuras en el plano.	
3. Dibuja el proceso seguido por una figura tras su transformación por un movimiento en el plano.	- Grafía el proceso seguido por una figura plana en su transformación por un movimiento o simetría.	

ARGUMENTAR MATEMÁTICAMENTE

Descriptores

1. Generalizar resultados a partir de casos particulares.

Desempeño

1. Formula y comprueba conjeturas acerca de propiedades geométricas en relación a movimientos de figuras en el plano.	- Deduce las propiedades generales de un movimiento o simetría planos a partir de las observadas en una figura o representación concreta.	- **Ejemplos y ejercicios del tema** (pág. 134 a 152)

PLANTEAR Y RESOLVER PROBLEMAS MATEMÁTICOS

Descriptores

1. Reducir problemas geométricos complejos a otros más sencillos para facilitar su comprensión y resolución.
2. Utilizar el método «hacia atrás» o «suponer el problema resuelto» para abordar problemas geométricos.

Desempeño

1. Plantea una situación concreta en la que interviene el movimiento de una figura o una transformación simétrica en el plano.	- Distingue de qué movimiento trata la situación planteada. - Constata los elementos que definen el movimiento que son conocidos y los que están por conocer.	- **Ejemplos y ejercicios del tema** (pág. 134 a 152)
2. Resuelve la cuestión planteada.	- Obtiene la solución. - Analiza la solución y obtiene conclusiones.	

COMPETENCIA LINGÜÍSTICA

COMPETENCIA LINGÜÍSTICA

Descriptores

1. Comprender el enunciado de un problema geométrico en el que intervienen movimientos en el plano de figuras geométricas.
2. Aportar vocabulario específico y preciso relacionado con formas y características geométricas.
3. Escribir verbalmente los problemas geométricos y el proceso seguido en su resolución, confrontándolos con otros posibles.

Desempeño

1. Comprende lo que lee.	- Identifica la pregunta que se le hace. - Identifica los elementos de los movimientos geométricos que intervienen.	- **Ejemplos y ejercicios del tema** (pág. 134 a 152)
2. Discrimina e interpreta los elementos de los movimientos geométricos que le da el enunciado de un problema como información.	- Diferencia los distintos elementos geométricos.	
3. Se expresa por escrito de manera adecuada y correcta, con claridad y coherencia, utilizando un lenguaje preciso, para la descripción de los criterios utilizados en la solución de un problema de movimientos geométricos.	- Presenta el texto de la solución del problema de forma adecuada y correcta. - Selecciona los aspectos relevantes de la solución. - Es capaz de traducir al lenguaje natural el lenguaje formal de la Geometría.	

COMPETENCIA EN CONOCIMIENTO E INTERACCION CON EL MEDIO FISICO

COMPETENCIA EN CONOCIMIENTO E INTERACCION...

Descriptores

1. Reconocer y valorar la utilidad de la geometría para advertir la presencia de simetría en la naturaleza y el entorno físico.

Desempeño

1. Advierte en el espacio y medio físico la existencia de simetría en elementos geométricos.	- Sintetiza la información percibida del entorno físico. - Relaciona la información recibida con los elementos geométricos estudiados.	- **Introducción** (pág. 132) - **Ejemplos expresados en fotografías del tema y 56** (pág. 134 a 144) - **Ejercicios 14 y 55** (pág. 144 y 152)

COMPETENCIA APRENDER A APRENDER

COMPETENCIA APRENDER A APRENDER

Descriptores

1. Confiar en las propias capacidades para percibir movimientos de figuras en el plano.
2. Tener curiosidad e interés por investigar sobre formas, configuraciones y relaciones geométricas.

Desempeño

1. Desarrolla habilidades para la comprensión de problemas geométricos.	- Lee los enunciados de los ejercicios con la intención de comprender, relacionar y sintetizar contenidos. - Maneja adecuadamente recursos y técnicas de aprendizaje individual.	- **Ejemplos y ejercicios del tema** (pág. 134 a 152)
2. Desarrolla la curiosidad por las formas, configuraciones y relaciones geométricas.	- Plantea sugerencias de ampliación a los resultados obtenidos tras el análisis de un planteamiento geométrico. - Constata el resultado obtenido por la transformación por traslación o giro de una figura.	

COMPETENCIA CULTURAL Y ARTÍSTICA

COMPENTENCIA CULTURAL Y ARTÍSTICA

Descriptores

1. Desarrollar la sensibilidad y el gusto por la realización sistemática y presentación cuidadosa y ordenada de trabajos geométricos.
2. Desarrollar la sensibilidad ante las cualidades estéticas de las configuraciones geométricas, reconociendo su presencia en la naturaleza, en el arte y en la técnica.
3. Utilizar diestramente los elementos de dibujo habituales.

Desempeño

1. Advierte la presencia de ciertas figuras geométricas en la naturaleza, en el arte y en la técnica.	- Destaca las cualidades estéticas de formas geométricas en la cultura y el arte.	- **Introducción** (pág. 132) - **Ejemplos expresados en fotografías del tema** (pág. 134 a 144) - **Ejemplo 6** (pág. 149) - **Ejercicios 10, 11, 13 a 55** (pág. 140, 142, 144 y 148 a 152)
2. Dibuja el proceso de transformación de una figura por traslación o giro.	- Presenta cuidadosa y ordenadamente trabajos de representación geométricos. - Dibuja figuras planas y cuerpos en el espacio a mano alzada o con instrumentos de dibujo habituales.	

COMPETENCIA AUTONOMÍA E INICIATIVA PERSONAL

COMPETENCIA AUTONOMÍA E NICIATIVA PERSONAL

Descriptores

1. Buscar soluciones a problemas geométricos en los que interviene la transformación de figuras planas y mejorar las ya encontradas.
2. Tener flexibilidad para enfrentarse a situaciones geométricas desde distintos puntos de vista.

Desempeño

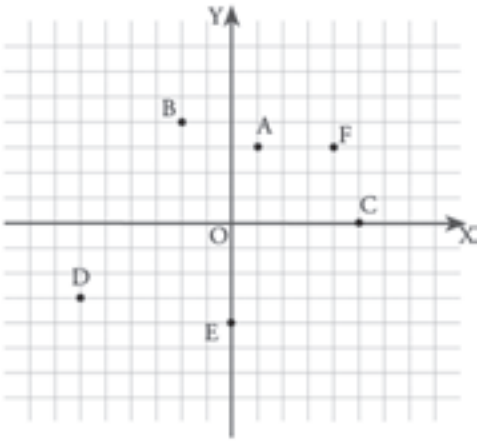
1. Idea y planifica el desarrollo de la solución para una situación geométrica concreta o mejora una solución preexistente.	- Elige la opción adecuada para la resolución de los ejercicios. - Mantiene la opción hasta llegar a la conclusión final.	- **Ejemplos y ejercicios del tema** (pág. 134 a 152)
2. Evalúa la solución obtenida.	- Valora el resultado y lo pone en relación con el enunciado del problema resuelto. - Reflexiona sobre si el trabajo efectuado ha sido suficiente para el objetivo propuesto.	
3. Toma decisiones en función de la solución geométrica adoptada.	- Decide en función del resultado. - Acepta el posible error de una decisión cuando la solución no es la idónea.	

▶ Pág. 132 - 133. Movimientos en el plano



SOLUCIONARIO

Sitúa en un sistema de ejes cartesianos los puntos siguientes: A(1, 3); B(–2, 4); C(5, 0); D(–6, –3); E(0, –4) y F(4, 3).



Escribe el Teorema de Pitágoras aplicado a este triángulo:

$a^2 = b^2 + c^2$

Calcula la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 6 y 8 cm. respectivamente.

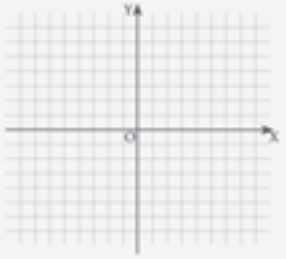
$a^2 = 6^2 + 8^2 = 100 \Rightarrow a = 10$ cm

DE 2º A 3º

Recuerda que dos ejes perpendiculares, cortándose en sus respectivos orígenes, determinan un **sistema de referencia cartesiano**. El eje horizontal es el **eje de abcisas** (o eje OX, o eje de las X) y el vertical es el **eje de ordenadas** (o eje OY o eje de las Y).
Todos los puntos que podemos representar en un sistema cartesiano son de la forma $A(x, y)$, recordemos como hacerlo.

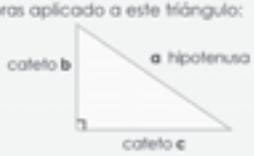
PRACTICA

1 Sitúa en un sistema de ejes cartesianos los puntos siguientes: $A(1, 3)$; $B(-2, 4)$; $C(5, 0)$; $D(-6, -3)$; $E(0, -4)$ y $F(4, 3)$.



Teorema de Pitágoras que nos dice: En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

2 Escribe el Teorema de Pitágoras aplicado a este triángulo:

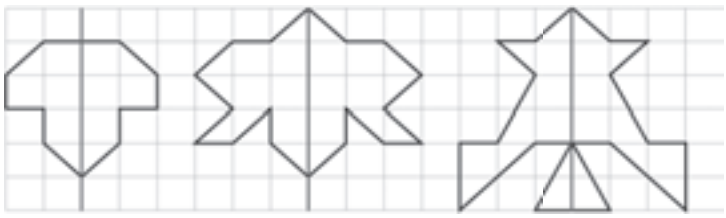


3 Calcula la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 6 y 8 cm, respectivamente.

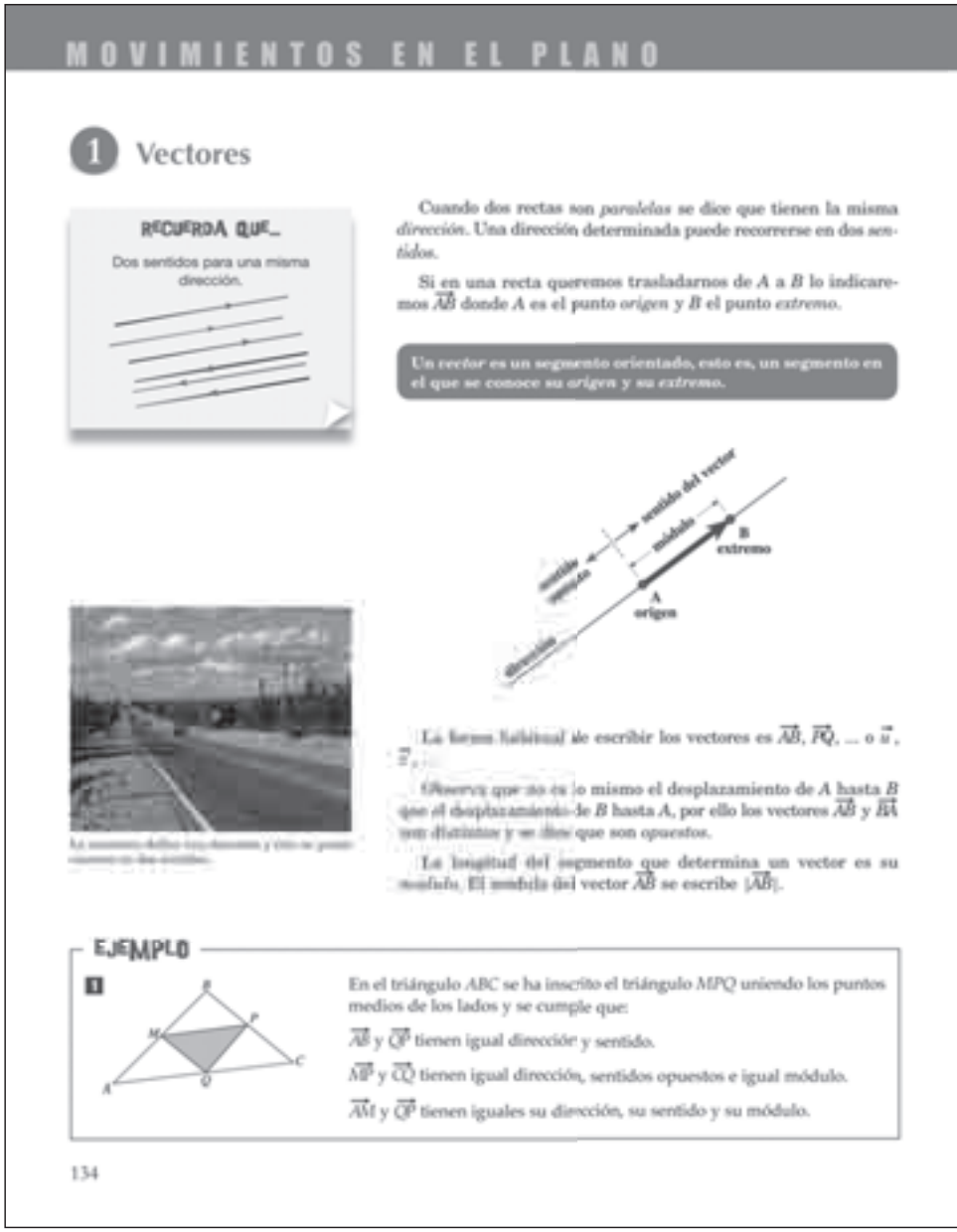
4 Completa las figuras para que sean simétricas respecto al eje marcado.



Completa las figuras para que sean simétricas respecto al eje marcado.



▶ Pág. 134. 1 Vectores



MOVIMIENTOS EN EL PLANO

1 Vectores

RECUERDA QUE...

Dos sentidos para una misma dirección.

Cuando dos rectas son *paralelas* se dice que tienen la misma *dirección*. Una dirección determinada puede recorrerse en dos *sentidos*.

Si en una recta queremos trasladarnos de A a B lo indicaremos $\overrightarrow{AB}$ donde A es el punto *origen* y B el punto *extremo*.

Un *vector* es un segmento orientado, esto es, un segmento en el que se conoce su *origen* y su *extremo*.

sentido del vector
módulo
B
extremo
sentido opuesto
A
origen
dirección

La forma habitual de escribir los vectores es $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{PQ}$, ... o $\vec{u}$, $\vec{v}$, ...

Observa que no es lo mismo el desplazamiento de A hasta B que el desplazamiento de B hasta A, por ello los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BA}$ son distintos y se dice que son *opuestos*.

La longitud del segmento que determina un vector es su *módulo*. El módulo del vector $\overrightarrow{AB}$ se escribe $|\overrightarrow{AB}|$.

EJEMPLO

1

En el triángulo ABC se ha inscrito el triángulo MPQ uniendo los puntos medios de los lados y se cumple que:

$\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{QP}$ tienen igual dirección y sentido.

$\overrightarrow{MP}$ y $\overrightarrow{CQ}$ tienen igual dirección, sentidos opuestos e igual módulo.

$\overrightarrow{AM}$ y $\overrightarrow{QP}$ tienen iguales su dirección, su sentido y su módulo.

134

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS

Adquisición del vocabulario específico.

Vector: segmento orientado.

Distinción en el lenguaje ordinario de dirección y sentido. Cabe citar la clásica señal de tráfico conocida como "dirección prohibida".

Una dirección la determina una recta y todas sus paralelas; vectores paralelos tienen la misma dirección.

▶ Pág. 135. 2 Componentes y módulos de un vector

2 Componentes y módulos de un vector

En los ejes cartesianos de la figura se han señalado los puntos $A(-3, 1)$ y $B(6, 5)$. El camino que nos lleva de A a B es de 9 unidades en sentido horizontal y 4 en sentido vertical y se dice que las componentes del vector $\overrightarrow{AB}$ son $(9, 4)$.



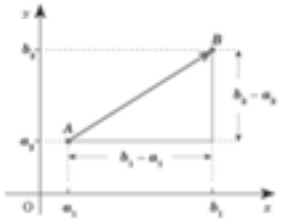
Las componentes de un vector son las longitudes de los caminos –primero horizontal y luego vertical– que nos llevan desde el origen al extremo y se obtienen restando a las coordenadas del extremo las del origen.

Las componentes del vector $\overrightarrow{AB}$ de origen $A(a_1, a_2)$ y extremo $B(b_1, b_2)$ son $(b_1 - a_1, b_2 - a_2)$.
Se escribe $\overrightarrow{AB}\ (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$.

Dos vectores que tienen las mismas componentes se dice que son iguales y recíprocamente.

El **módulo** del vector $\overrightarrow{AB}$ se escribe $|\overrightarrow{AB}|$ y es la longitud del segmento AB o también la *distancia entre los puntos A y B*.

Para su cálculo podemos aplicar el Teorema de Pitágoras, en la figura del margen para los puntos A y B de coordenadas $A(a_1, a_2)$ y $B(b_1, b_2)$



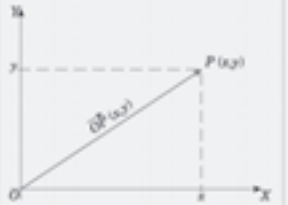
$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2} \quad ; \quad |\overrightarrow{AB}| = d(A, B)$$

Si un vector $\vec{u}$ viene dado directamente por sus componentes $\vec{u}\ (u_1, u_2)$ entonces su módulo es:

$$|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$$

RECUERDA QUE...

El vector $\overrightarrow{OP}$ con origen en el origen de coordenadas y extremo en $P(x, y)$ es el vector de posición de P y tiene componentes (x, y).



135

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS

Importante:

primera componente = desplazamiento horizontal

segunda componente = desplazamiento vertical

Sobre una cuadrícula se trazan diferentes vectores. ¿Cómo se puede informar a otra persona para que trace los mismos vectores sin ver el modelo?

El módulo de un vector es un real positivo o cero.

▶ Pág. 136.

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS

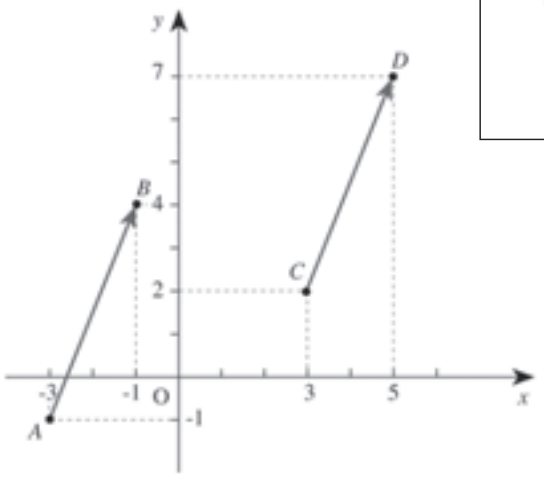
En ejemplo 2: detectar sobre la figura el preconcepto de módulo.

La representación gráfica de los datos ayuda a controlar las soluciones obtenidas.

En ejercicio 3 resaltar la importancia del orden de escritura de los vértices; el paralelogramo *PQRS* no es igual que el *PQSR*.

SOLUCIONARIO

1. Dados los puntos *A* (–3, –1), *B* (–1, 4), *C* (3
halla las coordenadas del punto *D* para
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, haz la correspondiente represe



$\overrightarrow{AB}\ (-1-(-3),\ 4-(-1)) = (2, 5)$; $\overrightarrow{CD}\ (x-3,\ y-2)$

Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ entonces $\begin{cases} x-3 = 2 \Rightarrow x = 5 \\ y-2 = 5 \Rightarrow y = 7 \end{cases}$

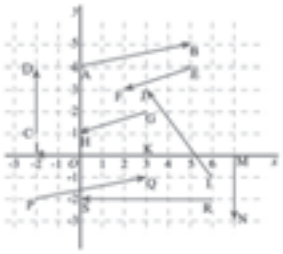
Si *D* tiene coordenadas (*x, y*) se verifica:

Las coordenadas de *D* son (5, 7).

MOVIMIENTOS EN EL PLANO

EJEMPLOS

2



A tiene coordenadas (0, 4) y *B*(5, 5) luego $\overrightarrow{AB}$ (5 – 0, 5 – 4) = (5, 1)

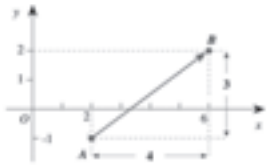
También $\overrightarrow{PQ}$ (5, 1) pues *P*(–2, –2) y *Q*(3, –1) y (3–(–2), –1 –(–2)) = (5, 1), luego $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AB}$.

Se verifica también la igualdad $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{GH}$ = (–3, –1)

Los vectores $\overrightarrow{CD}$ (0, 3) y $\overrightarrow{MN}$ (0, –3) son opuestos.

Los vectores $\overrightarrow{RS}$ (–6, 0) y $\overrightarrow{KL}$ (–5, 0) tienen la misma dirección, el mismo sentido, pero módulo diferente.

3 **Un vector $\vec{u}$ de componentes (4, 3) tiene origen en el punto *A*(2, –1). Halla el extremo *B* y el módulo de dicho vector.**



Si el extremo es el punto *B*(*x, y*) se verifica: (4, 3) = (*x* – 2, *y* – (–1))

Al ser dos vectores iguales también lo serán sus respectivas componentes, luego:

$4 = x - 2 \Rightarrow x = 6$

$3 = y - (-1) \Rightarrow y = 2$

Por tanto el punto *B* tiene coordenadas (6, 2)

El módulo del vector $\vec{u}$ es $|\vec{u}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$

EJERCICIOS

1. Dados los puntos *A*(–3, –1), *B*(–1, 4), *C*(3, 2), halla las coordenadas del punto *D* para que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, y haz la correspondiente representación gráfica.
2. Justifica si el triángulo de vértices *M*(–3, 2), *N*(4, 1) y *P*(1, 4) es rectángulo.
3. Dados los puntos *P*(1, –3), *Q*(1, 5), *R*(–4, 2) halla las coordenadas del punto *S* para que el cuadrilátero *PQRS* sea un paralelogramo y calcula la longitud de sus diagonales.
4. Dado el vector $\vec{u}$ (–3, 5) se pide: a) origen de un vector igual a $\vec{u}$ con extremo en *A*(0, 4); b) extremo de un vector igual a $\vec{u}$ con origen en *B*(5, –2).

136

2. Justifica si el triángulo de vértices *M*(–3, 2), *N* (4, 1) y *P* (1, 4) es rectángulo.

Las longitudes de sus lados son los módulos de los vectores que lo determinan.

$\overrightarrow{MN}\ (4-(-3),\ 1-2) = (7, -1) \Rightarrow |\overrightarrow{MN}| = \sqrt{49+1} = \sqrt{50}$

$\overrightarrow{NP}\ (1-4,\ 4-1) = (-3, 3) \Rightarrow |\overrightarrow{NP}| = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$

$\overrightarrow{PM}(-3-1,\ 2-4) = (-4, -2) \Rightarrow |\overrightarrow{PM}| = \sqrt{16+4} = \sqrt{20}$

Como no se verifica el Teorema de Pitágoras pues

$\left(\sqrt{50}\right)^2 \neq \left(\sqrt{18}\right)^2 + \left(\sqrt{20}\right)^2 \Rightarrow 50 \neq 18 + 20$

Concluimos que el triángulo *MNP* no es rectángulo.

▶ Pág. 137. 3 Operaciones con vectores. Punto medio de un segmento

3 Operaciones con vectores. Punto medio de un segmento

a) Adición de vectores

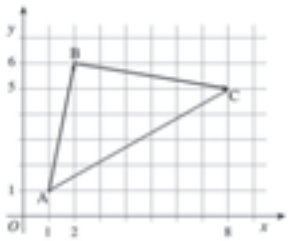
En la figura del margen están representados los vectores $\overrightarrow{AB}$ (1, 5), $\overrightarrow{BC}$ (6, –1) y $\overrightarrow{AC}$ (7, 4). El vector $\overrightarrow{AC}$ se dice que es la suma de $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$.

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$

El vector suma $\overrightarrow{AC}$ tiene origen en A y extremo en C.

Observa que se verifica: $(1, 5) + (6, -1) = (1 + 6, 5 + (-1)) = (7, 4)$

Las componentes del vector suma $\overrightarrow{AC}$ se obtienen sumando las componentes respectivas de $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$.



La suma de los vectores $\overrightarrow{AB}$ (x_1, y_1) y $\overrightarrow{BC}$ (x_2, y_2) es el vector $\overrightarrow{AC}$ $(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

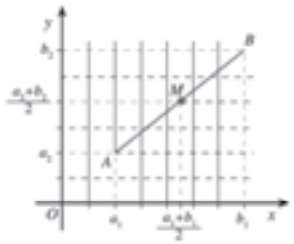
$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$



b) Multiplicación de un número por un vector

El producto de un número k por un vector $\overrightarrow{AB}$ (x, y) es el vector $k \cdot \overrightarrow{AB}$ (kx, ky), de la misma dirección y sentido de $\overrightarrow{AB}$ si k es positivo y de sentido contrario si k es negativo.

$$k \cdot (x, y) = (kx, ky)$$



c) Punto medio de un segmento

El punto medio del segmento de extremos $A(a_1, a_2)$ y $B(b_1, b_2)$ es

$$M\left(\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2}\right)$$

EJEMPLO

1 Comprueba que el cuadrilátero de vértices $A(3, 1)$, $B(0, 4)$, $C(-4, 1)$ y $D(-1, -2)$ es un paralelogramo.

Lo comprobaremos viendo que sus diagonales tienen el mismo punto medio.



El punto medio de la diagonal AC es:

$$M_{AC}\left(\frac{3 + (-4)}{2}, \frac{1 + 1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}, 1\right)$$

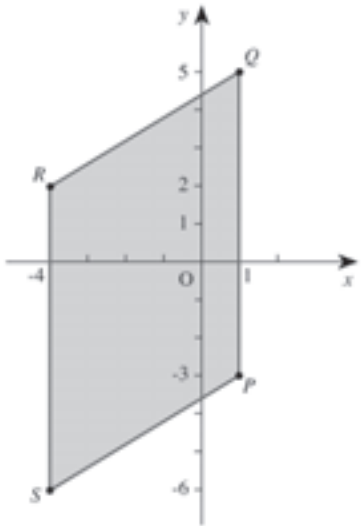
El punto medio de la diagonal BD es:

$$M_{BD}\left(\frac{0 + (-1)}{2}, \frac{4 + (-2)}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}, 1\right)$$

Al tener ambas diagonales el mismo punto medio, el cuadrilátero $ABCD$ es un paralelogramo.

137

3. Dados los puntos P (1, –3), Q (1, 5), R (–4, 2) halla las coordenadas del punto S para que el cuadrilátero $PQRS$ sea un paralelogramo y calcula la longitud de sus diagonales.



$PQRS$ es un paralelogramo si $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$ siendo S el punto (x, y).

$\overrightarrow{PQ} = (1 - 1, 5 - (-3)) = (0, 8)$; $\overrightarrow{SR} = (-4 - x, 2 - y)$

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR} \Rightarrow \begin{cases} 0 = -4 - x \Rightarrow x = -4 \\ 8 = 2 - y \Rightarrow y = -6 \end{cases}$$

Luego es S (–4, –6)

Diagonal $SQ = \left|\overrightarrow{SQ}\right| = |(5, 11)| = \sqrt{25 + 121} = \sqrt{146}$

Diagonal $RP = \left|\overrightarrow{RP}\right| = |(5, -5)| = \sqrt{25 + 25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS

Valorar la conveniencia de introducir el vector suma a partir de un paralelogramo

Si A, B y C son tres puntos cualesquiera, la igualdad $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ es cierta siempre, mientras que la igualdad $d(A, B) + d(B, C) = d(A, C)$ sólo es cierta si A, B y C están alineados (y en este orden).

Se puede debatir el sentido que cada alumno da a la expresión: el vector $2\vec{u}$ es un vector doble de grande que el vector $\vec{u}$.

4. Dado el vector $\vec{u}$ (–3, 5) se pide: a) origen de un vector igual a $\vec{u}$ con extremo en A (0, 4); b) extremo de un vector igual a $\vec{u}$ con origen en B (5, –2).

a) Si P (x, y) y debe ser $\vec{u} = \overrightarrow{PA}$ entonces.

$$(-3, 5) = (0 - x, 4 - y) \Rightarrow \begin{cases} -3 = 0 - x \Rightarrow x = 3 \\ 5 = 4 - y \Rightarrow y = -1 \end{cases}$$

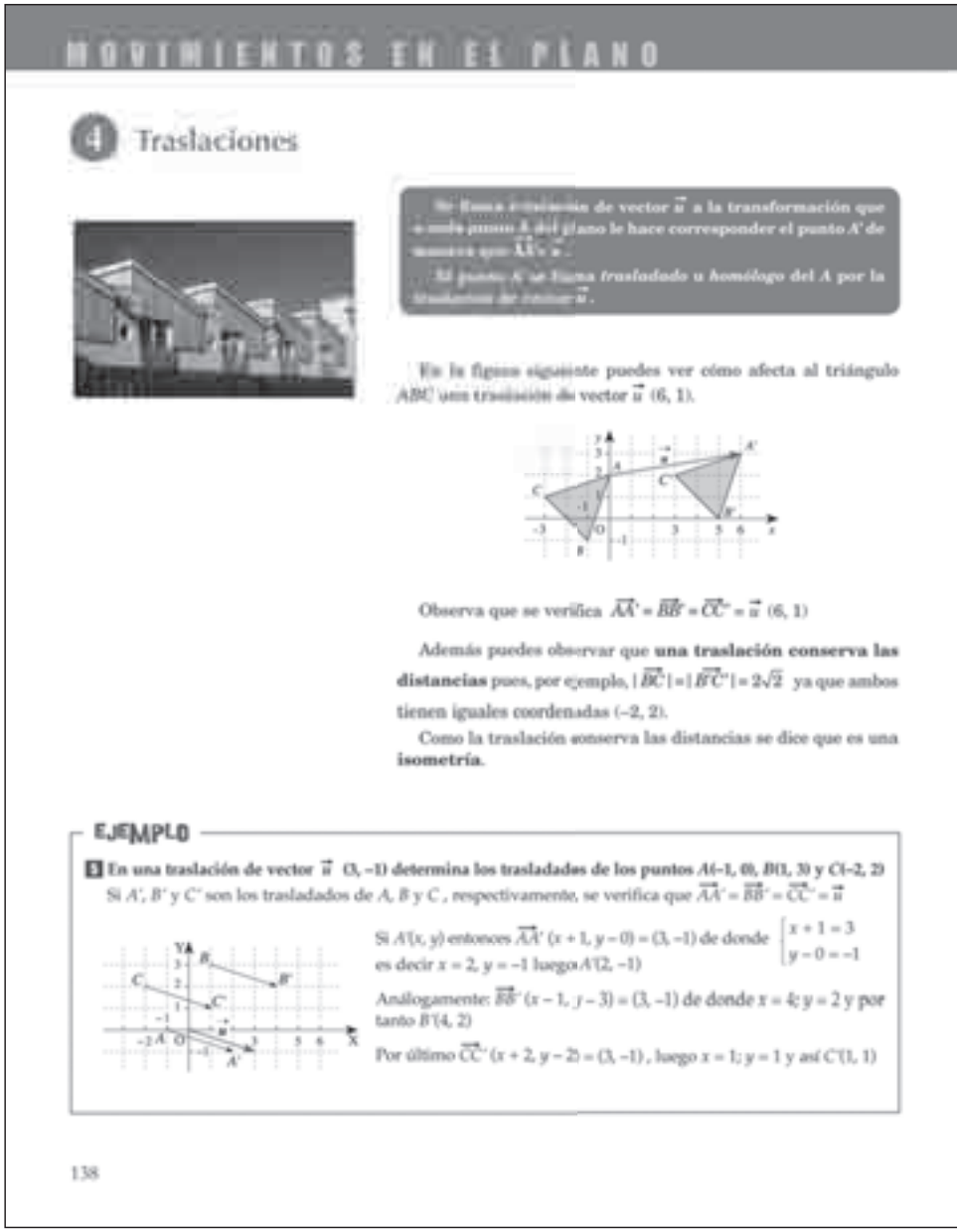
Luego P (3, –1)

b) Si Q (x, y) y ahora es $\vec{u} = \overrightarrow{BQ}$ entonces:

$$(-3, 5) = (x - 5, y + 2) \Rightarrow \begin{cases} -3 = x - 5 \Rightarrow x = 2 \\ 5 = y + 2 \Rightarrow y = 3 \end{cases}$$

Luego Q (2, 3)

▶ Pág. 138. 4 Traslaciones



MOVIMIENTOS EN EL PLANO

4 Traslaciones

Se llama traslación de vector $\vec{u}$ a la transformación que a cada punto A del plano le hace corresponder el punto A' de manera que $\overrightarrow{AA'} = \vec{u}$.

El punto A' se llama *trasladado* o *homólogo* del A por la traslación de vector $\vec{u}$.

En la figura siguiente puedes ver cómo afecta al triángulo ABC una traslación de vector $\vec{u}$ (6, 1).

Observa que se verifica $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'} = \vec{u}$ (6, 1)

Además puedes observar que **una traslación conserva las distancias** pues, por ejemplo, $|\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{B'C'}| = 2\sqrt{2}$ ya que ambos tienen iguales coordenadas (–2, 2).

Como la traslación conserva las distancias se dice que es una **isometría**.

EJEMPLO

En una traslación de vector $\vec{u}$ (3, –1) determina los trasladados de los puntos A(–1, 0), B(1, 3) y C(–2, 2)

Si A', B' y C' son los trasladados de A, B y C, respectivamente, se verifica que $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'} = \vec{u}$

Si $A'(x, y)$ entonces $\overrightarrow{AA'}$ $(x + 1, y - 0) = (3, -1)$ de donde $\begin{cases} x + 1 = 3 \\ y - 0 = -1 \end{cases}$ es decir $x = 2$, $y = -1$ luego $A'(2, -1)$

Análogamente: $\overrightarrow{BB'}$ $(x - 1, y - 3) = (3, -1)$ de donde $x = 4$; $y = 2$ y por tanto $B'(4, 2)$

Por último $\overrightarrow{CC'}$ $(x + 2, y - 2) = (3, -1)$, luego $x = 1$; $y = 1$ y así $C'(1, 1)$

138

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS

Detectar en la figura parejas de vectores iguales.

Si una traslación hace corresponder A con A' y B con B', entonces $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$.

De nuevo la suma de vectores como diagonal de un paralelogramo.

SOLUCIONARIO

5. Calcula los trasladados de los puntos A (1, –2), B (0, 3) y C (1, 3) mediante una traslación de vector $\vec{u}$ (–1, 2).

El trasladado de A (1, –2) es A' (x, y) tal que $\overrightarrow{AA'} = \vec{u}$, luego

$$(x - 1, y + 2) = (-1, 2) \Rightarrow \begin{cases} x - 1 = -1 \Rightarrow x = 0 \\ y + 2 = 2 \Rightarrow y = 0 \end{cases}$$

Luego A' (0, 0).

Al igual:

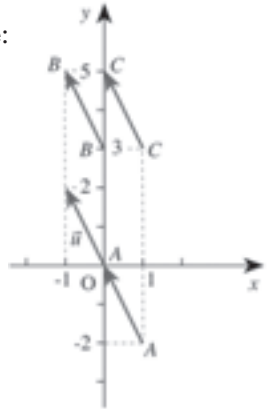
$$\overrightarrow{BB'} = \vec{u} \Rightarrow (x - 0, y - 3) = (-1, 2) \Rightarrow \begin{cases} x - 0 = -1 \Rightarrow x = -1 \\ y - 3 = 2 \Rightarrow y = 5 \end{cases}$$

y así B' (–1, 5)

$$\overrightarrow{CC'} = \vec{u} \Rightarrow (x - 1, y - 3) = (-1, 2) \Rightarrow \begin{cases} x - 1 = -1 \Rightarrow x = 0 \\ y - 3 = 2 \Rightarrow y = 5 \end{cases}$$

y C' (0, 5).

Gráficamente:



6. La traslación de vector $\vec{x}$ traslada el punto A (–3, 2) al punto A' (5, 0). ¿Cuál es el vector $\vec{x}$?

Se verifica que $\vec{x} = \overrightarrow{AA'} \Rightarrow \vec{x} = (5 - (-3), 0 - 2) = (8, -2)$

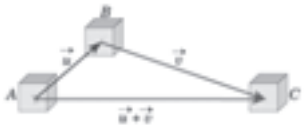
Así pues el vector $\vec{x}$ es el vector (8, 2)

▶ Pág. 139.

TEMA 7

Composición de traslaciones. Vector suma

El proceso consistente en aplicar una traslación de vector $\vec{v}$ al resultado de otra traslación de vector $\vec{u}$ se conoce como **composición o producto de dos traslaciones**.



B es la imagen de A por la traslación de vector $\vec{u}$.

C es la imagen de B por la traslación de vector $\vec{v}$.

C es la imagen de A por la traslación de vector $\vec{u}+\vec{v}$.

Recuerda que el **vector suma** $\vec{u}+\vec{v}$ se obtiene sumando las componentes de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$:

Si $\vec{u}\ (u_1, u_2)$ y $\vec{v}\ (v_1, v_2)$, entonces $\vec{u}+\vec{v}\ (u_1+v_1, u_2+v_2)$

EJERCICIOS

5 Calcula los trasladados de los puntos $A(1, -2)$, $B(0, 3)$ y $C(1, 3)$ mediante una traslación de vector $\vec{u}\ (-1, 2)$.

6 La traslación de vector $\vec{x}$ traslada el punto $A(-3, 2)$ al punto $A(5, 0)$. ¿Cuál es el vector $\vec{x}$?

7 Dados los puntos $A(-1, 1)$, $B(2, 4)$ y $C(3, 2)$, halla el trasladado del triángulo ABC mediante: a) una traslación de vector $\overrightarrow{AB}$; b) una traslación de vector $\overrightarrow{CB}$.

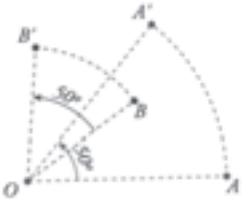
5 Giros

Sobre una circunferencia podemos definir dos sentidos de giro: el sentido de giro de las agujas de un reloj que llamaremos *sentido negativo* o el sentido contrario al de giro de las agujas de un reloj, que llamaremos *sentido positivo*.



Sentidos de giro.

En las figuras siguientes puedes ver que los puntos O, A, A', B, B' verifican: $OA = OA'$; $OB = OB'$; $\widehat{AOA'} = \widehat{BOB'} = 50°$.

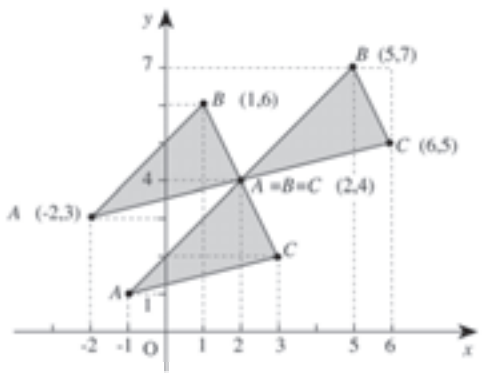


139

7. Dados los puntos *A* (–1, 1), *B* (2, 4) y *C* (3, 2), halla el trasladado del triángulo *ABC* mediante: a) una traslación de vector $\overrightarrow{AB}$; b) una traslación de vector $\overrightarrow{CB}$.

Se puede resolver gráficamente:

$\overrightarrow{AB} = (3, 3)$ $\overrightarrow{CB}\ (-1, 2)$



A'B'C' es el traslado de *ABC* por la traslación de vector $\overrightarrow{CB}$.

▶ Pág. 140.

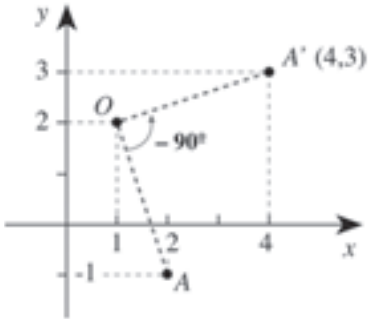
ORIENTACIONES DIDÁCTICAS

Ejemplo 8 y ejercicio 10: posibilidad de otra solución según el sentido de giro.

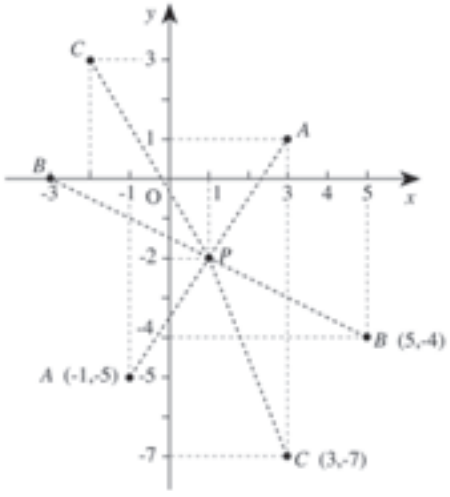
SOLUCIONARIO

8. Calcula el punto en que se transforma el punto *A* (2, –1) al aplicarle un giro de centro *O* (1, 2) y ángulo α = –90º.

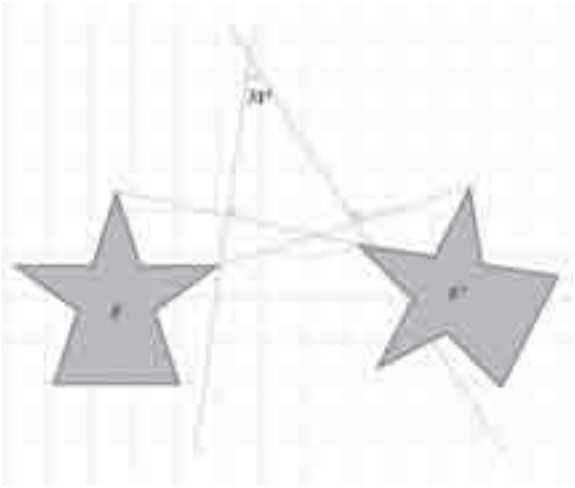
Gráficamente:

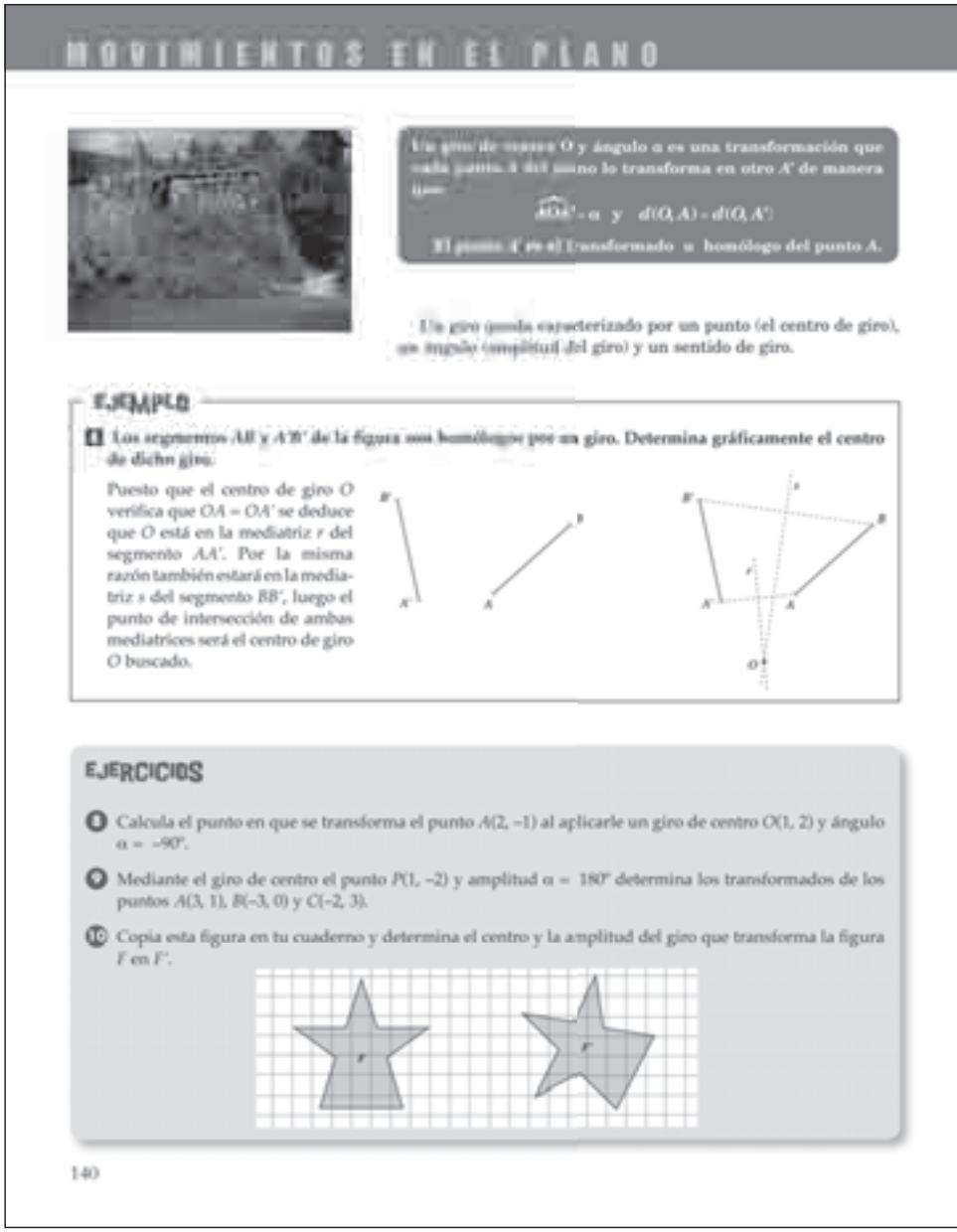


9. Mediante el giro de centro el punto *P*(1, –2) y amplitud α = 180º determina los transformados de los puntos *A* (3, 1), *B* (–3, 0) y *C* (–2, 3).



10. Copia esta figura en tu cuaderno y determina el centro y la amplitud del giro que transforma la figura *F* en *F'*.




MOVIMIENTOS EN EL PLANO

Un giro de centro O y ángulo α es una transformación que cada punto A del mismo lo transforma en otro A' de manera que:

$\widehat{AOA'} = \alpha$ y $d(O, A) = d(O, A')$

El punto A' es el transformado o homólogo del punto A.

Un giro queda caracterizado por un punto (el centro de giro), un ángulo (amplitud del giro) y un sentido de giro.

EJEMPLO

1 Los segmentos AB y A'B' de la figura son homólogos por un giro. Determina gráficamente el centro de dicho giro.

Puesto que el centro de giro O verifica que $OA = OA'$ se deduce que O está en la mediatriz r del segmento AA'. Por la misma razón también estará en la mediatriz s del segmento BB', luego el punto de intersección de ambas mediatrices será el centro de giro O buscado.

EJERCICIOS

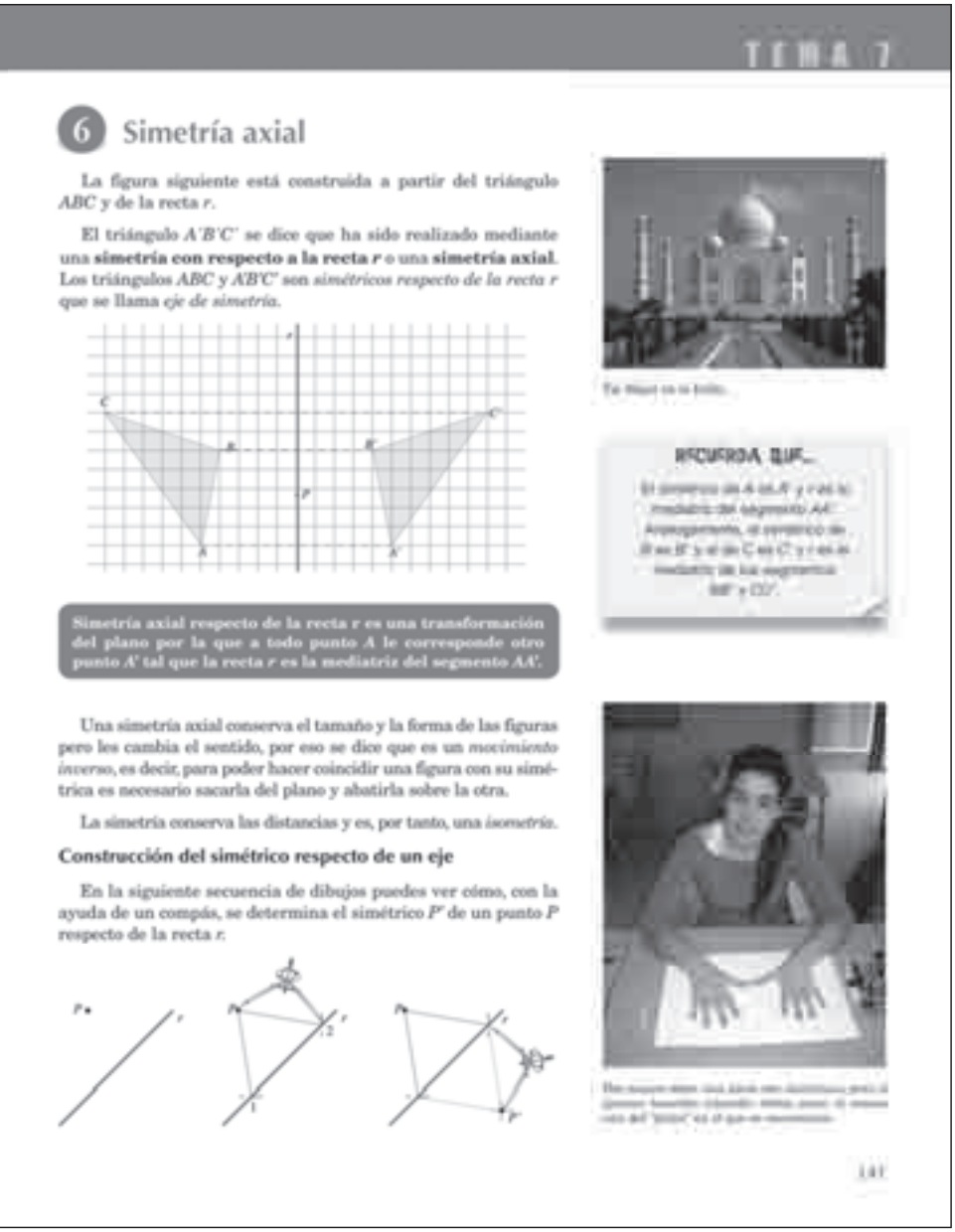
8 Calcula el punto en que se transforma el punto A(2, –1) al aplicarle un giro de centro O(1, 2) y ángulo $\alpha = -90°$.

9 Mediante el giro de centro el punto P(1, –2) y amplitud $\alpha = 180°$ determina los transformados de los puntos A(3, 1), B(–3, 0) y C(–2, 3).

10 Copia esta figura en tu cuaderno y determina el centro y la amplitud del giro que transforma la figura F en F'.

140

▶ Pág. 141. 6 Simetría axial



TEMA 7

6 Simetría axial

La figura siguiente está construida a partir del triángulo *ABC* y de la recta *r*.

El triángulo *A'B'C'* se dice que ha sido realizado mediante una **simetría con respecto a la recta *r*** o una **simetría axial**. Los triángulos *ABC* y *AB'C'* son *simétricos respecto de la recta r* que se llama *eje de simetría*.

Simetría axial respecto de la recta *r* es una transformación del plano por la que a todo punto *A* le corresponde otro punto *A'* tal que la recta *r* es la mediatriz del segmento *AA'*.

Una simetría axial conserva el tamaño y la forma de las figuras pero les cambia el sentido, por eso se dice que es un *movimiento inverso*, es decir, para poder hacer coincidir una figura con su simétrica es necesario sacarla del plano y abatirla sobre la otra.

La simetría conserva las distancias y es, por tanto, una *isometría*.

Construcción del simétrico respecto de un eje

En la siguiente secuencia de dibujos puedes ver cómo, con la ayuda de un compás, se determina el simétrico *P'* de un punto *P* respecto de la recta *r*:

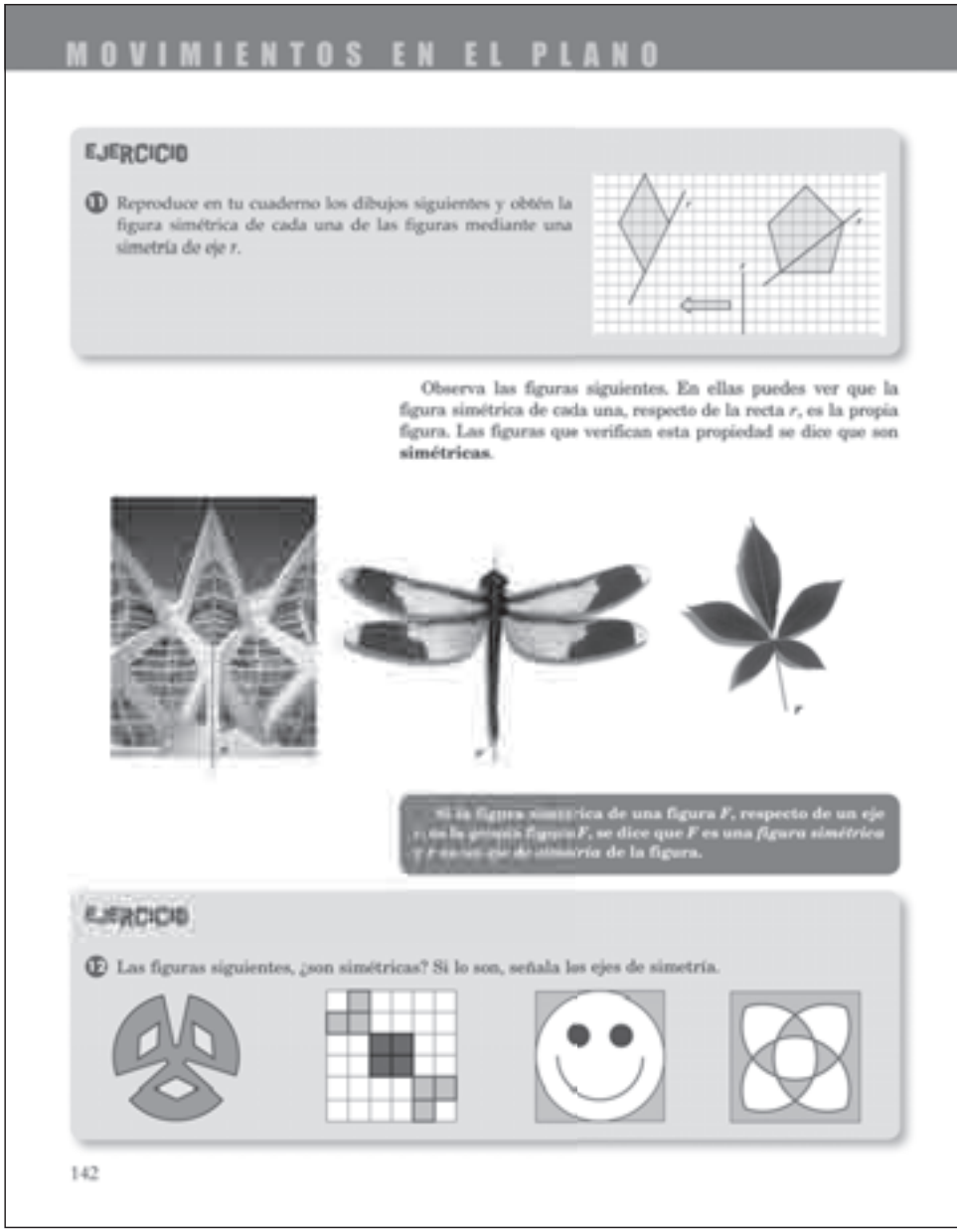
ORIENTACIONES DIDÁCTICAS

Epígrafe fundamentalmente práctico basado en construcciones a realizar por los alumnos.

Las propiedades isométricas se introducen de forma intuitiva.

Es conveniente fomentar la precisión en las construcciones.

▶ Pág. 142.



MOVIMIENTOS EN EL PLANO

EJERCICIO

11 Reproduce en tu cuaderno los dibujos siguientes y obtén la figura simétrica de cada una de las figuras mediante una simetría de eje *r*.

Observa las figuras siguientes. En ellas puedes ver que la figura simétrica de cada una, respecto de la recta *r*, es la propia figura. Las figuras que verifican esta propiedad se dice que son **simétricas**.

Si la figura simétrica de una figura *F*, respecto de un eje *r*, es la propia figura *F*, se dice que *F* es una *figura simétrica* y *r* es un eje de simetría de la figura.

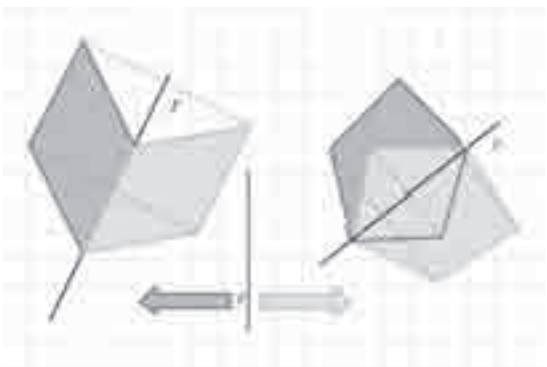
EJERCICIO

12 Las figuras siguientes, ¿son simétricas? Si lo son, señala los ejes de simetría.

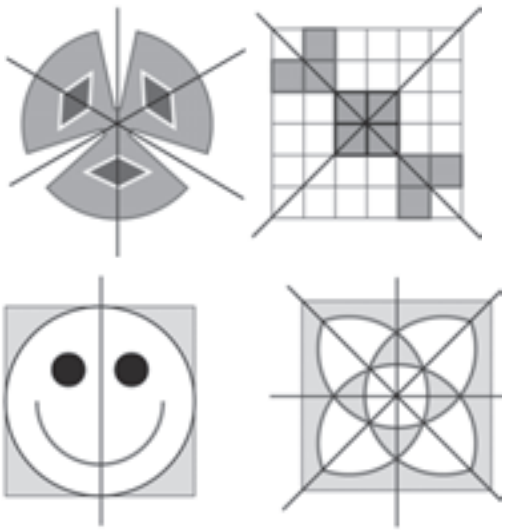
142

SOLUCIONARIO

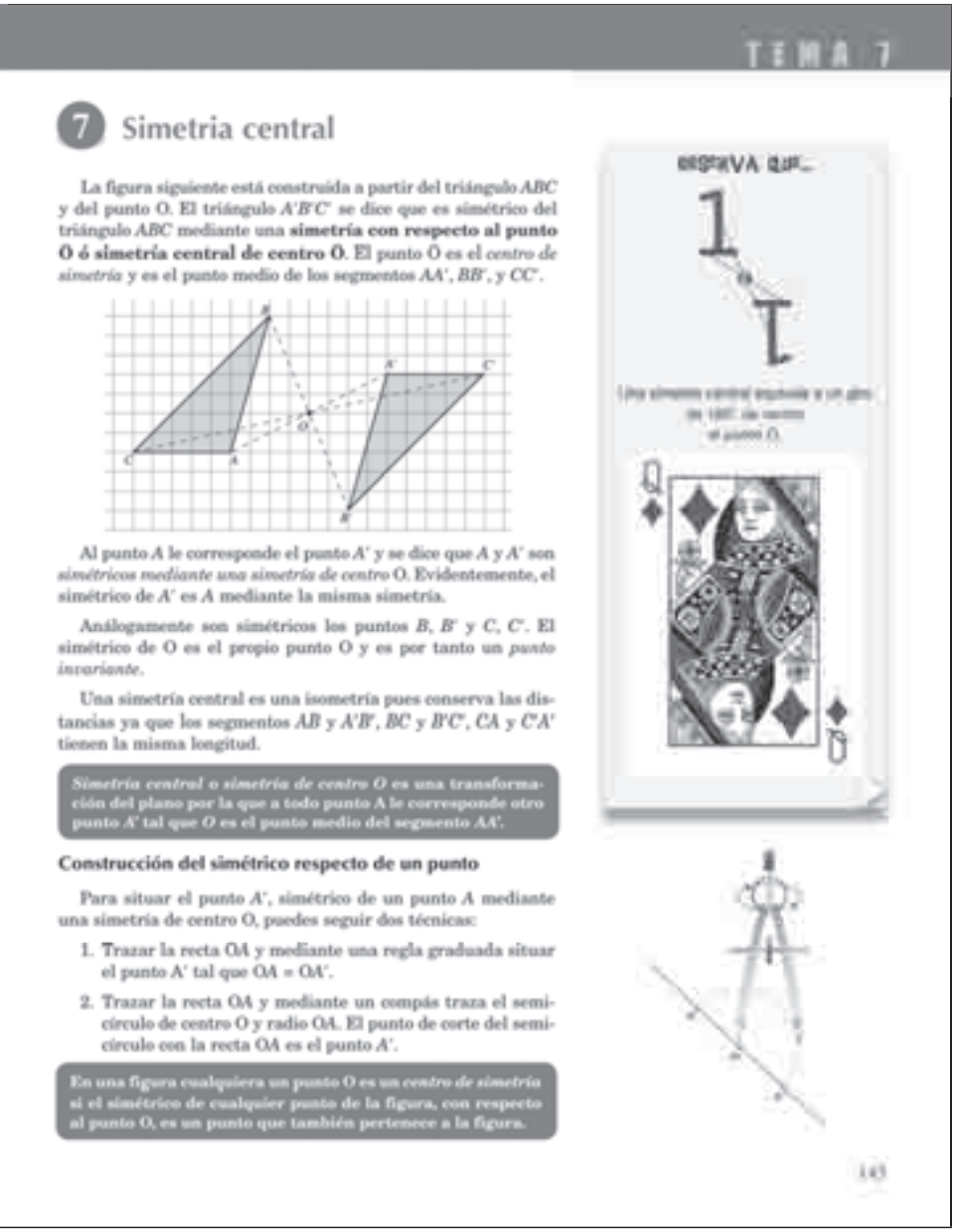
11. Reproduce en tu cuaderno los dibujos siguientes y obtén la figura simétrica de cada una de las figuras mediante una simetría de eje *r*.



12. Las figuras siguientes, ¿son simétricas? Si lo son, señala los ejes de simetría.



▶ Pág. 143. 7 Simetría central



TEMA 7

7 Simetria central

La figura siguiente está construida a partir del triángulo ABC y del punto O. El triángulo $A'B'C'$ se dice que es simétrico del triángulo ABC mediante una **simetría con respecto al punto O ó simetría central de centro O**. El punto O es el *centro de simetría* y es el punto medio de los segmentos AA', BB', y CC'.

Al punto A le corresponde el punto A' y se dice que A y A' son *simétricos mediante una simetría de centro* O. Evidentemente, el simétrico de A' es A mediante la misma simetría.

Análogamente son simétricos los puntos B, B' y C, C'. El simétrico de O es el propio punto O y es por tanto un *punto invariante*.

Una simetría central es una isometría pues conserva las distancias ya que los segmentos AB y $A'B'$, BC y $B'C'$, CA y $C'A'$ tienen la misma longitud.

***Simetría central* o *simetría de centro O* es una transformación del plano por la que a todo punto A le corresponde otro punto A' tal que O es el punto medio del segmento AA'.**

Construcción del simétrico respecto de un punto

Para situar el punto A', simétrico de un punto A mediante una simetría de centro O, puedes seguir dos técnicas:

1. Trazar la recta OA y mediante una regla graduada situar el punto A' tal que $OA = OA'$.
2. Trazar la recta OA y mediante un compás traza el semicírculo de centro O y radio OA. El punto de corte del semicírculo con la recta OA es el punto A'.

En una figura cualquiera un punto O es un *centro de simetría* si el simétrico de cualquier punto de la figura, con respecto al punto O, es un punto que también pertenece a la figura.

143

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS

Vocabulario específico.

Importancia de saber construir el punto medio de un segmento.

▶ Pág. 144.

MOVIMIENTOS EN EL PLANO

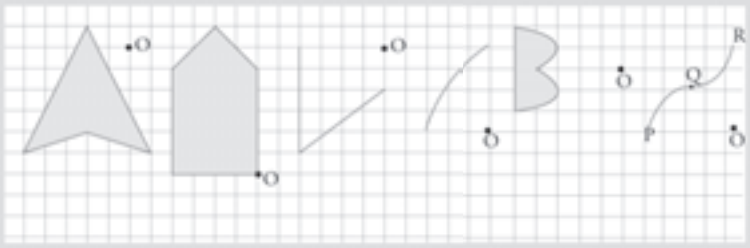
EJEMPLO

1 He aquí algunas letras del alfabeto que poseen centro de simetría:

H O S X Z

EJERCICIOS

13 Copia en tu cuaderno las siguientes figuras y obtén la figura simétrica de cada una de ellas respecto del punto O indicado.



14 En la figura siguiente, original del pintor holandés M. Escher, indica qué transformación hace que:

a) La imagen de 1 es 2
b) La imagen de 1 es 3
c) La imagen de 4 es 5
d) La imagen de 6 es 3

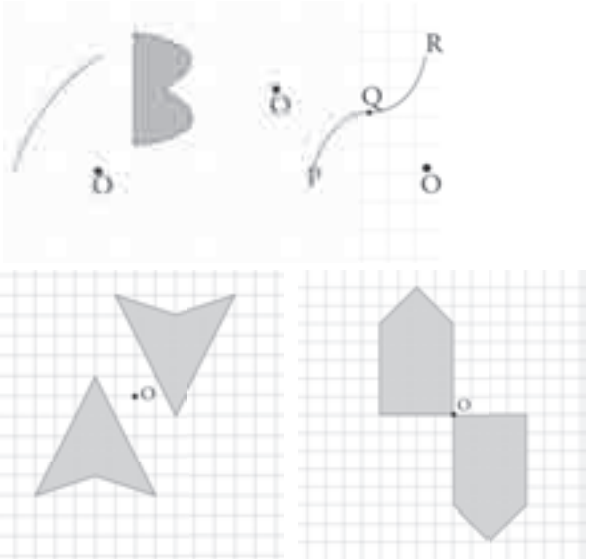


144

SOLUCIONARIO

13. Copia en tu cuaderno las siguientes figuras y obtén la figura simétrica de cada una de ellas respecto del punto O indicado.





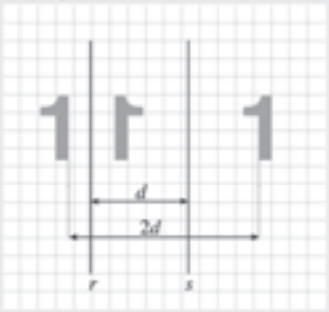
▸ Pág. 145. 8 COmposición de simetrías

8 Composicion de simetrías

Debes entender una *composición de simetrías* como la realización de dos simetrías de forma consecutiva.

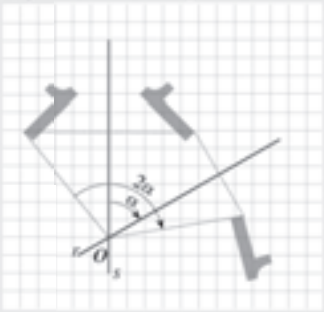
A) **Composición de simetrías axiales**

1. De ejes paralelos



Si los ejes están a una distancia d, la composición de ambas simetrías equivale a una traslación de vector de módulo $2d$.

2. De ejes formando un ángulo α

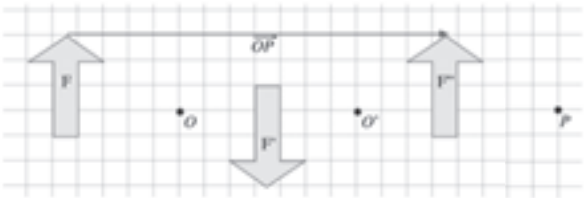


Si los ejes forman un ángulo α, la composición de ambas simetrías equivale a un giro de centro O y amplitud 2α.

B) **Composición de simetrías centrales**

En la figura siguiente se han realizado a la figura F una simetría central de centro O y a la figura F' obtenida se le ha aplicado después otra simetría de centro O' para así obtener la figura F".

El punto P es el simétrico de O respecto de O'.



Realizar una simetría de centro O y luego una simetría de centro O' equivale a realizar una traslación de vector OP, siendo P el simétrico de O respecto de O'.

145

14. En la figura siguiente, original del pintor holandés M. Esther, indica qué transformación hace que:

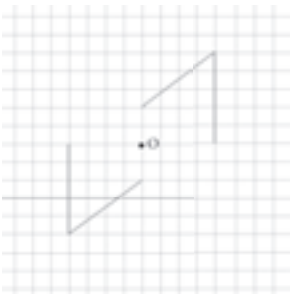


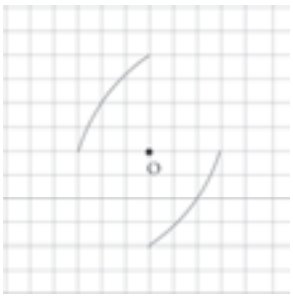
a) La imagen de 1 es 2. Una traslación.

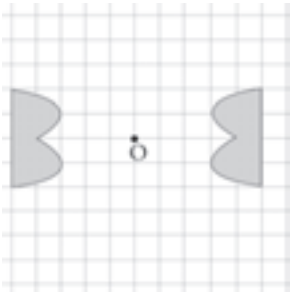
b) La imagen de 1 es 3. Un giro.

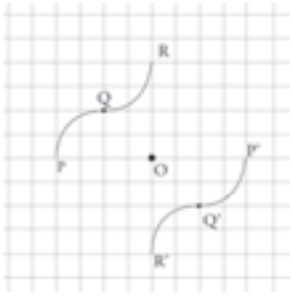
c) La imagen de 4 es 5. Una simetría axial.

d) La imagen de 6 es 3. Un giro.





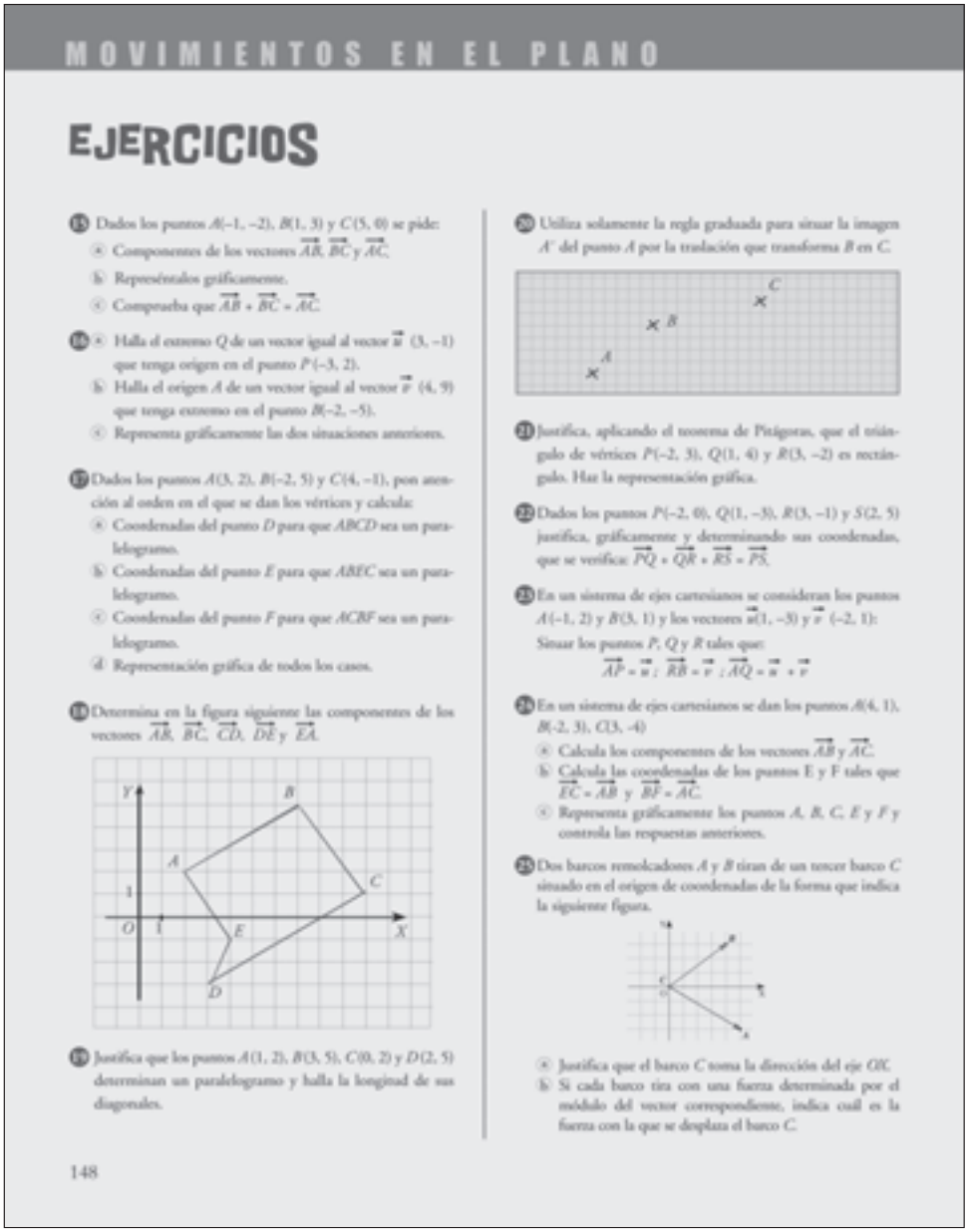




ORIENTACIONES DIDÁCTICAS

El alumno debe entender que el término "composición" equivale a la realización de dos simetrías de forma consecutiva.

▶ Pág. 148. Ejercicios



MOVIMIENTOS EN EL PLANO

EJERCICIOS

13 Dados los puntos $A(-1, -2)$, $B(1, 3)$ y $C(5, 0)$ se pide:
- a) Componentes de los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{AC}$.
- b) Represéntalos gráficamente.
- c) Comprueba que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

14 a) Halla el extremo Q de un vector igual al vector $\vec{u}$ $(3, -1)$ que tenga origen en el punto $P(-3, 2)$.
b) Halla el origen A de un vector igual al vector $\vec{v}$ $(4, 9)$ que tenga extremo en el punto $B(-2, -5)$.
c) Representa gráficamente las dos situaciones anteriores.

17 Dados los puntos $A(3, 2)$, $B(-2, 5)$ y $C(4, -1)$, pon atención al orden en el que se dan los vértices y calcula:
- a) Coordenadas del punto D para que $ABCD$ sea un paralelogramo.
- b) Coordenadas del punto E para que $ABEC$ sea un paralelogramo.
- c) Coordenadas del punto F para que $ACBF$ sea un paralelogramo.
- d) Representación gráfica de todos los casos.

18 Determina en la figura siguiente las componentes de los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DE}$ y $\overrightarrow{EA}$.

19 Justifica que los puntos $A(1, 2)$, $B(3, 5)$, $C(0, 2)$ y $D(2, 5)$ determinan un paralelogramo y halla la longitud de sus diagonales.

20 Utiliza solamente la regla graduada para situar la imagen A' del punto A por la traslación que transforma B en C.

21 Justifica, aplicando el teorema de Pitágoras, que el triángulo de vértices $P(-2, 3)$, $Q(1, 4)$ y $R(3, -2)$ es rectángulo. Haz la representación gráfica.

22 Dados los puntos $P(-2, 0)$, $Q(1, -3)$, $R(3, -1)$ y $S(2, 5)$ justifica, gráficamente y determinando sus coordenadas, que se verifica: $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} + \overrightarrow{RS} = \overrightarrow{PS}$.

23 En un sistema de ejes cartesianos se consideran los puntos $A(-1, 2)$ y $B(3, 1)$ y los vectores $\vec{u}(1, -3)$ y $\vec{v}$ $(-2, 1)$:
Situar los puntos P, Q y R tales que:
$\overrightarrow{AP} = \vec{u}$; $\overrightarrow{RB} = \vec{v}$; $\overrightarrow{AQ} = \vec{u} + \vec{v}$

24 En un sistema de ejes cartesianos se dan los puntos $A(6, 1)$, $B(-2, 3)$, $C(3, -4)$
- a) Calcula los componentes de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.
- b) Calcula las coordenadas de los puntos E y F tales que $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AC}$.
- c) Representa gráficamente los puntos A, B, C, E y F y controla las respuestas anteriores.

25 Dos barcos remolcadores A y B tiran de un tercer barco C situado en el origen de coordenadas de la forma que indica la siguiente figura.

- a) Justifica que el barco C toma la dirección del eje OX.
- b) Si cada barco tira con una fuerza determinada por el módulo del vector correspondiente, indica cuál es la fuerza con la que se desplaza el barco C.

148

SOLUCIONARIO

15. Dados los puntos A (–1, –2), B (1, 3) y C (5, 0) se pide:

a) Componentes de los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{AC}$.

b) Represéntalos gráficamente.

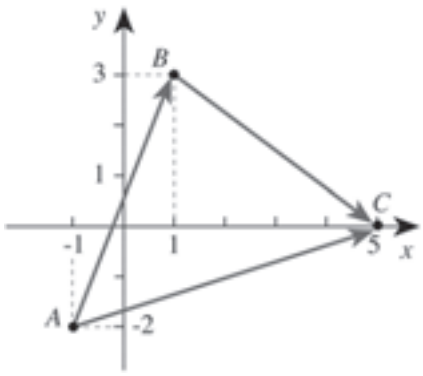
c) Comprueba que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

a) $\overrightarrow{AB}\ (1 - (-1), 3 - (-2)) = (2, 5)$

$\overrightarrow{BC}\ (5-1, 0-3) = (4, -3)$

$\overrightarrow{AC}\ (5 - (-1), 0 - (-2)) = (6, 2)$

b)



c) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = (2, 5) + (4, -3) = (2 + 4, 5 - 3) = (6, 2) = \overrightarrow{AC}$.

16. a) Halla el extremo *Q* de un vector igual al vector $\vec{u}$ (3, –1) que tenga origen en el punto *P* (–3, 2).

b) Halla el origen *A* de un vector igual a vector $\vec{v}$ (4, 9) que tenga extremo en el punto *B* (–2, –5).

c) Representa gráficamente las dos situaciones anteriores.

a) Si $Q\,(x, y)$ entonces $\overrightarrow{PQ}$ es $(x + 3, y - 2)$

$$\left.\begin{matrix} P(-3, 2) \\ Q(x, y) \end{matrix}\right\} \overrightarrow{PQ}\,(x + 3, y - 2). \quad \text{Si } \overrightarrow{PQ} = \vec{u}\,(3, -1) \text{ se verifica :}$$

$$\left.\begin{matrix} x + 3 = 3 \\ y - 2 = -1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} x = 0 \\ y = 1 \end{matrix}$$

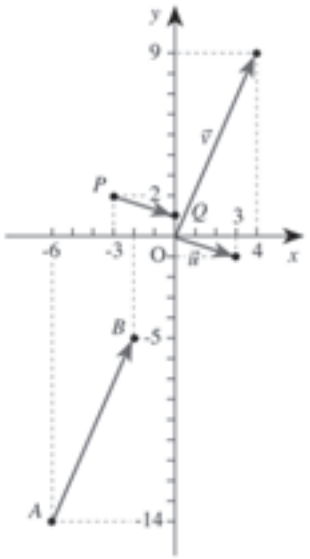
Así $Q\,(0, 1)$

b) $\left.\begin{matrix} A\,(x, y) \\ B\,(-2, -5) \end{matrix}\right\} \overrightarrow{AB}\,(-2, -x, -5 - y)$; Si $\overrightarrow{AB} = \vec{v}\,(4, 9)$ es :

$$\left.\begin{matrix} -2 - x = 4 \\ -5 - y = 9 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} x = -6 \\ y = -14 \end{matrix}$$

Así, $A\,(-6, -14)$.

c)



17. Dados los puntos *A* (3, 2), *B* (–2, 5) y *C* (4, –1), pon atención al orden en el que se dan los vértices y calcula:

a) Coordenadas del punto *D* para que *ABCD* sea un paralelogramo.

b) Coordenadas del punto *E* para que *ABEC* sea un paralelogramo.

c) Coordenadas del punto *F* para que *ACBF* sea un paralelogramo.

d) Representación gráfica de todos los casos.

a) En *ABCD* una igualdad vectorial posible es: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

Si $D\,(x, y)$, entonces:

$$\left.\begin{matrix} \overrightarrow{AB}\,(-5, 3) \\ \overrightarrow{DC}\,(4 - x, -14 - y) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} -5 = 4 - x \Rightarrow x = 9 \\ 3 = -1 - y \Rightarrow y = -4 \end{matrix}$$

Luego $D\,(9, -4)$

b) En *ABEC* una igualdad puede ser $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CE}$.

Si $E\,(x, y)$, entonces:

$$\left.\begin{matrix} \overrightarrow{AB}\,(-5, 3) \\ \overrightarrow{CE}\,(x - 4, y + 1) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} -5 = x - 4 \Rightarrow x = -1 \\ 3 = y + 1 \Rightarrow y = 2 \end{matrix}$$

Luego $E\,(-1, 2)$

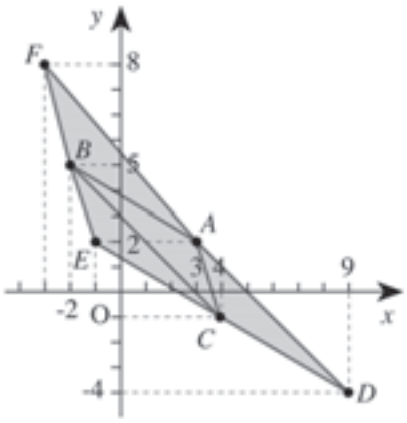
c) En *ACBF* una igualdad es $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{FB}$.

Si $F\,(x, y)$, entonces:

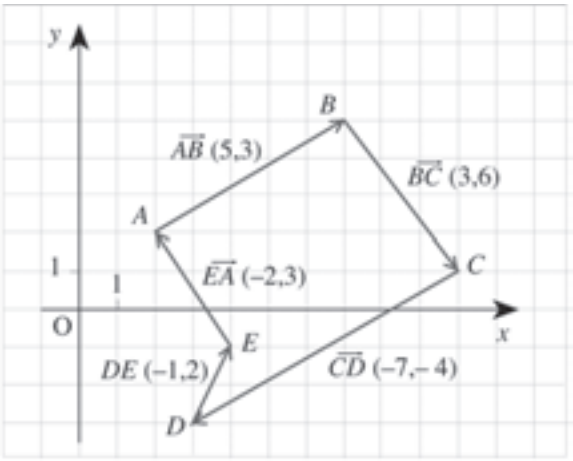
$$\left.\begin{matrix} \overrightarrow{AC}\,(1, -3) \\ \overrightarrow{FB}\,(-2 - x, 5 - y) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} 1 = -2 - x \Rightarrow x = -3 \\ -3 = 5 - y \Rightarrow y = 8 \end{matrix}$$

Luego $F\,(-3, 8)$

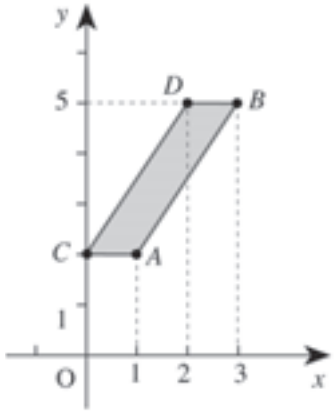
d)



18. Determina en la figura siguiente las componentes de los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DE}$ y $\overrightarrow{EA}$



19. Justifica que los puntos $A(1, 2)$, $B(3, 5)$, $C(0, 2)$ y $D(2, 5)$ determinan un paralelogramo y halla la longitud de sus diagonales.



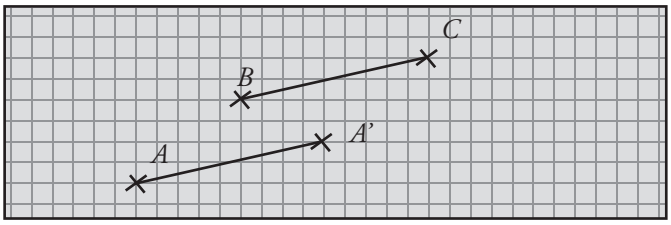
$\overrightarrow{DB}\ (2, 0) = \overrightarrow{CA}\ (2, 0)$

Es un paralelogramo

$\overrightarrow{CB}\ (3, 3) \rightarrow \left|\overrightarrow{CD}\right| = \sqrt{9 + 9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

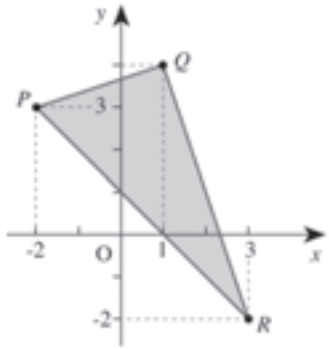
$\overrightarrow{AD}\ (1, 3) \rightarrow \left|\overrightarrow{AD}\right| = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10}$

20. Utiliza solamente la regla graduada para situar la imagen A' del punto A por la traslación que transforma B en C.



La solución depende de la fidelidad del dibujo del alumno. Se restringe el uso de instrumentos para consolidar el concepto de equidistancia.

21. Justifica, aplicando el teorema de Pitágoras, que el triángulo de vértices $P(-2, 3)$, $Q(1, 4)$ y $R(3, -2)$ es rectángulo. Haz la representación gráfica.



$\overrightarrow{PQ}\ (3, 1);\ \overrightarrow{QR}(2, -6);\ \overrightarrow{PR}\ (5, -5)$

$\left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$

$\left|\overrightarrow{QR}\right| = \sqrt{4 + 36} = \sqrt{40}$

$\left|\overrightarrow{PR}\right| = \sqrt{25 + 25} = \sqrt{50}$

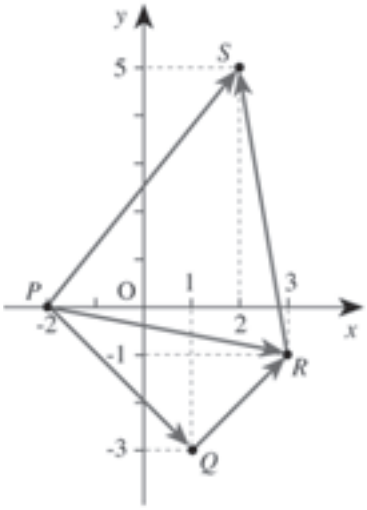
Como se verifica el Tª de Pitágoras:

$\left|\overrightarrow{PQ}\right|^2 + \left|\overrightarrow{QR}\right|^2 = \left|\overrightarrow{PR}\right|^2 \Rightarrow 10 + 40 = 50$

el triángulo PQR es rectángulo en Q.

22. Dados los puntos $P(-2, 0)$, $Q(1, -3)$, $R(3, -1)$ y $S(2, 5)$ justifica, gráficamente y determinando sus coordenadas, que se verifica:

$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} + \overrightarrow{RS} = \overrightarrow{PS}$



$\overrightarrow{PQ}\ (3, -3);\ \overrightarrow{QR}\ (2, 2);\ \overrightarrow{RS}\ (-1, 6)\ y\ \overrightarrow{PS}\ (4, 5)$

$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = (3, -3) + (2, 2) = \overrightarrow{PR}\ (5, -1)$

$\overrightarrow{PR} + \overrightarrow{RS} = (5, -1) + (-1, 6) = \overrightarrow{PS}\ (4, 5)$

Luego $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} + \overrightarrow{RS} = \overrightarrow{PS}$

23. En un sistema de ejes cartesianos se consideran los puntos $A(-1, 2)$ y $B(3, 1)$ y los vectores $\vec{u}\ (1, -3)$ y $\vec{v}\ (-2, 1)$:

Situar los puntos P, Q y R tales que:

$\overrightarrow{AP} = \vec{u};\ \overrightarrow{RB} = \vec{v};\ \overrightarrow{AQ} = \vec{u} + \vec{v}$

$A\ (-1, 2)\ P\ (x, y) \Rightarrow \overrightarrow{AP}\ (x + 1, y - 2)$

Si $\overrightarrow{AP} = \vec{u}\ (1, -3) \Rightarrow \begin{cases} x + 1 = 1 \Rightarrow x = 0 \\ y - 2 = -3 \Rightarrow y = -1 \end{cases} \Rightarrow P(0, -1)$

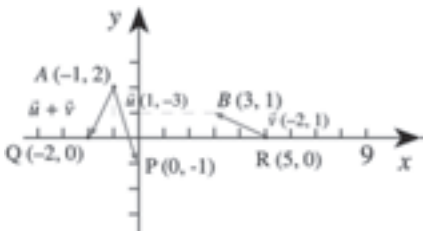
$R(x, y)\ y\ B\ (3, 1) \Rightarrow \overrightarrow{RB}\ (3 - x, 1 - y)$

Si $\overrightarrow{RB} = \vec{v}\ (-2, 1) \Rightarrow \begin{cases} 3 - x = -2 \Rightarrow x = 5 \\ 1 - y = 1 \Rightarrow y = 0 \end{cases} \Rightarrow R(5,0)$

$Q\ (x, y)\ y\ A\ (-1, 2) \Rightarrow \overrightarrow{AQ}\ (x + 1, y - 2)$

Si $\overrightarrow{AQ}\ (x + 1, y - 2) = \vec{u} + \vec{v} = (1, -3) + (-2, 1) = (-1, -2)$

entonces $\begin{cases} x + 1 = -1 \Rightarrow x = -2 \\ y - 2 = -2 \Rightarrow y = 0 \end{cases} \Rightarrow Q(-2,0)$



24. En un sistema de ejes cartesianos se dan los puntos $A(4, 1)$, $B(-2, 3)$, $C(3, -4)$

a) Calcula los componentes de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

b) Calcula las coordenadas de los puntos E y F tales que $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AC}$

c) Representa gráficamente los puntos A, B, C, E y F y controla las respuestas anteriores.

Si $A\ (4, 1)$, $B\ (-2, 3)$, $C\ (3, -4)$

a) $\overrightarrow{AB}\ (-2 - 4, 3 - 1) = (-6, 2)$

$\overrightarrow{AC}\ (3, -4, -4 - 1) = (-1, -5)$

b) $E\ (x, y)$ y $C\ (3, -4) \Rightarrow \overrightarrow{EC}\ (3 - x, -4 - y)$

Si $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{AB} \Rightarrow (3 - x, -4 - y) = (-6, 2) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3 - x = -6 \Rightarrow x = 9 \\ -4 - y = 2 \Rightarrow y = -6 \end{cases}$$

Luego $E\ (9, -6)$

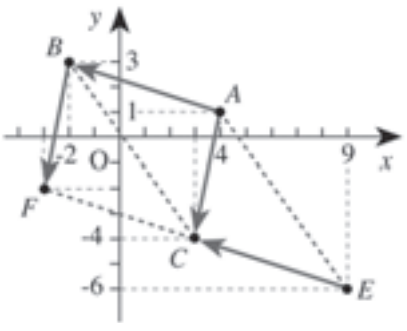
$B\ (-2, 3)$ y $F\ (x, y) \Rightarrow \overrightarrow{BF}\ (x + 2, y - 3)$

Si $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AC} \Rightarrow (x + 2, y - 3) = (-1, -5) \Rightarrow$

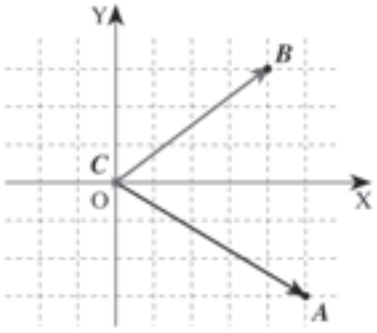
$$\Rightarrow \begin{cases} x + 2 = -1 \Rightarrow x = -3 \\ y - 3 = -5 \Rightarrow y = -2 \end{cases}$$

Luego $F\ (-3, -2)$.

c)



25. Dos barcos remolcadores A y B tiran de un tercer barco C situado en el origen de coordenadas de la forma que indica la siguiente figura.



a) Justifica que el barco C toma la dirección del eje OX.

b) Si cada barco tira con una fuerza determinada por el módulo del vector correspondiente, indica cuál es la fuerza con la que se desplaza el barco C.

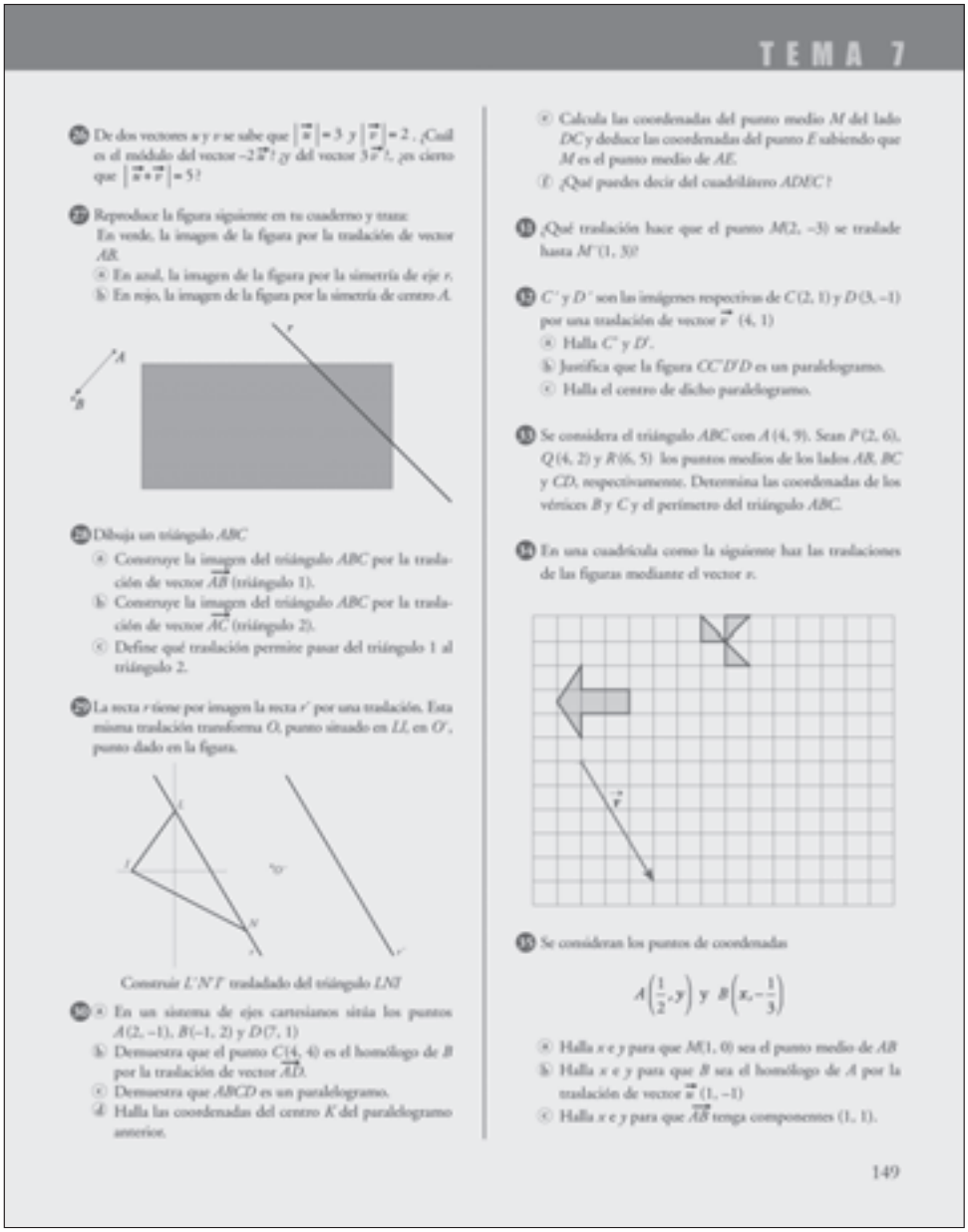
a) Es $\overrightarrow{OA}\ (5, -3)$ y $\overrightarrow{OB}\ (4, 3) \Rightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = (5, -3) + (4, 3) = (9, 0)$.

Luego lleva la dirección de OX^+.

b) Se desplaza con una fuerza de

$$\left|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right| = \left|(9, 0)\right| = 9$$

▶ Pág. 149. Ejercicios



TEMA 7

26 De dos vectores u y v se sabe que $|\vec{u}| = 3$ y $|\vec{v}| = 2$. ¿Cuál es el módulo del vector $-2\vec{u}$? ¿y del vector $3\vec{v}$?, ¿es cierto que $|\vec{u} + \vec{v}| = 5$?

27 Reproduce la figura siguiente en tu cuaderno y traza:
a) En verde, la imagen de la figura por la traslación de vector $\vec{AB}$.
b) En azul, la imagen de la figura por la simetría de eje r.
c) En rojo, la imagen de la figura por la simetría de centro A.

28 Dibuja un triángulo ABC.
a) Construye la imagen del triángulo ABC por la traslación de vector $\vec{AB}$ (triángulo 1).
b) Construye la imagen del triángulo ABC por la traslación de vector $\vec{AC}$ (triángulo 2).
c) Define qué traslación permite pasar del triángulo 1 al triángulo 2.

29 La recta r tiene por imagen la recta r' por una traslación. Esta misma traslación transforma O, punto situado en LI, en O', punto dado en la figura.

Construir $L'N'I'$ trasladado del triángulo LNI

30 a) En un sistema de ejes cartesianos sitúa los puntos $A(2, -1)$, $B(-1, 2)$ y $D(7, 1)$
b) Demuestra que el punto $C(4, 4)$ es el homólogo de B por la traslación de vector $\vec{AD}$.
c) Demuestra que $ABCD$ es un paralelogramo.
d) Halla las coordenadas del centro K del paralelogramo anterior.
e) Calcula las coordenadas del punto medio M del lado DC y deduce las coordenadas del punto E sabiendo que M es el punto medio de AE.
f) ¿Qué puedes decir del cuadrilátero $ADEC$?

31 ¿Qué traslación hace que el punto $M(2, -3)$ se traslade hasta $M'(1, 3)$?

32 C' y D' son las imágenes respectivas de $C(2, 1)$ y $D(3, -1)$ por una traslación de vector $\vec{v}$ $(4, 1)$
a) Halla C' y D'.
b) Justifica que la figura $CC'D'D$ es un paralelogramo.
c) Halla el centro de dicho paralelogramo.

33 Se considera el triángulo ABC con $A(4, 9)$. Sean $P(2, 6)$, $Q(4, 2)$ y $R(6, 5)$ los puntos medios de los lados AB, BC y CD, respectivamente. Determina las coordenadas de los vértices B y C y el perímetro del triángulo ABC.

34 En una cuadrícula como la siguiente haz las traslaciones de las figuras mediante el vector v.

35 Se consideran los puntos de coordenadas

$$A\left(\frac{1}{2}, y\right) \text{ y } B\left(x, -\frac{1}{3}\right)$$

a) Halla x e y para que $M(1, 0)$ sea el punto medio de AB
b) Halla x e y para que B sea el homólogo de A por la traslación de vector $\vec{u}$ $(1, -1)$
c) Halla x e y para que $\vec{AB}$ tenga componentes $(1, 1)$.

149

SOLUCIONARIO

26. De dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ y se sabe que $|\vec{u}| = 3$ y $|\vec{v}| = 2$. ¿Cuál es el módulo del vector $-2\vec{u}$? ¿y del vector $3\vec{u}$?, ¿es cierto que $|\vec{u} + \vec{v}| = 5$?

a) $|-2\vec{u}| = 2|\vec{u}| = 2 \cdot 3 = 6$

$|3\vec{v}| = 3|\vec{v}| = 3 \cdot 2 = 6$

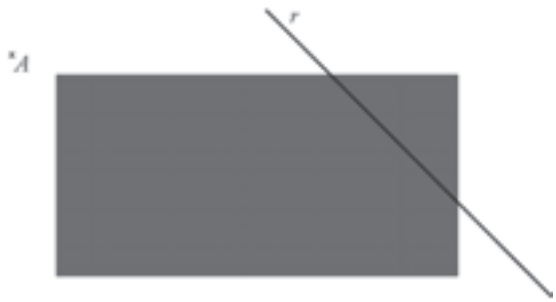
$|\vec{u} + \vec{v}| = 5$ cuando $\vec{u}$ y $\vec{v}$ están alineados. En caso contrario se cumple que $|\vec{u} + \vec{v}| < 5$

27. Reproduce la figura siguiente en tu cuaderno y traza:

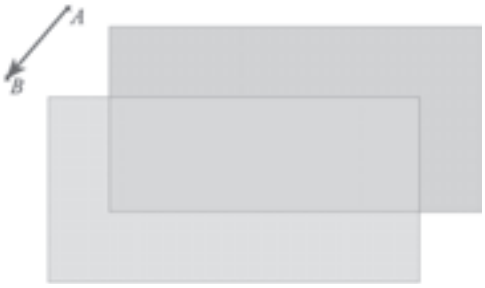
a) En verde, la imagen de la figura por la traslación de vector *AB*.

b) En azul, la imagen de la figura por la simetría de eje *r*.

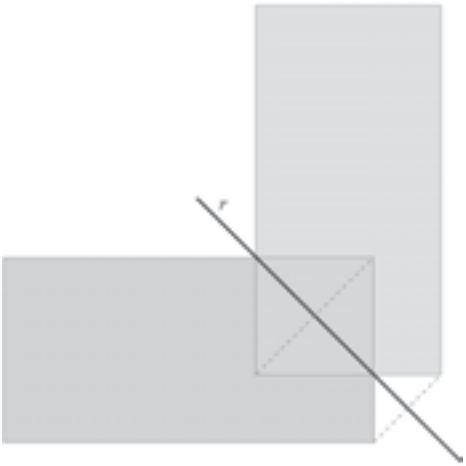
c) En rojo, la imagen de la figura por la simetría de centro *A*.



a)



b)



c)

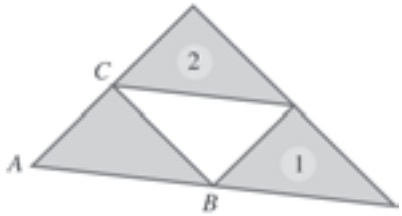
28. Dibuja un triángulo *ABC*.

a) Construye la imagen del triángulo *ABC* por la traslación de vector *AB* (triángulo 1).

b) Construye la imagen del triángulo *ABC* por la traslación de vector *AC* (triángulo 2).

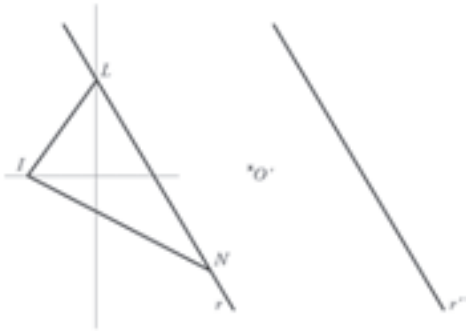
c) Define qué traslación permite pasar del triángulo 1 al triángulo 2.

a) y b)



c) Del triángulo 1 al 2 se pasa por una traslación de vector $\overrightarrow{BC}$, suma de las traslaciones de vector $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

29. La recta *r* tiene por imagen la recta *r´* por una traslación. Esta misma traslación transforma *O*, punto situado en *LI*, en *O´*, punto dado en la figura.



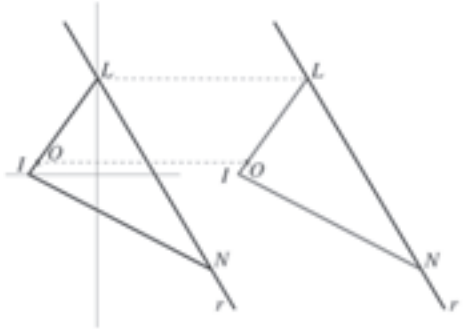
Construir *L' N' I'* trasladado del triángulo *LNI*.

Trasladar *LI* paralelamente a sí mismo hasta encontrar *L'* en *r'*.

Hacer *L'I'* = *LI*.

Trasladar *IN* de igual forma hasta encontrar *N'* en *r'*.

La paralela a *LL'* por *O'* nos da *O*.



30. a) En un sistema de ejes cartesianos sitúa los puntos *A*(2, –1), *B*(–1, 2) y *D*(7, 1)

b) Demuestra que el punto *C*(4, 4) es el homólogo de *B* por la traslación de vector *AD*.

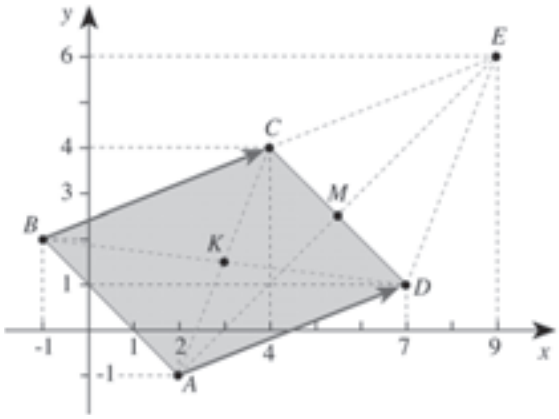
c) Demuestra que *ABCD* es un paralelogramo.

d) Halla las coordenadas del centro *K* del paralelogramo anterior.

e) Calcula las coordenadas del punto medio *M* del lado *DC* y deduce las coordenadas del punto *E* sabiendo que *M* es el punto medio de *AE*.

f) ¿Qué puedes decir del cuadrilátero *ADEC*?

a)



b) $\overrightarrow{AD}$ tiene componentes (7–2, 1– (–1)) = (5, 2).

$\overrightarrow{BC}$ tiene componentes (4– (–1), 4–2) = (5, 2).

Luego $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ y C es el homólogo de B por la traslación de vector $\overrightarrow{AD}$.

c) *ABCD* es un paralelogramo al ser $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

d) El punto medio de una diagonal, por ejemplo *BD*, es el centro de paralelogramo.

$$K = \left(\frac{-1+7}{2}, \frac{2+1}{2}\right) = \left(3, \frac{3}{2}\right)$$

e) $M_{DC} = \left(\frac{7+4}{2}, \frac{1+4}{2}\right) = \left(\frac{11}{2}, \frac{5}{2}\right)$

$E\ (x, y)$ y $A\ (z, -1)$

$$\left(\frac{11}{2}, \frac{5}{2}\right) = \left(\frac{x+2}{2}, \frac{y-1}{2}\right) = \begin{cases} \frac{x+2}{2} = \frac{11}{2} \Rightarrow x = 9 \\ \frac{y-1}{2} = \frac{5}{2} \Rightarrow y = 6 \end{cases}$$

Luego E (9, 6)

f) El cuadrilátero *ADEC* es un paralelogramo al ser *M* el punto de corte de sus diagonales y ser el punto medio de ambas.

31. ¿Qué traslación hace que el punto *M*(2, –3) se traslade hasta *M´*(1, 3)?

La traslación de vector $\overrightarrow{MM'}$ (1 –2, 3 – (–3)) = (–1, 6).

32. *C´* y *D´* son las imágenes respectivas de *C*(2, 1) y *D*(3, –1) por una traslación de vector $\vec{u}$ (4, 1).

a) Halla *C'* y *D'*.

b) Justifica que la figura *CC'D'D* es un paralelogramo.

c) Halla el centro de dicho paralelogramo.

a) C (2, 1); C' (x, y)

$$\overrightarrow{CC'}\ (x-2,\ y-1) = (4, 1) \Rightarrow \begin{cases} x-2 = 4 \Rightarrow x = 6 \\ y-1 = 1 \Rightarrow y = 2 \end{cases}$$

Así pues C' (6, 2). Análogamente:

D (3, –1); D' (x, y)

$$\overrightarrow{DD'}\ (x-3,\ y+1) = (4, 1) \Rightarrow \begin{cases} x-3 = 4 \Rightarrow x = 7 \\ y+1 = 1 \Rightarrow y = 0 \end{cases}$$

Por tanto D' (7, 0)

b) Lo es al ser $\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{DD'}$

c) Al ser un paralelogramo, el punto medio de una diagonal es el centro de la figura

$$M_{CD'} = \left(\frac{2+7}{2}, \frac{1+0}{2}\right) = \left(\frac{9}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

33. Se considera el triángulo *ABC* con *A*(4, 9). Sean *P*(2, 6), *Q*(4, 2) y *R*(6, 5) los puntos medios de los lados *AB*, *BC* y *CD*, respectivamente. Determina las coordenadas de los vértices *B* y *C* y el perímetro del triángulo *ABC*.

Sean los vértices A (4, 9); B (x_1, y_1); C (x_2, y_2).

Si P (2, 6) es el punto medio de $AB \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{4 + x_1}{2} = 2; \quad \frac{9 + y_1}{2} = 6$$

Por tanto $x_1 = 0$; $y_1 = 3$ y obtenemos B (0, 3).

Si Q (4, 2) es el punto medio de $BC \Rightarrow$

$$\left(\frac{0 + x_2}{2}, \frac{3 + y_2}{2}\right) = (4, 2) \Rightarrow \begin{cases} \frac{x_2}{2} = 4 \Rightarrow x_2 = 8 \\ \frac{3 + y_2}{2} = 2 \Rightarrow y_2 = 1 \end{cases}$$

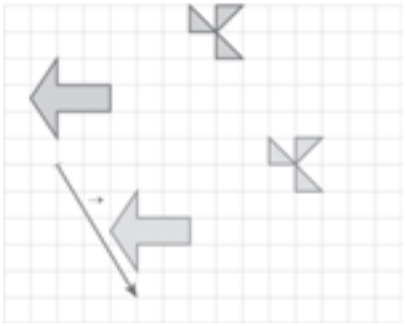
y tenemos C (8, 1)

Perímetro:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| + \left|\overrightarrow{BC}\right| + \left|\overrightarrow{CA}\right| = \left|(-4, -6)\right| + \left|(8, -3)\right| + \left|(4, -8)\right| =$$

$$= \sqrt{52} + \sqrt{73} + \sqrt{80}$$

34. En una cuadrícula como la siguiente haz las traslaciones de las figuras mediante el vector *v*.



35. Se consideran los puntos de coordenadas $A\left(\frac{1}{2}, y\right)$ y $B\left(x, -\frac{1}{3}\right)$

a) Halla *x* e *y* para que *M*(1, 0) sea el punto medio de *AB*

b) Halla *x* e *y* para que *B* sea el homólogo de *A* por la traslación de vector $\vec{u}$ (1, –1).

c) Halla *x* e *y* para que $\overrightarrow{AB}$ tenga componentes (1, 1).

a)

$$(1, 0) = \left(\frac{\frac{1}{2} + x}{2}, \frac{y - \frac{1}{3}}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} \frac{\frac{1}{2} + x}{2} = 1 \Rightarrow \frac{1}{2} + x = 2 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \\ \frac{y - \frac{1}{3}}{2} = 0 \Rightarrow y - \frac{1}{3} = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{3} \end{cases}$$

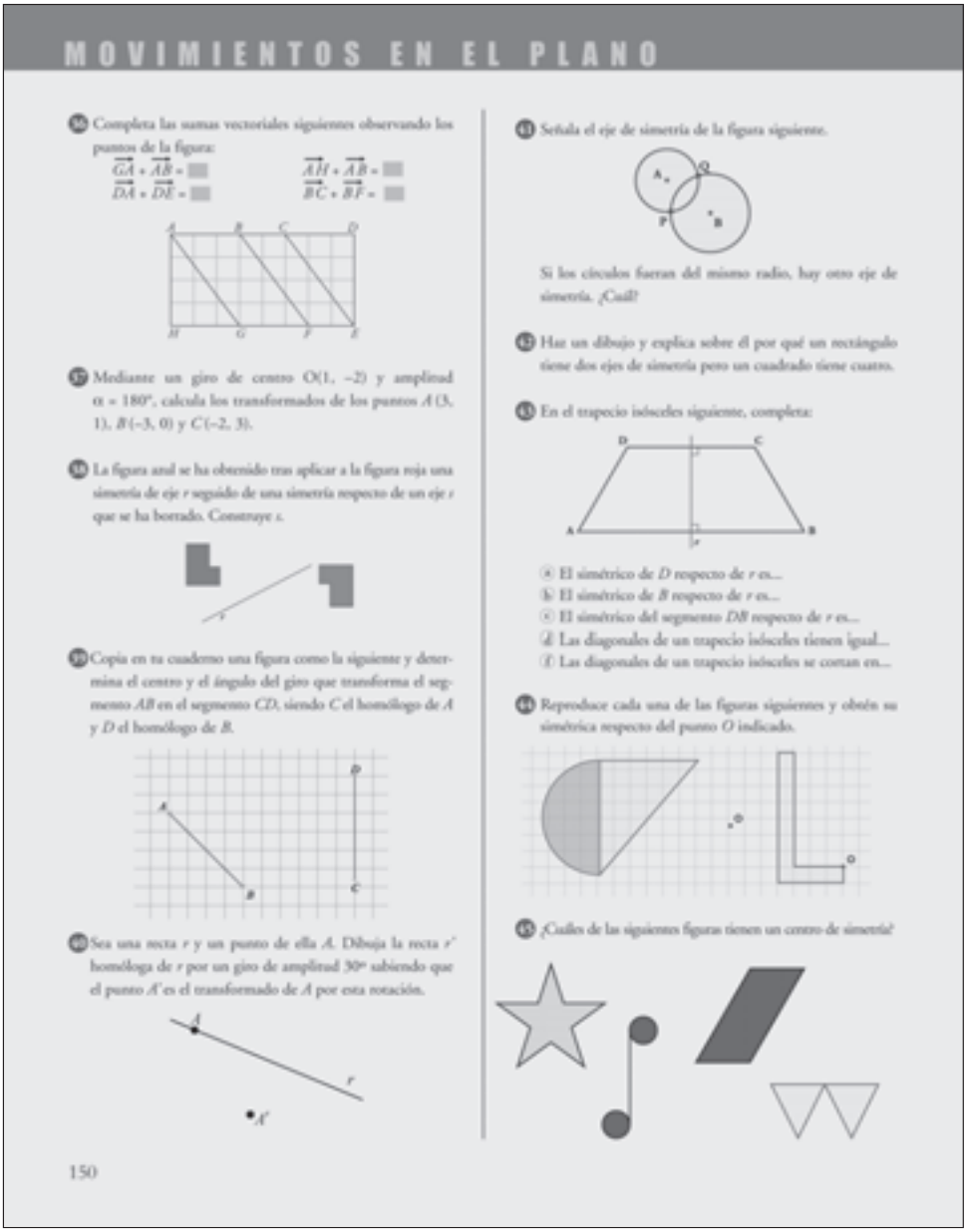
b) Debe ser $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$

$$\overrightarrow{AB}\left(x - \frac{1}{2}, -\frac{1}{3} - y\right) = (1, -1) \Rightarrow \begin{cases} x - \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{3} - y = -1 \Rightarrow y = \frac{2}{3} \end{cases}$$

c)

$$\overrightarrow{AB}\left(x - \frac{1}{2}, -\frac{1}{3} - y\right) = (1, 1) \Rightarrow \begin{cases} x - \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{3} - y = 1 \Rightarrow y = -\frac{4}{3} \end{cases}$$

▶ Pág. 150. Ejercicios



MOVIMIENTOS EN EL PLANO

36 Completa las sumas vectoriales siguientes observando los puntos de la figura:

$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB} =$ ■ $\quad \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AB} =$ ■

$\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DE} =$ ■ $\quad \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BF} =$ ■

37 Mediante un giro de centro O(1, –2) y amplitud $\alpha = 180°$, calcula los transformados de los puntos A(3, 1), B(–3, 0) y C(–2, 3).

38 La figura azul se ha obtenido tras aplicar a la figura roja una simetría de eje r seguido de una simetría respecto de un eje s que se ha borrado. Construye s.

39 Copia en tu cuaderno una figura como la siguiente y determina el centro y el ángulo del giro que transforma el segmento AB en el segmento CD, siendo C el homólogo de A y D el homólogo de B.

40 Sea una recta r y un punto de ella A. Dibuja la recta r' homóloga de r por un giro de amplitud 30º sabiendo que el punto A' es el transformado de A por esta rotación.

41 Señala el eje de simetría de la figura siguiente.

Si los círculos fueran del mismo radio, hay otro eje de simetría. ¿Cuál?

42 Haz un dibujo y explica sobre él por qué un rectángulo tiene dos ejes de simetría pero un cuadrado tiene cuatro.

43 En el trapecio isósceles siguiente, completa:

a) El simétrico de D respecto de r es...
b) El simétrico de B respecto de r es...
c) El simétrico del segmento DB respecto de r es...
d) Las diagonales de un trapecio isósceles tienen igual...
e) Las diagonales de un trapecio isósceles se cortan en...

44 Reproduce cada una de las figuras siguientes y obtén su simétrica respecto del punto O indicado.

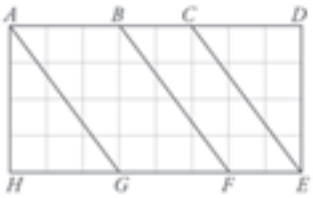
45 ¿Cuáles de las siguientes figuras tienen un centro de simetría?

150

36. Completa las sumas vectoriales siguientes observando los puntos de la figura:

a) $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB} =$ **b)** $\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AB} =$

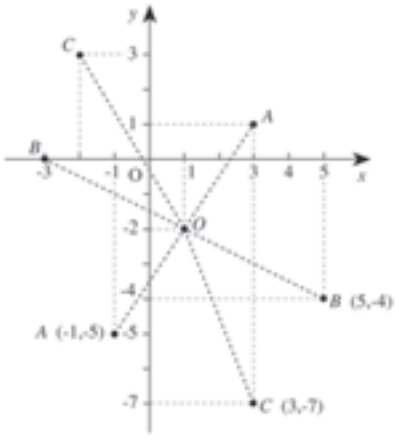
c) $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DE} =$ **d)** $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BF} =$



a) $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{GB}$ **b)** $\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AG}$

c) $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DH}$ **d)** $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BE}$

37. Mediante un giro de centro O (1, –2) y amplitud $\alpha = 180°$, calcula los transformados de los puntos A(3, 1), B(–3, 0) y C(–2, 3).

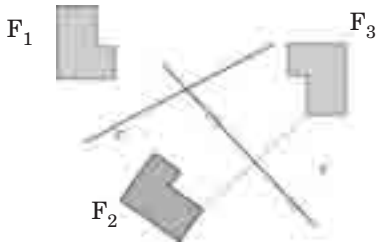


Serán: A' (–1, –5); B' (5, –4); C' (3, –7).

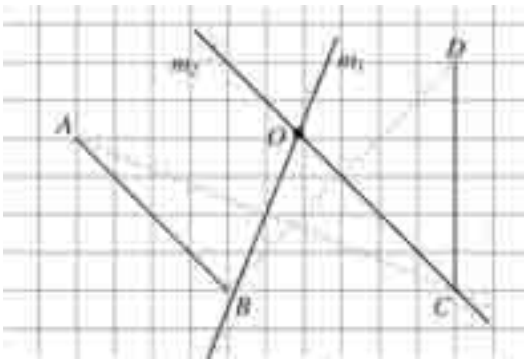
38. La figura azul se ha obtenido tras aplicar a la figura roja una simetría de eje *r* seguido de una simetría respecto de un eje *s* que se ha borrado. Construye *s*.

F_2 es la simetría de F_1 respecto de r .

S es la mediatriz del segmento determinado por cualquier par de puntos homólogos.

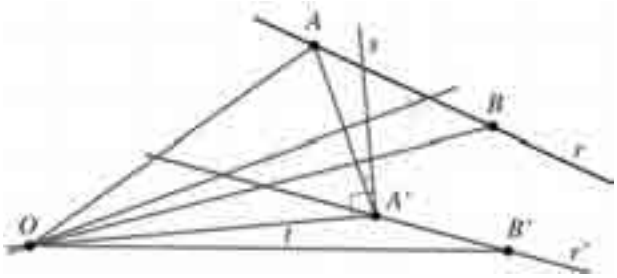


39. Copia en tu cuaderno una figura como la siguiente y determina el centro y el ángulo del giro que transforma el segmento *AB* en el segmento *CD*, siendo *C* el homólogo de *A* y *D* el homólogo de *B*.



O es el centro de giro. Punto de corte de las mediatrices m_1 de AC y m_2 de BD. Para esta figura el ángulo de giro es de 135º aproximadamente.

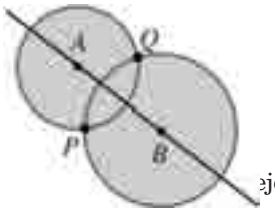
40. Sea una recta *r* y un punto de ella *A*. Dibuja la recta *r'* homóloga de *r* por un giro de amplitud 30º sabiendo que el punto *A'* es el transformado de *A* por esta rotación.



Se cosntruye el segmento AA'. Por A' se traza una semirrecta s que forma con $A'A$ un ángulo de 15º y también por A' una perpendicular a s que se denota t. La mediatriz de AA' corta a t en O que es el entro de giro buscado. Se verifica que $\widehat{AOA} = 30º$.

El transformado de cualquier otro punto B de r nos permite trazar la recta r' homóloga de r por este giro.

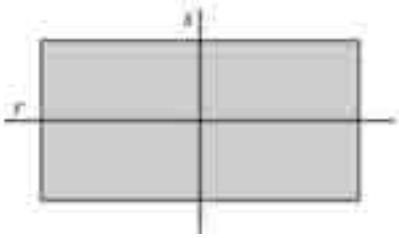
41. Señala el eje de simetría de la figura siguiente. Si los círculos fueran del mismo radio, hay otro eje de simetría. ¿Cuál?



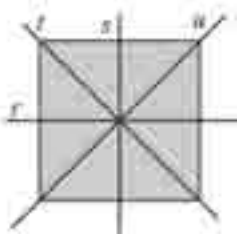
eje de simetría

Si los círculos fueran del mismo radio, la recta *PQ* también sería eje de simetría.

42. Haz un dibujo y explica sobre él por qué un rectángulo tiene dos ejes de simetría pero un cuadrado tiene cuatro.

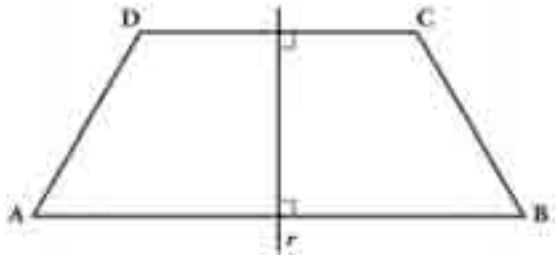


Ejes de simetría de un rectángulo



Ejes de simtería de un cuadrado

43. En el trapecio isósceles siguiente, completa:



a) El simétrico de *D* respecto de *r* es *C*

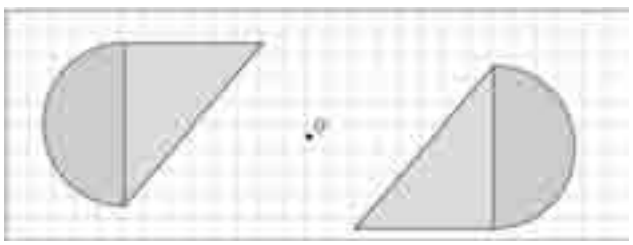
b) El simétrico de *B* respecto de *r* es *A*

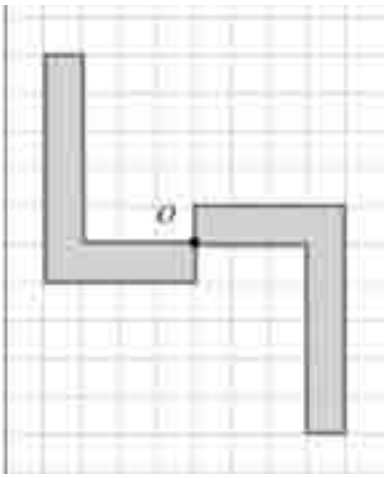
c) El simétrico del segmento *DB* respecto de *r* es *CA*

d) Las diagonales de un trapecio isósceles tienen igual *longitud*.

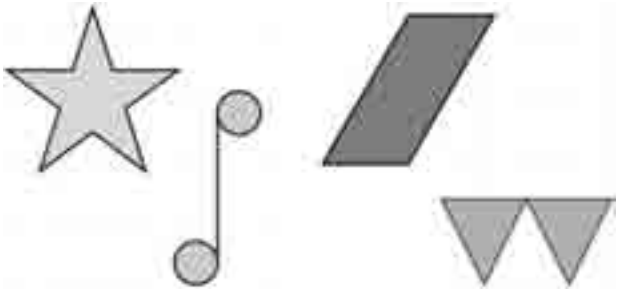
e) Las diagonales de un trapecio isósceles se cortan en *el punto medio de la paralela media.*

44. Reproduce cada una de las figuras siguientes y obtén su simétrica respecto del punto *O* indicado.

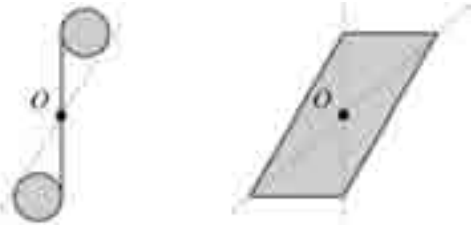




45. ¿Cuáles de las siguientes figuras tienen un centro de simetría?

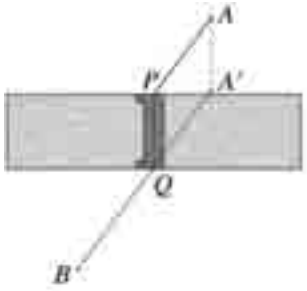


Sólo



46. ¿Donde situarías el puente *PQ* para obtener el trayecto más corto posible de *A* a *B*?

Sea *A'* el homólogo de *A* por la traslación de vector $\overrightarrow{PQ}$. El punto de corte del segmento *A'B* con la orilla del río nos da el punto de situación del puente para un trayecto mínimo.



47. En un sistema de ejes cartesianos se dan los puntos *A*(6, 5), *R*(– 6, – 4), *Z*(– 2, –1)

a) Calcula $\left|\overrightarrow{ZA}\right|$, $\left|\overrightarrow{ZR}\right|$, $\left|\overrightarrow{RA}\right|$. .

b) Justifica que los puntos *A*, *Z* y *R* están alineados.

c) Si *B* es el punto de coordenadas *B*(3, 11), calcula las longitudes de los segmentos *ZB* y *AB*.

d) La recta paralela al segmento *AB* que pasa por *R* corta a la recta *BZ* en *M*. Calcula $\left|\overrightarrow{MZ}\right|$ y luego $\left|\overrightarrow{MR}\right|$.

a) $\overrightarrow{ZA}\ (-8, -6) \Rightarrow \left|\overrightarrow{ZA}\right| = \sqrt{64 + 36} = 10$

$\overrightarrow{ZR}\ (-4, -3) \Rightarrow \left|\overrightarrow{ZR}\right| = \sqrt{16 + 9} = 5$

$\overrightarrow{RA}\ (12, 9) \Rightarrow \left|\overrightarrow{RA}\right| = \sqrt{144 + 81} = 15$

b) Como $\left|\overrightarrow{ZA}\right| + \left|\overrightarrow{ZR}\right| = \left|\overrightarrow{RA}\right|$ los puntos están alineados.

c) $\overrightarrow{ZB}\ (5, 12) \Rightarrow \left|\overrightarrow{ZB}\right| = \sqrt{25 + 144} = 13$

$\overrightarrow{AB}\ (-3, 6) \Rightarrow \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{9 + 36} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

d) Sea $M\ (x_1, x_2)$

$\overrightarrow{MR}\ (-6 - x_1, -4 - x_2)$ es paralelo a $\overrightarrow{AB}\ (-3, 6)$, luego:

$$\frac{-6 - x_1}{3} = \frac{-4 - x_2}{6} \Rightarrow 6x_1 + 3x_2 = -48 \quad (1)$$

también $\overrightarrow{ZM}\ (x_1 + 2,\ x_2 + 1)$ es paralelo a $\overrightarrow{ZB}\ (5, 12)$.

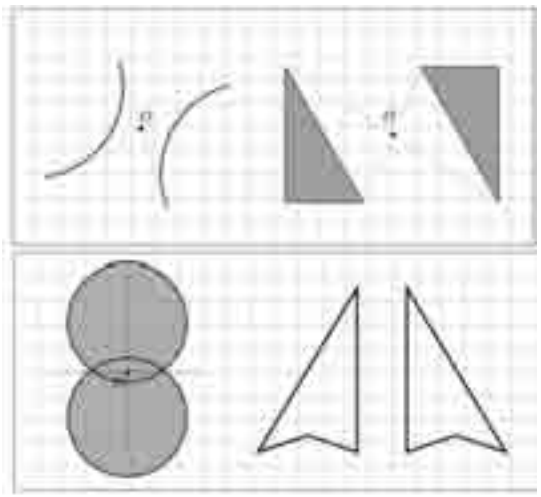
Luego $\dfrac{x_1 + 2}{5} = \dfrac{x_2 + 1}{12} \Rightarrow 12\ x_1 - 5\ x_2 = -19 \quad (2)$

Resolviendo el sistema (1) y (2) se obtiene $M\left(-\dfrac{9}{2}, -7\right)$

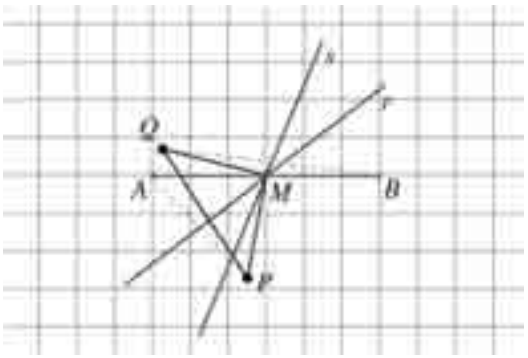
$\overrightarrow{MZ}$ es el vector $\left(\dfrac{5}{2}, 6\right) \Rightarrow \left|\overrightarrow{MZ}\right| = \sqrt{\dfrac{25}{4} + 36} = \dfrac{13}{2}$

$\overrightarrow{MR}$ *es* $\left(-\dfrac{3}{2}, 3\right)$; $\left|\overrightarrow{MR}\right| = \sqrt{\dfrac{9}{4} + 9} = \sqrt{\dfrac{45}{4}} = \dfrac{3}{2}\sqrt{5}$.

48. Las siguientes figuras, ¿son simétricas respecto de un punto *O*? En caso afirmativo, halla el punto *O*.



49. Dibuja un segmento *AB* de punto medio *M*, y traza por *M* dos rectas *r* y *s* no perpendiculares. Sea *P* el simétrico de *A* respecto de *r* y *Q* el simétrico de *B* respecto de *s*. ¿Cómo es el triángulo *MPQ*?



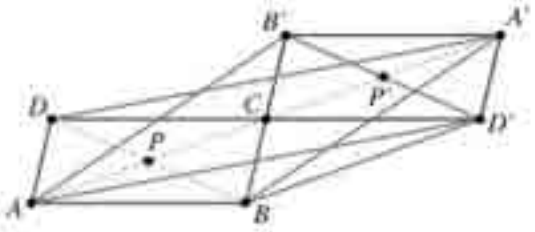
Como $MA = MP$ y $MQ = MB$ y además es $MA = MB$ se cumple que $MP = MQ$ luego el triángulo es isósceles.

50. Construye un paralelogramo *ABCD* y los puntos *A´*, *B´* y *D´* simétricos de *A*, *B* y *D*, respectivamente respecto del punto *C*.

¿Qué es el cuadrilátero *CB´A´D´*?

¿Qué es *C* para el triángulo *AB´D´*?

¿Qué es *C* para el triángulo *A´BD´*?



a) *CB'A'D* es un paralelogramo.

b) *C* es el baricentro de *AB'D'* pues *AP'* es la mediana del lado *B'D'* en *AB'D'* y $CP' = \frac{1}{2} AC$.

c) Análogamente se demuestra que *C* es el baricentro de *A'BD*.

51. Dibuja dos circunferencias de mismo centro *O*. Dos radios *OC* y *OD* de la circunferencia grande cortan a la pequeña en *A* y *B* respectivamente.

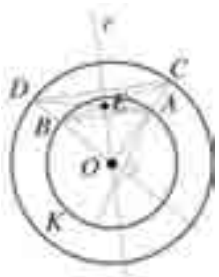
Dibuja la bisectriz *r* del ángulo *AOB*.

a) ¿Existe un eje de simetría de la figura?

b) Encuentra dos triángulos isósceles y un trapecio isósceles.

c) *AD* y *CB* se cortan en *E*. ¿Cómo está situado *E* con respecto a *r* ?

d) Sea *K* el simétrico de *A* con respecto a la recta que contiene a *OD*. Compara *AD* y *DK*, luego *DK* y *BC*.



El segmento *AK* es perpendicular a la recta *OD*.

a) *r* es un eje de simetría de la figura.

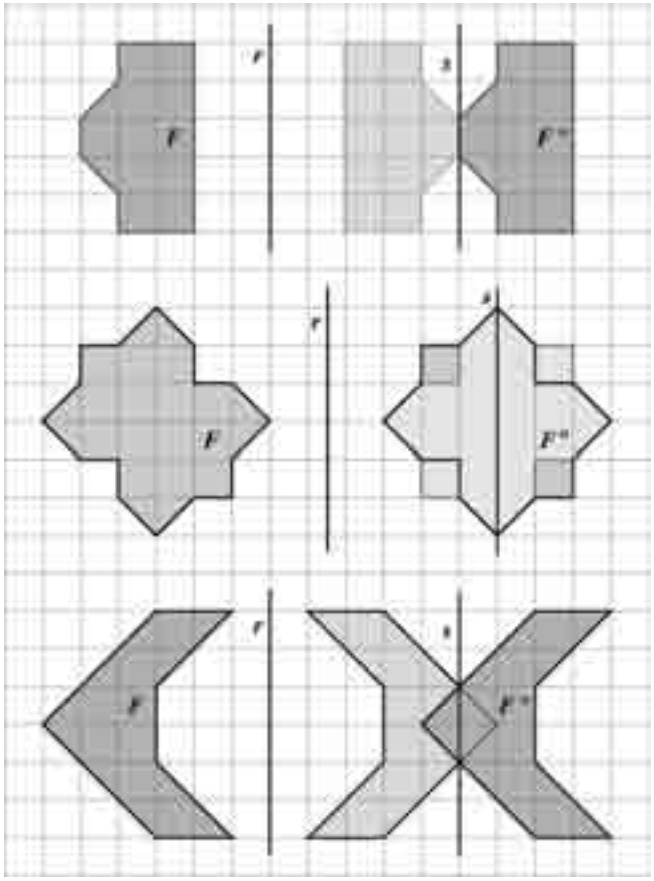
b) *OAB* y *OCD* son triángulos isósceles.

ABDC es un trapecio isósceles.

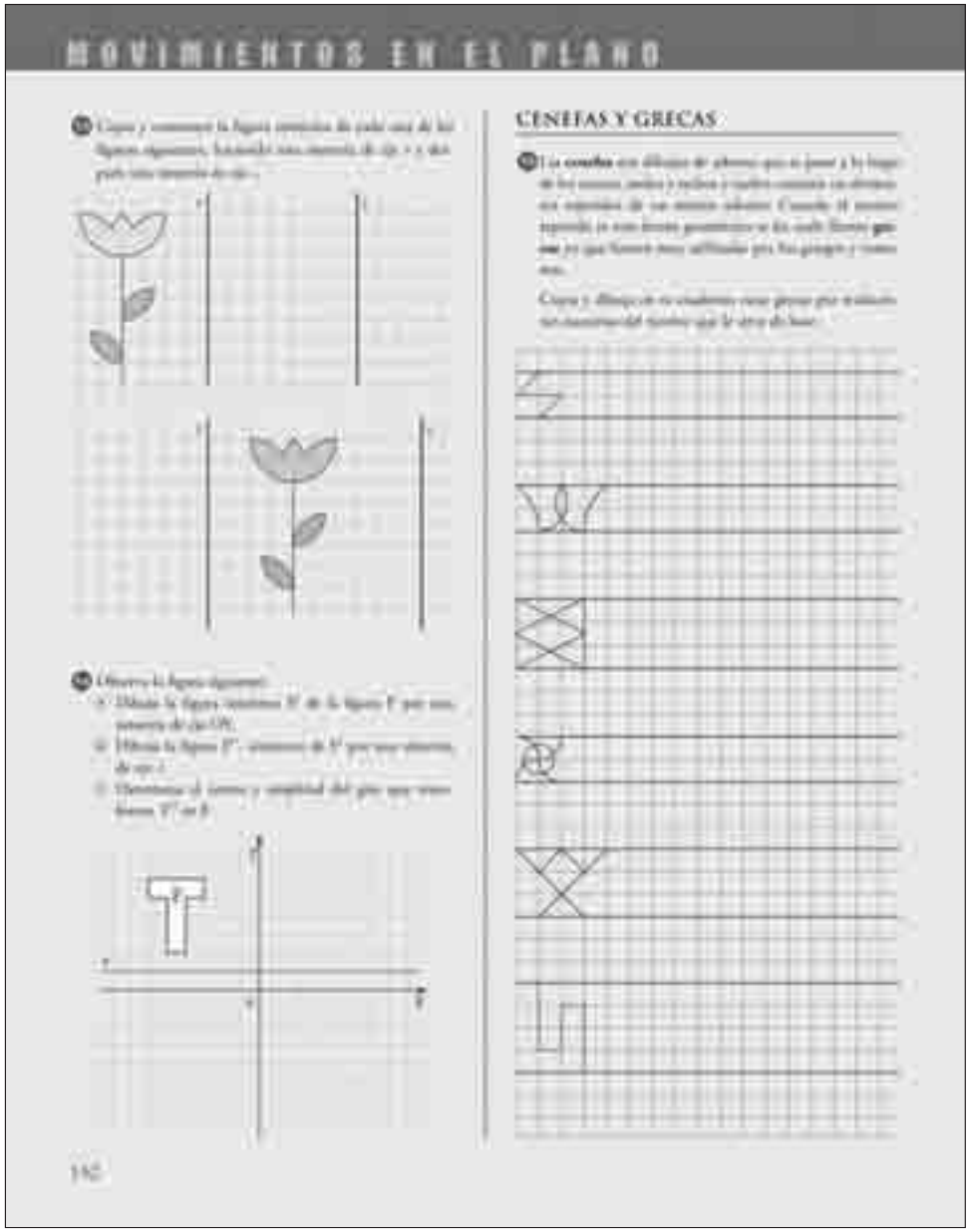
c) *E* está en *r*.

d) Puesto que *OD* también es un eje de simetría de la figura y *K* está en la circunferencia interior se cumple que $AD = DK$ como $BC = AD$ también es $DK = BC$.

52. La figura *F"* se ha obtenido aplicando a *F* una simetría de eje *r* y posteriormente una simetría de eje *s*, paralelo a *r*. Cópialas en tu cuaderno y dibuja la recta *r*.



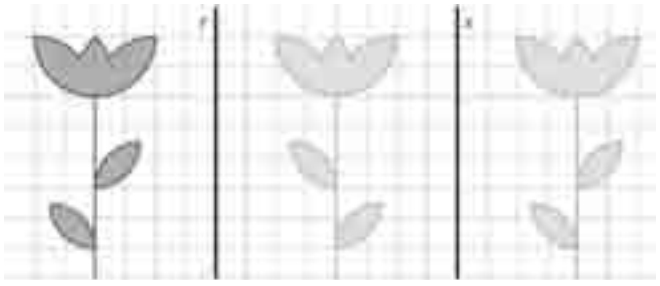
▶ Pág. 152. Ejercicios

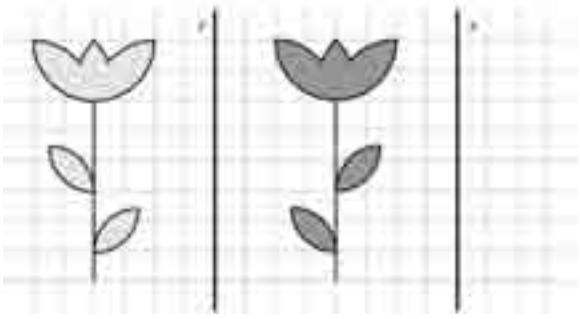

MOVIMIENTOS EN EL PLANO

CENEFAS Y GRECAS

142

53. Copia y construye la figura simétrica de cada una de las figuras siguientes, haciendo una simetría de eje *r* y después una simetría de eje *s*.





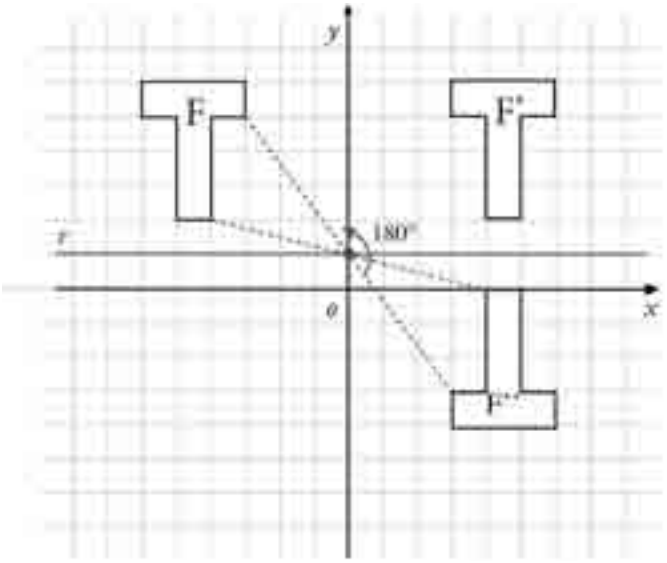
En el segundo caso la simetría de eje *s* quedaría fuera del margen.

54. Observa la figura siguiente:

a) Dibuja la figura simétrica *F'* de la figura *F* por una simetría de eje *OY*.

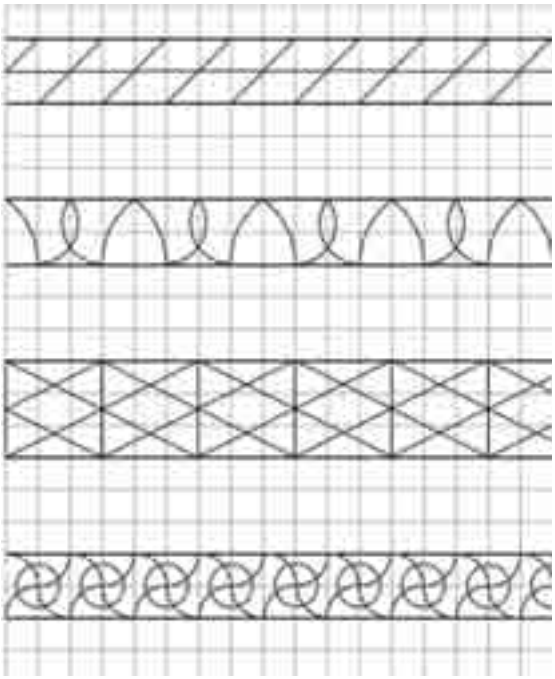
b) Dibuja la figura *F''*, simétrica de *F'* por una simetría de eje *r*.

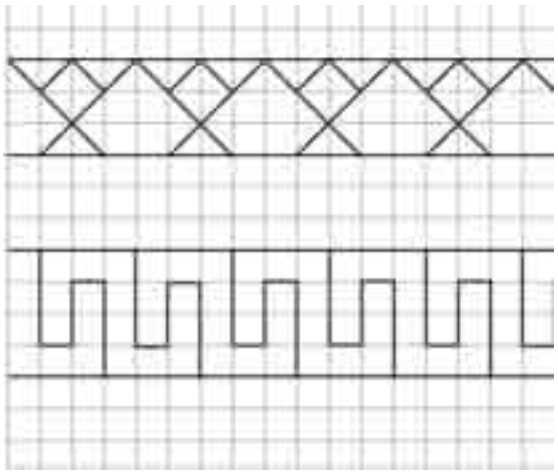
c) Determina el centro y amplitud del giro que transforma *F''* en *F*.



55. Las cenefas son dibujos de adorno que se pone a lo largo de los muros, suelos y techos y suelen consistir en elementos repetidos de un mismo adorno. Cuando el motivo repetido es una forma geométrica se les suele llamar grecas ya que fueron muy utilizadas por los griegos y romanos.

Copia y dibuja en tu cuaderno estas grecas por traslaciones sucesivas del motivo que le sirve de base.





Tema 8

El Teorema de Tales. Figuras semejantes

▸ Programación de aula

Objetivos

- Definir la proporcionalidad entre segmentos.
- Conocer el Teorema de Tales.
- Aplicar el Teorema de Tales en la semejanza de triángulos.
- Dividir un segmento en partes iguales.
- Construir un cuarto y un tercero proporcional.
- Definir la semejanza de polígonos y la razón de sus áreas.
- Definir la escala de medida en un plano, mapa o maqueta.

Criterios de evaluación

- Usar y aplicar el Teorema de Tales.
- Considerar la proporcionalidad entre segmentos.
- Dividir un segmento.
- Calcular el cuarto y tercero proporcional.
- Considerar figuras semejantes.
- Calcular la razón entre las áreas de polígonos semejantes.
- Usar y calcular la escala en mapas, planos o maquetas.

Contenidos

- **Conceptos** ("saber")
  - Segmentos proporcionales.
  - Teorema de Tales.
  - Aplicaciones del Teorema: semejanza de triángulos
  - División de un segmento en partes iguales.
  - Cálculo de un cuarto proporcional.
  - Polígonos semejantes. Razón de sus áreas.
  - Escalas y maquetas.
- **Procedimientos** ("Saber hacer")
  - Utilización del Teorema de Tales para obtener o comprobar relaciones métricas entre figuras.
  - Identificación de problemas geométricos diferenciando los elementos conocidos de los que pretenden conocer los relevantes de los irrelevantes.
  - Utilización de métodos inductivos para la obtención de propiedades geométricas de figuras y relaciones entre ellas.
  - Utilización de la composición y desarrollo de figuras y configuraciones geométricas para analizar u obtener otras.
- **Actitudes** ("Saber ser")
  - Reconocimiento y valoración de la medida como elemento de relación entre diferentes conceptos y métodos matemáticos.
  - Cuidado y precisión en el uso de diferentes instrumentos de medida y en la realización de mediciones.
  - Sentido crítico ante las representaciones a escala utilizadas para transmitir mensajes de diferente naturaleza.
  - Flexibilidad para enfrentarse a problemas geométricos desde distintos puntos de vista.

▸ Programación por competencias

COMPETENCIA MATEMÁTICA

PENSAMIENTO Y RAZONAMIENTO

Descriptores

1. Utilizar el Teorema de Tales para obtener o comprobar relaciones métricas entre figuras.
2. Reconocer y valorar la medida como elemento de relación entre diferentes conceptos y métodos matemáticos.

Desempeño

1. Utiliza la terminología y notación adecuadas deducidas del Teorema de Tales.	- Obtiene relaciones métricas entre figuras. - Comprueba las relaciones métricas existentes entre figuras.	- **Ejemplo 1** (pág. 157) - **Ejercicios del tema** (pág. 156 a 166)
2. Reconoce el hecho de la medición como elemento de relación entre diferentes figuras.	- Reconoce la medida como elemento de relación entre figuras. - Valora una medición.	

CONSTRUCCIÓN DE MODELOS

Descriptores

1.Traducir e interpretar el Teorema de Tales en términos del mundo real.

Desempeño

1. Modeliza distintas situaciones aplicando el Teorema de Tales.	- Define los elementos de aplicación del Teorema de Tales.	- **Introducción** (pág. 154) - **Ejemplo 1** (pág. 157) - **Ejercicios 1 y 9 a 38** (pág. 157 y 164 a 166)
2. Usa con precisión diferentes instrumentos de medida para la realización de mediciones precisas.	- Opera con los elementos que intervienen en el Teorema de Tales. - Interpreta las conclusiones obtenidas.	- **Ejemplo y ejercicios del tema** (pág. 156 a 166)

ARGUMENTAR MATEMÁTICAMENTE

Descriptores

1. Utilizando métodos inductivos para la obtención de propiedades geométricas de figuras y relaciones entre ellas.

Desempeño

1. Deduce ciertas propiedades por deducción.	- Divide un segmento en partes iguales. - Construye un segmento cuarto y tercero proporcional.	- **Ejemplos y ejercicios del tema** (pág. 134 a 152)
2. Deduce las características reales del elemento reproducido en un plano o un mapa.	- Lee e interpreta un plano, un mapa o una maqueta.	- **Ejercicios 8, 21 y 36** (pág. 161, 165 y 166)

PLANTEAR Y RESOLVER PROBLEMAS MATEMÁTICOS			
Descriptores			
1. Resolver problemas de proporcionalidad entre segmentos y de semejanza entre figuras geométricas. 2. Identificar problemas geométricos diferenciando los elementos conocidos de los que pretenden conocer y los relevantes de los irrelevantes.			
Desempeño			
1. Plantea una situación concreta en la que interviene la proporcionalidad entre segmentos y de semejanza entre figuras geométricas.	- Distingue entre proporcionalidad y semejanza. - Distingue entre razón de semejanza y razón entre las áreas de polígonos semejantes.	- **Ejercicios del tema** (pág. 156 a 166)	
2. Resuelve la cuestión planteada.	- Obtiene la solución numérica. - Analiza la solución y obtiene conclusiones.		

COMPETENCIA LINGÜÍSTICA

COMPETENCIA LINGÜÍSTICA			
Descriptores			
1. Comprender el enunciado de un problema geométrico en el que intervienen la semejanza entre figuras. 2. Aportar vocabulario específico relacionado con la semejanza entre figuras. 3. Describir verbalmente los problemas de semejanza entre figuras y el proceso seguido en su resolución.			
Desempeño			
1. Comprende lo que lee.	- Identifica la pregunta que se le hace. - Identifica los elementos de cálculo geométrico que intervienen.	- **Ejemplo y ejercicios del tema** (pág. 156 a 166)	
2. Discrimina e interpreta los elementos geométricos que le da el enunciado de un problema como información.	- Diferencia los distintos elementos geométricos.		
3. Se expresa por escrito de manera adecuada y correcta, con claridad y coherencia, utilizando un lenguaje preciso, para la descripción de los criterios utilizados en la solución de un problema geométrico.	- Presenta el texto de la solución del problema de forma adecuada y correcta. - Selecciona los aspectos relevantes de la solución. - Es capaz de traducir al lenguaje natural el lenguaje formal de la Geometría.		

COMPETENCIA EN CONOCIMIENTO E INTERACCION CON EL MEDIO FISICO

COMPETENCIA EN CONOCIMIENTO E INTERACCION CON EL MEDIO FÍSICO			
Descriptores			
1.Constatar la existencia de semejanza en figuras del medio físico. 2. Aplicar las propiedades de la semejanza entre figuras para resolver situaciones cotidianas de la vida y del entorno.			
Desempeño			
1. Advierte en medio físico la existencia de figuras semejantes.	- Sintetiza la información percibida del entorno físico. - Relaciona la información recibida con los conceptos geométricos estudiados.	- **Introducción** (pág. 154) - **Ejercicios 8, 9, 21, 33 y 36** (pág. 161 y 164 a 166)	
2. Utiliza la Geometría para resolver situaciones prácticas que se plantean en el medio y espacio físicos.	- Obtiene conclusiones del entorno físico observando la existencia de semejanzas. - Decide opciones de actuación en función de las conclusiones obtenidas.		

COMPETENCIA APRENDER A APRENDER

COMPETENCIA APRENDER A APRENDER

Descriptores

1. Confiar en las propias capacidades para percibir la semejanza y resolver con ella problemas geométricos.
2. Tener curiosidad e interés por investigar sobre formas, configuraciones y relaciones geométricas.

Desempeño

1. Desarrolla habilidades para la comprensión de situaciones en las que existe semejanzas entre elementos y figuras.	- Lee los enunciados de los ejercicios con la intención de comprender, relacionar y sintetizar contenidos. - Maneja adecuadamente recursos y técnicas de aprendizaje individual.	- **Ejemplos y ejercicios del tema** (pág. 156 a 166)
2. Desarrolla la curiosidad por las formas, configuraciones y relaciones geométricas.	- Plantea sugerencias de ampliación a los resultados obtenidos tras el análisis de la semejanza o diferencia entre distintas figuras y cuerpos.	

COMPETENCIA CULTURAL Y ARTÍSTICA

COMPETENCIA CULTURAL Y ARTÍSTICA

Descriptores

1. Conocer aportaciones de algunos matemáticos a la Geometría.
2. Representar gráficamente y en escala figuras, mapas o planos.

Desempeño

1. Conoce algún hito de la aplicación de la semejanza de figuras en la historia de la Geometría.	- Destaca la existencia de algún matemático de la historia de la Geometría.	- **Introducción** (pág. 154)
2. Representa gráficamente y en escala figuras, mapas o planos.	- Diseña esquemáticamente un plano. - Interpreta un mapa. - Utiliza el dibujo lineal en la confección de un plano.	- **Ejercicios 8, 9, 21, 33 y 36** (pág. 161 y 164 a 166)

COMPETENCIA AUTONOMÍA E INICIATIVA PERSONAL

COMPETENCIA AUTONOMÍA E INICIATIVA PERSONAL

Descriptores

1. Buscar soluciones a los problemas geométricos y mejorar las ya encontradas.
2. Tener flexibilidad para enfrentarse a situaciones geométricas desde distintos puntos de vista.
3. Tener sentido crítico ante las representaciones a escala.

Desempeño

1. Idea y planifica el desarrollo de la solución para una situación geométrica concreta o mejora una solución preexistente.	- Elige la opción adecuada para la resolución de los ejercicios. - Mantiene la opción hasta llegar a la conclusión final.	- **Ejemplos y ejercicios del tema** (pág. 156 a 166)
2. Evalúa la solución obtenida.	- Valora el resultado y lo pone en relación con el enunciado del problema resuelto. - Reflexiona sobre si el trabajo efectuado ha sido suficiente para el objetivo propuesto.	
3. Toma decisiones en función de la solución geométrica adoptada.	- Decide en función del resultado. - Acepta el posible error de una decisión cuando la solución no es la idónea.	

▶ Pág. 154 - 155. Los números enteros

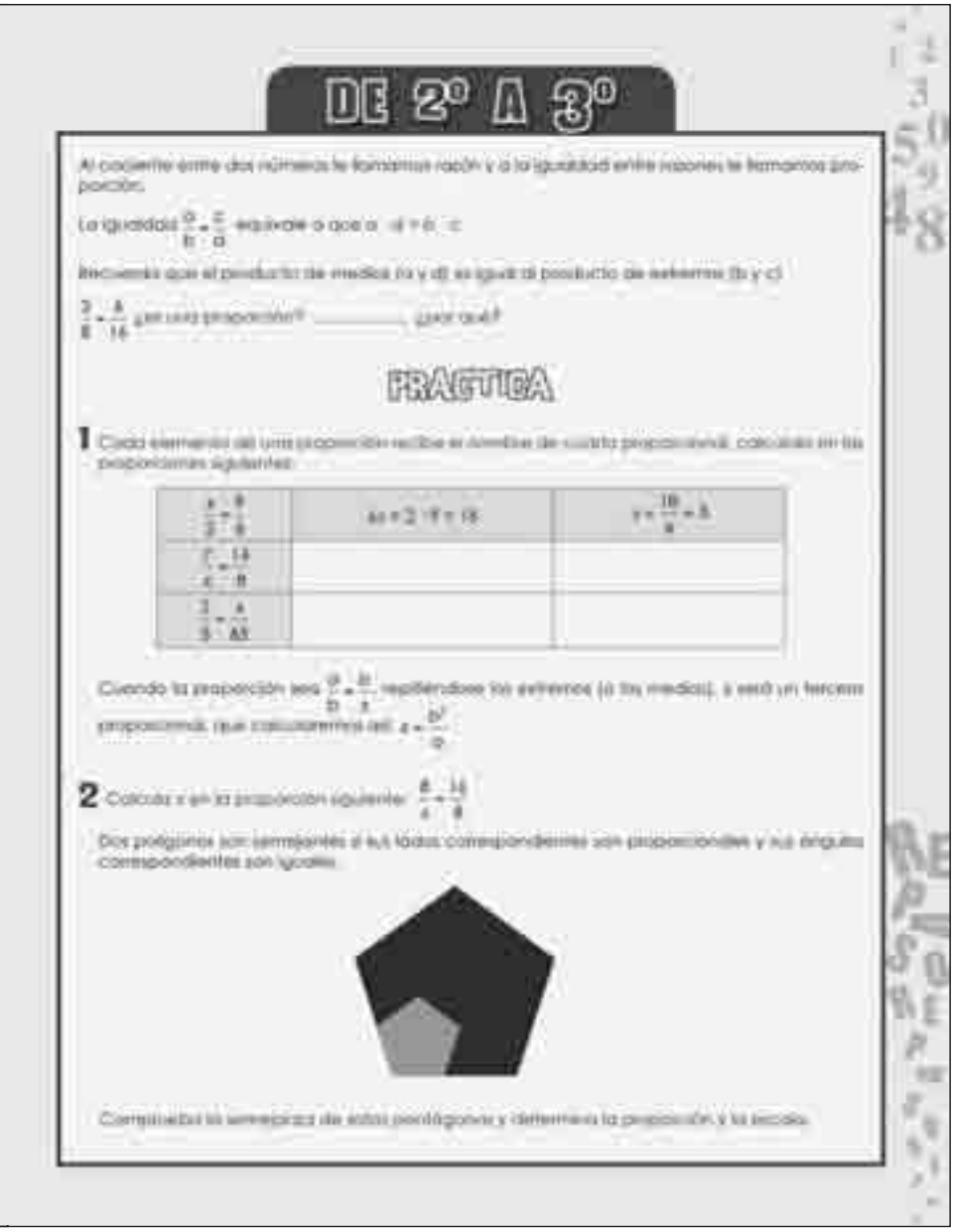


SOLUCIONARIO

$\frac{3}{8} = \frac{6}{16}$ **¿es una proporción?** Sí **¿por qué?** Porque $3 \times 16 = 8 \times 6$

Cada elemento de una proporción recibe el nombre de cuarto proporcional, calcúlalo en las proporciones siguientes:

$\frac{x}{2} = \frac{9}{6}$	$6x = 2 \cdot 9 = 18$	$x = \frac{18}{6} = 3$
$\frac{7}{x} = \frac{14}{8}$	$14x = 7 \times 8 = 56$	$x = \frac{56}{14} = 4$
$\frac{2}{5} = \frac{x}{65}$	$5x = 2 \times 65 = 130$	$x = \frac{130}{5} = 26$



DE 2º A 3º

Al cociente entre dos números le llamamos razón y a la igualdad entre razones le llamamos proporción.

La igualdad $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ equivale a que $a \cdot d = b \cdot c$

Recuerda que el producto de medios (b y d) es igual al producto de extremos (a y c)

$\frac{3}{8} = \frac{6}{16}$ ¿es una proporción? _____ ¿por qué?

PRÁCTICA

1 Cada elemento de una proporción recibe el nombre de cuarto proporcional. calcúlalo en las proporciones siguientes:

$\frac{x}{3} = \frac{8}{6}$	$4x = 2 \cdot 8 = 16$	$x = \frac{10}{4} = 5$
$\frac{7}{x} = \frac{14}{8}$		
$\frac{3}{5} = \frac{x}{45}$		

Cuando la proporción sea $\frac{a}{b} = \frac{b}{x}$ repitiéndose los extremos (o los medios), a este un tercero proporcional, que calculamos así: $x = \frac{b^2}{a}$

2 Calcula x en la proporción siguiente: $\frac{8}{x} = \frac{16}{8}$

Dos polígonos son semejantes si sus lados correspondientes son proporcionales y sus ángulos correspondientes son iguales.

Comprueba la semejanza de estos pentágonos y determina la proporción y la escala.

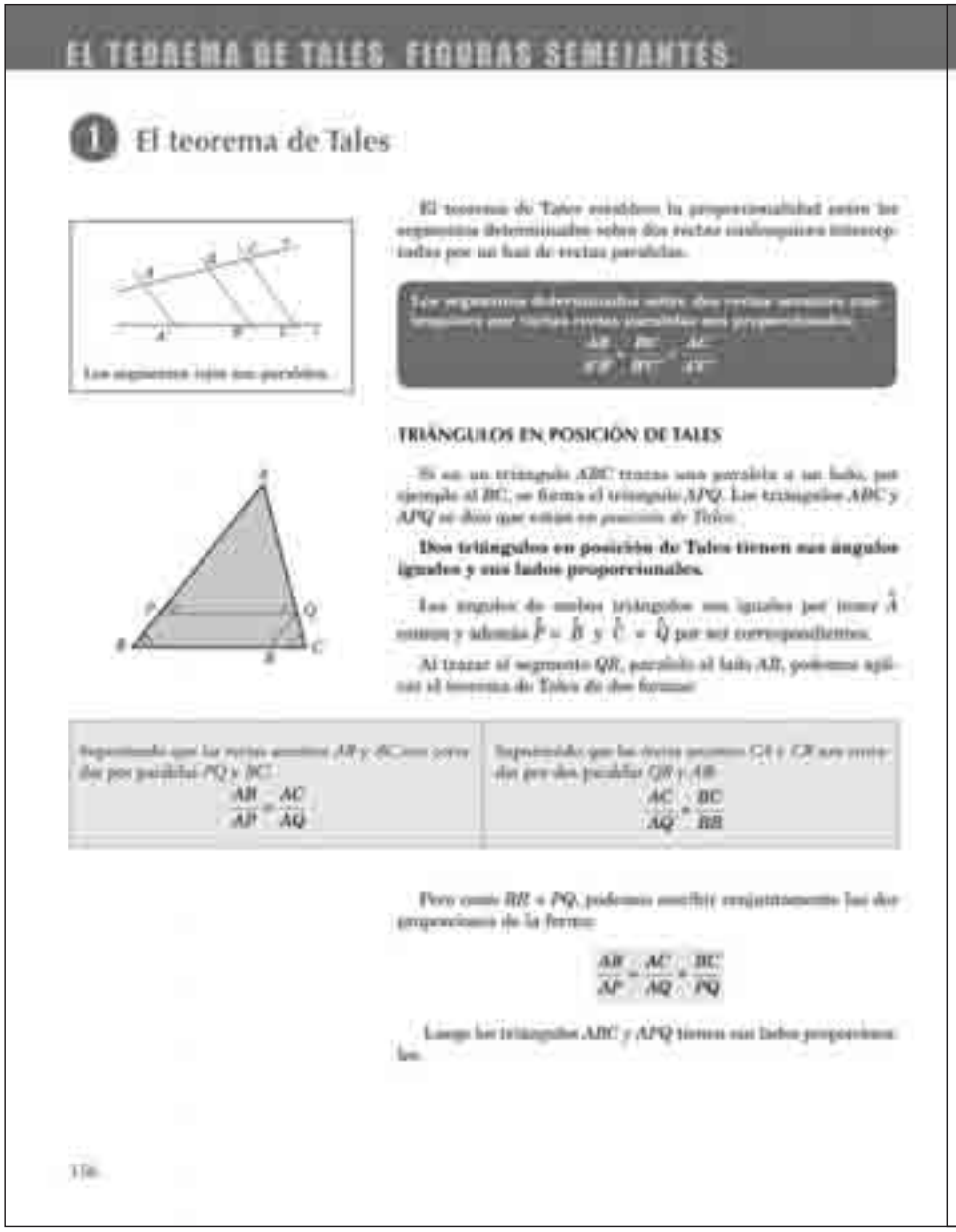
Calcula x en la proporción siguiente: $\frac{8}{x} = \frac{16}{8}$

$16x = 82 \Rightarrow x = \frac{64}{16} = 4$

Comprueba la semejanza de estos pentágonos y determina la proporción y la escala.

1/2 o 1 : 05

▶ Pág. 156. 1 El Teorema de Tales



EL TEOREMA DE TALES. FIGURAS SEMEJANTES

1 El teorema de Tales

El teorema de Tales establece la proporcionalidad entre los segmentos determinados sobre dos rectas cualesquiera intersectadas por un haz de rectas paralelas.

Los segmentos determinados sobre dos rectas secantes por tres o más rectas paralelas son proporcionales.

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$$

Los segmentos rojos son paralelos.

TRIÁNGULOS EN POSICIÓN DE TALES

Si en un triángulo ABC trazas una paralela a un lado, por ejemplo al BC, se forma el triángulo APQ. Los triángulos ABC y APQ se dice que están en posición de Tales.

Dos triángulos en posición de Tales tienen sus ángulos iguales y sus lados proporcionales.

Los ángulos de ambos triángulos son iguales por tener $\hat{A}$ común y además $\hat{P} = \hat{B}$ y $\hat{C} = \hat{Q}$ por ser correspondientes.

Al trazar el segmento QR, paralelo al lado AB, podemos aplicar el teorema de Tales de dos formas:

Suponiendo que las rectas secantes AB y AC son cortadas por paralelas PQ y BC:

$$\frac{AB}{AP} = \frac{AC}{AQ}$$

Suponiendo que las rectas secantes CA y CB son cortadas por dos paralelas QR y AB:

$$\frac{AC}{AQ} = \frac{BC}{BR}$$

Pero como $BR = PQ$, podemos escribir conjuntamente las dos proporciones de la forma:

$$\frac{AB}{AP} = \frac{AC}{AQ} = \frac{BC}{PQ}$$

Luego los triángulos ABC y APQ tienen sus lados proporcionales.

11a

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS

Se puede comenzar por dos rectas *r* y *s* paralelas.

El alumno no está demasiado acostumbrado a demostraciones geométricas.

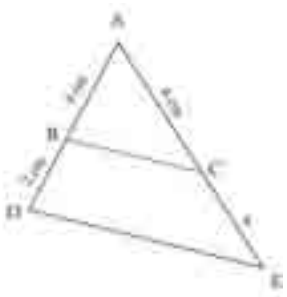
Sugerir la visita a:

http://www.youtube.com/watch?v=czzj2C4wdxY

SOLUCIONARIO

1. Halla *x* en cada una de las siguientes figuras (en todas es *PQ* paralelo a *BC*):

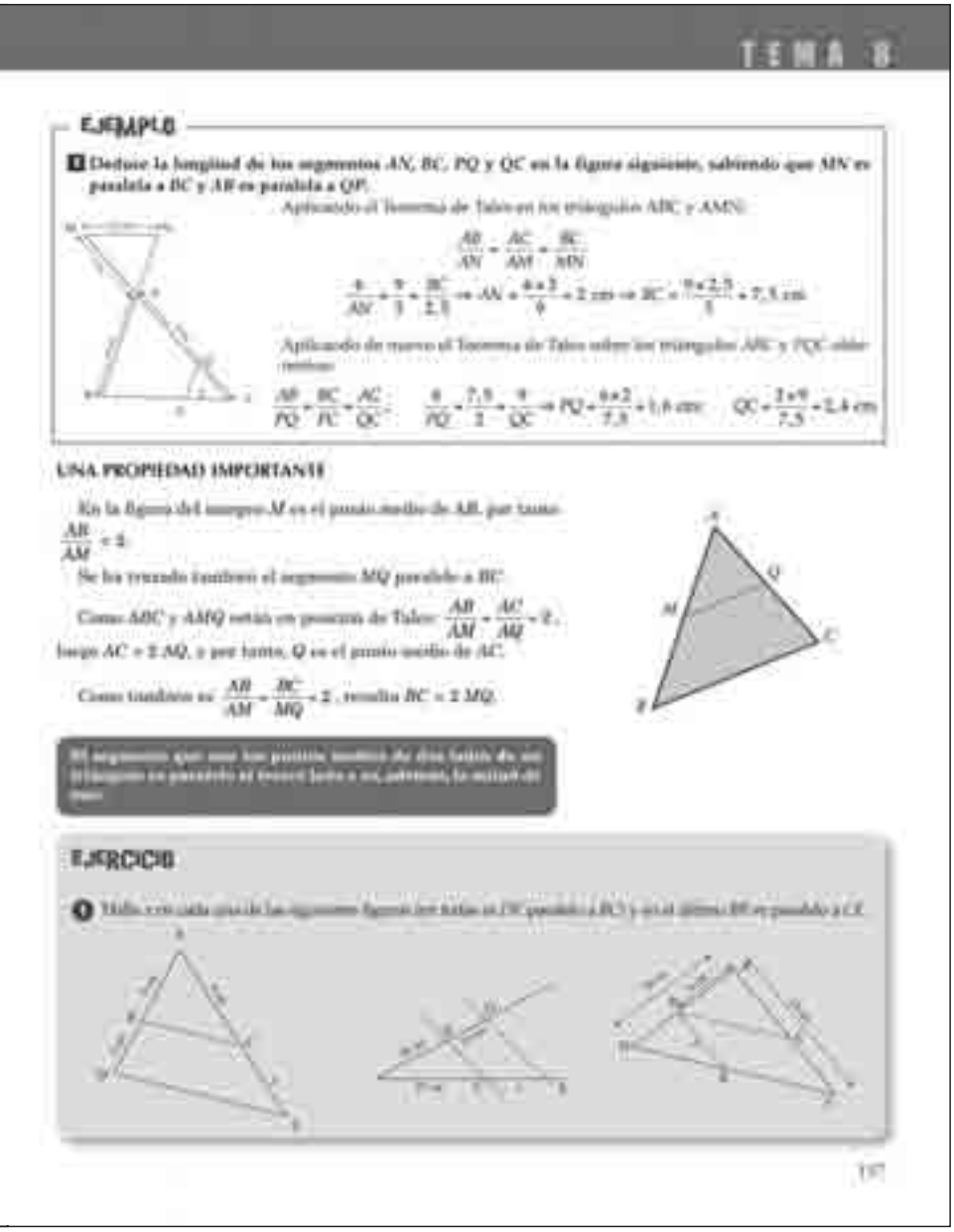
a)



$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} \Rightarrow \frac{4}{6} = \frac{6}{x+6} \Rightarrow 4(x+6) = 36 \Rightarrow 4x = 12 \Rightarrow x = 3$$

De otra forma

▶ Pág. 157.



TEMA 8

EJEMPLO

1 Dedu... longitud de los segmentos *AN*, *BC*, *PQ* y *QC* en la figura siguiente, sabiendo que *MN* es paralela a *BC* y *AB* es paralela a *QP*.

Aplicando el Teorema de Tales en los triángulos *ABC* y *AMN*:

$$\frac{AB}{AN} = \frac{AC}{AM} = \frac{BC}{MN}$$

$$\frac{6}{AN} = \frac{9}{3} = \frac{BC}{2,5} \Rightarrow AN = \frac{6 \cdot 3}{9} = 2 \text{ cm} \Rightarrow BC = \frac{9 \cdot 2,5}{3} = 7,5 \text{ cm}$$

Aplicando de nuevo el Teorema de Tales sobre los triángulos *ABC* y *PQC*, obtenemos:

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{PC} = \frac{AC}{QC}: \quad \frac{6}{PQ} = \frac{7,5}{2} = \frac{9}{QC} \Rightarrow PQ = \frac{6 \cdot 2}{7,5} = 1,6 \text{ cm} \quad QC = \frac{2 \cdot 9}{7,5} = 2,4 \text{ cm}$$

UNA PROPIEDAD IMPORTANTE

En la figura del margen *M* es el punto medio de *AB*, por tanto $\frac{AB}{AM} = 2$.

Se ha trazado también el segmento *MQ* paralelo a *BC*.

Como *ABC* y *AMQ* están en posición de Tales: $\frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AQ} = 2$, luego $AC = 2\,AQ$, y por tanto, *Q* es el punto medio de *AC*.

Como también es $\frac{AB}{AM} = \frac{BC}{MQ} = 2$, resulta $BC = 2\,MQ$.

El segmento que une los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralelo al tercer lado e, [illegible]

EJERCICIO

1 Halla x en cada una de las siguientes figuras (en todas el [illegible])

157

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS

Nunca está de más realizar mediciones sobre las figuras para verificar los resultados.

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CE} \Rightarrow \frac{4}{6} = \frac{2}{x} \Rightarrow 4x = 12 \Rightarrow x = 3$$

b)



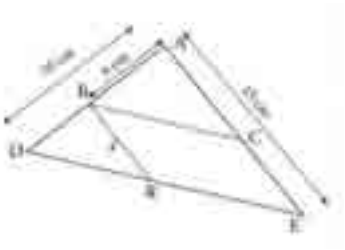
$$\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE} \Rightarrow \frac{18}{27} = \frac{28}{x+27} \Rightarrow 18(x+27) = 756 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 18x = 270 \Rightarrow x = 15$$

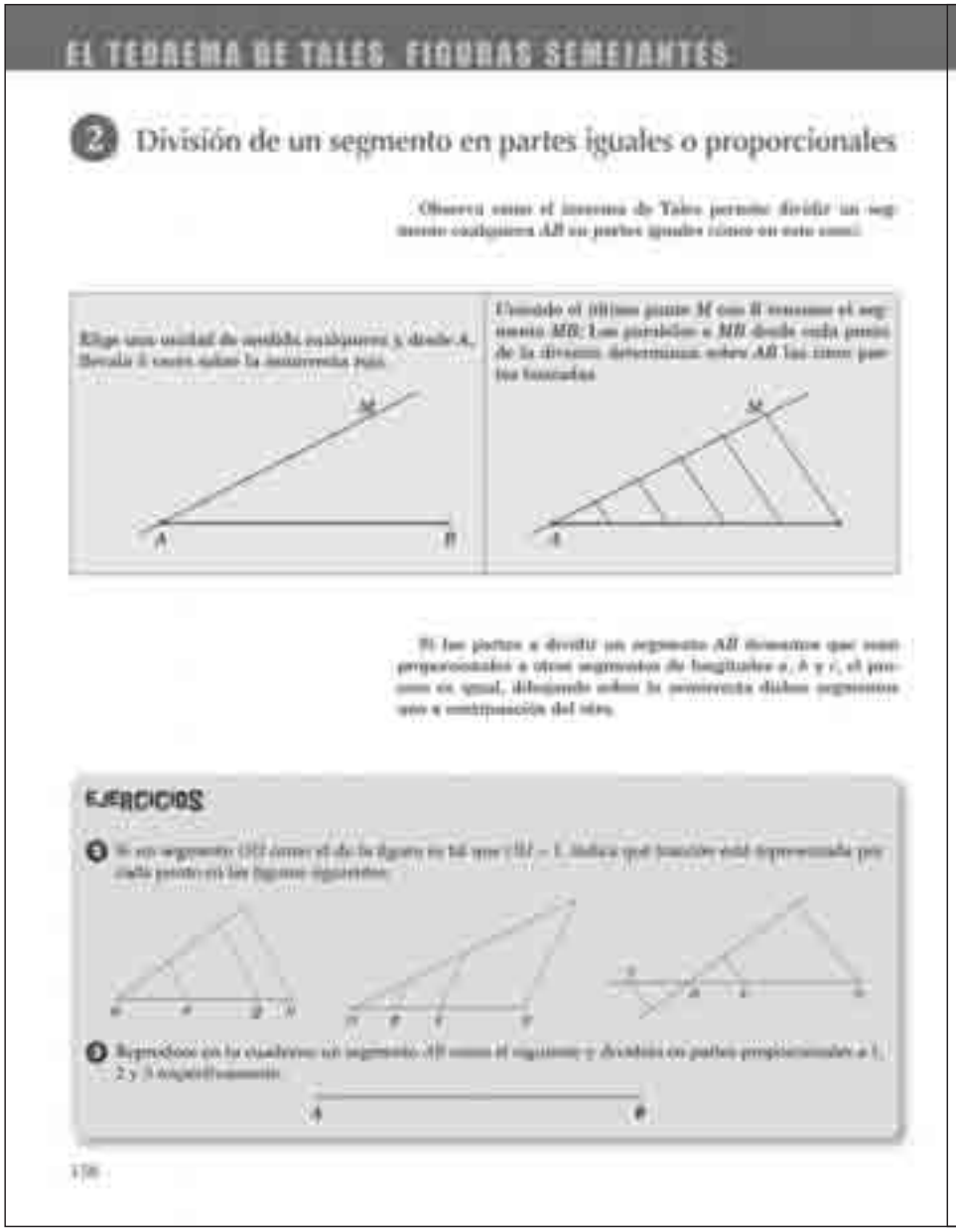
De otra forma

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CE} \Rightarrow \frac{18}{27} = \frac{10}{x} \Rightarrow 18x = 270 \Rightarrow x = 15$$

c)



▶ Pág. 158. 2 División de un segmento en partes iguales o proporcionales



EL TEOREMA DE TALES. FIGURAS SEMEJANTES

2. División de un segmento en partes iguales o proporcionales

Observa como el teorema de Tales permite dividir un segmento cualquiera AB en partes iguales (cinco en este caso).

Elige una unidad de medida cualquiera y divide A, llevala 5 veces sobre la semirrecta r_{AM}.

Llevando el último punto M con B trazamos el segmento MB. Los paralelos a MB desde cada punto de la división determinan sobre AB las cinco partes buscadas.

Si las partes a dividir un segmento AB deseamos que sean proporcionales a otros segmentos de longitudes a, b y c, el procedimiento es igual, dibujando sobre la semirrecta dichos segmentos uno a continuación del otro.

EJERCICIOS

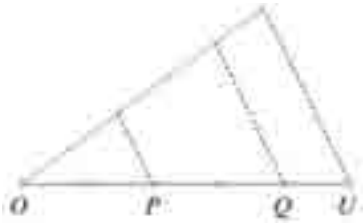
5 Si un segmento OU como el de la figura es tal que $OU = 1$, indica qué fracción está representada por cada punto en las figuras siguientes:

6 Reproduce en tu cuaderno un segmento AB como el siguiente y divídelo en partes proporcionales a 1, 2 y 3 respectivamente.

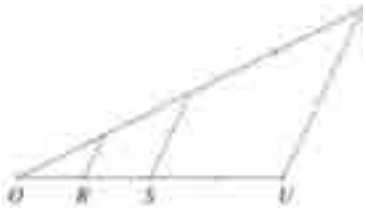
176

SOLUCIONARIO

2. Si un segmento *OU* como el de la figura es tal que *OU* = 1, indica qué fracción está representada por cada punto en las figuras siguientes:



$OP = \frac{2}{5}$; $OQ = \frac{4}{5}$;

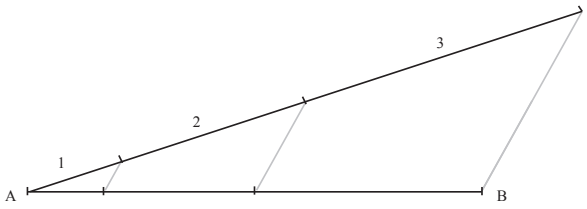


$OR = \frac{1}{4}$; $OS = \frac{1}{2}$

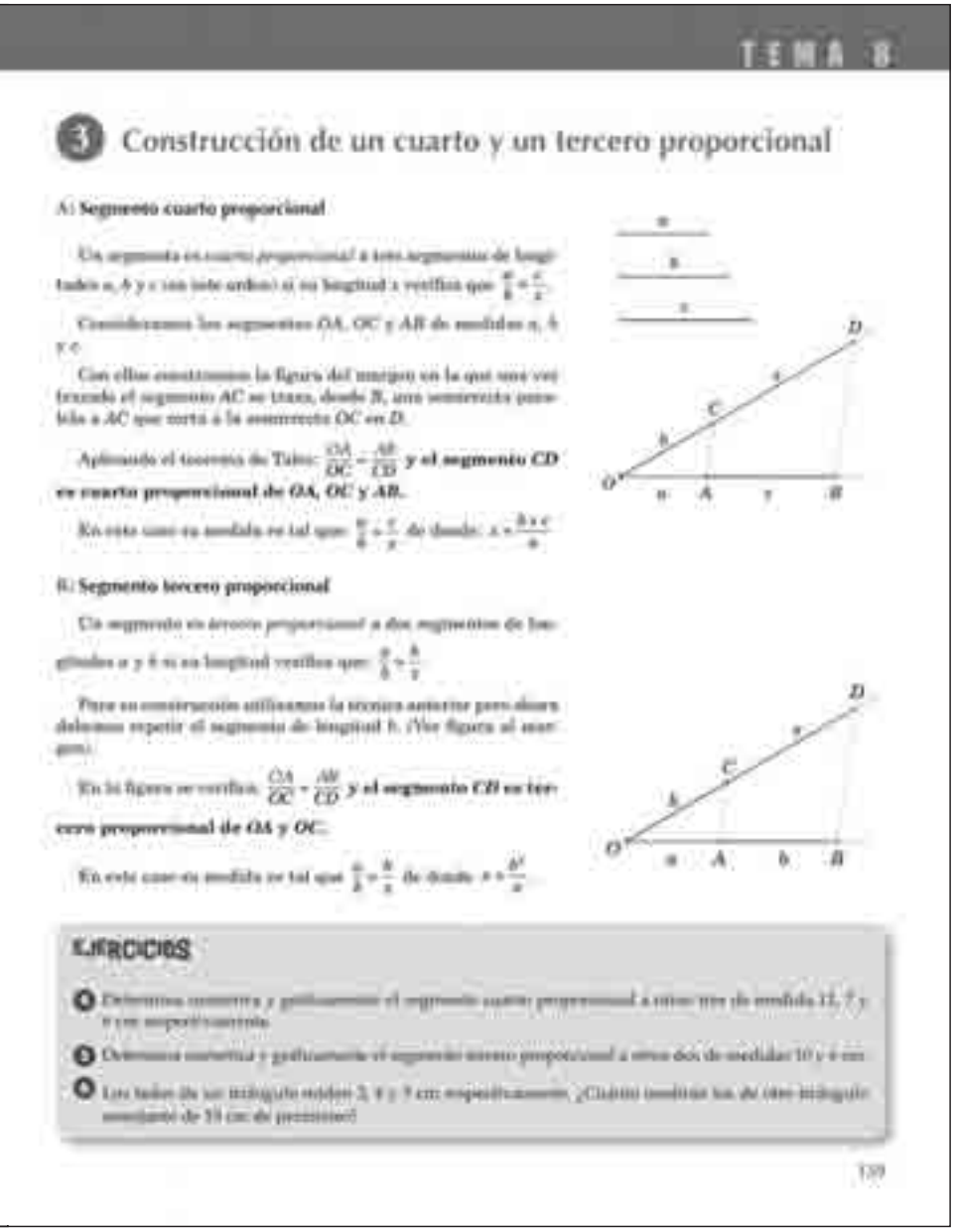


$OV = \frac{1}{3}$; $OT = -\frac{1}{3}$

3. Reproduce en tu cuaderno un segmento AB como el siguiente y divídelo en partes proporcionales a 1, 2 y 3 respectivamente.



▶ Pág. 159. 3 Construcción de un cuarto y un tercero proporcional



TEMA 8

3 Construcción de un cuarto y un tercero proporcional

A) Segmento cuarto proporcional

Un segmento es cuarto proporcional a tres segmentos de longitudes a, b y c (en este orden) si su longitud x verifica que $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$.

Consideramos los segmentos OA, OC y AB de medidas a, b y c.

Con ellos construimos la figura del margen en la que una vez trazado el segmento AC se traza, desde B, una semirrecta paralela a AC que corta a la semirrecta OC en D.

Aplicando el teorema de Tales: $\frac{OA}{OC} = \frac{AB}{CD}$ **y el segmento CD es cuarto proporcional de OA, OC y AB.**

En este caso su medida es tal que: $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$ de donde: $x = \frac{b \cdot c}{a}$

B) Segmento tercero proporcional

Un segmento es tercero proporcional a dos segmentos de longitudes a y b si su longitud verifica que: $\frac{a}{b} = \frac{b}{x}$

Para su construcción utilizamos la técnica anterior pero ahora debemos repetir el segmento de longitud b. (Ver figura al margen).

En la figura se verifica: $\frac{OA}{OC} = \frac{AB}{CD}$ **y el segmento CD es tercero proporcional de OA y OC.**

En este caso su medida es tal que $\frac{a}{b} = \frac{b}{x}$ de donde $x = \frac{b^2}{a}$

EJERCICIOS

- Determina numérica y gráficamente el segmento cuarto proporcional a otros tres de medida 12, 7 y 6 cm respectivamente.
- Determina numérica y gráficamente el segmento tercero proporcional a otros dos de medidas 10 y 6 cm.
- Los lados de un triángulo miden 3, 4 y 5 cm respectivamente. ¿Cuánto medirán los de otro triángulo semejante de 18 cm de perímetro?

159

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS

Tanto en un caso como en otro es importante tener en cuenta el orden en el que vienen dados los segmentos.

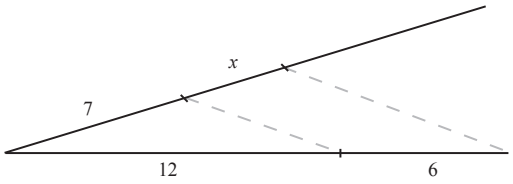
Evidenciar la igualdad entre los resultados geométricos con los posibles cálculos numéricos.

El tercero proporcional puede dar pie a representar segmentos de longitud irracional (ampliación).

SOLUCIONARIO

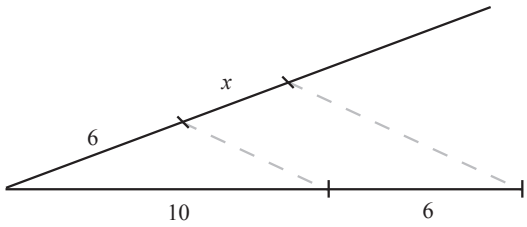
4. Determina numérica y gráficamente el segmento cuarto proporcional a otros tres de medida 12, 7 y 6 cm respectivamente.

$$\frac{12}{7} = \frac{6}{x} \Rightarrow 12x = 42 \Rightarrow x = \frac{7}{2} = 3,5$$



5. Determina numérica y gráficamente el segmento tercero proporcional a otros dos de medidas 10 y 6 cm.

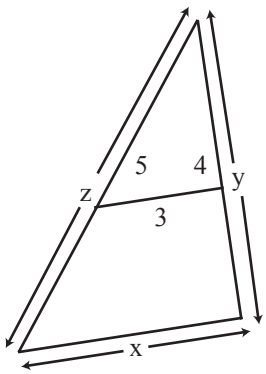
$$\frac{10}{6} = \frac{6}{x} \quad 10x = 36 \quad x = \frac{18}{5} = 3,6$$



6. Los lados de un triángulo miden 3, 4 y 5 cm respectivamente. ¿Cuánto medirán los de otro triángulo semejante de 18 cm de perímetro?

$$\frac{3}{x} = \frac{4}{y} = \frac{5}{z} = \frac{3+4+5}{x+y+z} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{3}{x} = \frac{2}{3} \Rightarrow x = \frac{9}{2} = 4,5 \\ \frac{4}{y} = \frac{2}{3} \Rightarrow y = 6 \\ \frac{5}{z} = \frac{2}{3} \Rightarrow z = \frac{15}{2} = 7,5 \end{cases}$$



▶ Pág. 160. 4 Figuras semejantes



EL TEOREMA DE TALES. FIGURAS SEMEJANTES

4 Figuras semejantes

Observa como en la figura del margen se ha construido un cuadrilátero $AEFG$ a partir del cuadrilátero $ABCD$.

Para ello se han prolongado los lados AB y AD, así como la diagonal AC; posteriormente se ha dibujado el punto E de forma que $AE = 2AB$ y desde él se han trazado los lados EF y FG, paralelos, respectivamente, a BC y CD.

Los triángulos AEF y ABC, así como AFG y ACD están en posición de Tales luego sus lados son proporcionales y como se ha construido de forma que $\frac{AE}{AB} = 2$, se dice que los cuadriláteros $ABCD$ y $AEFG$ son semejantes.

El cociente entre dos lados correspondientes se llama razón de semejanza. En este caso la razón de semejanza es 2.

[illegible]

RAZÓN ENTRE LAS ÁREAS DE POLÍGONOS SEMEJANTES

En la figura siguiente se ha construido el rectángulo $AB'C'D'$, que es semejante al $ABCD$ con razón de semejanza $k = 2$, es decir, cada lado es el triple de su correspondiente.

En la figura puedes comprobar que el área del rectángulo $AB'C'D'$ es 9 veces mayor que la del rectángulo $ABCD$. Es decir:

$$\frac{\text{Área } AB'C'D'}{\text{Área } ABCD} = 9 = k^2$$

A partir del triángulo ABC se ha construido otro, $AB'C'$, semejante de razón $k = 2$ y de área 4 veces la de ABC.

[illegible]

EJERCICIO

[illegible]

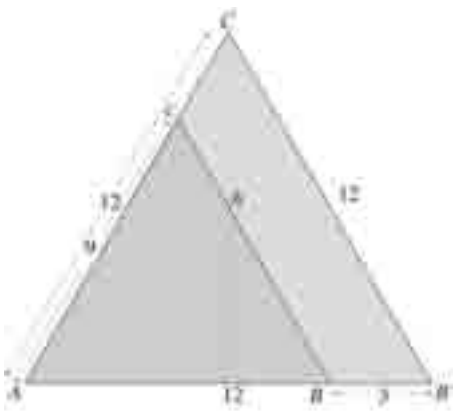
ORIENTACIONES DIDÁCTICAS

El objetivo es el reconocimiento de "figuras semejantes" a nivel elemental ("misma forma").

Revisión del concepto de proporcionalidad directa.

SOLUCIONARIO

7. Dibuja un triángulo equilátero de 12 cm de lado y construye sobre él un triángulo semejante cuyo lado sea los $\frac{3}{4}$ del lado. ¿Qué área tiene este triángulo?



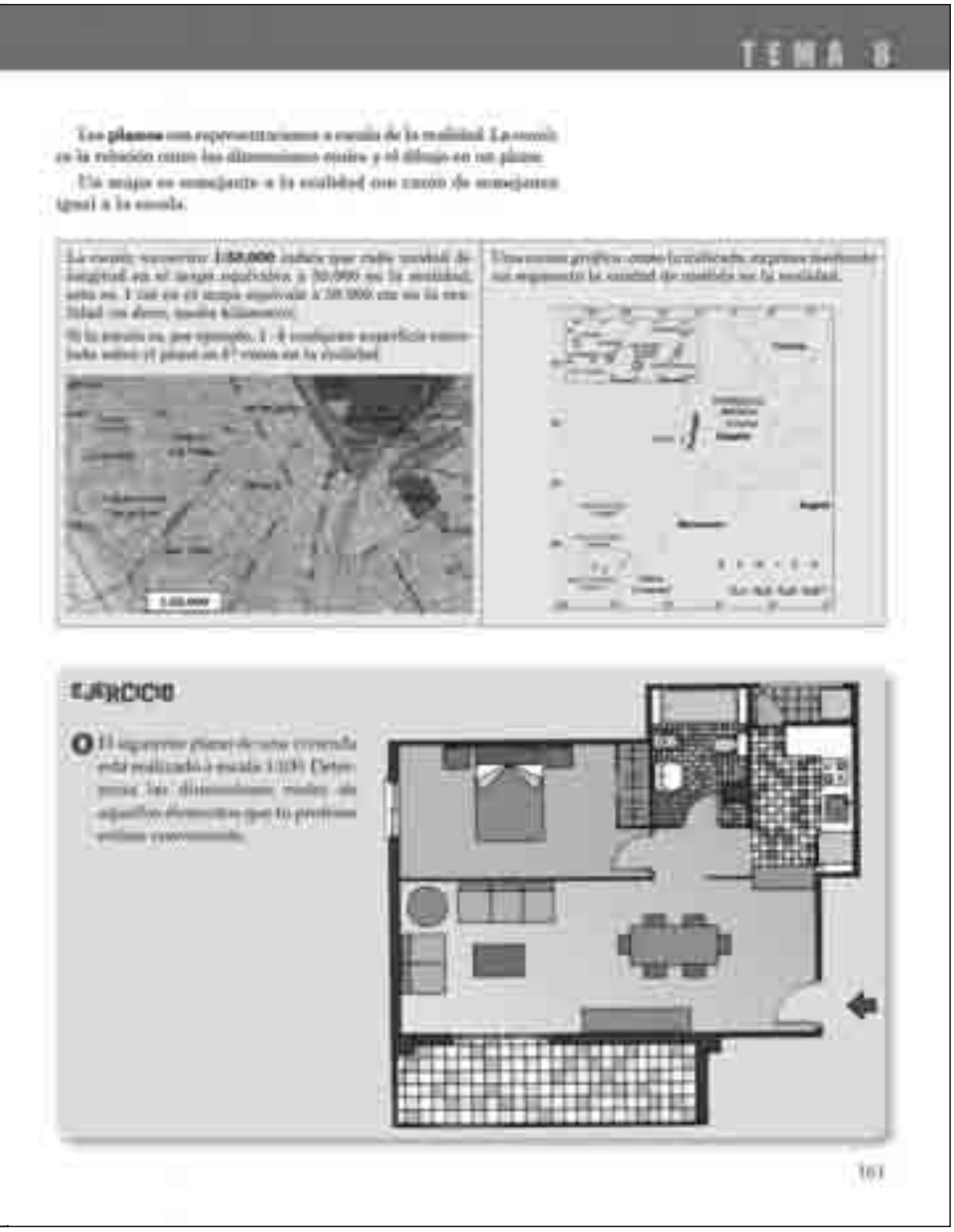
$$h = \sqrt{12^2 - 6^2} = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}$$

El área del triángulo grande ABC es: $S_{ABC} = \frac{12 \times 6\sqrt{3}}{2} = 36\sqrt{3}\ \text{cm}^2$

El área del triángulo $AB'C'$ es $\left(\frac{3}{4}\right)^2$ del grande, es decir los $\frac{9}{16}$

$$S_{AB'C'} = \frac{9}{16} \cdot 36\sqrt{3} = \frac{324}{16}\sqrt{3} = \frac{81}{4}\sqrt{3}\ \text{cm}^2$$

▶ Pág. 161.


TEMA 8

Los **planos** son representaciones a escala de la realidad. La escala es la relación entre las dimensiones reales y el dibujo en un plano.

Un mapa es semejante a la realidad con razón de semejanza igual a la escala.

EJERCICIO

1 El siguiente plano de una vivienda está realizado a escala 1:100. Determina las dimensiones reales de aquellos elementos que tu profesor estime conveniente.

161

8. El siguiente plano de una vivienda está realizado a escala 1:100. Determina las dimensiones reales de aquellos elementos que tu profesor estime conveniente.



Por ejemplo:

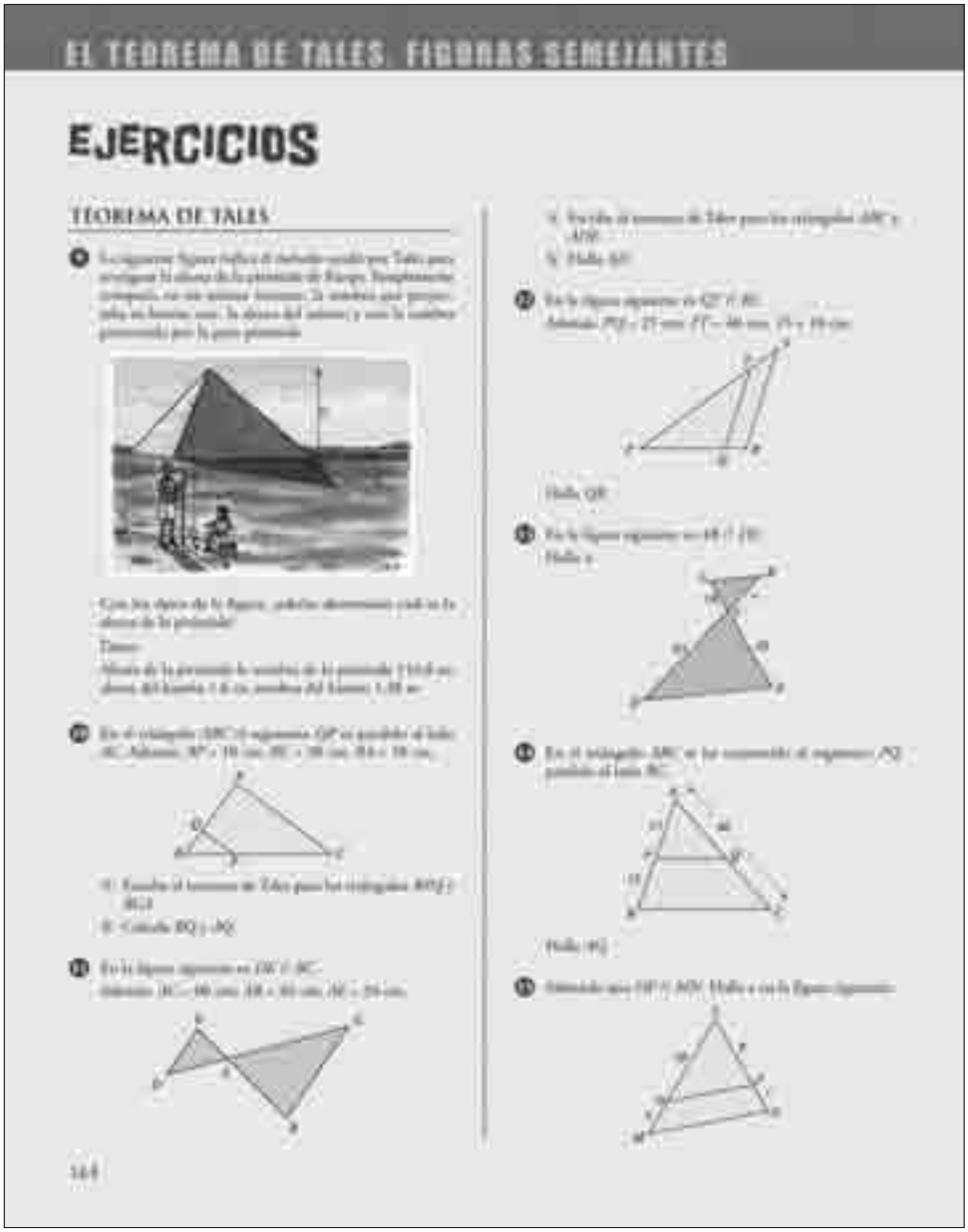
La superficie de la mesa del salón es 1,12 m^2.

La superficie tiene dimensiones 5,5 × 1,5 metros.

La superficie del salón es 19,88 m^2.

La bañera mide 1,40 por 0,60 m.

▶ Pág. 164. Ejercicios



EL TEOREMA DE TALES. FIGURAS SEMEJANTES

EJERCICIOS

TEOREMA DE TALES

SOLUCIONARIO

9. La siguiente figura indica el método usado por Tales para averiguar la altura de la pirámide de Keops. Simplemente comparó, en un mismo instante, la sombra que proyectaba su bastón con la altura del mismo y con la sombra proyectada por la gran pirámide.



Con los datos de la figura, ¿sabrías determinar cuál es la altura de la pirámide?

Datos.

Altura de la pirámide h; sombra de la pirámide 116,8 m; altura del bastón 1,6 m; sombra del bastón 1,28 m

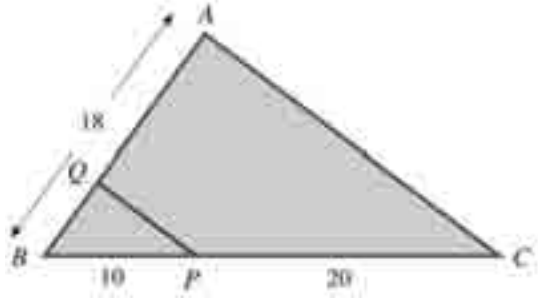
Una proporción posible es:

$$\frac{1,6}{1,28}=\frac{h}{116,8} \quad \text{de donde} \quad h=\frac{1,6\times 116,8}{1,28}=146\text{m}$$

10. En el triángulo *ABC* el segmento *QP* es paralelo al lado *AC*. Además: *BP* = 10 cm; *BC* = 30 cm; *BA* = 18 cm.

a) Escribe el teorema de Tales para los triángulos *BPQ* y *BCA*.

b) Calcula *BQ* y *AQ*.



a) $\dfrac{BC}{BP} = \dfrac{BA}{BQ} = \dfrac{AC}{QP}$

b) $\dfrac{BC}{BP} = \dfrac{BA}{BQ} \Rightarrow \dfrac{30}{10} = \dfrac{18}{BQ} \Rightarrow BQ = \dfrac{18 \times 10}{30} = 6 \text{ cm}$

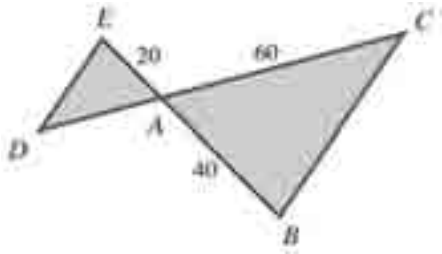
$\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{AQ}{CP} \Rightarrow \dfrac{18}{30} = \dfrac{AQ}{20} \Rightarrow AQ = \dfrac{18 \times 20}{30} = 12 \text{ cm}$

11. En la figura siguiente es *DE* // *BC*.

Además: *AC* = 60 cm; *AB* = 40 cm; *AE* = 20 cm.

a) Escribe el teorema de Tales para los triángulos *ABC* y *ADE*.

b) Halla *AD*.



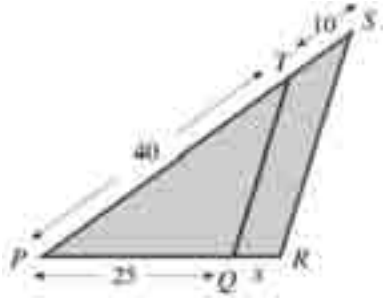
a) $\dfrac{AB}{AE} = \dfrac{AC}{AD}$

b) $\dfrac{40}{20} = \dfrac{60}{AD} \Rightarrow AD = \dfrac{60 \times 20}{40} = 30 \text{ cm}$

12. En la figura siguiente es *QT* // *RS*.

Además: *PQ* = 25 cm; *PT* = 40 cm; *TS* = 10 cm.

Halla *QR*.



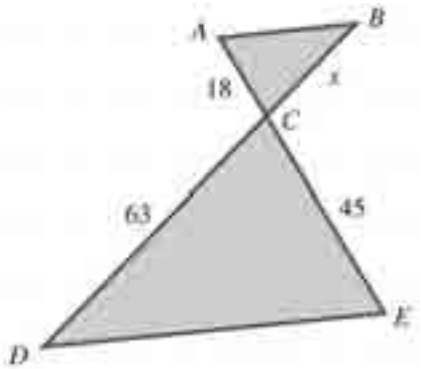
$\dfrac{PS}{PT} = \dfrac{PR}{PQ} \Rightarrow \dfrac{50}{40} = \dfrac{25 + x}{25}$

$40\,(25 + x) = 50 - 25 \Rightarrow 1000 + 40x = 1250 \Rightarrow 40x = 250$

$x = \dfrac{250}{40} = 6,25 \text{ cm}$

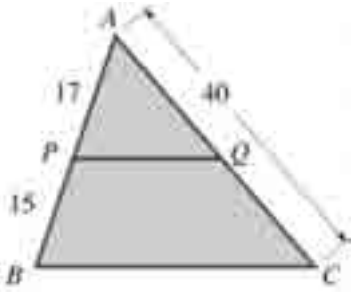
13. En la figura siguiente es *AB* // *DE*.

Halla *x*.



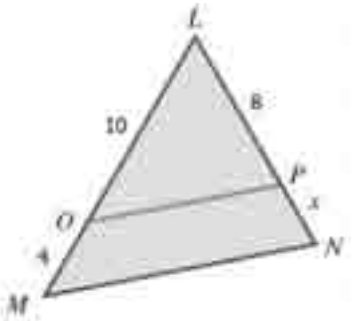
$\dfrac{CE}{CA} = \dfrac{CD}{CB} \Rightarrow \dfrac{45}{18} = \dfrac{63}{x} \Rightarrow x = \dfrac{18 \times 63}{45} = 25,2$

14. En el triángulo *ABC* se ha construido el segmento *PQ* paralelo allado *BC*. Halla *AQ*.



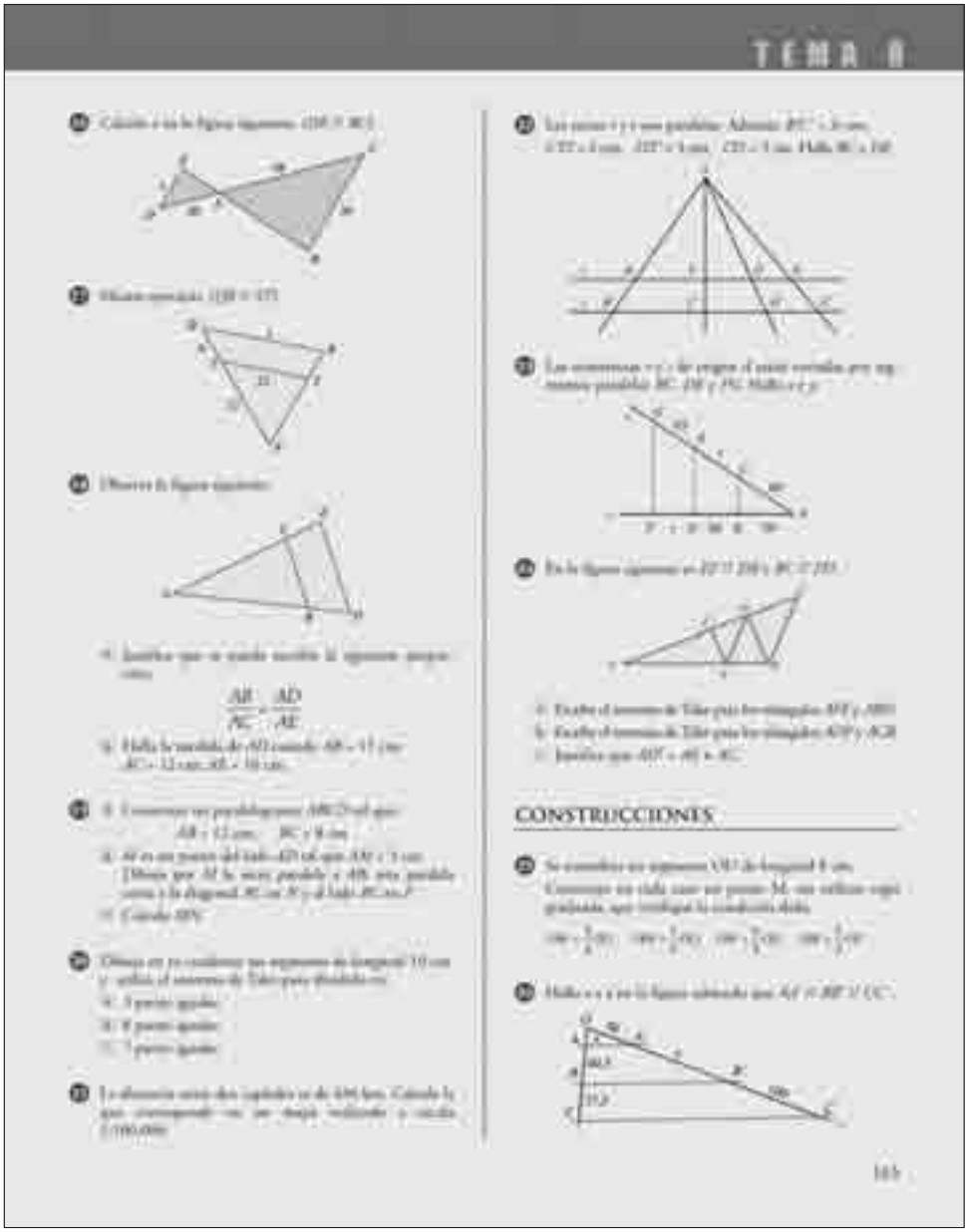
$\dfrac{AB}{AP} = \dfrac{AC}{AQ} \Rightarrow \dfrac{32}{17} = \dfrac{40}{AQ} \Rightarrow AQ = \dfrac{17 \times 40}{32} = 21,25$

15. Sabiendo que *OP* // *MN*. Halla *x* en la figura siguiente:



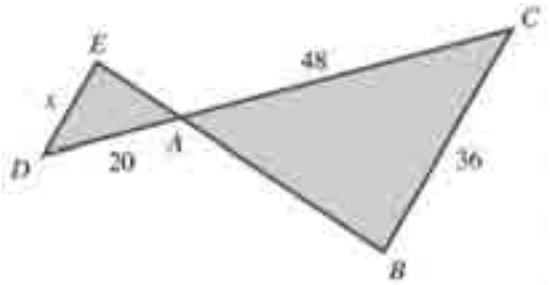
$\dfrac{LO}{LP} = \dfrac{OM}{PN} \Rightarrow \dfrac{10}{8} = \dfrac{4}{x} \Rightarrow x = \dfrac{4 \times 8}{10} = 3,2$

▶ Pág. 165. Ejercicios



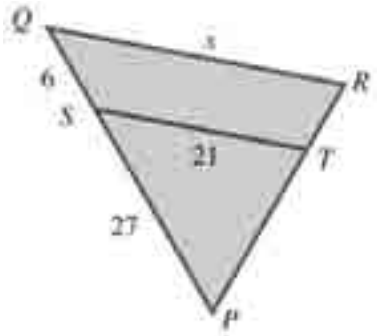
SOLUCIONARIO

16. Calcula *x* en la figura siguiente: (*DE* // *BC*).



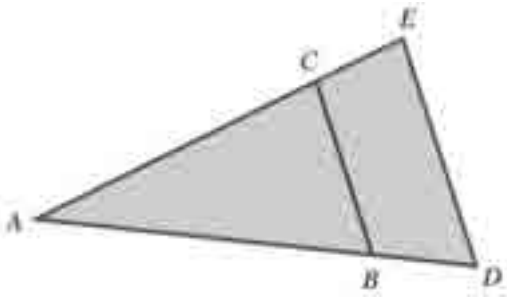
$$\frac{AC}{AD}=\frac{BC}{DE}\Rightarrow\frac{48}{20}=\frac{36}{x}\Rightarrow x=\frac{20\times 36}{48}=15$$

17. Mismo ejercicio. (*QR* // *ST*).



$$\frac{QR}{QP}=\frac{TS}{SP}\Rightarrow\frac{x}{33}=\frac{21}{27}\Rightarrow x=\frac{33\times 21}{27}=\frac{77}{3}$$

18. Observa la figura siguiente:



a) Justifica que se puede escribir la siguiente proporción: $\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE}$

b) Halla la medida de *AD* cuando *AB* = 15 cm; *AC* = 12 cm; *AE* = 16 cm.

a) Es una aplicación directa del Teorema de Tales.

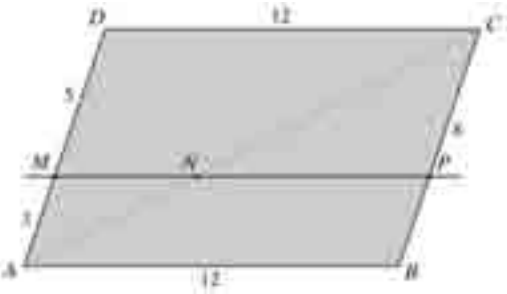
b) $\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE} \Rightarrow \frac{15}{12} = \frac{AD}{16} \Rightarrow AD = \frac{15 \times 16}{12} = 20 \text{ cm}$

19. a) Construye un paralelogramo *ABCD* tal que: *AB* = 12 cm; *BC* = 8 cm

***M* es un punto del lado *AD* tal que *AM* = 3 cm.**

b) Dibuja por *M* la recta paralela a *AB*; esta paralela corta a la diagonal *AC* en *N* y al lado *BC* en *P*.

c) Calcula *MN*.



Los triángulos *AMN* y *ACD* están en posición de Tales, luego:

$\frac{DC}{AD} = \frac{MN}{AM} \Rightarrow \frac{12}{8} = \frac{MN}{3} \Rightarrow MN = \frac{3 \times 12}{8} = \frac{36}{8} = \frac{9}{2}$ cm

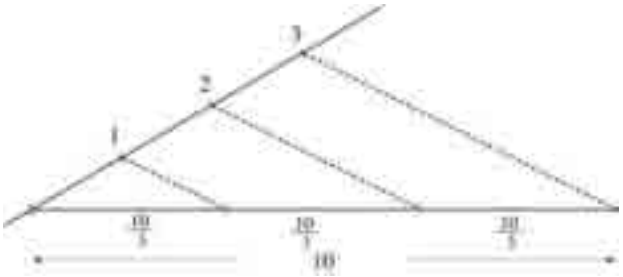
20. Dibuja en tu cuaderno un segmento de longitud 10 cm. y utiliza el teorema de Tales para dividirlo en:

a) 3 partes iguales

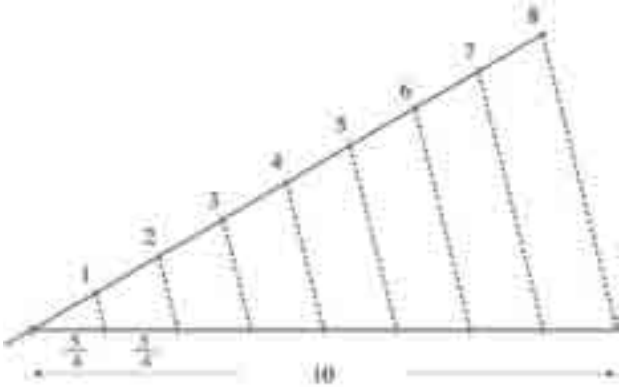
b) 8 partes iguales

c) 7 partes iguales

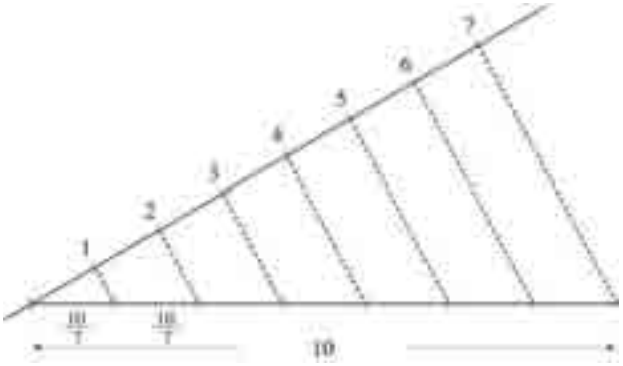
a)



b)



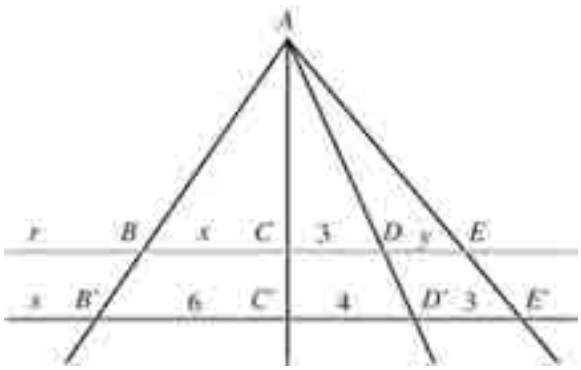
c)



21. La distancia entre dos capitales es de 636 km. Calcula la que corresponde en un mapa realizado a escala 1:100.000.

$\frac{1}{100000} = \frac{x}{636} \Rightarrow x = \frac{636}{100000} = 0,00636 \text{ km} = 6,36 \text{ m}$

22. Las rectas *r* y *s* son paralelas. Además: *B'C'* = 6 cm; *C'D'* = 4 cm; *D'E'* = 3 cm; *CD* = 3 cm. Halla *BC* y *DE*.



En ABD y $AB'D'$: $\dfrac{AB'}{AB}=\dfrac{BD'}{BD}=\dfrac{10}{3+x}\Rightarrow\dfrac{AB'}{AB}=\dfrac{10}{3+x}$

En ABC y $AB'C'$: $\dfrac{AB'}{AB}=\dfrac{6}{x}$.

Por tanto:

$$\frac{10}{3+x}=\frac{6}{x}\Rightarrow 10x=18+6x\Rightarrow 4x=18\Rightarrow x=BC=\frac{9}{2}\ \text{cm}$$

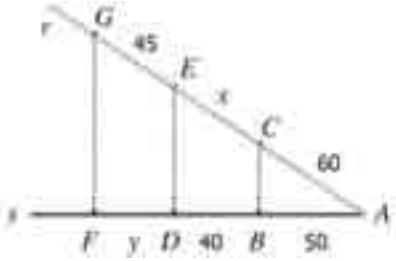
En ACE y $AC'E'$: $\dfrac{AE'}{AE}=\dfrac{C'E'}{CE}\Rightarrow\dfrac{AE'}{AE}=\dfrac{7}{3+y}$

En ADE y $AD'E'$: $\dfrac{AE'}{AE}=\dfrac{D'E'}{DE}\Rightarrow\dfrac{AE'}{AE}=\dfrac{3}{y}$.

Por tanto: $\dfrac{7}{3+y}=\dfrac{3}{y}\Rightarrow$

$$\Rightarrow 7y=9+3y\Rightarrow 4y=9\Rightarrow y=DE=\frac{9}{4}\,\text{cm}$$

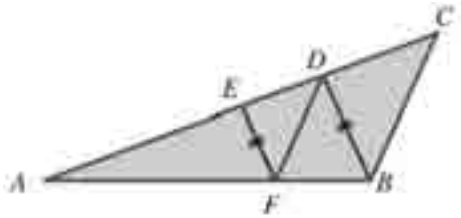
23. Las semirrectas *r* y *s* de origen *A* están cortadas por segmentos paralelos *BC*, *DE* y *FG*. Halla *x* e *y*.



$$\frac{GE}{FD}=\frac{AC}{AB}\Rightarrow\frac{45}{y}=\frac{60}{50}\Rightarrow y=\frac{45\times 50}{60}=37{,}5$$

$$\frac{EC}{DB}=\frac{AC}{AB}\Rightarrow\frac{x}{40}=\frac{60}{50}\Rightarrow x=\frac{40\times 60}{50}=48$$

24. En la figura siguiente es *EF* // *DB* y *BC* // *FD*.



a) Escribe el teorema de Tales para los triángulos *AFE* y *ABD*.

b) Escribe el teorema de Tales para los triángulos *ADF* y *ACB*.

c) Justifica que $AD^2 = AE \times AC$.

a) $\dfrac{AB}{AF}=\dfrac{AD}{AE}=\dfrac{BC}{FE}$

b) $\dfrac{AB}{AF}=\dfrac{AC}{AD}=\dfrac{BC}{FD}$

c) $\dfrac{AB}{AF}=\dfrac{AD}{AE}$ y $\dfrac{AB}{AF}=\dfrac{AC}{AD}$ se tiene que:

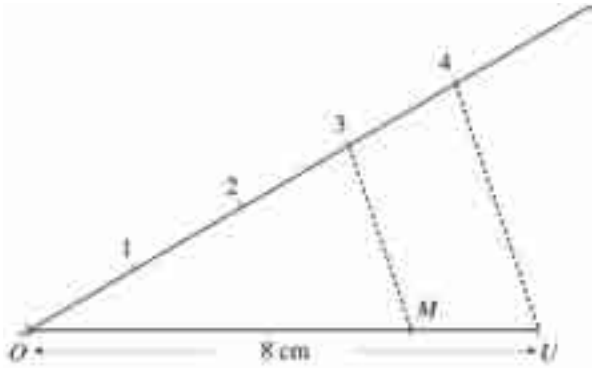
$$\frac{AD}{AE}=\frac{AC}{AD}\Rightarrow AD^2=AE\times AC$$

25. Se considera un segmento OU de longitud 8 cm.

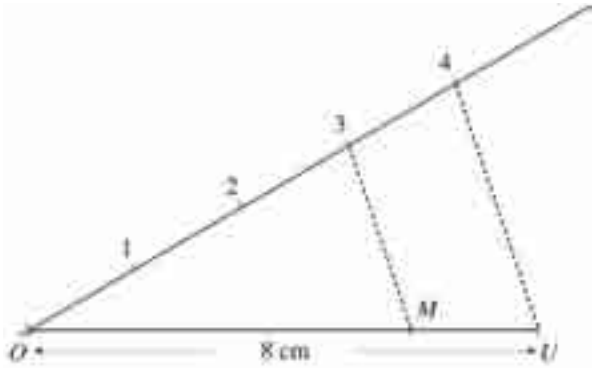
Construye en cada caso un punto M, sin utilizar regla graduada, que verifique la condición dada.

$$OM=\frac{3}{4}OU;\ OM=\frac{1}{5}OU;\ OM=\frac{6}{5}OU;\ OM=\frac{5}{3}OU$$

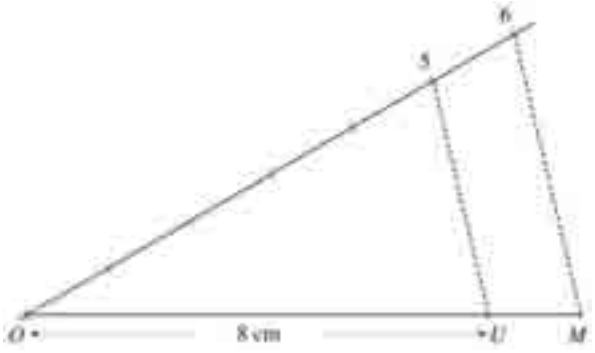
$OM=\dfrac{3}{4}OU$



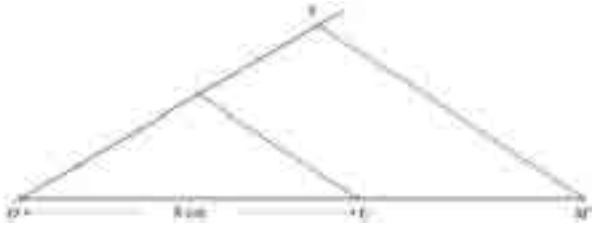
$OM=\dfrac{1}{5}OU$



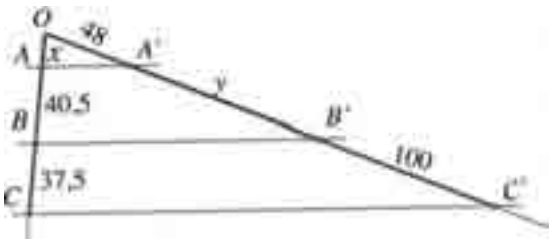
$OM=\dfrac{6}{5}OU$



$$OM = \frac{5}{3}OU$$



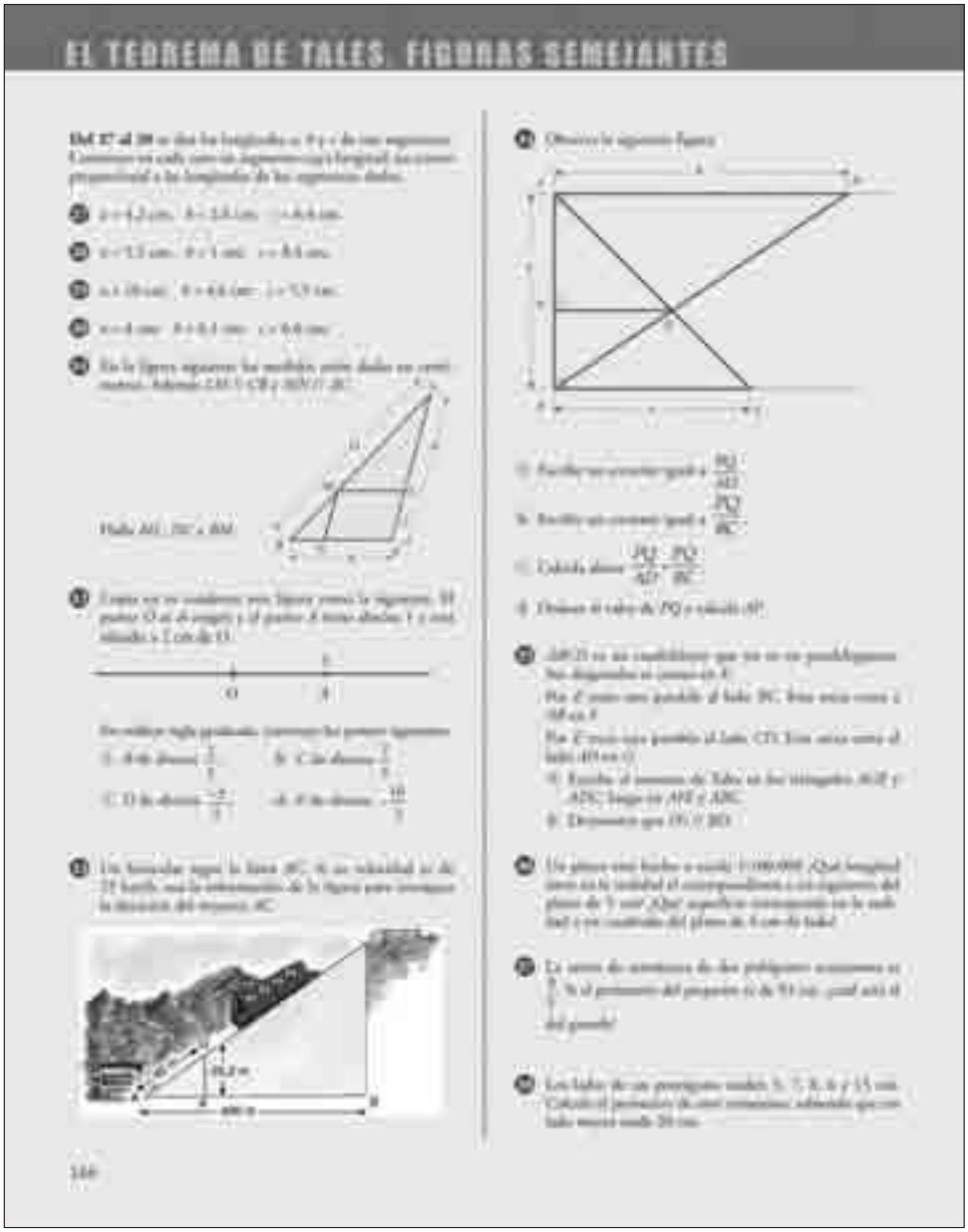
26. Halla *x* e *y* en la figura sabiendo que *AA'* // *BB'* // *CC'*.



$$\frac{B'C'}{BC} = \frac{A'B'}{AB} \Rightarrow \frac{100}{37,5} = \frac{y}{40,5} \Rightarrow y = \frac{40,5 \times 100}{37,5} = 108 \text{ cm}$$

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{OA'}{OA} \Rightarrow \frac{108}{40,5} = \frac{48}{x} \Rightarrow x = \frac{48 \times 40,5}{108} = 18$$

▶ Pág. 166. Ejercicios

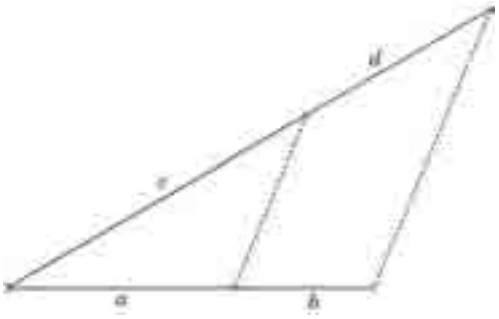

EL TEOREMA DE TALES. FIGURAS SEMEJANTES

SOLUCIONARIO

Del 27 al 30 se dan las longitudes a, b y c de tres segmentos. Construye en cada caso un segmento cuya longitud sea cuarto proporcional a las longitudes de los segmentos dados.

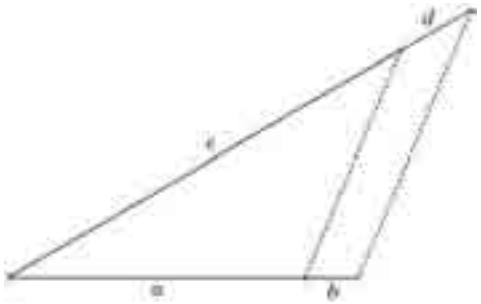
27. $a = 4{,}2$ cm; $b = 2{,}6$ cm; $c = 6{,}4$ cm.

$$d = \frac{b \times c}{a} = \frac{2{,}6 \times 6{,}4}{4{,}2} \simeq 3{,}96$$



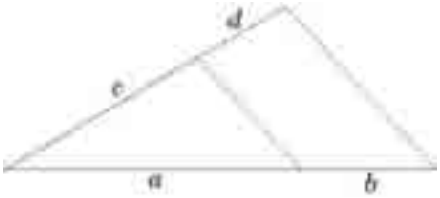
28. $a = 5{,}5$ cm; $b = 1$ cm; $c = 8{,}4$ cm.

$$d = \frac{b \times c}{a} = \frac{1 \times 8{,}4}{5{,}5} \simeq 1{,}53 \text{ cm.}$$



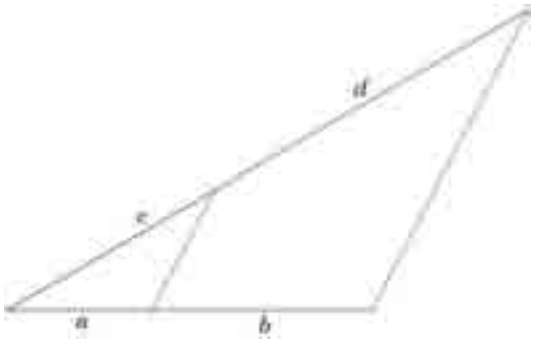
29. $a = 10$ cm; $b = 4{,}6$ cm; $c = 7{,}5$ cm.

$$d = \frac{b \times c}{a} = \frac{4{,}6 \times 7{,}5}{10} \simeq 3{,}45 \text{ cm.}$$

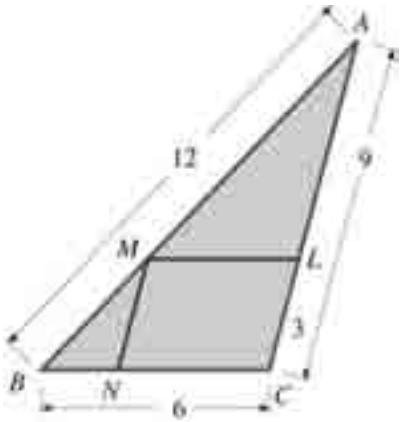


30. $a = 4$ cm; $b = 6{,}1$ cm; $c = 6{,}6$ cm.

$$d = \frac{b \times c}{a} = \frac{6{,}1 \times 6{,}6}{4} \simeq 10{,}065 \text{ cm.}$$



31. En la figura siguiente las medidas están dadas en centímetros. Además *LM* // *CB* y *MN* // *AC*.

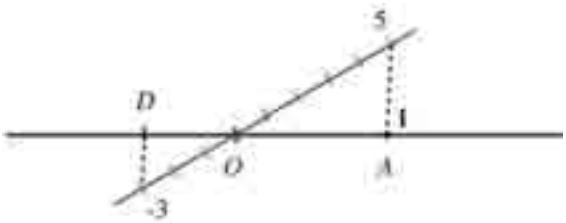


Halla *ML*, *NC* y *BM*.

$$\frac{BC}{AC} = \frac{ML}{AL} \Rightarrow \frac{6}{9} = \frac{ML}{6} \Rightarrow ML = \frac{6 \times 6}{9} = 4 \text{ cm}$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BM}{LC} \Rightarrow \frac{12}{9} = \frac{BM}{3} \Rightarrow BM = \frac{12 \times 3}{9} = 4 \text{ cm}$$

32. Copia en tu cuaderno una figura como la siguiente. El punto *O* es el origen y el punto *A* tiene abscisa 1 y está situado a 2 cm de *O*.



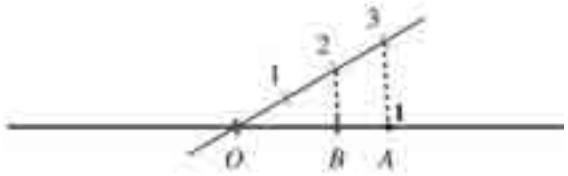
Sin utilizar regla graduada, construye los puntos siguientes:

a) ***B*** **de abscisa** $\frac{2}{3}$; **b)** ***C*** **de abscisa** $\frac{7}{4}$

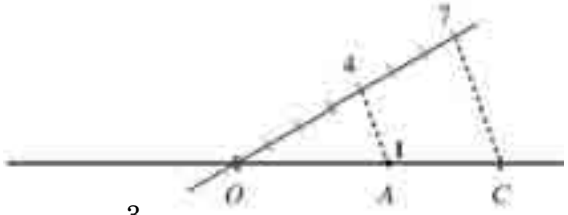
c) ***D*** **de abscisa** $\frac{-3}{5}$; **d)** ***E*** **de abscisa** $-\frac{10}{3}$



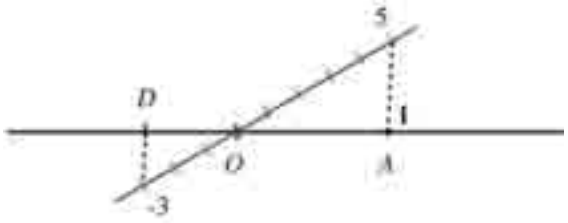
a) $OB = \frac{2}{3}$



b) $OC = \frac{7}{4}$



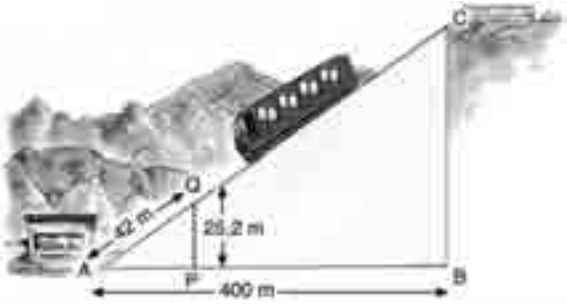
c) $OE = -\frac{3}{5}$



d) $OE = -\frac{10}{3}$



33. Un funicular sigue la línea *AC*. Si su velocidad es de 25 km/h, usa la información de la figura para averiguar la duración del trayecto *AC*.



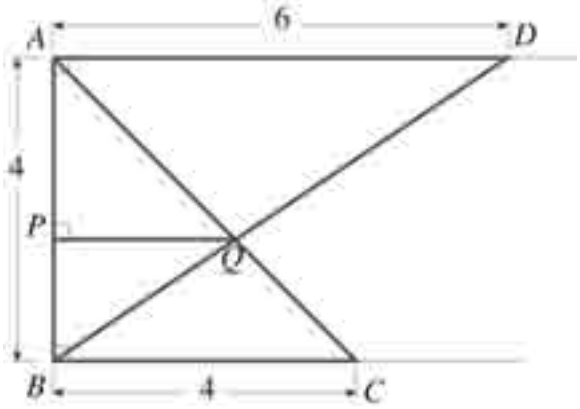
Calculamos AP con el Teorema de Pitágoras:

$$AP = \sqrt{42^2 - 25,2^2} = 33,6 \text{ m}$$

Ahora: $\frac{AC}{AB} = \frac{AQ}{AP} \Rightarrow AC = \frac{400 \times 42}{33,6} = 500 \text{ m} = 0,5 \text{ km}$

$$t = \frac{e}{v} = \frac{0,5}{25} = 0,2\text{h} = 12 \text{ min}$$

34. Observa la siguiente figura:



a) Escribe un cociente igual a $\frac{PQ}{AD}$

b) Escribe un cociente igual a $\frac{PQ}{BC}$

c) Calcula ahora $\frac{PQ}{AD} + \frac{PQ}{BC}$.

d) Deduce el valor de PQ y calcula AP.

a) $\frac{PQ}{AD} = \frac{BP}{AB}$

b) $\frac{PQ}{BC} = \frac{AP}{AB}$

c) $\frac{PQ}{AD} + \frac{PQ}{BC} = \frac{BP}{AB} + \frac{AP}{AB} = \frac{BP + AP}{AB} = \frac{AB}{AB} = 1$

d) $\frac{AD}{AB} = \frac{PQ}{PB} \Rightarrow \frac{6}{4} = \frac{PQ}{PB}$ pero $PQ = AP$

pues $= \frac{AP}{PQ} = \frac{AB}{BC} = \frac{4}{4} = 1$

Luego: $\frac{3}{2} = \frac{AP}{PB} \Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{AP}{4 - AP} \Rightarrow$

$\Rightarrow 12 - 3AP = 2AP \Rightarrow 12 = 5AP \Rightarrow$

$\Rightarrow AP = \frac{12}{5} = 2,4 = PQ$

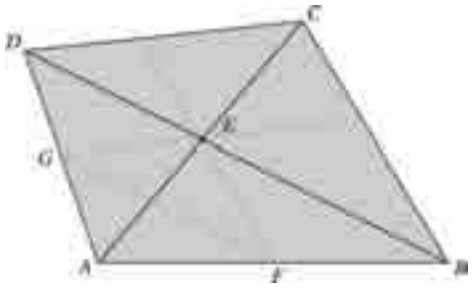
35. $ABCD$ es un cuadrilátero que no es un paralelogramo. Sus diagonales se cortan en E.

Por E traza una paralela al lado BC. Esta recta corta a AB en F.

Por E traza una paralela al lado CD. Esta recta corta al lado AD en G.

a) Escribe el teorema de Tales en los triángulos AGE y ADC, luego en AFE y ABC.

b) Demuestra que FG // BD.



a) En AGE y ADC En AFE y ABC

$\frac{AD}{AG} = \frac{AC}{AE} = \frac{DC}{GE}$ $\frac{AB}{AF} = \frac{AC}{AE} = \frac{CB}{EF}$

b) Como $\frac{AC}{AE} = \frac{AD}{AG} = \frac{AB}{AF}$ tenemos $\frac{AD}{AG} = \frac{AB}{AF}$

luego los triángulos AFG y ABC están en posición de Tales, por tanto FG es paralelo a BD.

36. Un plano está hecho a escala 1:100.000 ¿Qué longitud tiene en la realidad el correspondiente a un segmento del plano de 5 cm? ¿Qué superficie corresponde en la realidad a un cuadrado del plano de 4 cm de lado?

A un segmento de 5 cm en el plano le corresponden

$$\frac{1}{100000} = \frac{5}{x} \Rightarrow x = 500\,000 \text{ cm} = 5 \text{ km}$$

El lado real del cuadrado es

$$\frac{1}{100000} = \frac{4}{x} \Rightarrow x = 400\,000 \text{ cm} = 4 \text{ km}$$

por tanto el área real del cuadrado es 16 km^2.

De otra forma

$$\frac{1}{(100000)^2} = \frac{16}{x} \Rightarrow x = 16 \times 10^{10} \text{ cm}^2 = 16 \text{ km}^2$$

37. La razón de semejanza de dos polígonos semejantes es $\frac{3}{7}$. Si el perímetro del pequeño es de 93 cm, ¿cuál será el del grande?

$$\frac{3}{7} = \frac{93}{x} \Rightarrow x = \frac{93 \times 7}{3} = 217 \text{ cm}$$

38. Los lados de un pentágono miden 3, 7, 8, 6 y 15 cm. Calcula el perímetro de otro semejante, sabiendo que un lado mayor mide 20 cm.

$$\frac{15}{20} = \frac{3 + 7 + 8 + 6 + 15}{x} = \frac{39}{x} \Rightarrow x = \frac{20 \times 39}{15} = 52 \text{ cm}$$

Tema 9

Lugares geométricos

▸ Programación de aula

Objetivos

- Definir lugar geométrico.
- Definir las cónicas como lugares geométricos.
- Definir la elipse y sus elementos.
- Definir la parábola y sus elementos.
- Definir la hipérbola y sus elementos.
- Distinguir ciertos ángulos en la circunferencia.
- Definir el arco capaz.

Criterios de evaluación

- Determinar el lugar geométrico.
- Identificar cónicas.
- Calcular y especificar cónicas conocidos algunos de sus elementos.
- Distinguir ángulos en la circunferencia.
- Construir el arco capaz.

Contenidos

- **Conceptos** ("saber")
  - Lugares geométricos.
  - Lás cónicas.
  - Ángulos en la circunferencia.
  - Arco capaz.
- **Procedimientos** ("Saber hacer")
  - Determinación de figuras a partir de ciertas propiedades.
  - Identificación de las cónicas y de sus propiedades geométricas más elementales.
  - Utilización diestra de los elementos de dibujo más habituales.
- **Actitudes** ("Saber ser")
  - Curiosidad e interés por investigar formas, configuraciones y relaciones geométricas.
  - Perseverancia en la búsqueda de soluciones a los problemas geométricos y en la mejora de las ya encontradas.
  - Flexibilidad para enfrentarse a situaciones geométricas desde distintos puntos de vista.

▸ Programación por competencias

COMPETENCIA MATEMÁTICA

PENSAMIENTO Y RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

Descriptores

1. Proponer la caracterización de distintos figuras geométricas, en especial las cónicas.
2. Extender el modelo que caracteriza a cada una de las figuras geométricas estudiadas, mediante la abstracción de sus propiedades.

Desempeño

1. Utiliza la terminología y notación adecuadas para describir con precisión situaciones, formas, propiedades y configuraciones geométricas.	- Utiliza con precisión los elementos de cada figura geométrica. - Describe adecuadamente las propiedades y configuraciones de las distintas figuras geométricas estudiadas.	- **Ejercicios del tema** (pág. 170 a 182)
2. Busca las propiedades, regularidades y relaciones en los cuerpos geométricos estudiados.	- Establece comparaciones entre las características de las figuras geométricas estudiadas.	
3. Caracteriza figuras como lugares geométricos.	- Identifica la propiedad que define a distintas figuras geométricas.	- **Ejercicios 3 a 10, 17, 18, 21 y 25** (pág. 180 y 181)

CONSTRUCCIÓN DE MODELOS

Descriptores

1. Diseñar, modelizar y analizar los fundamentos y propiedades de figuras geométricas.

Desempeño

1. Modeliza distintas figuras geométricas.	- Define los elementos definitorios de figuras planas y opera con ellos.	- **Ejercicios 1, 11 a 16, 19, 20, 22 a 24 y 26** (pág. 176, 180 a 182)
2. Construye figuras geométricas con medios materiales.	- Analiza el proceso de construcción. - Destaca las características fundamentales de las figuras construidas.	- **Ejercicios 17, 21 y 25** (pág. 156 a 166)

PLANTEAR Y RESOLVER PROBLEMAS MATEMÁTICOS

Descriptores

1. Detectar problemas geométricos diferenciando los elementos conocidos de los que se pretenden conocer.
5. Reducir problemas complejos de construcción de figuras geométricas, en especial cónicas, a otros más sencillos, y resolverlos.

Desempeño

1. Plantea una situación concreta en la que interviene una figura definida como lugar geométrico.	- Distingue la tipología de las figuras geométricas. - Constata la existencia de la propiedad que satisfacen todos los puntos de la figura.	- **Ejercicios del tema** (pág. 170 a 182)
2. Resuelve la cuestión planteada.	- Obtiene la solución numérica. - Analiza la solución y obtiene conclusiones.	

UTILIZAR EL LENGUAJE TÉCNICO FORMAL

Descriptores

1. Trabajar con las fórmulas de las características de las figuras geométricas estudiadas.

Desempeño

1. Utiliza las fórmulas que expresan las características de las figuras geométricas estudiadas.	- Calcula los elementos de las figuras geométricas estudiadas.	- **Ejercicios 11 a 16, 19, 20 y 22 a 24** (pág. 180 y 181)

COMPETENCIA LINGÜÍSTICA

COMPETENCIA LINGÜÍSTICA

Descriptores

1. Comprender el enunciado de un problema geométrico en el que intervienen lugares geométricos y, en especial, cónicas y ángulos en la circunferencia.
2. Aportar vocabulario específico relacionado con la representación de figuras geométricas y, en particular, de las cónicas.
3. Describir verbalmente los problemas geométricos y el proceso seguido en su resolución.

Desempeño

1. Comprende lo que lee.	- Identifica la pregunta que se le hace. - Identifica los elementos de cálculo y representación geométrica que intervienen.	- **Ejemplo y ejercicios del tema** (pág. 170 a 182)
2. Discrimina e interpreta los elementos geométricos que le da el enunciado de un problema como información.	- Diferencia los distintos elementos de los lugares geométricos estudiados.	
3. Se expresa por escrito de manera adecuada y correcta, con claridad y coherencia, utilizando un lenguaje preciso, para la descripción de los criterios utilizados en la solución de un problema geométrico.	- Presenta el texto de la solución del problema de forma adecuada y correcta. - Selecciona los aspectos relevantes de la solución. - Es capaz de traducir al lenguaje natural el lenguaje formal de la Geometría.	

COMPETENCIA EN CONOCIMIENTO E INTERACCION CON EL MEDIO FISICO

COMPETENCIA EN CONOCIMIENTO E INTERACCION CON EL MEDIO FÍSICO

Descriptores

1.Constatar la existencia de ciertas figuras geométricas, en especial cónicas, en el medio físico.
2. Aplicar las propiedades de ciertas figuras geométricas para resolver situaciones cotidianas de la vida y del entorno.

Desempeño

1. Advierte en el espacio físico la existencia de figuras definidas como lugares geométricos.	- Sintetiza la información percibida del entorno físico. - Relaciona la información recibida con los elementos y figuras geométricas estudiadas.	- **Introducción** (pág. 168) - **"Sabías que..." y "Recuerda que..."** (pág. 172) - **"El espejo hiperbólico"** (pág. 174) - **Ejercicio 11** (pág. 180)
2. Utiliza la Geometría para resolver situaciones prácticas que se plantean en el medio y espacio físicos.	- Obtiene conclusiones del entorno físico cuantificando las características de los elementos de las figuras geométricas presentes en él.	

COMPETENCIA APRENDER A APRENDER

COMPETENCIA APRENDER A APRENDER

Descriptores

1. Confiar en las propias capacidades para conocer figuras geométricas definidas como lugares geométricos y resolver problemas asociados con ellas.
2. Tener curiosidad e interés por investigar sobre formas, configuraciones y relaciones geométricas.

Desempeño

1. Desarrolla habilidades para la comprensión de problemas geométricos.	- Lee los enunciados de los ejercicios con la intención de comprender, relacionar y sintetizar contenidos. - Maneja adecuadamente recursos y técnicas de aprendizaje individual.	- **Ejemplos y ejercicios del tema** (pág. 170 a 182
2. Desarrolla la curiosidad por las formas, configu-ra-ciones y relaciones geomé-tricas.	- Plantea sugerencias de ampliación a los resultados obtenidos tras el análisis de un planteamiento geométrico. - Constata la semejanza o diferencia entre distintas figuras geométricas definidas como lugares geométricos.	

COMPETENCIA CULTURAL Y ARTÍSTICA

COMPENTENCIA CULTURAL Y ARTÍSTICA

Descriptores

1. Utilizar los instrumentos de construcción y dibujo habituales para representar figuras geométricas definidas como lugares geométricos.

Desempeño

1. Construye y representa gráficamente figuras geométricas.	- Advierte la presencia de ciertas figuras geométricas en la naturaleza, en el arte y en la técnica. - Diseña esquemáticamente figuras geométricas. - Dibuja figuras planas y cuerpos en el espacio a mano alzada o con instrumentos de dibujo habituales.	- **Introducción** (pág. 168) - **"Sabías que..." y "Recuerda que..."** (pág. 172) - **"El espejo hiperbólico"** (pág. 174) - **E jercicios 2 a 26** (pág. 177 y 180 a 182)

COMPETENCIA AUTONOMÍA E INICIATIVA PERSONAL

COMPETENCIA AUTONOMÍA E NICIATIVA PERSONAL

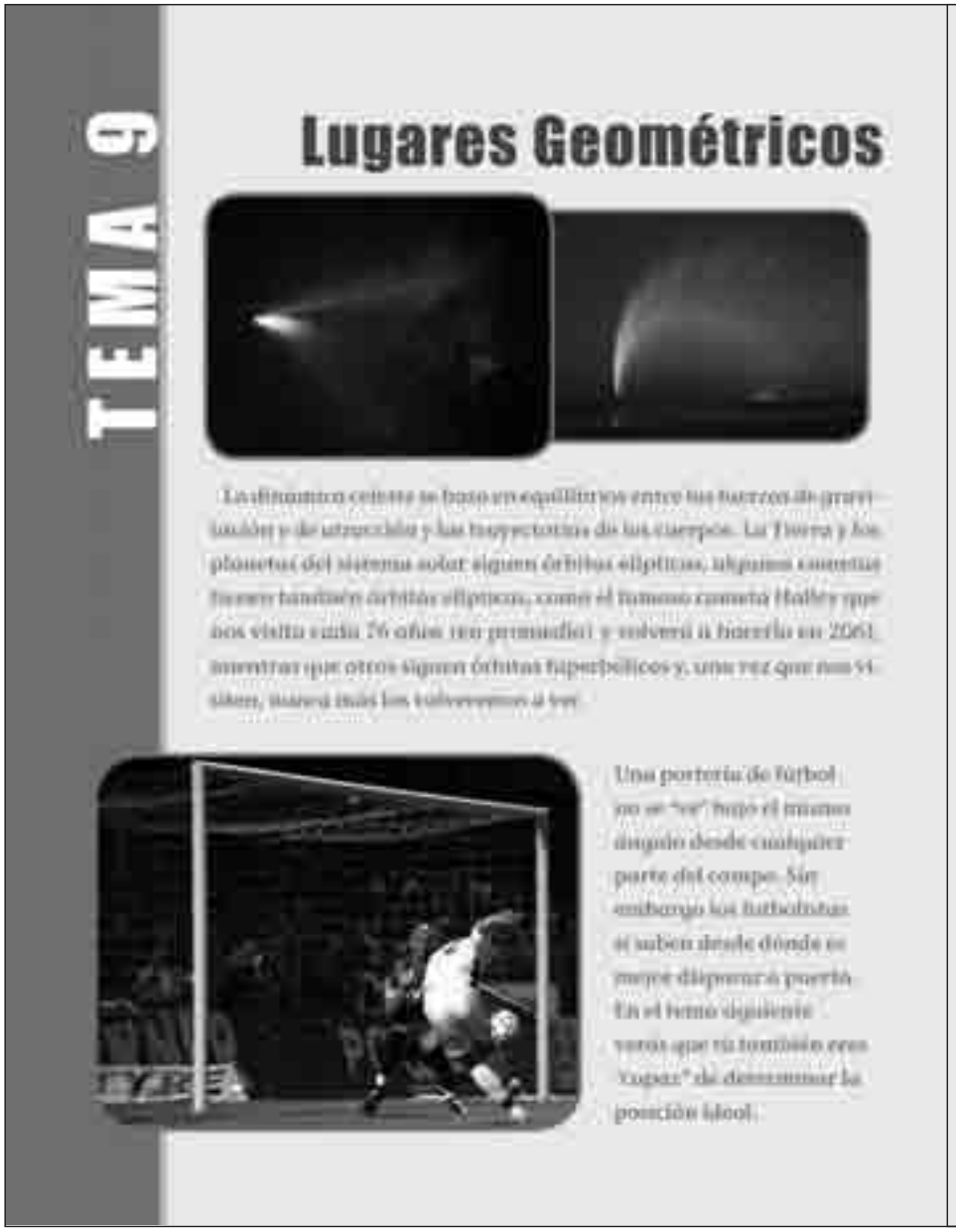
Descriptores

1. Buscar soluciones a los problemas de lugares geométricos y mejorar las ya encontradas.
2. Tener flexibilidad para enfrentarse a situaciones geométricas desde distintos puntos de vista.

Desempeño

1. Idea y planifica el desarrollo de la solución para una situación geométrica concreta o mejora una solución preexistente.	- Elige la opción adecuada para la resolución de los ejercicios. - Mantiene la opción hasta llegar a la conclusión final.	- **Ejemplos y ejercicios del tema** (pág. 170 a 182)
2. Evalúa la solución obtenida.	- Valora el resultado y lo pone en relación con el enunciado del problema resuelto. - Reflexiona sobre si el trabajo efectuado ha sido suficiente para el objetivo propuesto.	
3. Toma decisiones en función de la solución geométrica adoptada.	- Decide en función del resultado. - Acepta el posible error de una decisión cuando la solución no es la idónea.	

▶ Pág. 168 - 169. Lugares geométricos



SOLUCIONARIO

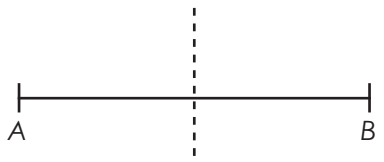
Completa las frases siguientes:

- **Dos puntos distintos determinan** un segmento o una recta**.**
- **Las rectas *r* y *s* son** paralelas**.**
- **Tres puntos no alineados determinan** un triángulo o un plano

PRACTICA

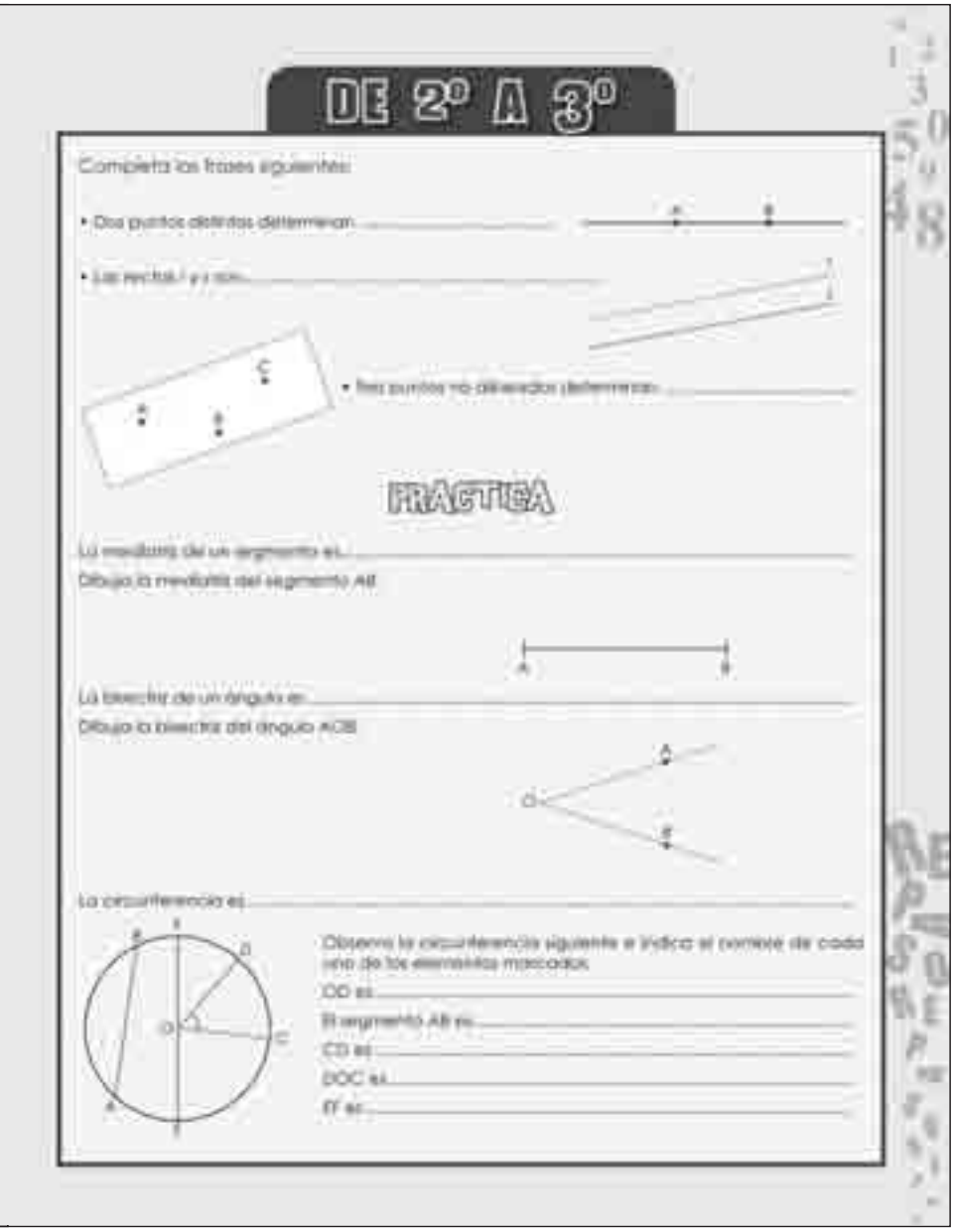
La mediatriz de un segmento es la perpendicular en su punto medio o el lugar geométrico de los puntos que equidistan de sus extremos.

Dibuja la mediatriz del segmento AB.



La bisectriz de un ángulo es la recta que lo divide en dos ángulos iguales o el lugar geométrico de los puntos que equidistan de sus lados.

Dibuja la bisectriz del ángulo AOB.


DE 2º A 3º

Completa las frases siguientes:

• Dos puntos distintos determinan

• Las rectas r y s son

• Tres puntos no alineados determinan

PRACTICA

La mediatriz de un segmento es

Dibuja la mediatriz del segmento AB

La bisectriz de un ángulo es

Dibuja la bisectriz del ángulo ACB

La circunferencia es

Observa la circunferencia siguiente e indica el nombre de cada uno de los elementos marcados.

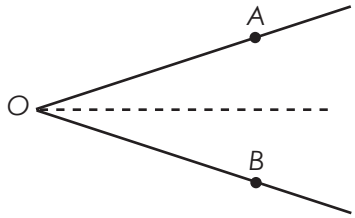
OD es

El segmento AB es

CD es

DOC es

EF es



La circunferencia es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de otro punto llamado centro.

Observa la circunferencia siguiente e indica el nombre de cada uno de los elementos marcados.

OD es un radio.

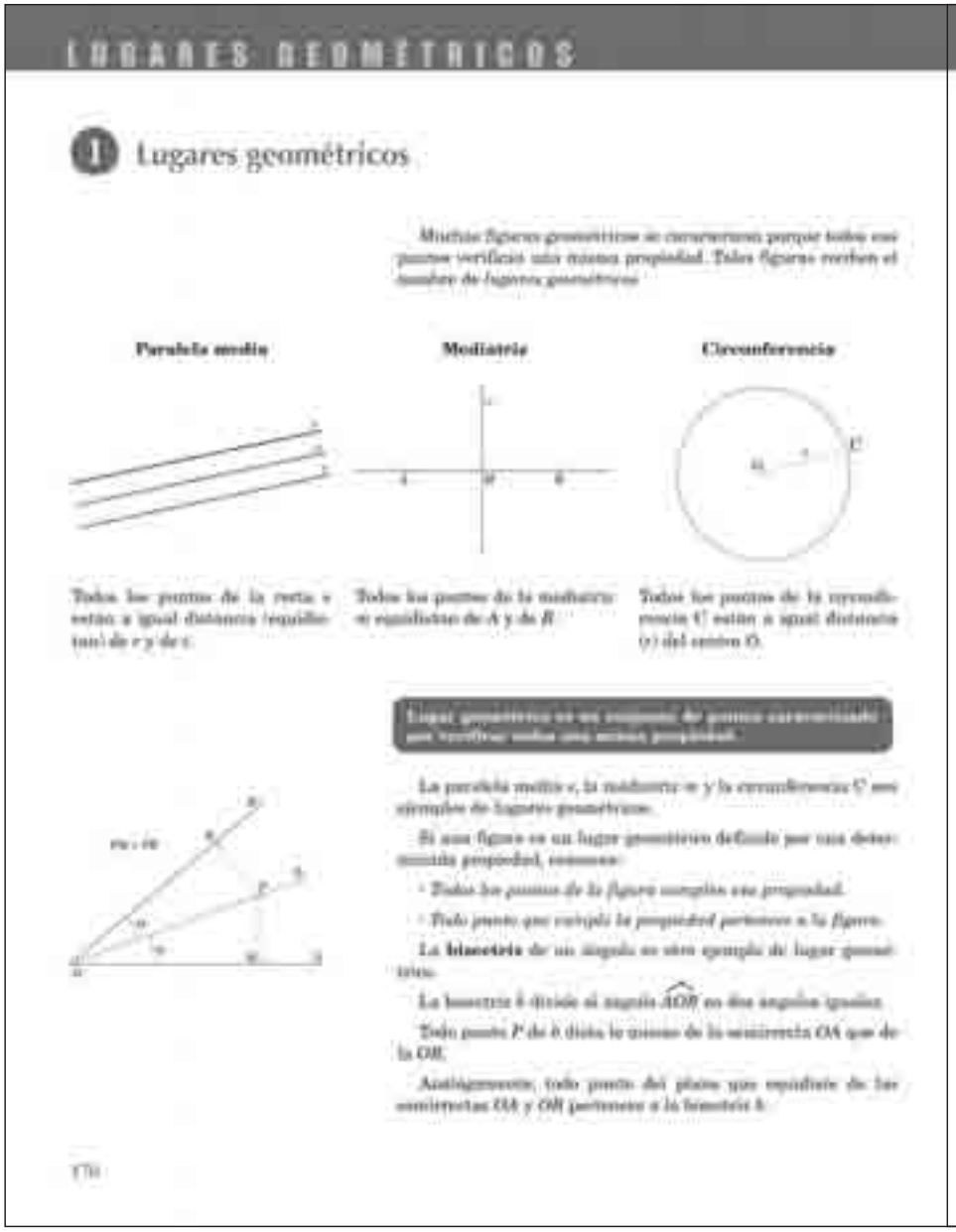
El segmento AB es una cuerda.

CD es un arco.

DOC es un ángulo central.

EF es un diámetro.

▶ Pág. 170. 1 Lugares geométricos



LUGARES GEOMÉTRICOS

1 Lugares geométricos

Muchas figuras geométricas se caracterizan porque todos sus puntos verifican una misma propiedad. Todas figuras reciben el nombre de *lugares geométricos*

Parabola media | **Mediatriz** | **Circunferencia**

Todos los puntos de la recta *s* están a igual distancia (equidistan) de *r* y de *t*.

Todos los puntos de la mediatriz *m* equidistan de *A* y de *B*.

Todos los puntos de la circunferencia *C* están a igual distancia (*r*) del centro *O*.

Lugar geométrico es un conjunto de puntos caracterizados por verificar todos una misma propiedad.

La parabola media *s*, la mediatriz *m* y la circunferencia *C* son ejemplos de lugares geométricos.

Si una figura es un lugar geométrico definido por una determinada propiedad, entonces:

- *Todos los puntos de la figura cumplen esa propiedad.*
- *Todo punto que cumpla la propiedad pertenece a la figura.*

La **bisectriz** de un ángulo es otro ejemplo de lugar geométrico.

La bisectriz *b* divide al ángulo $\widehat{AOB}$ en dos ángulos iguales.

Todo punto *P* de *b* dista lo mismo de la semirrecta *OA* que de la *OB*.

Análogamente, todo punto del plano que equidiste de las semirrectas *OA* y *OB* pertenece a la bisectriz *b*.

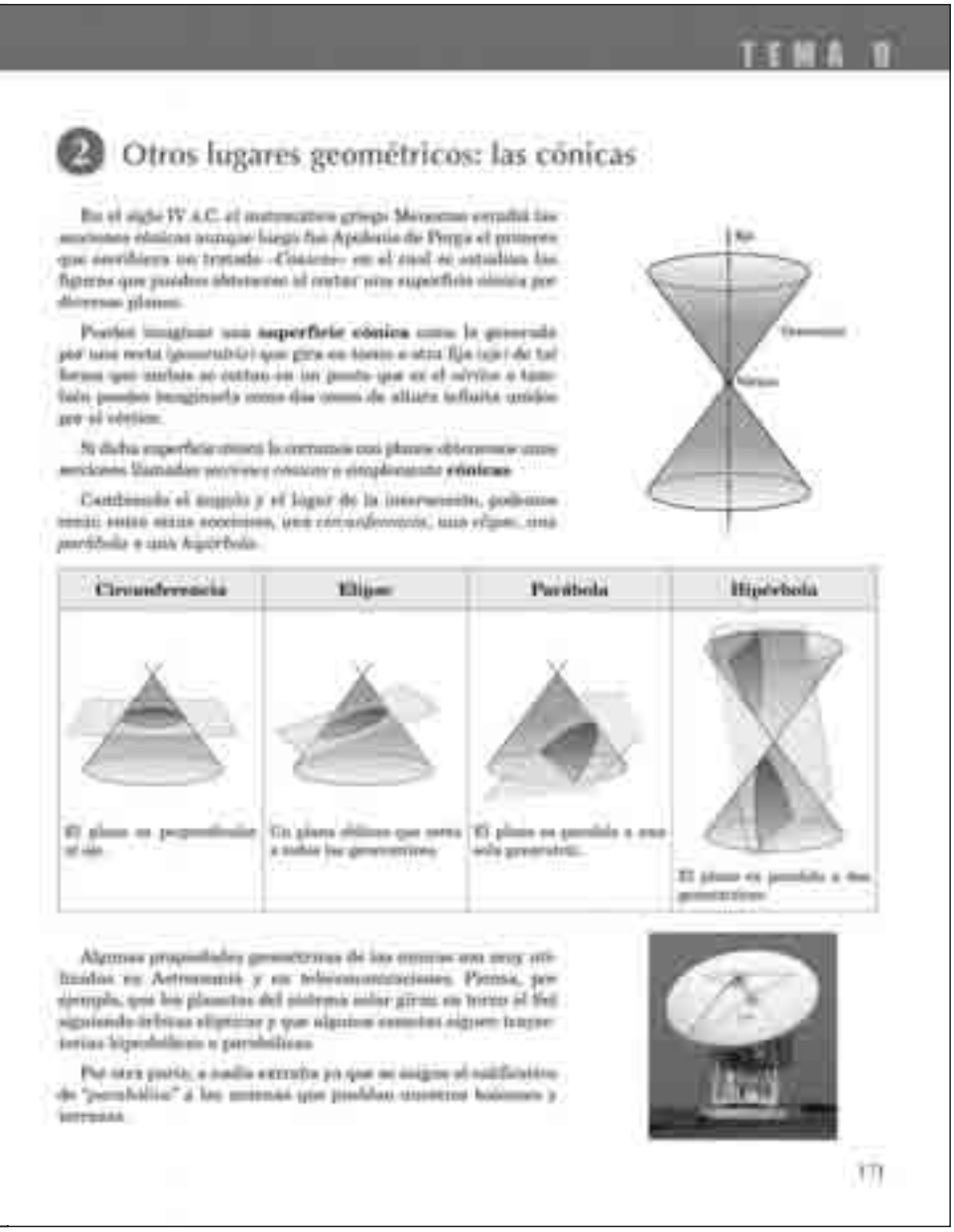
170

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS

Revisión de conceptos geométricos: paralelismo, perpendicularidad, mediatriz, bisectriz, ...

Se pueden proponer los ejercicios 3 a 10.

▶ Pág. 171. 2 Otros lugares geométricos: las cónicas



TEMA 9

2 Otros lugares geométricos: las cónicas

En el siglo IV a.C. el matemático griego Menecmo estudió las secciones cónicas aunque luego fue Apolonio de Perga el primero que escribiera un tratado –*Cónicas*– en el cual se estudian las figuras que pueden obtenerse al cortar una superficie cónica por diversos planos.

Podría imaginar una **superficie cónica** como la generada por una recta (*generatriz*) que gira en torno a otra fija (*eje*) de tal forma que ambas se cortan en un punto que es el *vértice* o también puedes imaginarla como dos conos de altura infinita unidos por el vértice.

Si dicha superficie cónica la cortamos con planos obtenemos unas secciones llamadas *secciones cónicas* o simplemente **cónicas**.

Cambiando el ángulo y el lugar de la intersección, podemos tener entre otras secciones, una *circunferencia*, una *elipse*, una *parábola* o una *hipérbola*.

Circunferencia	Elipse	Parábola	Hipérbola
El plano es perpendicular al eje.	Un plano oblicuo que corta a todas las generatrices.	El plano es paralelo a una sola generatriz.	El plano es paralelo a dos generatrices.

Algunas propiedades geométricas de las cónicas son muy utilizadas en Astronomía y en telecomunicaciones. Piensa, por ejemplo, que los planetas del sistema solar giran en torno al Sol siguiendo órbitas elípticas y que algunos cometas siguen trayectorias hiperbólicas o parabólicas.

Por otra parte, a cada cónica ya que se asigna el calificativo de "parabólico" a los sistemas que poseen receptor humano y antenas.

17

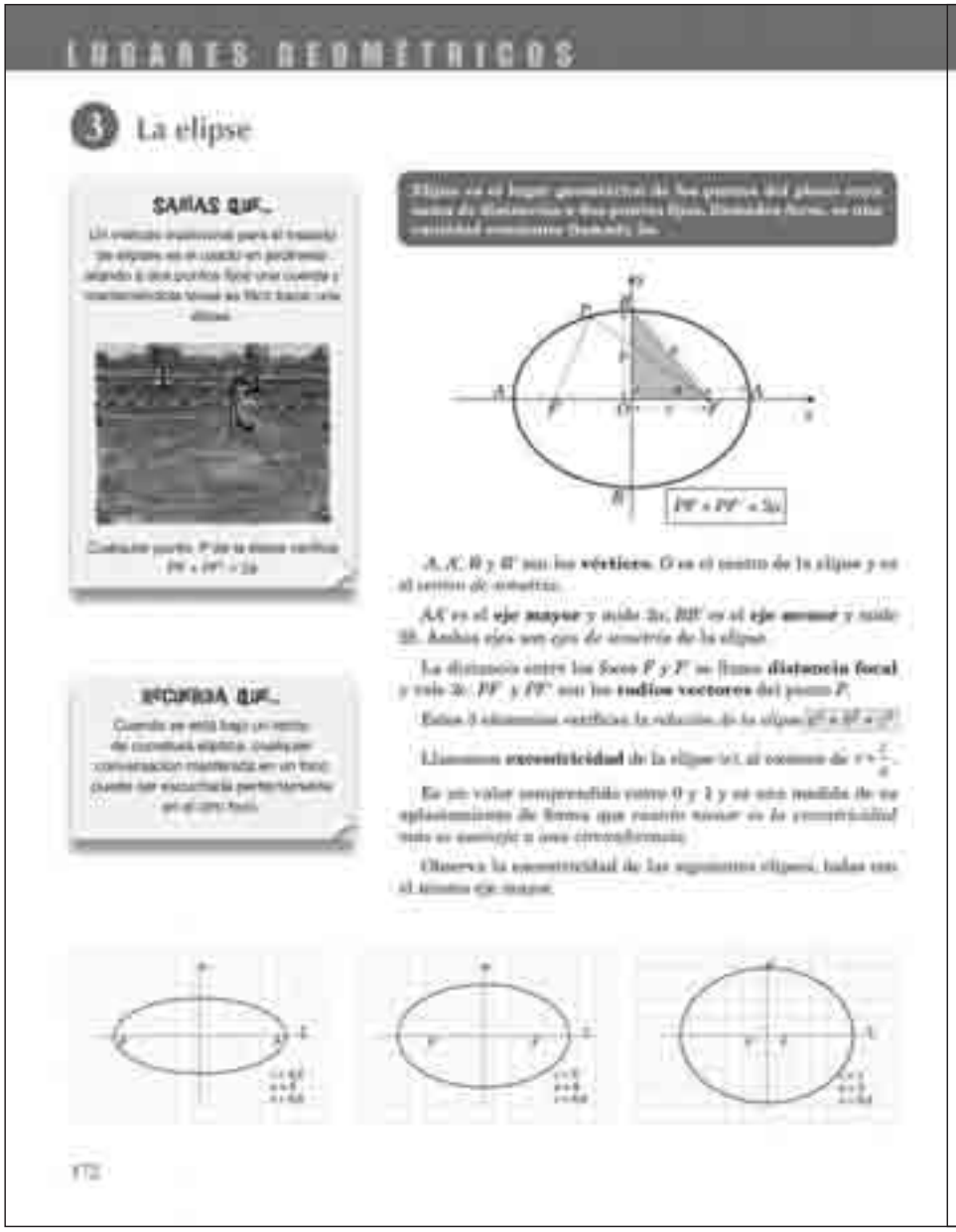
ORIENTACIONES DIDÁCTICAS

Vocabulario específico.

Sugerir visita a:

http://ntic.educacion.es/w3//eos/MaterialesEducativos/mem2006/curva_conicas/index.html

▶ Pág. 172. 3 La elipse


LUGARES GEOMÉTRICOS

3 La elipse

SABÍAS QUE...

SOPESA QUE...

$PF + PF' = 2a$

AA' es el **eje mayor** y mide $2a$, BB' es el **eje menor** y mide $2b$.

La distancia entre los focos F y F' se llama **distancia focal** y vale $2c$. PF y PF' son los **radios vectores** del punto P.

Llamamos **excentricidad** de la elipse a $e = \frac{c}{a}$.

Observa la excentricidad de las siguientes elipses, todas con el mismo eje mayor.

172

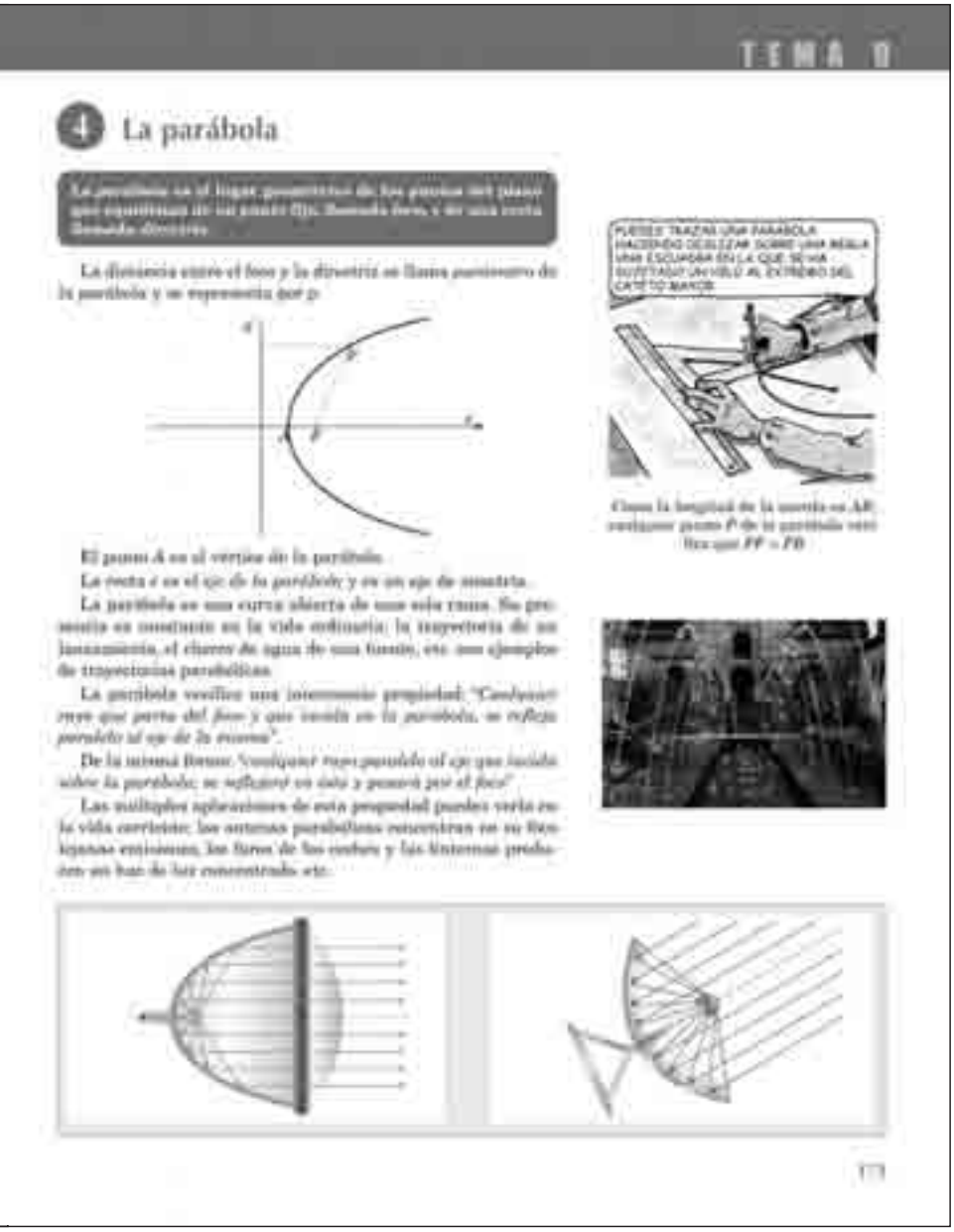
ORIENTACIONES DIDÁCTICAS

La relación PF + PF′ = 2*a* se puede evidenciar en la figura si P = B.

La observación del triángulo BOF permitirá comprender la relación $a^2 = b^2 + c^2$.

Como actividad se sugiere el ejercicio 17 (página 181).

▶ Pág. 173. 4 La parábola



TEMA 9

4 La parábola

La parábola es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo, llamado foco, y de una recta llamada directriz.

La distancia entre el foco y la directriz se llama parámetro de la parábola y se representa por *p*.

El punto *A* es el vértice de la parábola.

La recta *e* es el eje de la parábola y es un eje de simetría.

La parábola es una curva abierta de una sola rama. Su presencia es constante en la vida ordinaria: la trayectoria de un lanzamiento, el chorro de agua de una fuente, etc. son ejemplos de trayectorias parabólicas.

La parábola posee una interesante propiedad: *Cualquier rayo que parta del foco y que incida en la parábola, se reflejará paralelo al eje de la misma*.

De la misma forma: *Cualquier rayo paralelo al eje que incida sobre la parábola, se reflejará en ésta y pasará por el foco*.

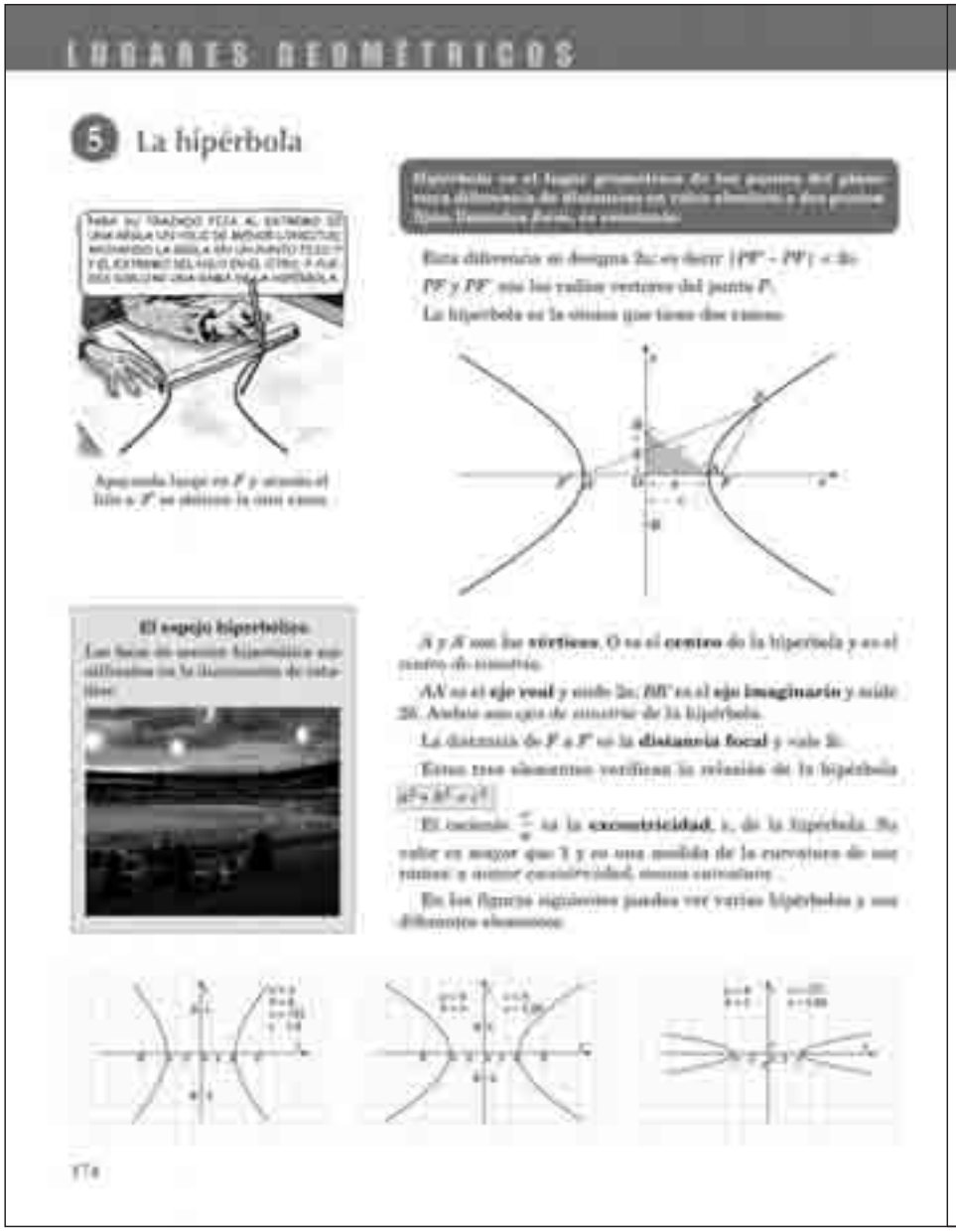
Las múltiples aplicaciones de esta propiedad pueden verla en la vida corriente: las antenas parabólicas concentran en su bocinas emisoras, los faros de los coches y las linternas producen un haz de luz concentrado etc.

Dada la longitud de la cuerda es *AB*, cualquier punto *P* de la parábola verifica que *PF* = *PB*

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS

Ejercicios 18 y 21.

▶ Pág. 174. 5 La hipérbola



LUGARES GEOMÉTRICOS

5 La hipérbola

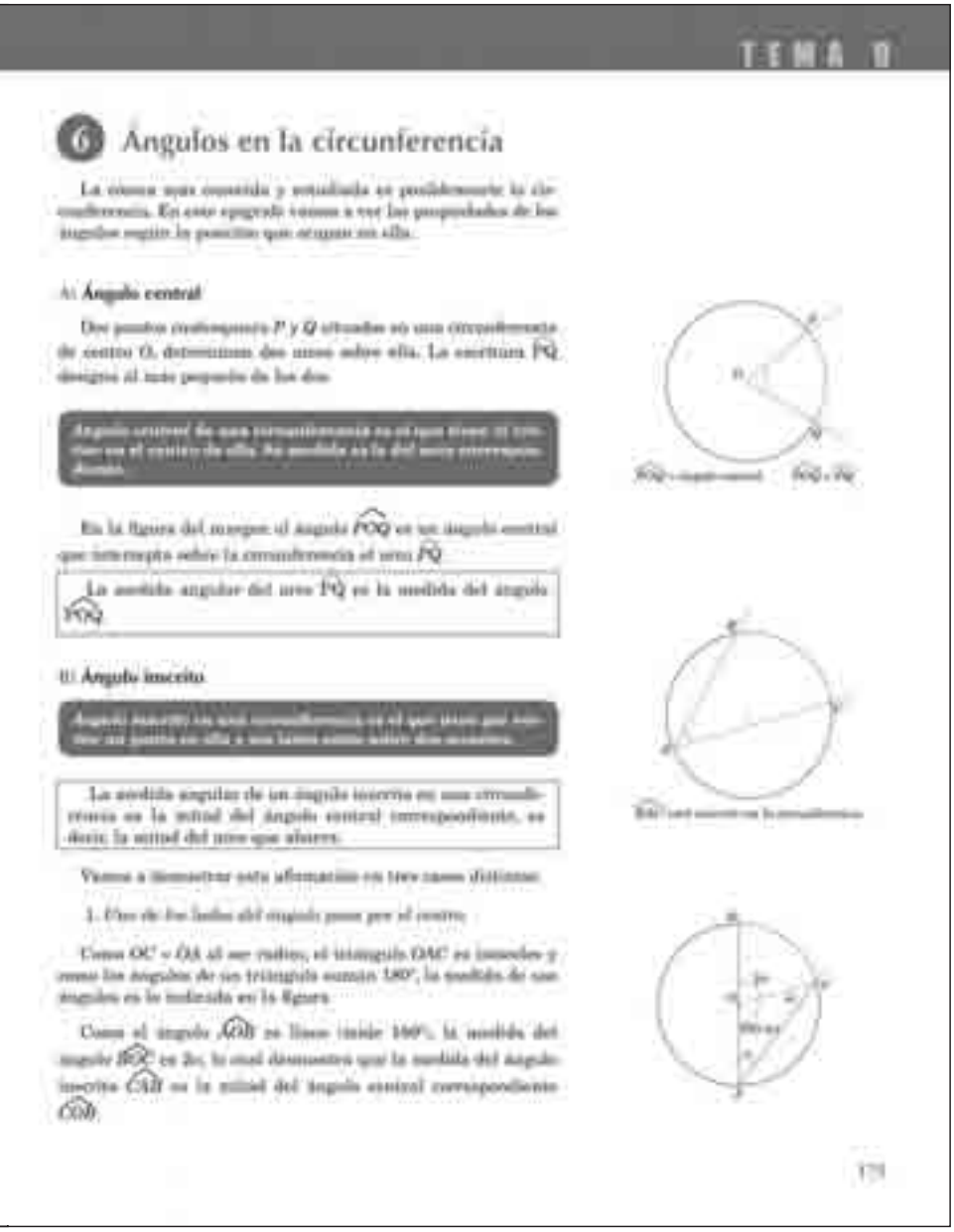
El espejo hiperbólico

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS

El triángulo BOA de la figura facilita la comprensión de la relación $a^2 + b^2 = c^2$.

Ejercicio 25 (página 181).

▶ Pág. 175. 6 Ángulos en circunferencia



TEMA 9

6 Ángulos en la circunferencia

La última que vamos a estudiar es precisamente la circunferencia. En este epígrafe vamos a ver las propiedades de los ángulos según la posición que ocupan en ella.

A) Ángulo central

Dos puntos cualesquiera P y Q situados en una circunferencia de centro O, determinan dos arcos sobre ella. La escritura $\overset{\frown}{PQ}$ designa al más pequeño de los dos.

Un ángulo central de una circunferencia es el que tiene el vértice en el centro de ella. Su medida es la del arco interceptado.

En la figura del margen el ángulo $\widehat{POQ}$ es un ángulo central que intercepta sobre la circunferencia el arco $\overset{\frown}{PQ}$.

La medida angular del arco $\overset{\frown}{PQ}$ es la medida del ángulo $\widehat{POQ}$.

B) Ángulo inscrito

Un ángulo inscrito en una circunferencia es el que tiene por vértice un punto en ella y sus lados cortan sobre dos secantes.

La medida angular de un ángulo inscrito en una circunferencia es la mitad del ángulo central correspondiente, es decir, la mitad del arco que abarca.

Vamos a demostrar esta afirmación en tres casos distintos:

1. *Uno de los lados del ángulo pasa por el centro.*

Como $OC = OA$ al ser radios, el triángulo OAC es isósceles y como los ángulos de un triángulo suman 180°, la medida de sus ángulos es la indicada en la figura.

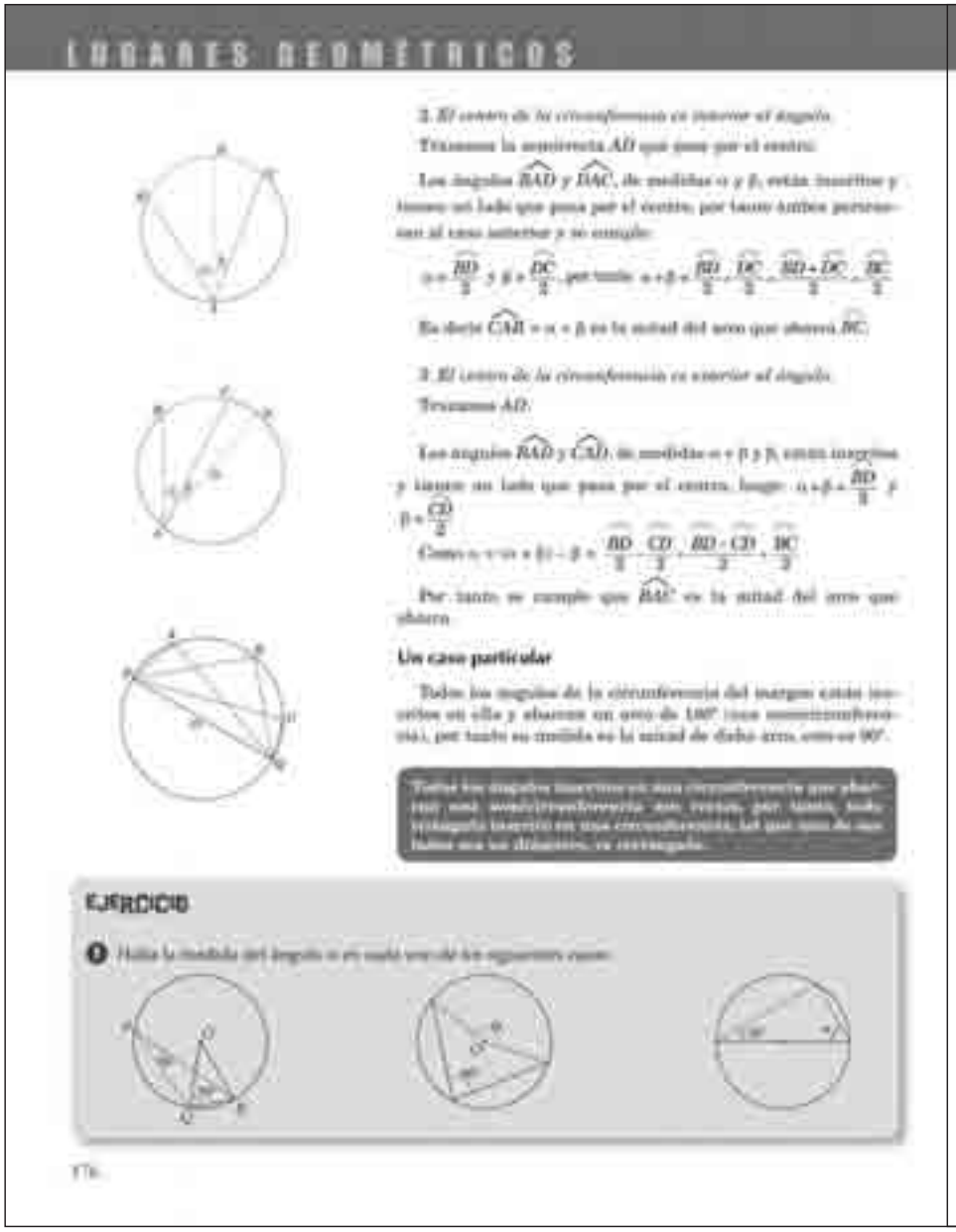
Como el ángulo $\widehat{AOB}$ es llano (mide 180°), la medida del ángulo $\widehat{BOC}$ es 2α, lo cual demuestra que la medida del ángulo inscrito $\widehat{CAB}$ es la mitad del ángulo central correspondiente $\widehat{COB}$.

171

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS

Consideramos imprescindible el uso del compás, la regla y el transportador en todo el epígrafe.

▶ Pág. 176



LUGARES GEOMÉTRICOS

3. *El centro de la circunferencia es interior al ángulo.*

Trazamos la semirrecta AD que pasa por el centro.

Los ángulos $\widehat{BAD}$ y $\widehat{DAC}$, de medidas α y β, están inscritos y tienen un lado que pasa por el centro, por tanto ambos pertenecen al caso anterior y se cumple:

$\alpha = \frac{\widehat{BD}}{2}$ y $\beta = \frac{\widehat{DC}}{2}$, por tanto $\alpha + \beta = \frac{\widehat{BD}}{2} + \frac{\widehat{DC}}{2} = \frac{\widehat{BD} + \widehat{DC}}{2} = \frac{\widehat{BC}}{2}$

Es decir $\widehat{CAB} = \alpha + \beta$ es la mitad del arco que abarca $\widehat{BC}$.

3. *El centro de la circunferencia es exterior al ángulo.*

Trazamos AD.

Los ángulos $\widehat{BAD}$ y $\widehat{CAD}$, de medidas $\alpha + \beta$ y β, están inscritos y tienen un lado que pasa por el centro, luego $\alpha + \beta = \frac{\widehat{BD}}{2}$ y $\beta = \frac{\widehat{CD}}{2}$

Como $\alpha = (\alpha + \beta) - \beta = \frac{\widehat{BD}}{2} - \frac{\widehat{CD}}{2} = \frac{\widehat{BD} - \widehat{CD}}{2} = \frac{\widehat{BC}}{2}$

Por tanto se cumple que $\widehat{BAC}$ es la mitad del arco que abarca.

Un caso particular

Todos los ángulos de la circunferencia del margen están inscritos en ella y abarcan un arco de 180° (una semicircunferencia), por tanto su medida es la mitad de dicho arco, esto es 90°.

"Todos los ángulos inscritos en una circunferencia que abarcan una semicircunferencia son rectos, por tanto, todo triángulo inscrito en una circunferencia, tal que uno de sus lados sea un diámetro, es rectángulo."

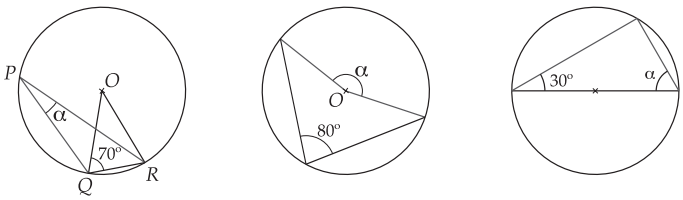
EJERCICIO

1. Halla la medida del ángulo α en cada uno de los siguientes casos:

TTA

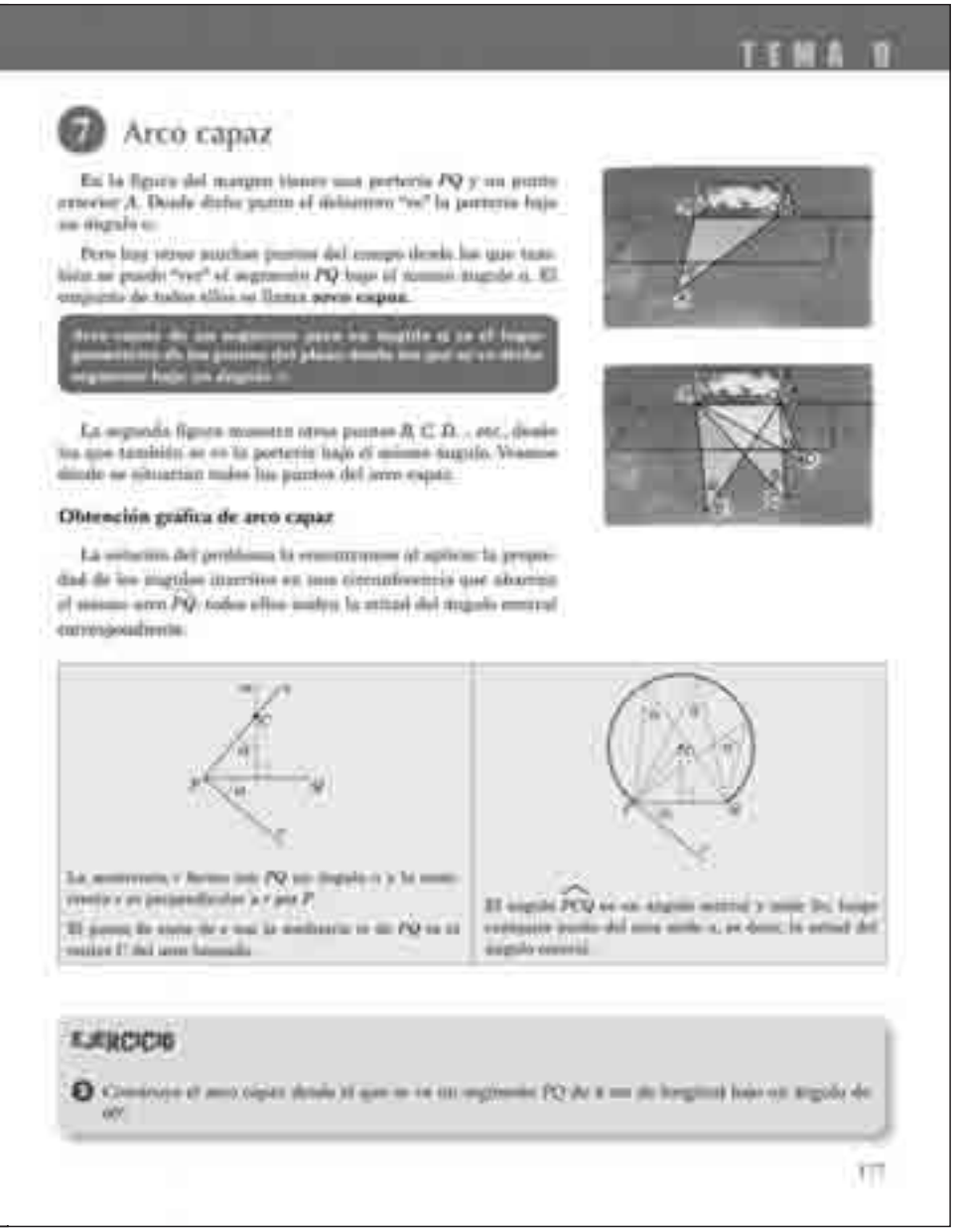
SOLUCIONARIO

1. Halla la medida del ángulo α en cada uno de los siguientes casos:



$\alpha = \frac{180 - 2 \times 70}{2} = 20^\circ$ $\alpha = 2 \times 80 = 160^\circ$ $\alpha = 90 - 30 = 60^\circ$

▶ Pág. 177. 7 Arco capaz



TEMA 9

7 Arco capaz

En la figura del margen tienes una portería PQ y un punto exterior A. Desde dicho punto el delantero "ve" la portería bajo un ángulo α.

Pero hay otros muchos puntos del campo desde los que también se puede "ver" el segmento PQ bajo el mismo ángulo α. El conjunto de todos ellos se llama **arco capaz**.

Arco capaz de un segmento para un ángulo α es el lugar geométrico de los puntos del plano desde los que se ve dicho segmento bajo un ángulo α.

La segunda figura muestra otros puntos B, C, D, ..., etc., desde los que también se ve la portería bajo el mismo ángulo. Veamos dónde se situarían todos los puntos del arco capaz.

Obtención gráfica de arco capaz

La solución del problema la encontramos al aplicar la propiedad de los ángulos inscritos en una circunferencia que abarcan el mismo arco $\overset{\frown}{PQ}$: todos ellos miden la mitad del ángulo central correspondiente.

La mediatriz r de PQ es diámetro de la circunferencia y la mediatriz s es perpendicular a r por P.

El punto de corte de r con la mediatriz de PQ es el centro C del arco buscado.

El ángulo $\overset{\frown}{PCQ}$ es un ángulo central y mide 2α; luego cualquier punto del arco mide α, es decir, la mitad del ángulo central.

EJERCICIO

3 Construye el arco capaz desde el que se ve un segmento PQ de 4 cm de longitud bajo un ángulo de 60°.

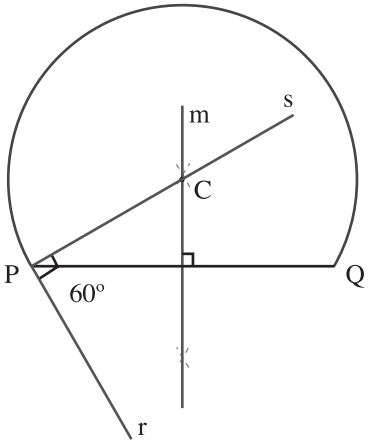
177

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS

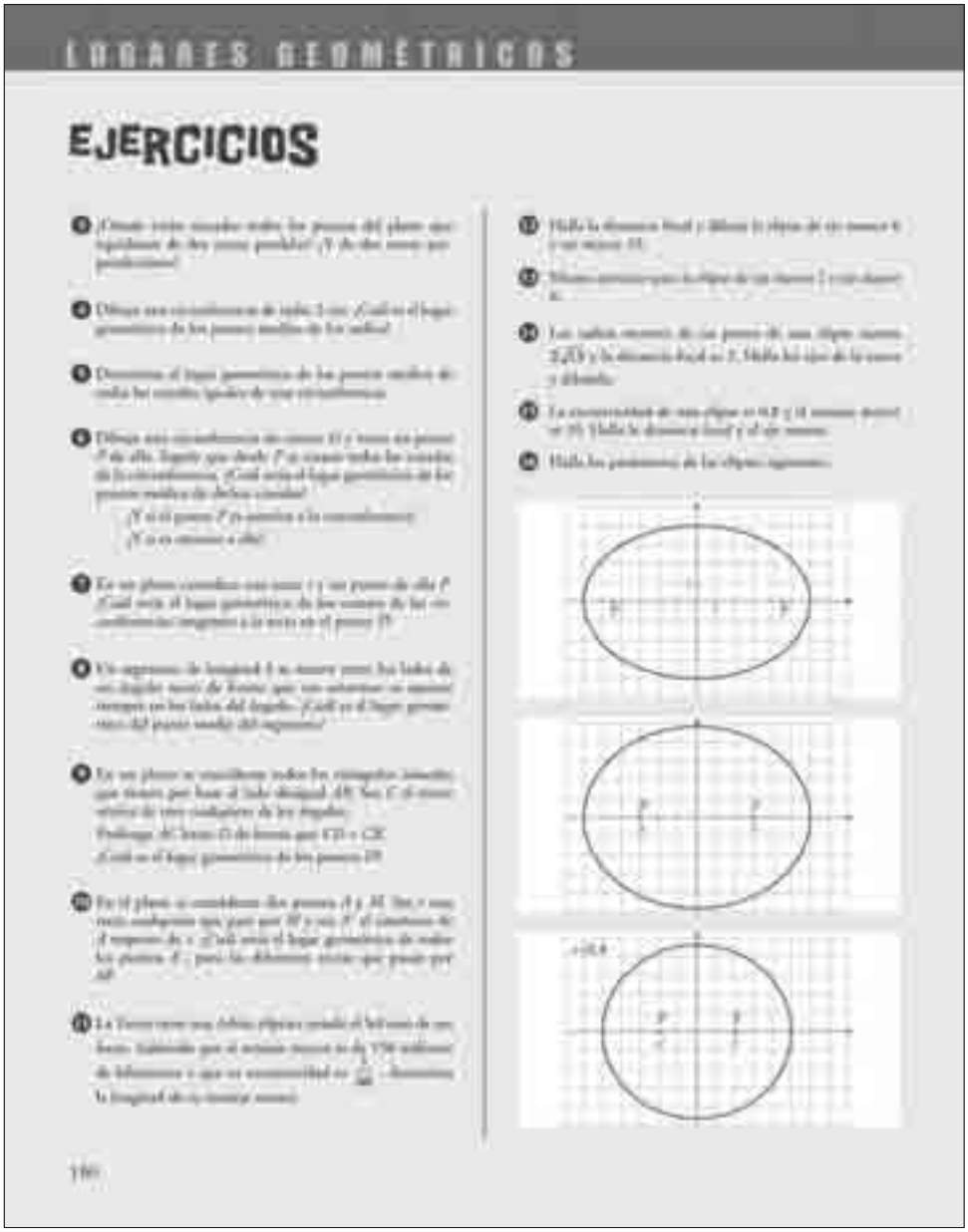
Epígrafe fundamentalmente práctico.

La correcta construcción de la figura primera de la página 177 resuelve el cálculo del centro y radio del arco capaz.

,2. Construye el arco capaz desde el que se ve un segmento PQ de 4 cm de longitud bajo un ángulo de 60º.



▶ Pág. 180. Ejercicios



LUGARES GEOMÉTRICOS

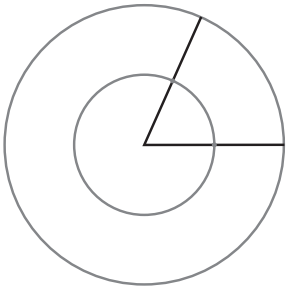
EJERCICIOS

3. ¿Dónde están situados todos los puntos del plano que equidistan de dos rectas paralelas? ¿Y de dos rectas perpendiculares?

En la paralela media

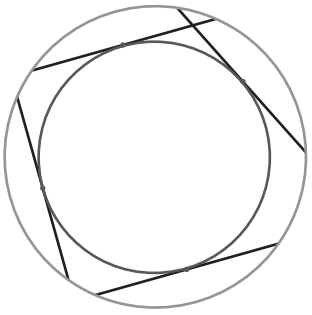
4. Dibuja una circunferencia de radio 2 cm. ¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos medios de los radios?

Una circunferencia concéntrica con la dibujada de radio 1 cm.



5. Determina el lugar geométrico de los puntos medios de todas las cuerdas iguales de una circunferencia.

Una circunferencia con el mismo centro tangente a todas las cuerdas en el punto medio.

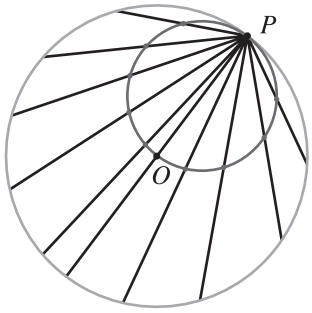


6. Dibuja una circunferencia de centro *O* y toma un punto *P* de ella. Supón que desde *P* se trazan todas las cuerdas de la circun-

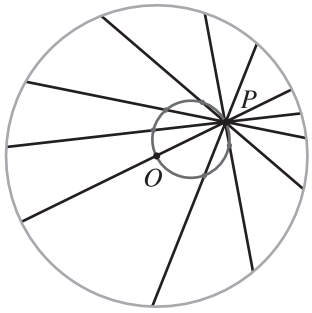
ferencia. ¿Cuál sería el lugar geométrico de los puntos medios de dichas cuerdas?

¿Y si el punto *P* es interior a la circunferencia? ¿Y si es exterior a ella?

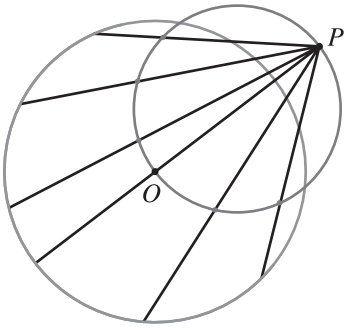
Una circunferencia tangente interior con diametro *OP*, el radio de la anterior, y punto de tangencia el punto *P*.



Una circunferencia interior con diametro *OP*.

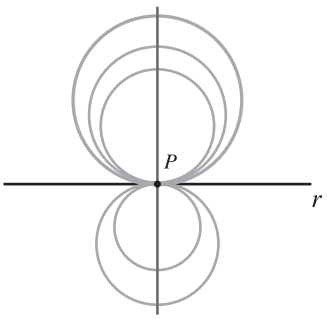


Una circunferencia secante con diámetro *OP*.



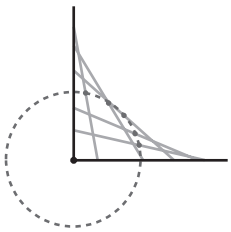
7. En un plano considera una recta *r* y un punto de ella *P*. ¿Cuál sería el lugar geométrico de los centros de las circunferencias tangentes a la recta en el punto *P*?

Una recta perpendicular a *r* por el punto *P*.



8. Un segmento de longitud *k* se mueve entre los lados de un ángulo recto de forma que sus extremos se apoyan siempre en los lados del ángulo. ¿Cuál es el lugar geométrico del punto medio del segmento?

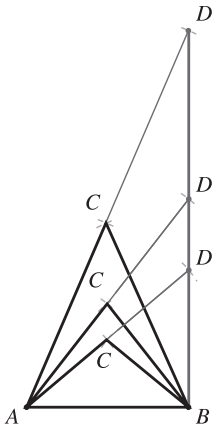
Un arco de circunferencia de centro el vértice del ángulo recto y radio $\frac{k}{2}$



9. En un plano se consideran todos los triángulos isósceles que tienen por base al lado desigual *AB*. Sea *C* el tercer vértice de uno cualquiera de los ángulos.

Prolonga *AC* hasta *D* de forma que *CD* = *CB*.

¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos *D*?

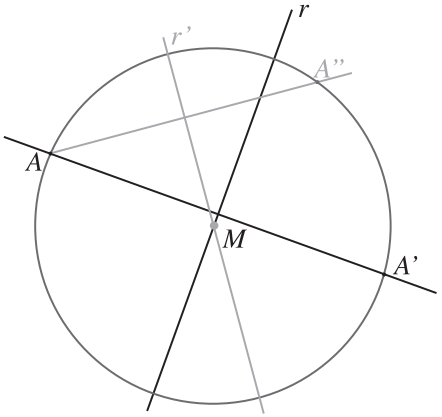


Una recta perpendicular a la base *AB* por el extremo *B*.

10. En el plano se consideran dos puntos *A* y *M*. Sea *r* una recta cualquiera que pase por *M* y sea *A'* el simétrico de *A* respecto de *r*. ¿Cuál sería el lugar geométrico de todos los puntos *A'*, para las diferentes rectas que pasan por *M*?

Una circunferencia de centro *M* y radio *MA*.

La recta *r'* y el punto *A"* corresponden a otra posición de la recta *r* del enunciado.



11. La Tierra tiene una órbita elíptica siendo el Sol uno de sus focos. Sabiendo que el semieje mayor es de 150 millones de kilómetros y que su excentricidad es $\frac{1}{60}$, determina la longitud de su semieje menor.

Si $a = 150$, $e = \frac{1}{60}$ como $e = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{1}{60}$,

despejando obtenemos $c = 2{,}5$.

De la igualdad $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow$

$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{150^2 - 2{,}5^2} = 149{,}979165$

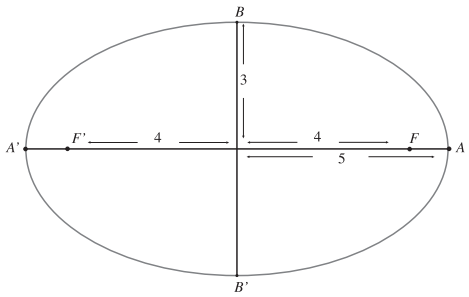
12. Halla la distancia focal y dibuja la elipse de eje menor 6 y eje mayor 10.

$2a = 10$; $a = 5$

$2b = 6$; $b = 3$

Aplicando y sustituyendo en

$a^2 = b^2 + c^2 = \sqrt{25 - 9} = 4$, luego la distancia focal es 8.



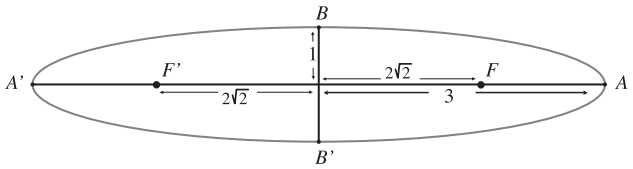
13. Mismo ejercicio para la elipse de eje menor 2 y eje mayor 6.

$2b = 2 \Rightarrow b = 1$

$2a = 6 \Rightarrow a = 3 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{9 - 1} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

La distancia focal es $4\sqrt{2}$



14. Los radios vectores de un punto de una elipse suman $2\sqrt{13}$ y la distancia focal es 2. Halla los ejes de la curva y dibújala.

La suma de los radios vectores coincide con el eje mayor, luego $2a = 2\sqrt{13} \Rightarrow a = \sqrt{13}$

Por otro lado $2c = 2 \rightarrow c = 1$.

Aplicando y despejando de $a^2 = b^2 + c^2$

$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{13 - 1} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

15. La excentricidad de una elipse es 0,8 y el semieje mayor es 10. Halla la distancia focal y el eje menor.

$e = 0{,}8$; $a = 10$; $e = \frac{c}{a}$

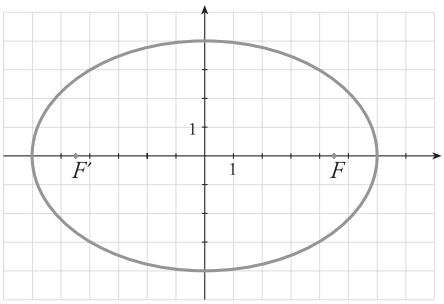
sustituyendo y despejando $c = 0{,}8 \times 10 = 8$.

Luego la distancia focal es 16 y despejando de

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{100 - 64} = 6$

y el eje menor es 12.

16. Halla los parámetros de las elipses siguientes:



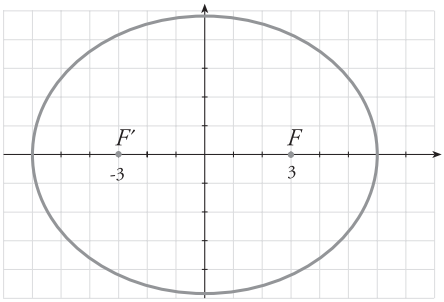
$F\left(2\sqrt{5}, 0\right)$ $A(6,0)$ $B(0,4)$

$F'\left(-2\sqrt{5}, 0\right)$ $A'(-6,0)$ $B'(0,-4)$

$a = 6$ $c = 4$

$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{36 - 9} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$

$e = \frac{3\sqrt{3}}{6} = 0{,}87$



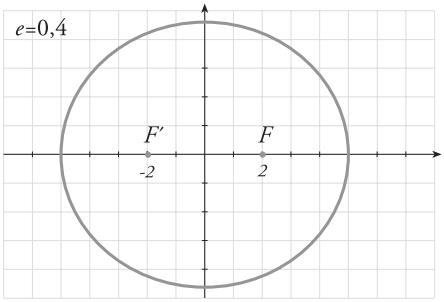
$F(3,0)$ $A(6,0)$ $B(0,4)$

$F'\left(-2\sqrt{5}, 0\right)$ $A'(-6,0)$ $B'(0,-4)$

$a = 6$ $b = 4$

$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{36 - 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

$e = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{5}}{6} = 0{,}75$



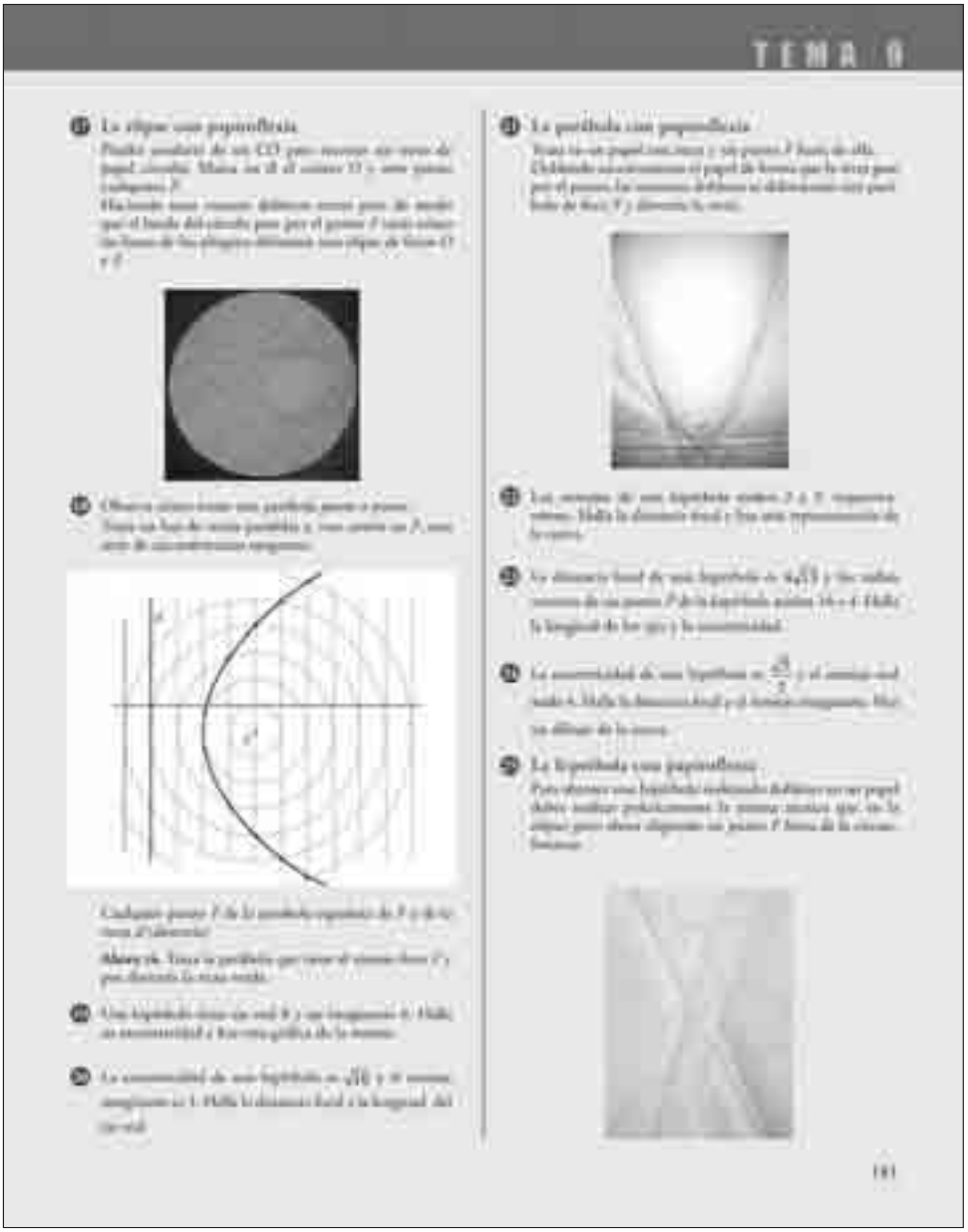
$F(2,0)$ $A(5,0)$ $B\left(0, \sqrt{21}\right)$

$F'(-2,0)$ $A'(-5,0)$ $B'\left(0, -\sqrt{21}\right)$

$a = 5$ $c = 2$

$e = 0{,}4$ $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{25 - 4} = \sqrt{21}$

▶ Pág. 181. Ejercicios


TEMA 9

17 La elipse con papiroflexia

Puedes ayudarte de un CD para recortar un trozo de papel circular. Marca en él el centro O y otro punto cualquiera F.

Haciendo unas cuantas dobleces rectas pero de modo que el borde del círculo pase por el punto F verás cómo las líneas de los pliegues delimitan una elipse de focos O y F.

18 Observa cómo trazar una parábola punto a punto.

Traza un haz de rectas paralelas y, con centro en F, una serie de circunferencias tangentes.

Cualquier punto P de la parábola equidista de F y de la recta d (directriz).

Ahora tú. Traza la parábola que tiene el mismo foco F y por directriz la recta verde.

19 La parábola con papiroflexia

Traza en un papel una recta r y un punto F fuera de ella. Doblando sucesivamente el papel de forma que la recta pase por el punto, las sucesivas dobleces se dibujarán una a una (una hoja de 8×11, 9 y diversos tamaños).

20 Los vértices de una hipérbola distan 2 u. Y vértices reales. Halla la distancia focal y traza una representación de la curva.

21 La distancia focal de una hipérbola es $4\sqrt{13}$ y los radios vectores de un punto P de la hipérbola miden 16 u y 4. Halla la longitud de los ejes y la excentricidad.

22 La excentricidad de una hipérbola es $\frac{\sqrt{5}}{2}$ y el semieje real mide 4. Halla la distancia focal y el semieje imaginario. Haz un dibujo de la curva.

23 La hipérbola con papiroflexia

Para obtener una hipérbola mediante dobleces en un papel debes realizar primeramente la misma construcción que en la elipse pero ahora eligiendo un punto P fuera de la circunferencia.

181

SOLUCIONARIO

17. La elipse con papiroflexia

Puedes ayudarte de un CD para recortar un trozo de papel circular. Marca en él el centro *O* y otro punto cualquiera *F*.

Haciendo unas cuantas dobleces rectas pero de modo que el borde del círculo pase por el punto *F* verás cómo las líneas de los pliegues delimitan una elipse de focos *O* y *F*.



Respuesta abierta

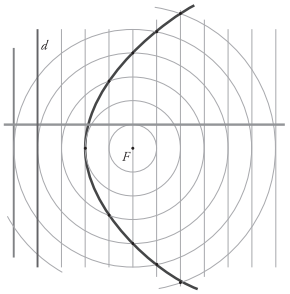
18. Observa cómo trazar una parábola *punto a punto*.

Traza un haz de rectas paralelas y, con centro en *F*, una serie de circunferencias tangentes.

Cualquier punto *P* de la parábola equidista de *F* y de la recta *d* (directriz).

Ahora tú. Traza la parábola que tiene el mismo foco *F* y por directriz la recta verde.

Respuesta abierta



19. Una hipérbola tiene eje real 8 y eje imaginario 6. Halla su excentricidad y haz una gráfica de la misma.

$2a = 8 \Rightarrow a = 4$

$2b = 6 \Rightarrow b = 3$

Utilizamos que $c^2 = a^2 + b^2$ y obtenemos

$c = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$ luego $e = \frac{c}{a} = \frac{5}{4} = 1,25$

20. La excentricidad de una hipérbola es $\sqrt{10}$ y el semieje imaginario es 3. Halla la distancia focal y la longitud del eje real.

$e = \sqrt{10}; \qquad b = 3$

$\sqrt{10} = \frac{c}{a}; \; c = a\sqrt{10}$ con este dato y b que es conocido

sustituimos en $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(a\sqrt{10}\right)^2 = a^2 + 9 \Rightarrow 10\,a^2 - a^2 = 9 \Rightarrow 9\,a^2 = 9$

$a = 1;$ luego $c = \sqrt{10}$

La distancia focal es $2\sqrt{10}$ y el eje real es 2.

21. La parábola con papiroflexia

Traza en un papel una recta y un punto *F* fuera de ella.

Doblando sucesivamente el papel de forma que la recta pase por el punto, las sucesivas dobleces te delimitarán una parábola de foco *F* y directriz la recta.



Respuesta abierta.

22. Los semiejes de una hipérbola miden 2 y 3, respectivamente. Halla la distancia focal y haz una representación de la curva.

$a = 2$

$b = 3 \;\Rightarrow c = \sqrt{4+9} = \sqrt{13} \Rightarrow$ La distancia focal es $2\sqrt{13}$

23. La distancia focal de una hipérbola es $4\sqrt{13}$ y los radios vectores de un punto *P* de la hipérbola miden 16 y 4. Halla la longitud de los ejes y la excentricidad.

$2c = 4\sqrt{13} \Rightarrow c = 2\sqrt{13}$

Si los radio vectores son 16 y 4, su diferencia es $2a$, luego $2a = 12 \Rightarrow a = 6$.

El eje real es 12, la excentricidad $e = \frac{2\sqrt{13}}{6} = 1,2$

Despejamos $b = \sqrt{c^2 - a^2} = 4$, el eje imaginario es 8.

24. La excentricidad de una hipérbola es $\frac{\sqrt{5}}{2}$ y el semieje real mide 4. Halla la distancia focal y el semieje imaginario. Haz un dibujo de la curva.

$e = \frac{\sqrt{5}}{2} \qquad a = 4$

$\frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{c}{4} \Rightarrow c = 2\sqrt{5} \Rightarrow$ la distancia focal es $4\sqrt{5}$

$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{4} = 2$ luego $b = 2$

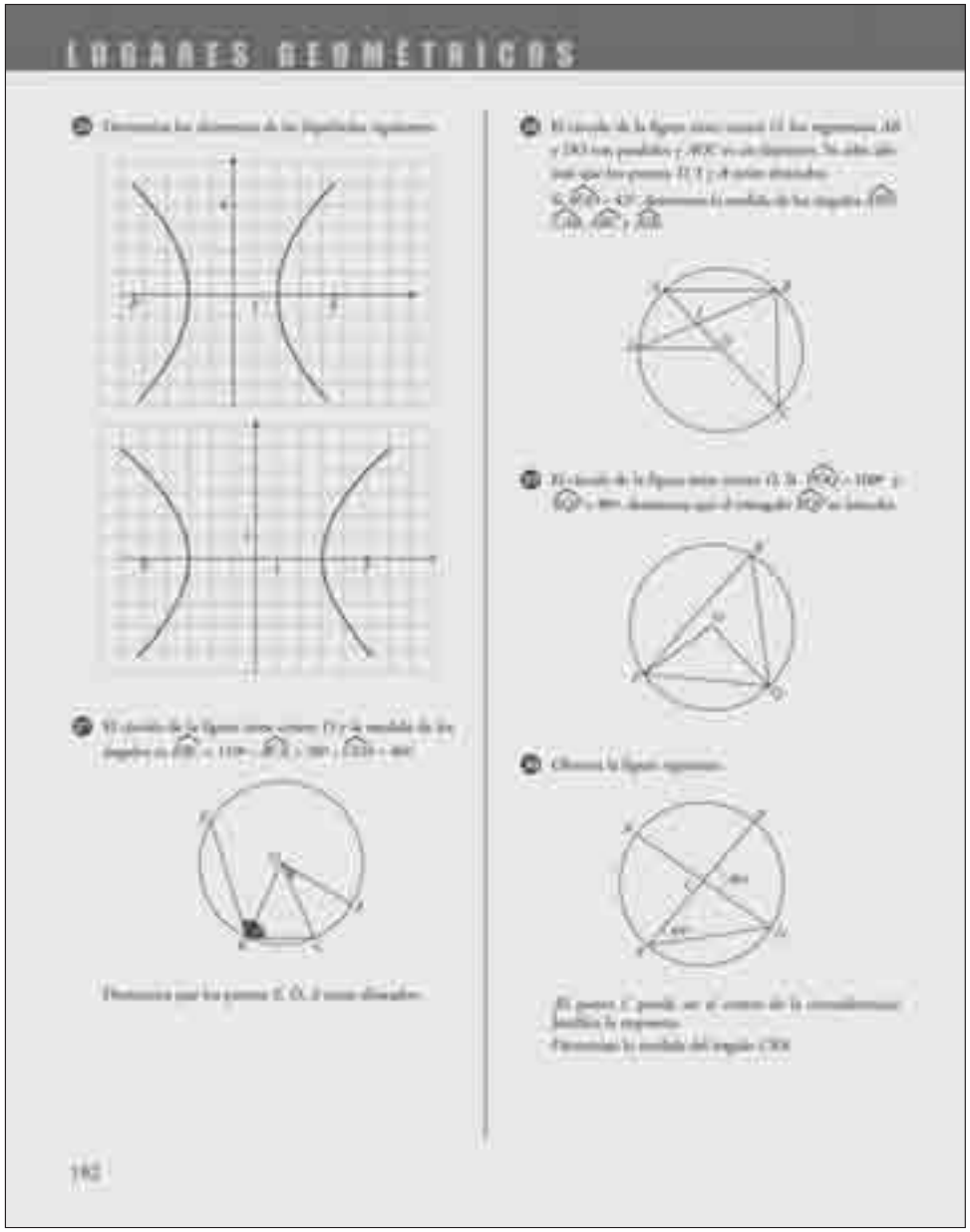
25. La hipérbola con papiroflexia

Para obtener una hipérbola realizando dobleces en un papel debes realizar prácticamente la misma técnica que en la elipse, pero ahora eligiendo un punto *F* fuera de la circunferencia.



Respuesta abierta.

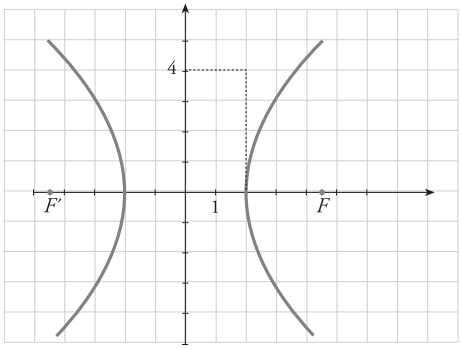
▶ Pág. 182. Ejercicios


LUGARES GEOMÉTRICOS

182

SOLUCIONARIO

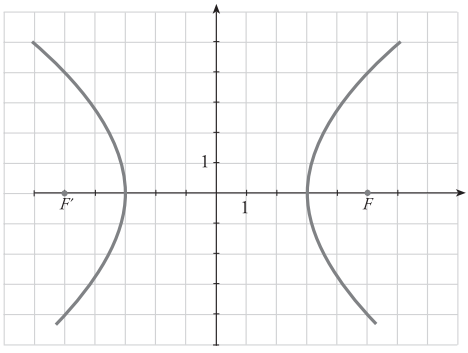
26. Determina los elementos de las hipérbolas siguientes:



A (2,0) B (0,4) F ($2\sqrt{5}$,0)
A' (–2,0) B' (0,– 4) F' ($-2\sqrt{5}$,0)

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$e = \frac{2\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$$



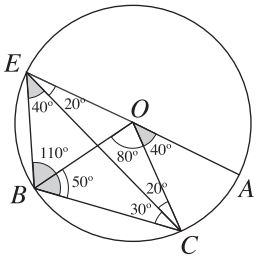
A (3,0) F (5,0) B (0,4)
A' (–3,0) F (–5,0) B (0,–4)

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{25 - 9} = 4$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{a}{3} = 1,\hat{6}$$

27. El círculo de la figura tiene centro O y la medida de los ángulos es $\widehat{EBC}$ = 110º; $\widehat{BCE}$ = 30º; $\widehat{COA}$ = 40º.

Demuestra que los puntos *E, O, A* están alineados.



En el triángulo *BCE*, como la suma de los ángulos es 180º, el ángulo $\widehat{BEC}$ = 40°.

El ángulo $\widehat{BOC}$ es el ángulo central correspondiente al ángulo inscrito *BEC*, luego su medida es el doble, por tanto $\widehat{BOC}$ = 80º.

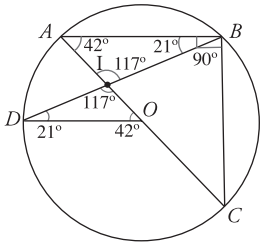
El triángulo *OBC* es isosceles por tener dos lados coincidiendo con dos radios, luego sus ángulos $\widehat{OBC}$ y $\widehat{OCB}$ son iguales y miden 50º, luego el ángulo $\widehat{ECO}$ valdrá 20º.

El ángulo $\widehat{CEA}$ es un ángulo inscrito con un ángulo central correspondiente que mide 40º, luego $\widehat{CEA}$ = 20º.

Con el triángulo $\widehat{CEO}$ conocidos dos ángulos de 20º, el tercero medirá 140º o sea $\widehat{COE}$ =140º que sumado alde 40º nos da un ángulo llano, luego los puntos *E*, *O*, *A* están alineados.

28. El círculo de la figura tiene centro *O*, los segmentos *AB* y *DO* son paralelos y *AOC* es un diámetro. Se sabe además que los puntos *D, I* y *B* están alineados.

Si $\widehat{AOD}$ = 42º, determina la medida de los ángulos $\widehat{ABD}$, $\widehat{CAB}$, $\widehat{ABC}$ y $\widehat{AIB}$.



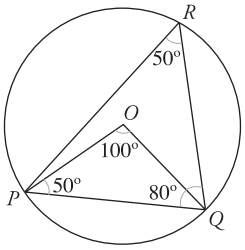
$\widehat{ABD}$ = 21° por abarcar el mismo arco que el ángulo central $\widehat{AOD}$ que mide 42º, luego el inscrito mide la mitad.

Como las rectas *AB* y *DO* son paralelas cortadas por una transversal que es *DB*, el ángulo $\widehat{ODI}$ = 21° por alternos externos, luego en el triángulo *DIO*, despejando obtenemos que $\widehat{DIO}$ = 117°que al ser opuesto al $\widehat{AIB}$ = 117°.

En el triángulo $\widehat{AIB}$ = 117°, despejando obtenemos que $\widehat{CAB}$ = 42°.

Por último ya $\widehat{ABC}$ = 90° que abarca un diámetro.

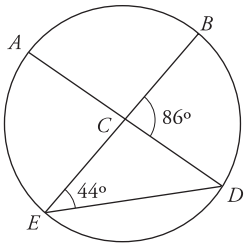
29. El círculo de la figura tiene centro *O*. Si $\widehat{POQ}$ = 100º y $\widehat{RQP}$ = 80º, demuestra que el triángulo $\widehat{RQP}$ es isósceles.



Si $\widehat{POQ}$ = 100°, $\widehat{PRQ}$ = 50° por abarcar el mismo arco y uno ser central, el inscrito mide la mitad.

Mirando el triángulo *PQR*, tenemos dos ángulos $\widehat{PRQ}$ = 50° y $\widehat{PQR}$ = 80° teniendo en cuenta que suman 180º los tres ángulos, el ángulo $\widehat{QPR}$ = 50°, luego si tiene dos ángulos iguales, tiene los lados opuestos a dichos ángulos iguales, luego es isósceles.

30. Observa la figura siguiente:



¿El punto *C* puede ser el centro de la circunferencia? Justifica la respuesta.

Determina la medida del ángulo $\widehat{CBA}$.

a) No puede ser el centro puesto que el ángulo $\widehat{BCD}$ deberían ser el doble que $\widehat{BED}$.

b) $\widehat{CBA}$ = 32°.

Tema 10

Cuerpos en el espacio

▸ Programación de aula

Objetivos

- Considerar las unidades de medición para la superficie y el volumen.
- Recordar los elementos, propiedades y fórmulas de las principales figuras planas.
- Definir la simetría en el espacio.
- Definir los elementos y propiedades de los prismas.
- Definir los elementos y propiedades del cilindro.
- Definir los elementos y propiedades de las pirámides.
- Definir los elementos y propiedades del cono.
- Definir los elementos y propiedades de la esfera.
- Definir los elementos principales del globo terráqueo.

Criterios de evaluación

- Saber usar y entender la equivalencia entre las unidades de medida para la superficie y el volumen.
- Determinar el área de cualquier polígono regular e irregular.
- Distinguir entre diferentes cuerpos en el espacio y de los elementos que los definen.
- Utilizar las fórmulas de áreas y volúmenes de cuerpos geométricos para medir magnitudes.
- Detectar problemas geométricos diferenciando los elementos conocidos de los que se pretenden conocer.
- Formular y comprobar conjeturas acerca de propiedades geométricas en la esfera.
- Describir las formas y propiedades sobre la superficie terrestre.
- Utilizar planisferios.

Contenidos

- **Conceptos** ("saber")
  - Triángulos y cuadriláteros.
  - Polígonos regulares.
  - Círculo y partes del círculo.
  - Unidades de volumen.
  - Poliedros. Ejes y planos de simetría
  - Prismas.
  - Pirámides.
- **Procedimientos** ("Saber hacer")
  - Utilización de la terminología y notación adecuadas para describir con precisión situaciones, formas, propiedades y configuraciones geométricas.
  - Construcción de figuras utilizando los materiales y las técnicas adecuadas a cada caso.
  - Determinación del área de cualquier polígono regular e irregular.
  - Análisis previo de las medidas que intervienen.
  - Utilización de las fórmulas de áreas y volúmenes de cuerpos geométricos para medir magnitudes.
  - Construcción en cartulina de los desarrollos de los cuerpos incluidos en la unidad temática.
  - Utilización de los instrumentos de medida y dibujo habituales.
  - Búsqueda de propiedades, regularidades y relaciones en los cuerpos geométrios estudiados.
  - Detección de problemas geométricos diferenciando los elementos conocidos de los que se pretenden conocer.
  - Reducción de problemas geométricos complejos a otros más sencillos.
  - Descripción verbal de problemas geométricos y del proceso seguido en su resolución, confrontándolos con otros posibles.
  - Resolución de problemas de áreas y volúmenes de: cilindro, cono y esfera.
  - Formulación y comprobación de conjeturas acerca de propiedades geométricas en la esfera.
  - Utilización de la terminología y notación adecuadas para describir con precisión situaciones, formas y propiedades sobre la superficie terrestre.
  - Representación plana de la esfera terrestre. Utilización de planisferios.
- **Actitudes** ("Saber ser")
  - Reconocimiento y valoración de la utilidad de la Geometría para reconocer y resolver diferentes situaciones relativas al entorno del alumno.
  - Apreciación de la belleza de ciertas figuras geométricas, reconociendo su presencia en la naturaleza, en el arte y en la técnica.
  - Confianza en las propias capacidades para percibir el espacio y resolver problemas geométricos.
  - Curiosidad e interés por investigar sobre formas, configu-ra-cioens y relaciones geomé-tricas.
  - Perseverancia en la búsqueda de soluciones a los problemas geométricos y en la mejora de las ya encontradas.
  - Flexibilidad para enfrentarse a situaciones geométricas desde distintos puntos de vista.
  - Interés y respeto por las estrategias y soluciones a problemas geométricos distintas de las propias.

▸ Programación por competencias

COMPETENCIA MATEMÁTICA

PENSAMIENTO Y RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

Descriptores

1. Caracterizar los distintos cuerpos que existen en el espacio.
2. Extender el modelo que caracteriza cada uno de los distintos cuerpos en el espacio estudiados, mediante la abstracción de sus propiedades.

Desempeño

1. Utiliza la terminología y notación adecuadas para describir con precisión situaciones, formas, propiedades y configuraciones geométricas en el espacio.	- Utiliza con precisión los elementos de cada cuerpo. - Describe adecuadamente las propiedades y configuraciones de los distintos cuerpos estudiados.	- **Ejercicios del tema** (pág. 186 a 202)
2. Busca las propiedades, regularidades y relaciones en los cuerpos geométricos estudiados.	- Establece comparaciones entre las características de los cuerpos en el espacio.	- **Ejercicios del tema** (pág. 186 a 202)
3. Caracteriza la simetría en el espacio.	- Identifica la simetría de distintos cuerpos en el espacio.	- **Ejercicios 26 a 29, 46 y 47** (pág. 200 y 201)

CONSTRUCCIÓN DE MODELOS

Descriptores

1. Diseñar y analizar los fundamentos y propiedades de figuras planas y de cuerpos en el espacio.
4. Traducir e interpretar los elementos de las figuras planas y de los cuerpos en el espacio en términos del mundo real.

Desempeño

1. Modeliza distintas figuras planas y cuerpos en el espacio.	- Define los elementos definitorios de figuras planas y cuerpos en el espacio.	- E**jercicios 5, 26 a 29, 45 a 47 y 49** (pág. 191, 200 a 202)
2. Trabaja con las propiedades de las figuras planas y de los cuerpos en el espacio estudiados.	- Opera con los elementos definitorios de figuras planas y cuerpos en el espacio.	- E**jemplos y ejercicios del tema** (pág. 186 a 202)
3. Interpreta las figuras planas y cuerpos en el espacio en términos del mundo real.	- Observa la presencia de figuras planas y cuerpos en el espacio en el mundo real.	- **Introducción** (pág. 184) - **Ejercicios 33, 34, 44, 54, 56, 58 y 62 a 67** (pág. 200 a 202)

ARGUMENTAR MATEMÁTICAMENTE

Descriptores

1. Dibujar el desarrollo de un cuerpo en el espacio para obtener sus características principales, área y volumen.

Desempeño

1. Dibuja el desarrollo de un cuerpo en el espacio.	- Obtiene el área del cuerpo en el espacio. - Obtiene el volumen del cuerpo en el espacio. - Obtiene características del cuerpo en el espacio.	- **Ejercicios 5, 26 a 29 y 46** (pág. 191, 200 y 201)

PLANTEAR Y RESOLVER PROBLEMAS MATEMÁTICOS	**Descriptores**		
	1. Detectar problemas geométricos diferenciando los elementos conocidos de los que se pretenden conocer. 2. Reducir problemas geométricos de áreas y volúmenes de cilindros, conos y esferas complejos a otros más sencillos, y resolverlos.		
	Desempeño		
	1. Plantea una situación concreta en la que interviene un cuerpo en el espacio.	- Distingue la tipología del cuerpo en el espacio. - Constata la existencia de elementos conocidos y otros por conocer.	- **Ejemplos y ejercicios del tema** (pág. 186 a 202)
	1. Resuelve la cuestión planteada.	- Obtiene la solución numérica. - Analiza la solución y obtiene conclusiones.	
UTILIZAR EL LENGUAJE TÉCNICO FORMAL	**Descriptores**		
	1. Trabajar con las fórmulas de áreas y volúmenes de las figuras planas y cuerpos en el espacio.		
	Desempeño		
	1. Utiliza las fórmulas que expresan el área y volumen de figuras planas y cuerpos en el espacio.	- Calcula áreas de figuras planas y elementos planos de los cuerpos en el espacio. - Calcula volúmenes de los cuerpos en el espacio.	- **Ejemplos 2 a 5** (pág. 191 y 193) - **Ejercicios 1 a 4, 6 a 9 y 12 a 64** (pág. 191, 193 y 200 a 202)

COMPETENCIA LINGÜÍSTICA

COMPETENCIA LINGÜÍSTICA	**Descriptores**		
	1. Comprender el enunciado de un problema geométrico en el que intervienen figuras planas y cuerpos en el espacio. 2. Aportar vocabulario específico relacionado con los cuerpos en el espacio. 3. Describir verbalmente los problemas geométricos y el proceso seguido en su resolución.		
	Desempeño		
	1. Comprende lo que lee.	- Identifica la pregunta que se le hace. - Identifica los elementos de cálculo geométrico que intervienen.	- **Ejemplo y ejercicios del tema** (pág. 186 a 202)
	2. Discrimina e interpreta los elementos geométricos que le da el enunciado de un problema como información.	- Diferencia los distintos elementos geométricos.	
	3. Se expresa por escrito de manera adecuada y correcta, con claridad y coherencia, utilizando un lenguaje preciso, para la descripción de los criterios utilizados en la solución de un problema geométrico.	- Presenta el texto de la solución del problema de forma adecuada y correcta. - Selecciona los aspectos relevantes de la solución. - Es capaz de traducir al lenguaje natural el lenguaje formal de la Geometría.	

COMPETENCIA EN CONOCIMIENTO E INTERACCION CON EL MEDIO FISICO

COMPETENCIA EN CONOCIMIENTO E INTERACCION CON EL MEDIO FÍSICO

Descriptores

1.Constatar la existencia de distintos tipos de cuerpos en el medio físico.
2. Aplicar las propiedades de los cuerpos en el espacio para resolver situaciones cotidianas de la vida y del entorno.

Desempeño

1. Advierte en el espacio físico la existencia de elementos geométricos.	- Sintetiza la información percibida del entorno físico. - Relaciona la información recibida con los elementos geométricos estudiados. - Advierte la existencia de simetría en la naturaleza.	- **Introducción** (pág. 184) - Ej**emplo 6** (pág. 196) - Ej**ercicios 10, 11, 44, 47, 54, 56, 58 y 62 a 67** (pág. 197, 201 y 202)
2. Utiliza la Geometría para resolver situaciones prácticas que se plantean en el medio y espacio físico.	- Obtiene conclusiones del entorno físico cuantificando las características de los elementos geométricos presentes en él. - Decide opciones de actuación en función de las conclusiones obtenidas.	

COMPETENCIA APRENDER A APRENDER

COMPETENCIA APRENDER A APRENDER

Descriptores

1. Confiar en las propias capacidades para percibir el espacio y resolver problemas geométricos.
2. Tener curiosidad e interés por investigar sobre formas, configuraciones y relaciones geométricas.

Desempeño

1. Desarrolla habilidades para la comprensión de problemas geométricos.	- Lee los enunciados de los ejercicios con la intención de comprender, relacionar y sintetizar contenidos. - Maneja adecuadamente recursos y técnicas de aprendizaje individual.	- **Ejemplos y ejercicios del tema** (pág. 186 a 202)
2. Desarrolla la curiosidad por las formas, configu-ra-ciones y relaciones geométricas.	- Plantea sugerencias de ampliación a los resultados obtenidos tras el análisis de un planteamiento geométrico. - Constata la semejanza o diferencia entre distintas figuras y cuerpos.	

COMPETENCIA CULTURAL Y ARTÍSTICA

COMPENTENCIA CULTURAL Y ARTÍSTICA

Descriptores

1. Constatar la belleza de ciertas figuras geométricas y reconocer su presencia en la naturaleza, en el arte y en la técnica.
2. Representar gráficamente figuras geométricas a mano alzada o con instrumentos de dibujo habituales.

Desempeño

1. Advierte la presencia de ciertas figuras geométricas en la naturaleza, en el arte y en la técnica.	- Destaca la existencia de formas geométricas en la cultura y el arte. - Destaca la existencia de simetría en el arte.	- **Introducción** (pág. 184) - **E jercicios 5, 26 a 29 y 46** (pág. 191, 200 y 201)
2. Representa gráficamente figuras geométricas.	- Diseña esquemáticamente figuras geométricas. - Dibuja figuras planas y cuerpos en el espacio a mano alzada o con instrumentos de dibujo habituales.	

COMPETENCIA AUTONOMÍA E INICIATIVA PERSONAL

COMPETENCIA AUTONOMÍA E INICIATIVA PERSONAL

Descriptores

1. Buscar soluciones a los problemas geométricos y mejorar las ya encontradas.
2. Tener flexibilidad para enfrentarse a situaciones geométricas desde distintos puntos de vista.

Desempeño

1. Idea y planifica el desarrollo de la solución para una situación geométrica concreta o mejora una solución preexistente.	- Elige la opción adecuada para la resolución de los ejercicios. - Mantiene la opción hasta llegar a la conclusión final.	- **Ejemplos y ejercicios del tema** (pág. 186 a 202)
2. Evalúa la solución obtenida.	- Valora el resultado y lo pone en relación con el enunciado del problema resuelto. - Reflexiona sobre si el trabajo efectuado ha sido suficiente para el objetivo propuesto.	
3. Toma decisiones en función de la solución geométrica adoptada.	- Decide en función del resultado. - Acepta el posible error de una decisión cuando la solución no es la idónea.	

▶ Pág. 184 - 185. Cuerpos en el espacio


TEMA 10

CUERPOS EN EL ESPACIO

Un pararrayos es un instrumento formado por una barra de hierro coronada por una punta de cobre o de platino cuyo objeto es atraer un rayo y conducir la descarga eléctrica hacia tierra, de modo tal que no cause daños a construcciones o personas. Este artilugio fue inventado en 1753 por Benjamin Franklin, mientras efectuaba una serie de experimentos sobre la propiedad que tienen las puntas agudas, puestas en contacto con la tierra, de descargar los cuerpos electrizados situados en su proximidad.

En principio la zona de protección de un pararrayos es un cono de radio igual a su altura desde el suelo.

SOLUCIONARIO

1. Convierte en km^2 una superficie de 6548343 m2. Completa la tabla correctamente

km^2	hm^2	dam^2	m^2	dm^2	cm^2	mm^2
6,548343	654,8343	65483,43	6548343	654834300	65483430000	6548343000000

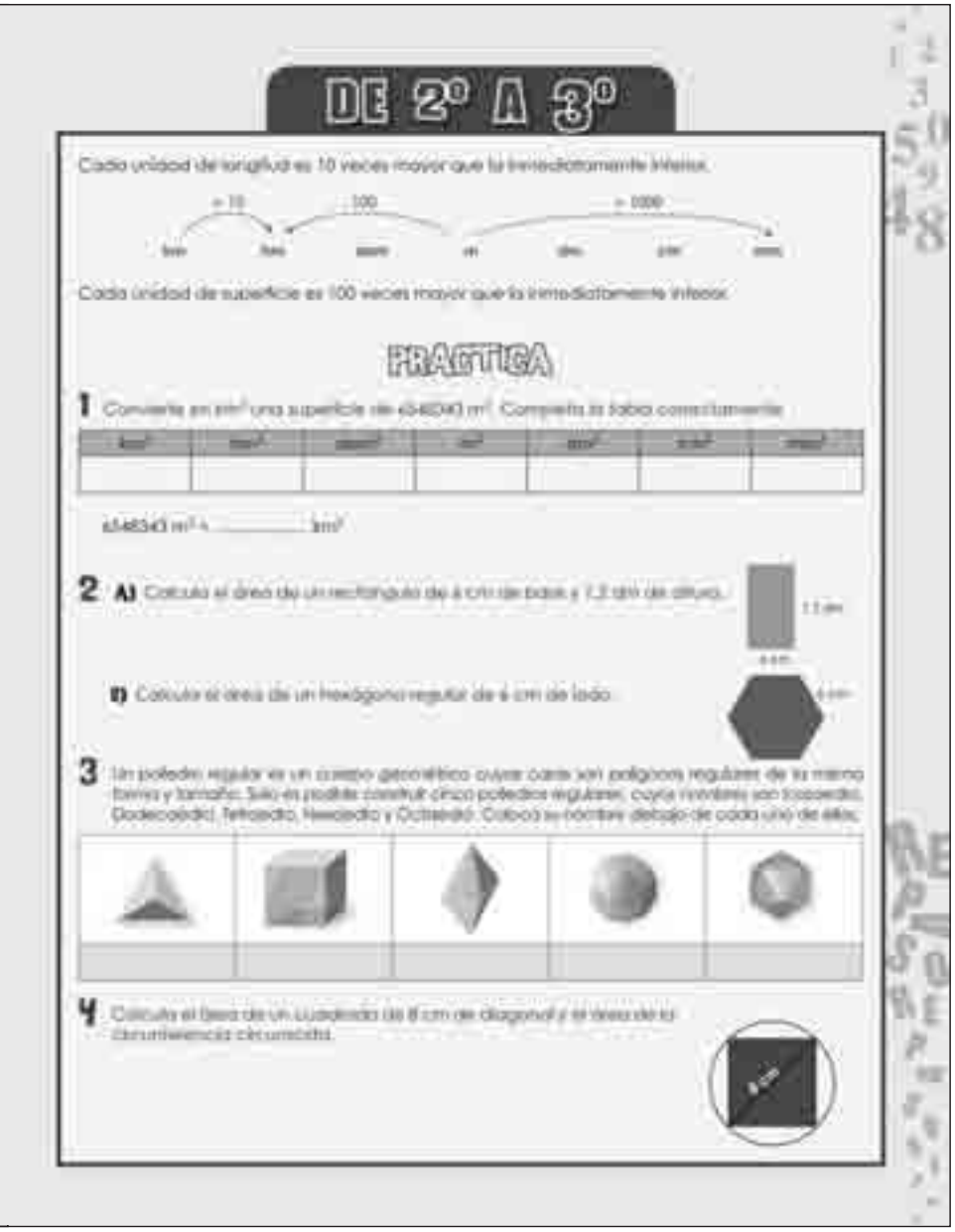
6548343 m^2 = **6,548343** km^2

2. a) Calcula el área de un rectángulo de 6 cm de base y 1,2 dm de altura.


1,2 dm

6 cm

$A = 6 \times 12 = 72\ cm^2$

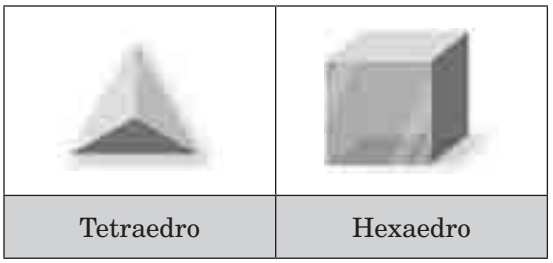


b) Calcula el área de un hexágono regular de 6 cm de lado.

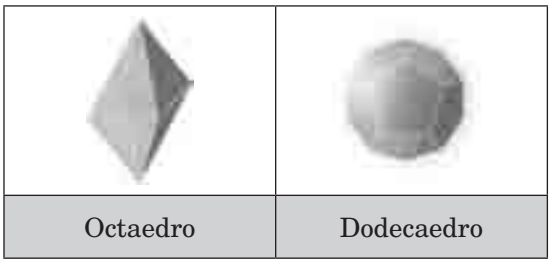


$$A = \frac{3l^2\sqrt{3}}{2} \Rightarrow A = \frac{3 \times 6^2 \times \sqrt{3}}{2} = 54\sqrt{3} \simeq 93{,}53 \text{ cm}^2$$

3. Un poliedro regular es un cuerpo geométrico cuyas caras son polígonos regulares de la misma forma y tamaño. Solo es posible construir cinco poliedros regulares, cuyos nombres son Icosaedro, Dodecaedro, Tetraedro, Hexaedro y Octaedro. Coloca su nombre debajo de cada uno de ellos.



Tetraedro | Hexaedro



Octaedro | Dodecaedro

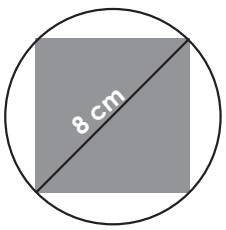


Icosaedro

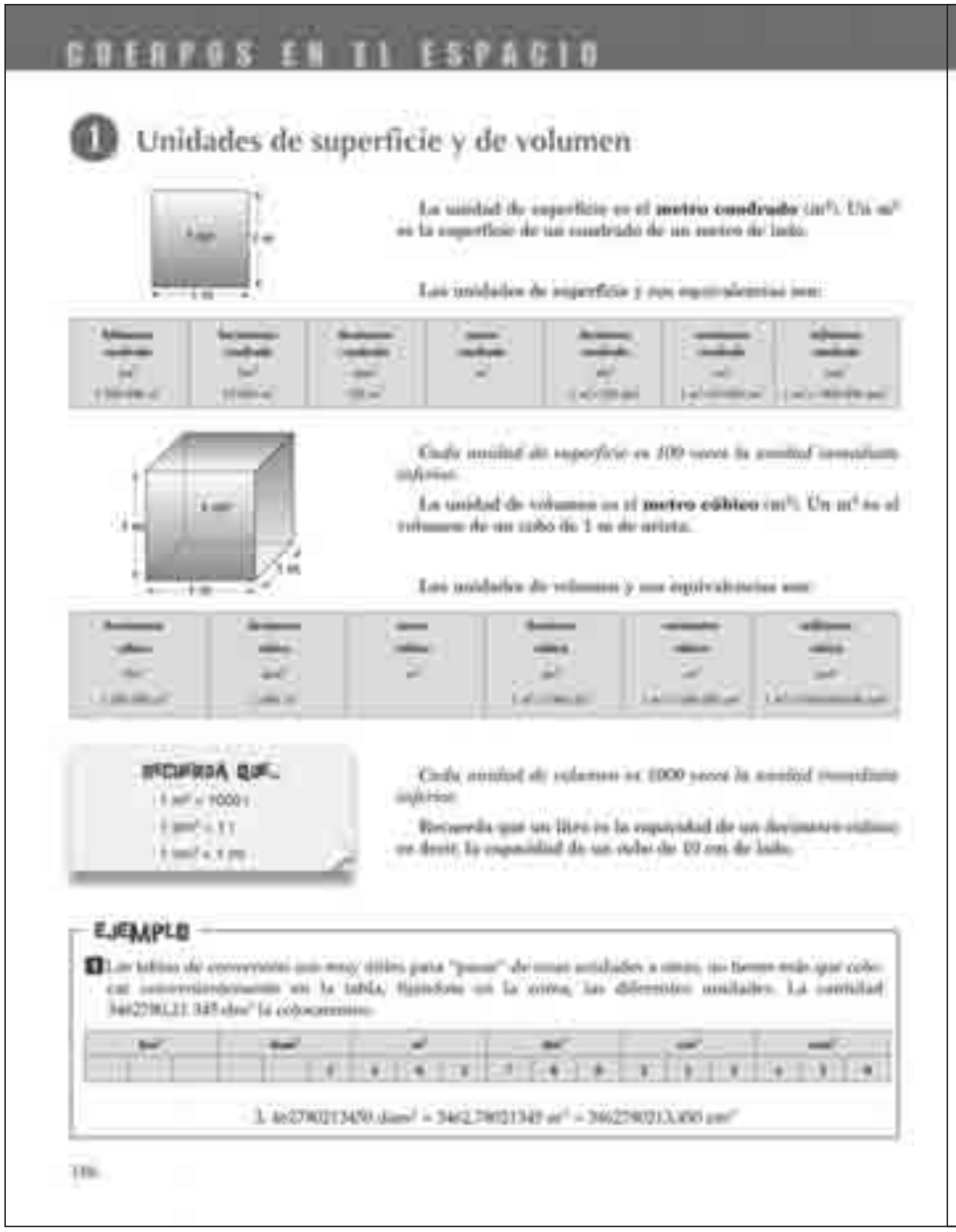
4. Calcula el área de un cuadrado de 8 cm de diagonal y el área de la circunferencia circunscrita.

Área del cuadrado: Por Pitágoras $l^2 + l^2 = 8^2 \Rightarrow l^2 = 32 \Rightarrow A = 32 \text{ cm}^2$

Área de la circunferencia: $A = \pi r^2 \Rightarrow A = \pi \times 4^2 = 16\,\pi \simeq 50{,}26 \text{ cm}^2$



▶ Pág. 186. 1 Unidades de superficie y de volumen



CUERPOS EN EL ESPACIO

1 Unidades de superficie y de volumen

La unidad de superficie es el **metro cuadrado** (m^2). Un m^2 es la superficie de un cuadrado de un metro de lado.

Los unidades de superficie y sus equivalencias son:

Cada unidad de superficie es 100 veces la unidad inmediata inferior.

La unidad de volumen es el **metro cúbico** (m^3). Un m^3 es el volumen de un cubo de 1 m de arista.

Los unidades de volumen y sus equivalencias son:

RECUERDA QUE...

Cada unidad de volumen es 1000 veces la unidad inmediata inferior.

Recuerda que un litro es la capacidad de un decímetro cúbico es decir, la capacidad de un cubo de 10 cm de lado.

EJEMPLO

1 Las tablas de conversión son muy útiles para "pasar" de unas unidades a otras, no tienes más que colocar correctamente en la tabla, fijándote en la coma, las diferentes unidades. La cantidad 3462780,21 345 dam^2 la colocaríamos:

3. $3462780213450\ dam^2 = 3462,78021349\ m^2 = 346278021345,000\ cm^2$

116

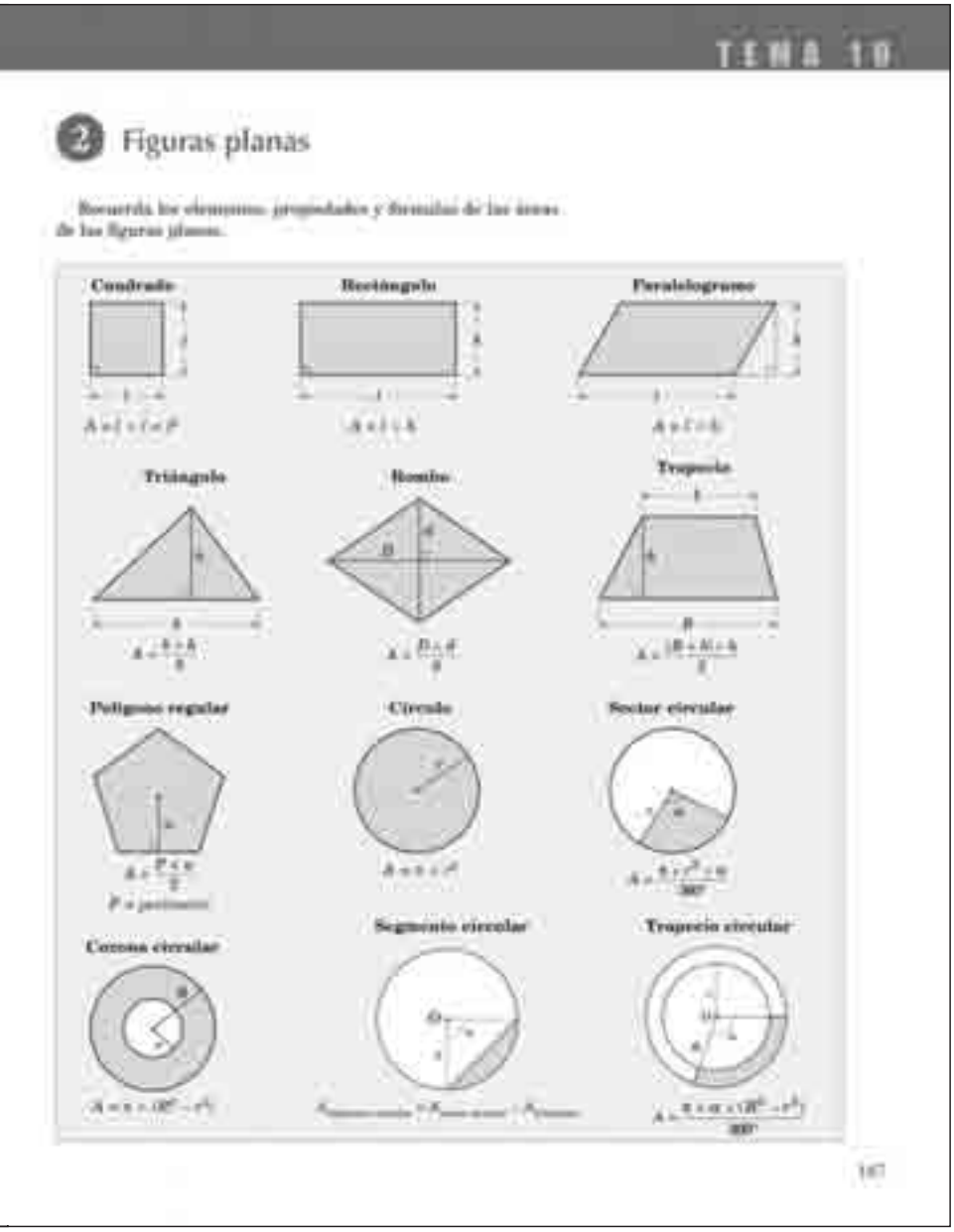
ORIENTACIONES DIDÁCTICAS

El alumno debe distinguir muy bien cuando medimos longitudes, cuando áreas y cuando volúmenes y entender de donde viene el exponente en cada uno de los casos.

También pondremos ejemplos de longitudes en diferente magnitud, para que sean conscientes de que necesitan la misma magnitud para poder operar con ellas.

El área de un rectángulo en m2 y la base en cm, son ejemplos para que el alumno reflexiones sobre las magnitudes

▶ Pág. 187. 2 Figuras planas


TEMA 10

2 Figuras planas

Recuerda los elementos, propiedades y fórmulas de las áreas de las figuras planas.

Cuadrado

Rectángulo

Paralelogramo

Triángulo

Rombo

Trapecio

Polígono regular

Círculo

Sector circular

Corona circular

Segmento circular

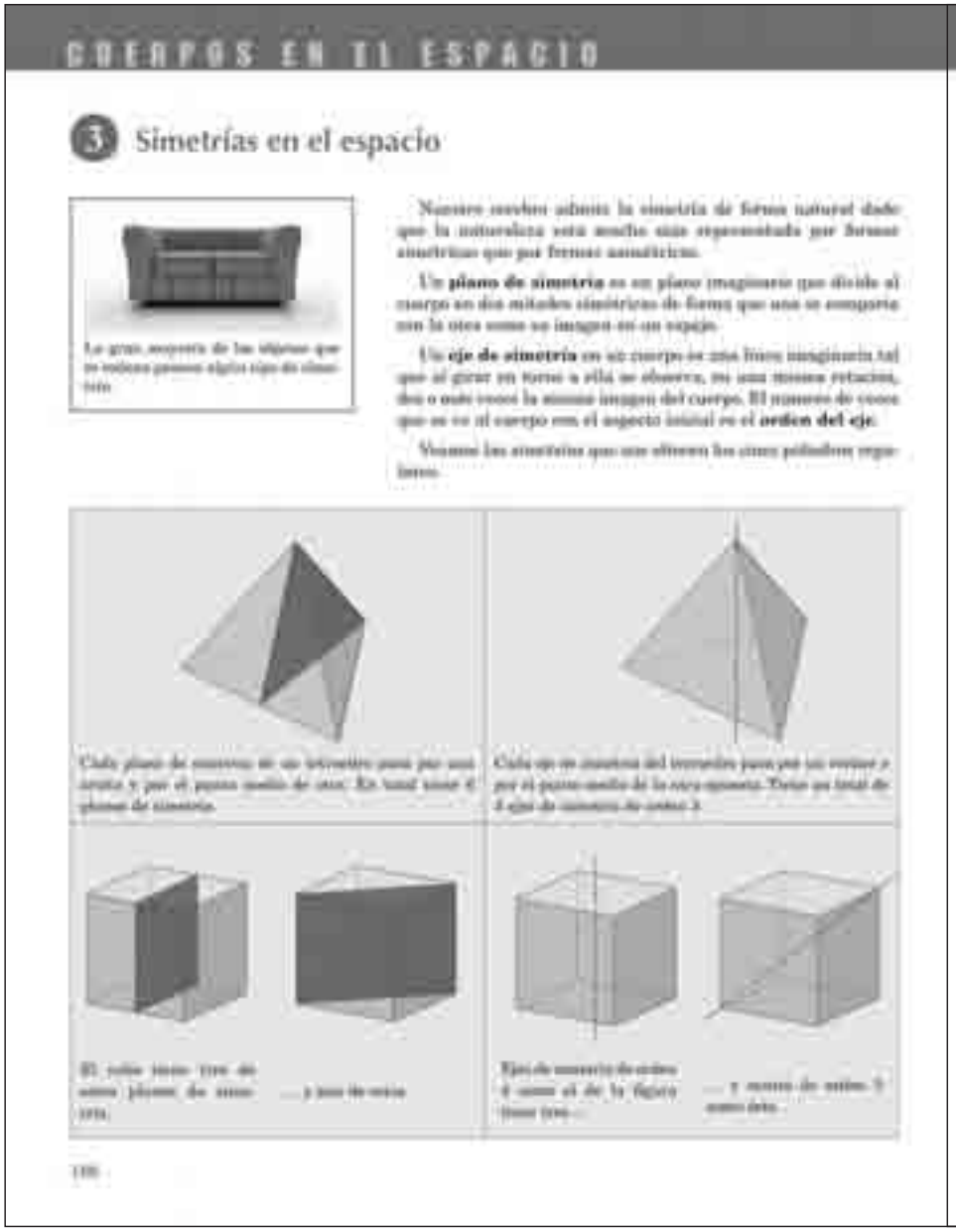
Trapecio circular

187

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS

Con la tabla delante deben reconocer perfectamente las figuras y nombrar sus elementos así como sus áreas, son conocimientos asimilados desde hace tiempo, solo es un simple recordatorio.

▶ Pág. 188. 3 Simetrías en el espacio



CUERPOS EN EL ESPACIO

3 Simetrías en el espacio

Nuestro cerebro admite la simetría de forma natural dado que la naturaleza está mucho más representada por formas simétricas que por formas asimétricas.

Un **plano de simetría** es un plano imaginario que divide al cuerpo en dos mitades simétricas de forma que una se comporta con la otra como su imagen en un espejo.

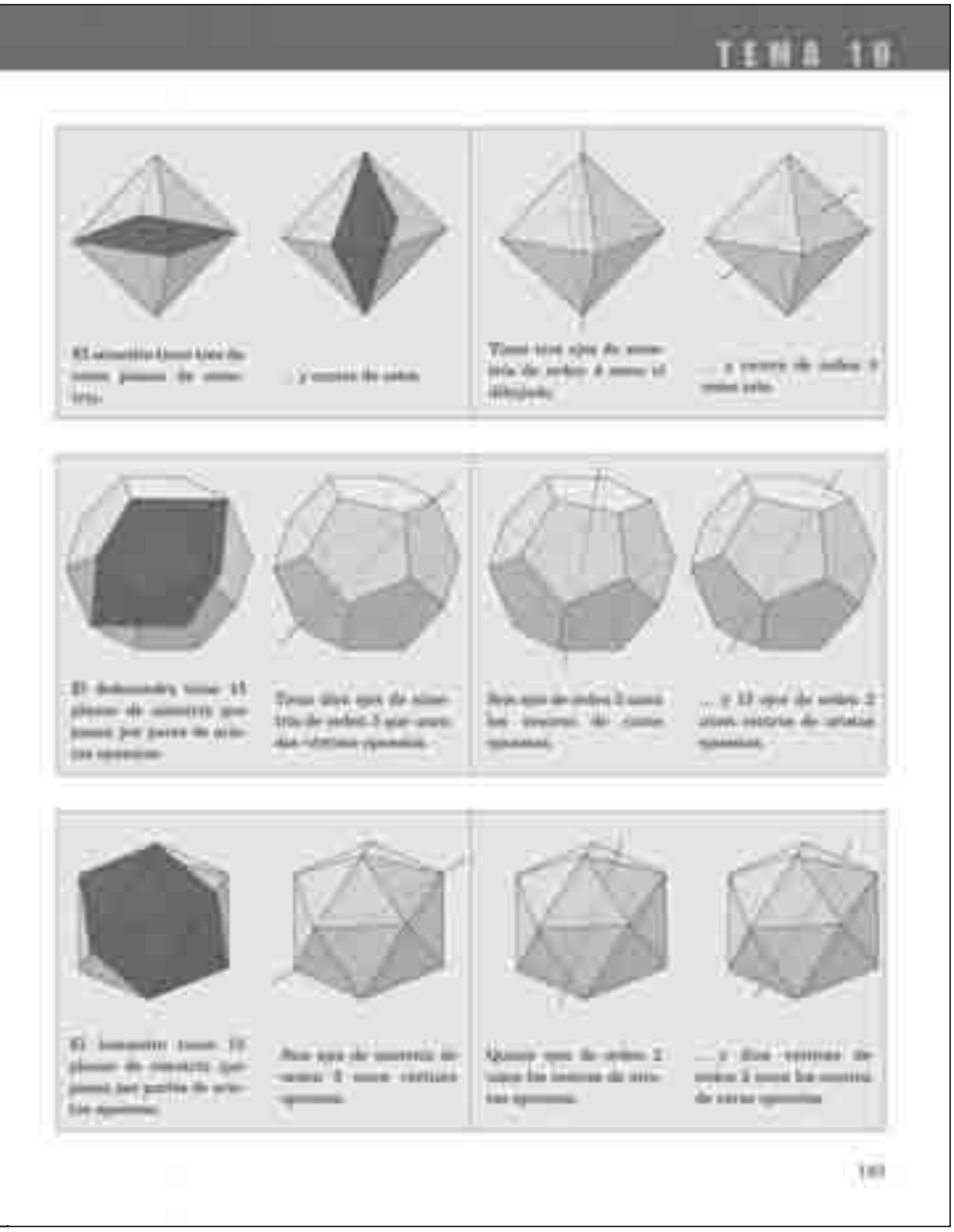
Un **eje de simetría** en un cuerpo es una línea imaginaria tal que al girar en torno a ella se observa, en una misma rotación, dos o más veces la misma imagen del cuerpo. El número de veces que se ve al cuerpo en el aspecto inicial es el **orden del eje**.

Veamos las simetrías que nos ofrecen los cinco poliedros regulares.

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS

Es muy interesante que el alumno construya algún poliedro tanto en papel como en plástico transparente y si es así pueden colocar dentro planos de simetría en otro color de manera que puedan comprobar todo aquello que se indica en el libro.

▶ Pág. 189.



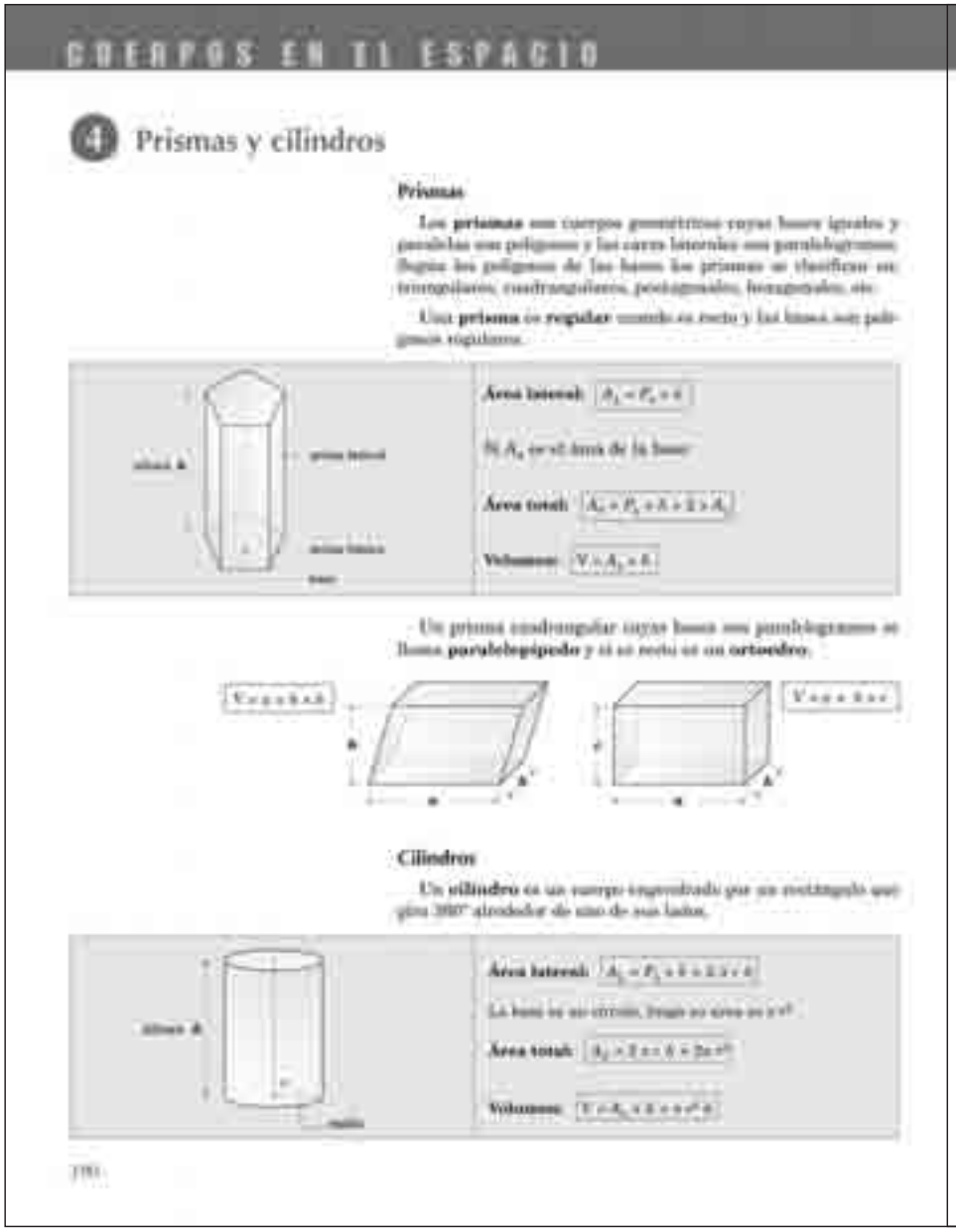
▶ Pág. 190. 4 Prismas y cilindros

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS

Deben trabajar los desarrollos de los prismas, cilindros, pirámides y conos para comprender como se calcula el área lateral y total.

Insistir que el volumen de cuerpos con bases paralelas tiene la misma expresión, sólo hay que adecuar el área de la base, de la misma forma tiene la misma expresión el volumen de la pirámide y del cono.

Razonar que es un cuerpo de revolución e indicar como se obtienen.


CUERPOS EN EL ESPACIO

4 Prismas y cilindros

Prismas

Los **prismas** son cuerpos geométricos cuyas bases son iguales y paralelas son polígonos y las caras laterales son paralelogramos. Según los polígonos de las bases los prismas se clasifican en: triangulares, cuadrangulares, pentagonales, hexagonales, etc.

Un **prisma** es **regular** cuando es recto y las bases son polígonos regulares.

Un prisma cuadrangular cuyas bases son paralelogramos se llama **paralelepípedo** y si es recto es un **ortoedro**.

Cilindros

Un **cilindro** es un cuerpo engendrado por un rectángulo que gira 360° alrededor de uno de sus lados.

SOLUCIONARIO

1. Las aristas lateral y básica de un prisma hexagonal regular miden, respectivamente, 6 y 3 cm. Calcular el área lateral, el área total y el volumen del prisma.

$A_L = P_b \times h = 6 \times 3 \times 6 = 108 \text{ cm}^2$

$A_T = A_L + 2 \times A_b = 108 + 2 \times \frac{3\sqrt{3} \times 3^2}{2} =$

$= 108 + 27\sqrt{3} \simeq 154,76 \text{ c}$

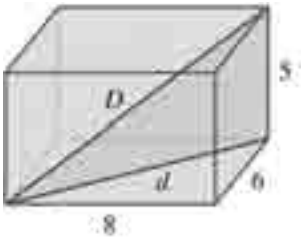


Pues el área del hexágono de lado l es 6 veces el área del triángulo equilátero de la figura de lado l y altura $\sqrt{l^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3l^2}{4}} = \frac{l\sqrt{3}}{2}$

Por tanto $A_b = 6 \times \frac{l \times \frac{l\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{3\sqrt{3}l^2}{2}$

$V = A_b \times h = \frac{27\sqrt{3}}{2} \times 6 = 81\sqrt{3} \simeq 140,3 \text{ cm}^3$

2. Una caja tiene forma de ortoedro, de 8 cm de largo, 6 cm de ancho y 5 cm de alto. Hallar su área total y su volumen. ¿Puede caber en la caja una barra rígida de 13 cm de longitud?



$A_T = A_L + 2 \times A_b = 2 \times 8 \times 5 + 2 \times 6 \times 5 +$

$+ 2 \times 8 \times \times 6 = 80 + 60 + 96 = 236 \text{ cm}^2$

$V = A_b \times h = 8 \times 6 \times 5 = 240 \text{ cm}^3$

Cabe si es menor que la longitud de la diagonal del ortoedro. Por el teorema de Pitágoras.

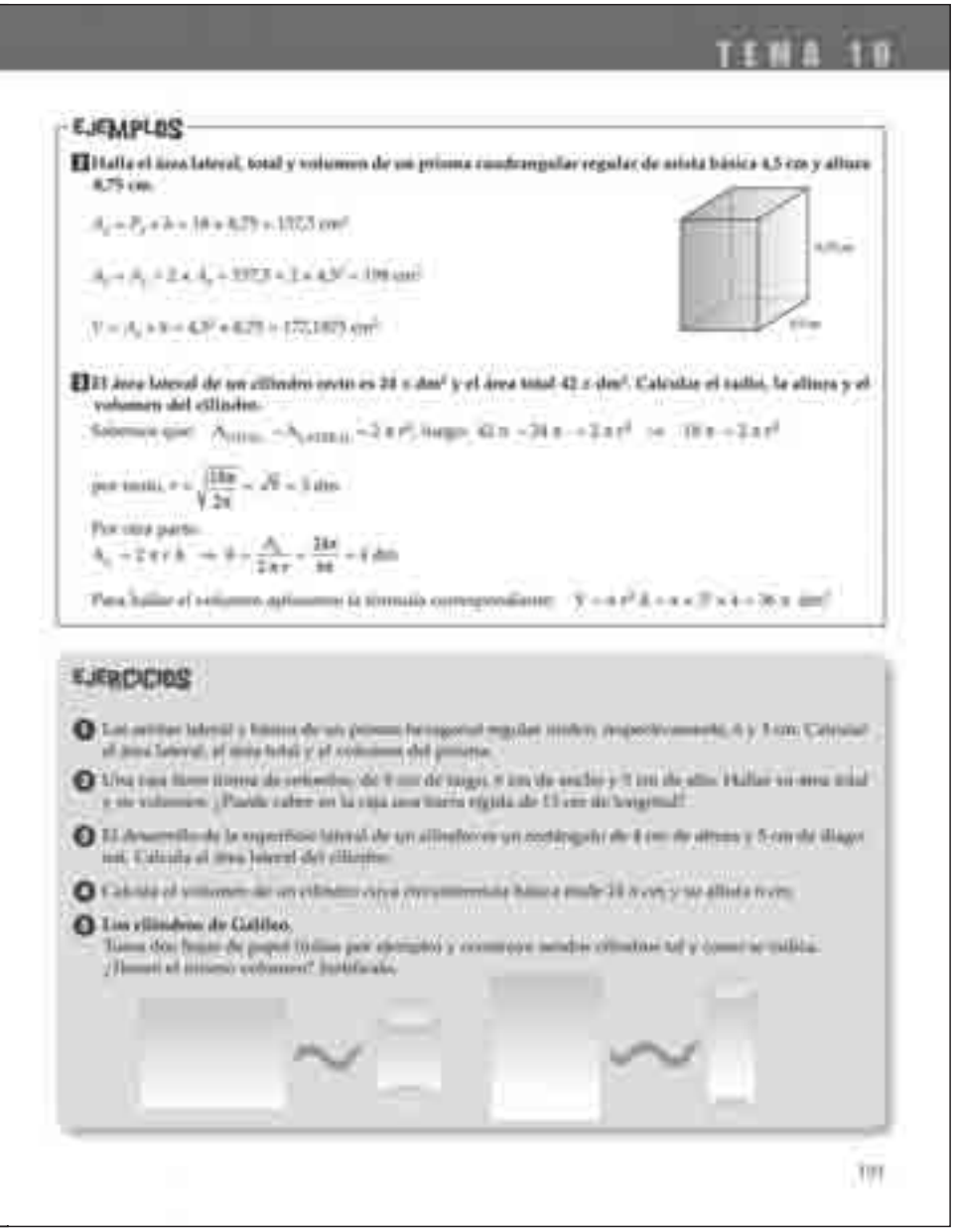
$d = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{100} = 10 \text{ cm}$

$D = \sqrt{10^2 + 5^2} = \sqrt{125} = 11,18 \text{ cm}$

Por lo tanto no cabe por ser mayor que la diagonal.

3. El desarrollo de la superficie lateral de un cilindro es un rectángulo de 4 cm de altura y 5 cm de diagonal. Calcula el área lateral del cilindro.

▶ Pág. 191.


TEMA 10

EJEMPLOS

1 Halla el área lateral, total y volumen de un prisma cuadrangular regular de arista básica 4,5 cm y altura 6,75 cm.

2 El área lateral de un cilindro recto es 24 π dm² y el área total 42 π dm². Calcula el radio, la altura y el volumen del cilindro.

EJERCICIOS

1 Las aristas lateral y básica de un prisma hexagonal regular miden, respectivamente, 6 y 3 cm. Calcula el área lateral, el área total y el volumen del prisma.

2 Una caja tiene forma de ortoedro, de 9 cm de largo, 6 cm de ancho y 5 cm de alto. Halla su área total y su volumen. ¿Puede caber en la caja una barra rígida de 13 cm de longitud?

3 El desarrollo de la superficie lateral de un cilindro es un rectángulo de 8 cm de altura y 5 cm de diagonal. Calcula el área lateral del cilindro.

4 Calcula el volumen de un cilindro cuya circunferencia básica mide 24 π cm y su altura 6 cm.

5 Los cilindros de Galileo.
Toma dos hojas de papel (folios por ejemplo) y construye sendos cilindros tal y como se indica.
¿Tienen el mismo volumen? Justifícalo.

191

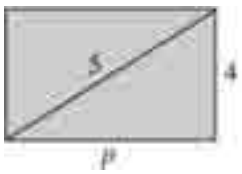
$A_b = \pi r^2 = \pi \cdot 12^2 = 144\ \pi\ \text{cm}^2$

$V = A_b \times h = 144\ \pi \times 6 = 864\ \pi\ \text{cm}^3$

5. Los cilindros de Galileo. Toma dos hojas de papel (folios por ejemplo) y construye sendos cilindros tal y como se indica. ¿Tienen el mismo volumen? Justifícalo.



$$\Rightarrow r = \frac{a}{2\pi} \Rightarrow V = \pi\left(\frac{a}{2\pi}\right)^2 \cdot b = \frac{a^2 b}{4\pi}$$



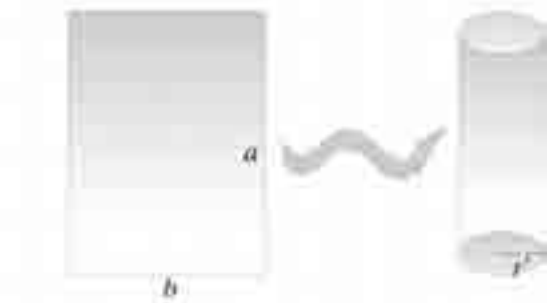
El área lateral del cilindro es el área del rectángulo. Calculamos *p,* por el teorema de Pitágoras.

$p = \sqrt{5^2 - 4^2} = \sqrt{9} = 9, \quad A_L = 3 \times\ 4 = 12\ \text{cm}^2$

4. Calcula el volumen de un cilindro cuya circunferencia básica mide 24π cm y su altura 6 cm.

Conocida la circunferencia básica, calculamos el radio:

$2\pi r = 24\pi \ \Rightarrow\ r = 12\ \text{cm}$

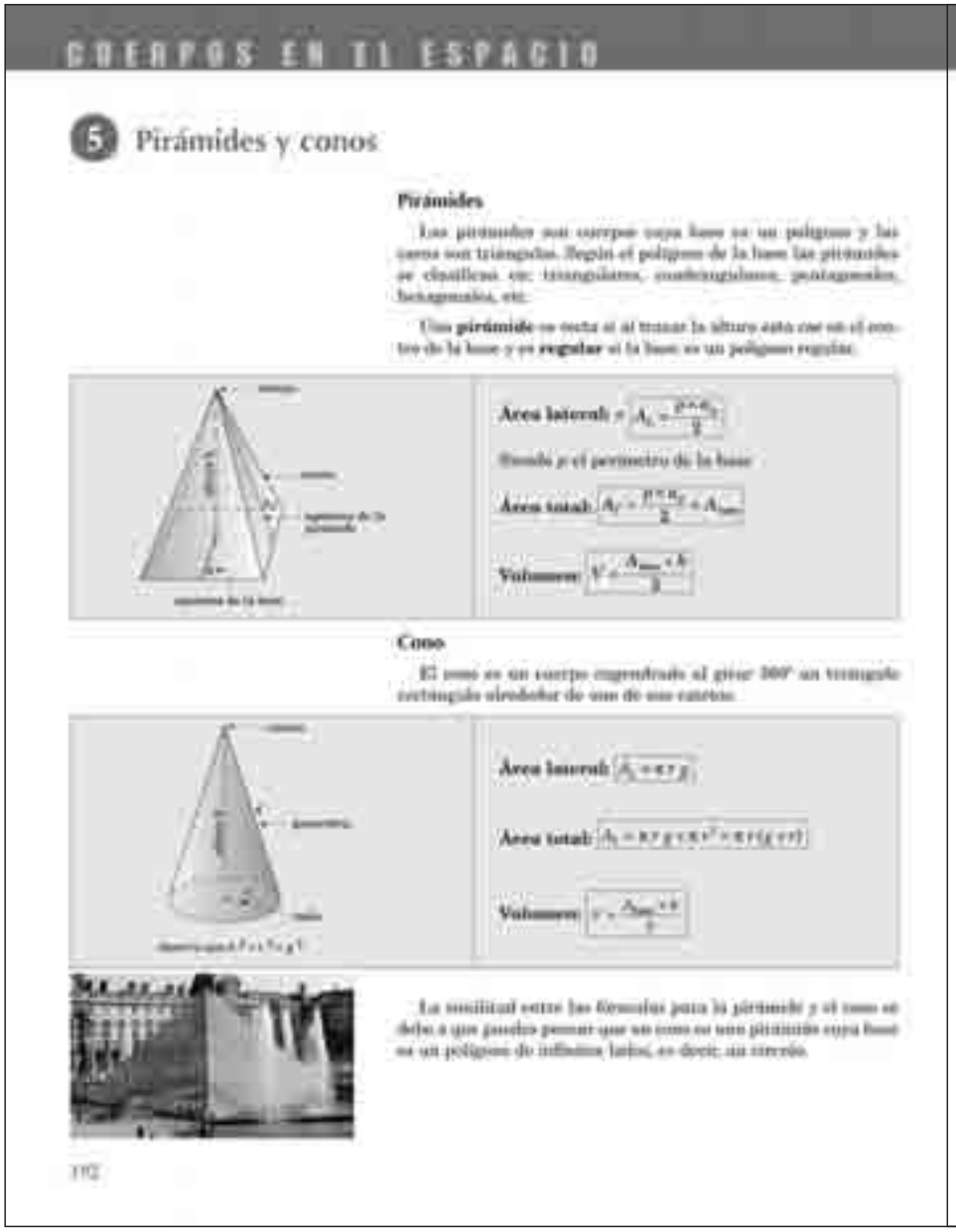


$$\Rightarrow r' = \frac{b}{2\pi} \Rightarrow V = \pi\left(\frac{b}{2\pi}\right)^2 \cdot a = \frac{ab^2}{4\pi}$$

En general tienen distinto volumen. Tendrán el mismo volumen si:

$\frac{a^2 b}{4\pi} = \frac{ab^2}{4\pi} \Rightarrow a = b$ la hoja de papel es cuadrada.

▶ Pág. 192. 5 Pirámides y conos



CUERPOS EN EL ESPACIO

5 Pirámides y conos

Pirámides

Las pirámides son cuerpos cuya base es un polígono y las caras son triángulos. Según el polígono de la base las pirámides se clasifican en: triangulares, cuadrangulares, pentagonales, hexagonales, etc.

Una **pirámide** es recta si al trazar la altura esta cae en el centro de la base y es **regular** si la base es un polígono regular.

Área lateral: $A_L = \frac{p \cdot a_p}{2}$

Siendo p el perímetro de la base

Área total: $A_T = \frac{p \cdot a_p}{2} + A_{base}$

Volumen: $V = \frac{A_{base} \cdot h}{3}$

Cono

El cono es un cuerpo engendrado al girar 360° un triángulo rectángulo alrededor de uno de sus catetos.

Área lateral: $A_L = \pi \cdot g \cdot r$

Área total: $A_T = \pi \cdot g \cdot r + \pi \cdot r^2 = \pi \cdot r (g + r)$

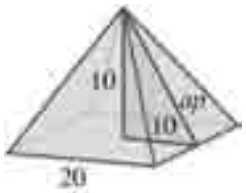
Volumen: $V = \frac{A_{base} \cdot h}{3}$

La semejanza entre las fórmulas para la pirámide y el cono se debe a que podría pensar que un cono es una pirámide cuya base es un polígono de infinitos lados, es decir, un círculo.

112

SOLUCIONARIO

6. Halla el área total y el volumen de la pirámide del Louvre sabiendo que es una pirámide cuadrangular regular de 20 m de arista básica y 10 m de altura.



Calculamos la apotema por el teorema de Pitágoras.

$$a_p = \sqrt{10^2 + 10^2} = 10\sqrt{2}$$

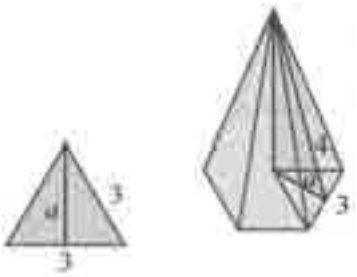
Asi:

$$A_T = A_L + A_b = 4\frac{20 \times 10\sqrt{2}}{2} + 20^2 =$$

$$= 400\sqrt{2} + 400 = 400\left(\sqrt{2} + 1\right) \simeq 965,68 \text{ m}^2$$

$$V = \frac{A_b \times h}{3} = \frac{20^2 \times 10}{3} = \frac{4000}{3} \simeq 1333,33 \text{ m}^3$$

7. Halla el área total de una pirámide hexagonal regular de arista básica de 3 m, sabiendo que la apotema de la pirámide es de 4 m.

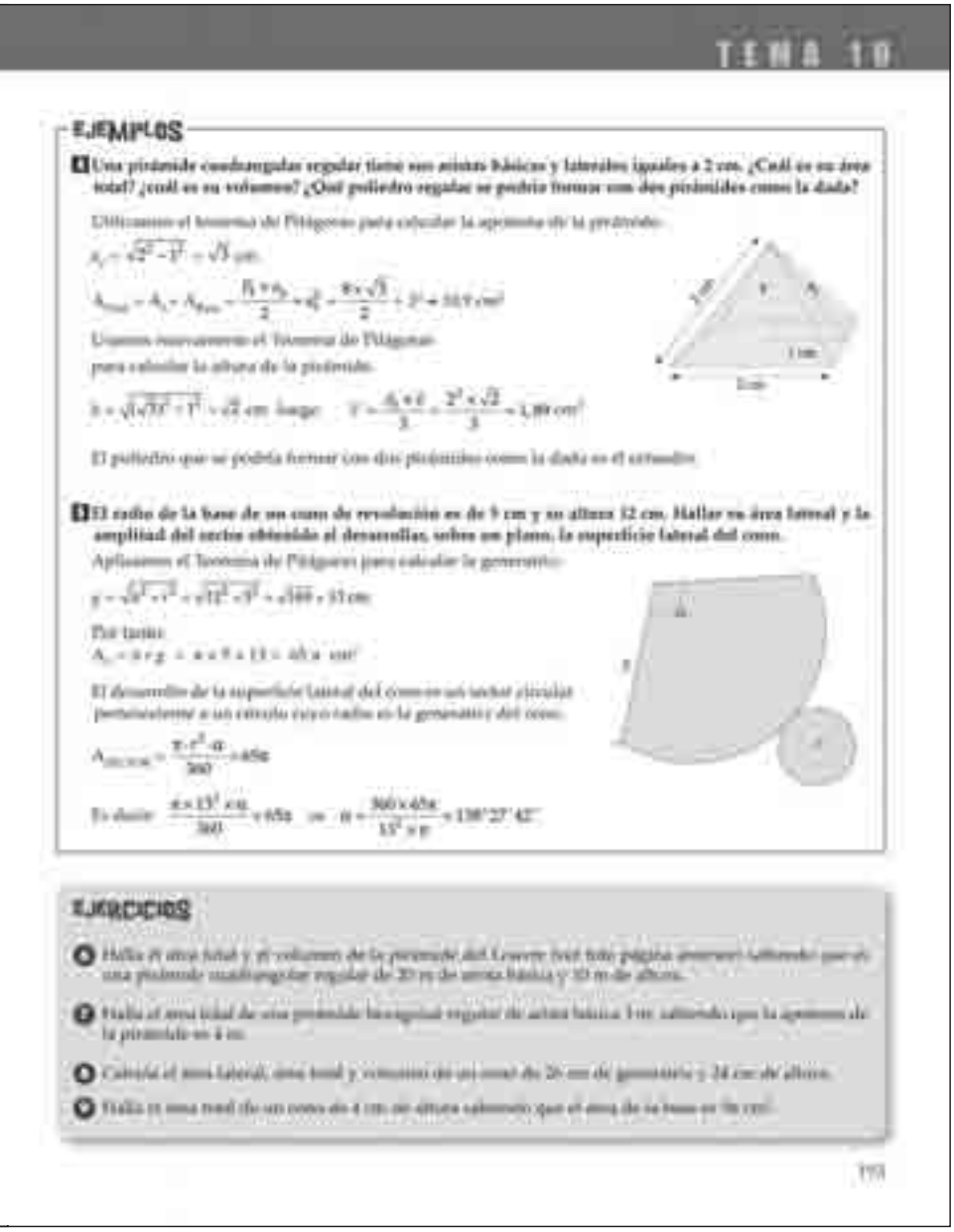


Por el teorema de Pitágoras:

$$a = \sqrt{3^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{27}{4}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Asi:

▶ Pág. 193.



TEMA 10

EJEMPLOS

1 Una pirámide cuadrangular regular tiene sus aristas básicas y laterales iguales a 2 cm. ¿Cuál es su área total? ¿cuál es su volumen? ¿Qué poliedro regular se podría formar con dos pirámides como la dada?

Utilizamos el teorema de Pitágoras para calcular la apotema de la pirámide:

$a_p = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$ cm.

$A_{\text{total}} = A_L + A_{\text{base}} = \frac{P_b \cdot a_p}{2} + a_b^2 = \frac{8 \times \sqrt{3}}{2} + 2^2 = 10{,}9$ cm²

Usamos nuevamente el Teorema de Pitágoras para calcular la altura de la pirámide:

$h = \sqrt{(\sqrt{3})^2 - 1^2} = \sqrt{2}$ cm. Luego $V = \frac{A_b \cdot h}{3} = \frac{2^2 \times \sqrt{2}}{3} = 1{,}89$ cm³

El poliedro que se podría formar con dos pirámides como la dada es el octaedro.

2 El radio de la base de un cono de revolución es de 5 cm y su altura 12 cm. Hallar su área lateral y la amplitud del sector obtenido al desarrollar, sobre un plano, la superficie lateral del cono.

Aplicamos el Teorema de Pitágoras para calcular la generatriz:

$g = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{169} = 13$ cm.

Por tanto:

$A_L = \pi \cdot r \cdot g = \pi \cdot 5 \cdot 13 = 65\pi$ cm²

El desarrollo de la superficie lateral del cono es un sector circular perteneciente a un círculo cuyo radio es la generatriz del cono:

$A_{\text{sector}} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot \alpha}{360} = 65\pi$

Es decir: $\frac{\pi \times 13^2 \times \alpha}{360} = 65\pi \Rightarrow \alpha = \frac{360 \times 65\pi}{13^2 \times \pi} = 138°27'42''$

EJERCICIOS

1. Halla el área total y el volumen de la pirámide del 1.º ejemplo de esta página sabiendo que es una pirámide cuadrangular regular de 20 m de arista básica y 10 m de altura.
2. Halla el área total de una pirámide hexagonal regular de arista básica 3 m, sabiendo que la apotema de la pirámide es 4 m.
3. Calcula el área lateral, área total y volumen de un cono de 26 cm de generatriz y 24 cm de altura.
4. Halla el área total de un cono de 4 cm de altura sabiendo que el área de su base es 9π cm².

193

$$A_T = A_L + A_b = 6 \times \frac{3 \times 4}{2} + 6 \times \frac{3 \times \frac{3\sqrt{3}}{2}}{2} =$$

$$= 36 + \frac{27\sqrt{3}}{2} \simeq 36 + 23{,}38 = 59{,}38 \text{ m}^2$$

8. Calcula el área lateral, área total y volumen de un cono de 26 cm de generatriz y 24 cm de altura.



Por Pitágoras calculamos:

$r = \sqrt{26^2 - 24^2} = \sqrt{100} = 10$ cm

Asi:

$A_L = \pi\, r\, g = \pi \times 10 \times 26 =$

$= 260\pi \simeq 816{,}81$ cm²

$A_T = A_L + A_B = \pi\, r\, (g + r) =$

$= \pi \times 10 \times (26 + 10) = 360\pi \simeq$

$\simeq 1130{,}97$ cm²

$V = \frac{A_b \times h}{3} = \frac{\pi r^2 \times h}{3} = \frac{\pi \times 10^2 \times 24}{3} = 800\pi \simeq 2513{,}27$ cm³

9. Halla el área total de un cono de 4 cm de altura sabiendo que el área de la base es 9π cm².

Del área de la base se deduce el radio:

$\pi\, r^2 = 9\pi \Rightarrow r = 3$ cm.



Por Pitágoras:

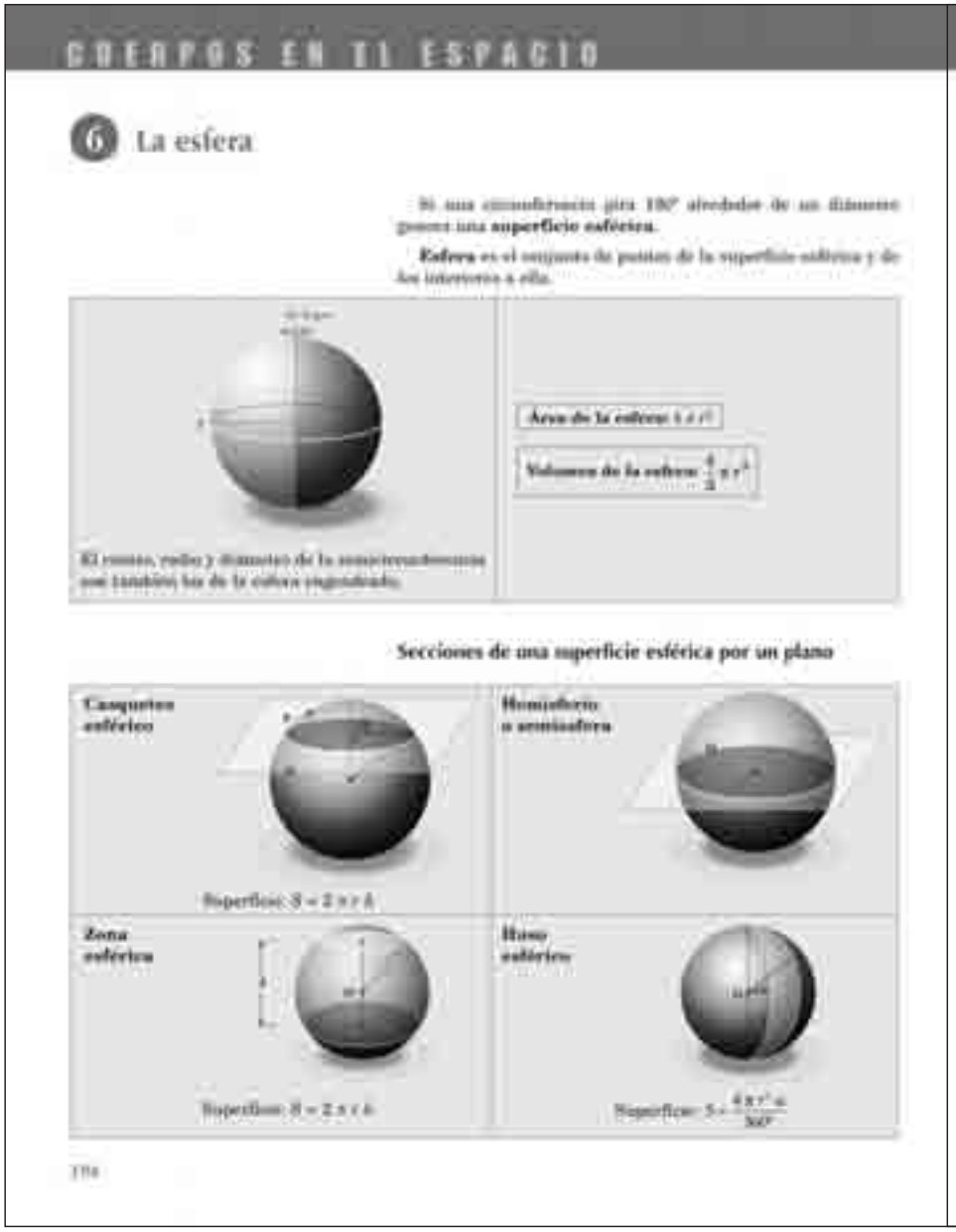
$g = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$

Asi:

$A_T = \pi\, r\, (g + r) = \pi \times 3 \times (5 + 3) =$

$= 24\pi \simeq 75{,}4$ cm²

▶ Pág. 194. 6 La esfera


CUERPOS EN EL ESPACIO

6 La esfera

Secciones de una superficie esférica por un plano

Casquete esférico

Huso esférico

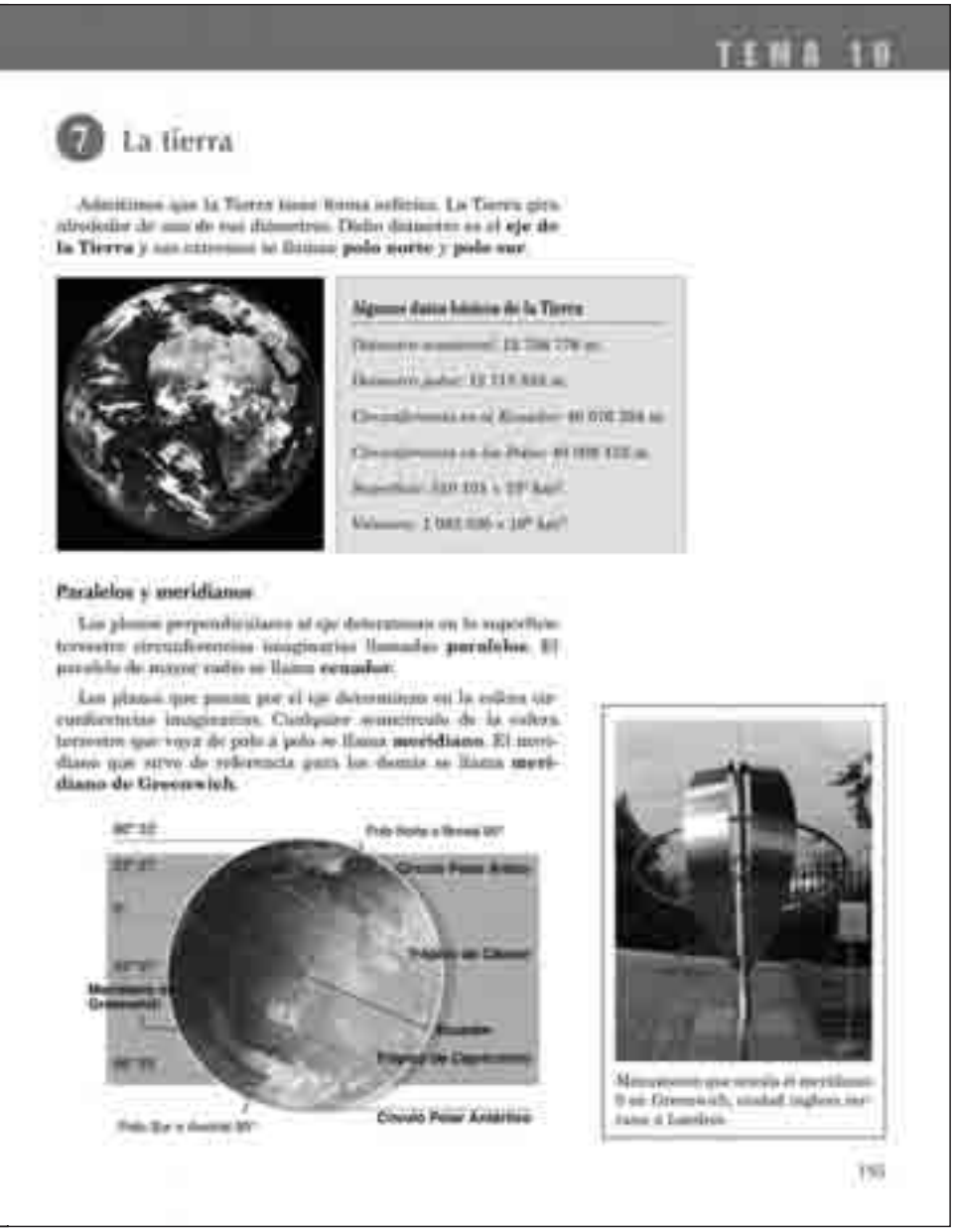
Zona esférica

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS

Utilizar la terminología matemática de las secciones de una superficie esférica con la terminología de la geografía del globo terráqueo para enlazar con la realidad los conceptos matemáticos.

Comprobar de forma sencilla que la esfera es un cuerpo de revolución.

▶ Pág. 195. 7 La tierra



TEMA 10

7 La tierra

Admitimos que la Tierra tiene forma esférica. La Tierra gira alrededor de uno de sus diámetros. Dicho diámetro es el **eje de la Tierra** y sus extremos se llaman **polo norte** y **polo sur**.

Algunos datos básicos de la Tierra

Paralelos y meridianos

Los planos perpendiculares al eje determinan en la superficie terrestre circunferencias imaginarias llamadas **paralelos**. El paralelo de mayor radio se llama **ecuador**.

Los planos que pasan por el eje determinan en la esfera circunferencias imaginarias. Cualquier semicírculo de la esfera terrestre que vaya de polo a polo se llama **meridiano**. El meridiano que sirve de referencia para los demás se llama **meridiano de Greenwich**.

Círculo Polar Ártico

Círculo Polar Antártico

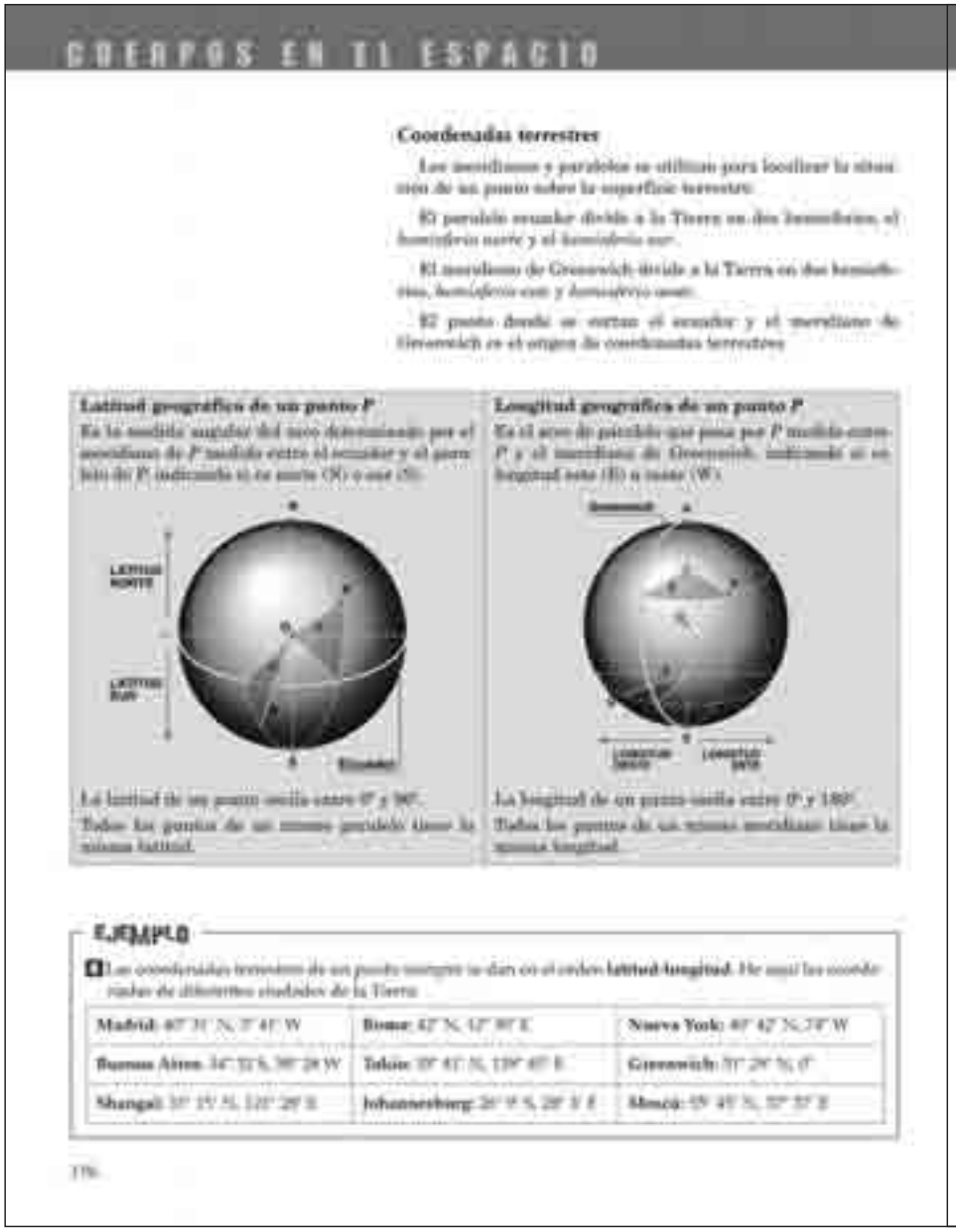
Monumento que señala el meridiano 0 en Greenwich, ciudad inglesa situada a 5 metros

155

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS

Trabajar sobre un globo terráqueo los paralelos y meridianos.

▶ Pág. 196.



CUERPOS EN EL ESPACIO

Coordenadas terrestres

Los meridianos y paralelos se utilizan para localizar la situación de un punto sobre la superficie terrestre.

El paralelo ecuador divide a la Tierra en dos hemisferios, el *hemisferio norte* y el *hemisferio sur*.

El meridiano de Greenwich divide a la Tierra en dos hemisferios, *hemisferio este* y *hemisferio oeste*.

El punto donde se cortan el ecuador y el meridiano de Greenwich es el origen de coordenadas terrestres.

Latitud geográfica de un punto *P*

Es la medida angular del arco determinado por el meridiano de *P* medido entre el ecuador y el paralelo de *P*, indicando si es norte (N) o sur (S).

La latitud de un punto varía entre 0° y 90°.
Todos los puntos de un mismo paralelo tienen la misma latitud.

Longitud geográfica de un punto *P*

Es el arco de paralelo que pasa por *P* medido entre *P* y el meridiano de Greenwich, indicando si es longitud este (E) o oeste (W).

La longitud de un punto varía entre 0° y 180°.
Todos los puntos de un mismo meridiano tienen la misma longitud.

EJEMPLO

Las coordenadas terrestres de un punto siempre se dan en el orden **latitud-longitud**. He aquí las coordenadas de diferentes ciudades de la Tierra:

Madrid: 40° 31' N, 3° 41' W	**Roma:** 42° N, 12° 30' E	**Nueva York:** 40° 42' N, 74° W
Buenos Aires: 34° 32' S, 58° 28 W	**Tokio:** 35° 41' N, 139° 45' E	**Greenwich:** 51° 29' N, 0°
Shangái: 31° 15' N, 121° 29' E	**Johannesburg:** 26° 9' S, 28° 3' E	**Moscú:** 55° 45' N, 37° 37' E

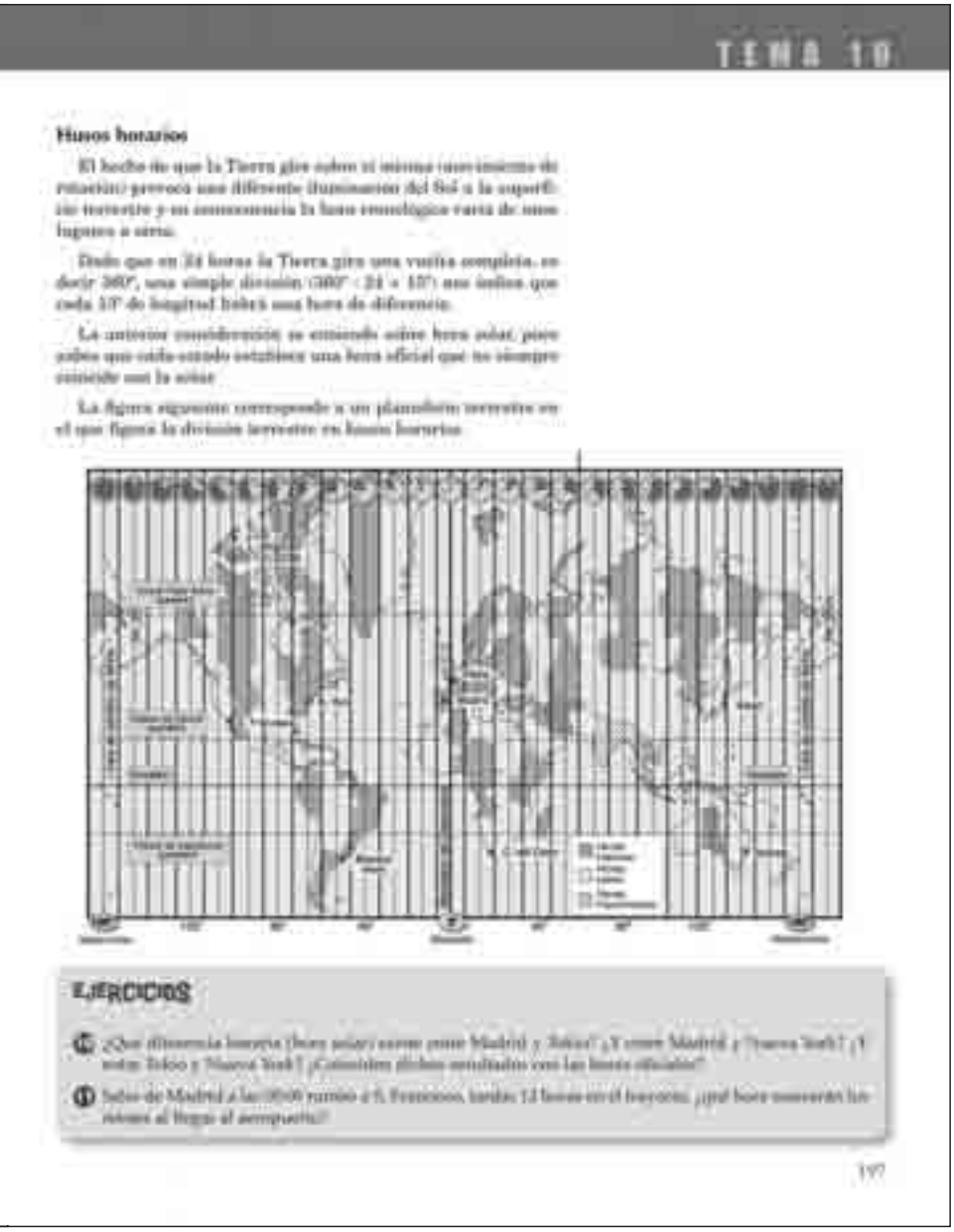
11%

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS

Es interesante que el alumno busque de la ciudad o pueblo en el que vive su latitud y longitud y a través de un sistema de búsqueda de los que podemos encontrar por Internet lo marque en un mapamundi.

Conociendo la latitud y longitud de un lugar, se puede calcular su ubicación en el mapa de manera bastante sencilla.

▶ Pág. 197.


TEMA 10

Husos horarios

El hecho de que la Tierra gire sobre sí misma (movimiento de rotación) provoca una diferente iluminación del Sol a la superficie terrestre y en consecuencia la hora cronológica varía de unos lugares a otros.

Dado que en 24 horas la Tierra gira una vuelta completa, es decir 360°, una simple división (360° : 24 = 15°) nos indica que cada 15° de longitud habrá una hora de diferencia.

La anterior consideración se entiende sobre hora solar, pero sabes que cada estado establece una hora oficial que no siempre coincide con la solar.

La figura siguiente corresponde a un planisferio terrestre en el que figura la división terrestre en husos horarios.

EJERCICIOS

197

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS

Darles un listado de ciudades y que busquen la diferencia horaria entre ellas.

Que planteen un viaje y vean a que hora salen de Madrid y que hora será cuando lleguen a Nueva York por ejemplo.

SOLUCIONARIO

10. ¿Qué diferencia horaria (hora solar) existe entre Madrid y Tokio? ¿Y entre Madrid y Nueva York? ¿Y entre Tokio y Nueva York? ¿Coinciden dichos resultados con las horas oficiales?

Entre Madrid y Tokio 9 h (24 – 9 = 15 h)

Entre Madrid y Nueva York 5 h

Entre Tokio y Nueva York 14 h

Horas Oficiales		
Nueva York	Madrid	Tokio
Lunes 2h PM	Lunes 8h PM	Martes 3h AM

No coinciden.

11. Sales de Madrid a las 00:00 rumbo a S. Francisco, tardas 12 horas en el trayecto, ¿qué hora marcarán los relojes al llegar al aeropuerto?

Como la diferencia horaria es de 8 horas, marcará el reloj las 4:00.

▶ Pág. 200. Ejercicios



CUERPOS EN EL ESPACIO

EJERCICIOS

ÁREA DE FIGURAS PLANAS

POLIEDROS REGULARES

PRISMAS

200

SOLUCIONARIO

12. La hipotenusa de un triángulo rectángulo e isósceles mide 32 dm. Calcular su superficie.



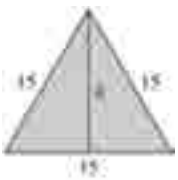
Calculamos l por el teorema de Pitágoras

$l^2 + l^2 = 32^2 \Rightarrow l = 22{,}63$ dm

Asi:

$$S = \frac{l^2}{2} = \frac{512}{2} = 256 \text{dm}^2$$

13. El lado de un triángulo equilátero mide 15 cm. Calcula su altura y su superficie.

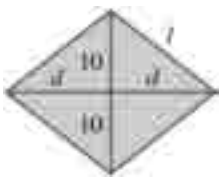


Por el teorema de Pitágoras

$$h = \sqrt{15^2 - \left(\frac{15}{2}\right)^2} = \frac{15\sqrt{3}}{2} \simeq 13 \quad \text{cm}$$

$$S = \frac{15 \times h}{2} = \frac{15 \times \frac{15\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{15^2\sqrt{3}}{4} = 97{,}43 \text{ cm}^2$$

14. El área de un rombo es 400 dm² y una de sus diagonales mide 20 dm. Calcular la otra diagonal y el lado del rombo.



Del área del rombo se deduce d

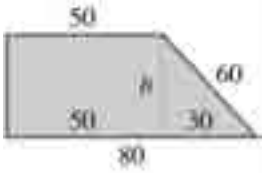
$2 \times 10 \times d = 400 \Rightarrow d = 20$ dm

$\Rightarrow$ la otra diagonal mide 40 dm

El lado se calcula por el teorema de Pitágoras.

$$l = \sqrt{10^2 + 20^2} = \sqrt{500} = 10\sqrt{5} \simeq 22{,}36 \quad \text{dm}$$

15. Calcular la superficie de un trapecio rectángulo cuyas bases miden 50 y 80 cm, y el lado oblicuo 60 cm.



Se calcula h por el teorema de Pitágoras

$h = \sqrt{60^2 - 30^2} = \sqrt{2700} = 30\sqrt{3}$ cm

$S = \dfrac{(B+b)\times h}{2} = \dfrac{(80+50)\times 30\sqrt{3}}{2} =$

$= 1950\sqrt{3} \simeq 3377{,}5 \ \text{cm}^2$

16. Hallar el área de un cuadrado inscrito en una circunferencia de longitud 18,84 cm.



De la longitud de la circunferencia se deduce el radio

$2\pi r = 18{,}84 \Rightarrow r = \dfrac{18{,}84}{6{,}28} = 3$

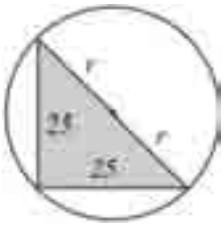
Ahora se calcula x por el teorema de Pitágoras

$2x^2 = 3^2 \Rightarrow x = \sqrt{\dfrac{9}{2}} = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$

El lado del cuadro es $l = 2x = 2\dfrac{3}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$

Asi: $A = l^2 = 18$ cm^2

17. Un triángulo rectángulo e isósceles inscrito en una circunferencia tiene un cateto que mide 25 cm. Calcular el área del círculo.



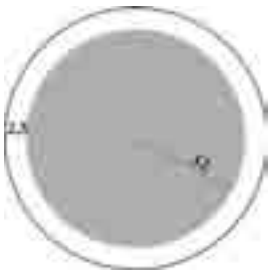
Por el teorema de Pitágoras

$(2r)^2 = 25^2 + 25^2 \Rightarrow r^2 = \dfrac{1250}{4} = \dfrac{625}{2}$

Asi el área del círculo es:

$A = \pi r^2 = \pi \cdot \dfrac{625}{2} \simeq 981{,}75 \ \text{cm}^2$

18. Alrededor de un césped circular de 12 m de radio se ha trazado un paseo de 2,5 m de ancho. Calcula el área de este paseo.



$A = \pi\,(R^2 - r^2) =$

$= \pi\,(14{,}5^2 - 12^2) = 66{,}25\pi \simeq$

$\simeq 69{,}39$ m^2

19. Calcular el área de un sector circular de 270º, cuyo radio mide 3,5 cm.

$A = \dfrac{\pi \times r^2 \times \alpha}{360} = \dfrac{\pi \times 3{,}5^2 \times 270}{360} = \dfrac{36{,}75\pi}{4} \simeq 28{,}86 \ \text{cm}^2$

20. Calcular el número de grados de un sector de área π cm^2 y de radio 1,5 cm.

$\dfrac{\pi \times 1{,}5^2 \times \alpha}{360} = \pi \ \Rightarrow \alpha = \dfrac{360}{2{,}25} = 160^\circ$

21. Un sector circular cuyo ángulo central mide 40º tiene de área 8 cm^2. Halla la superficie del círculo correspondiente.

Primero se calcula el radio

$\dfrac{\pi \times r^2 \times 40}{360} = 8 \ \Rightarrow r^2 = \dfrac{72}{\pi}$

Así: $S = \pi \times r^2 = \pi \times \dfrac{72}{\pi} = 72 \ \text{cm}^2$

22. Un trapecio circular tiene radio menor 12 cm y radio mayor 20 cm. La longitud del arco exterior es de 33 cm. Determina su ángulo de apertura.

De la longitud del arco exterior se deduce el ángulo

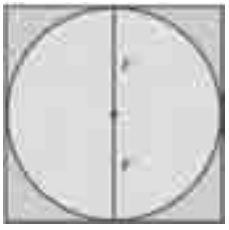
$\left.\begin{array}{l} 40\pi \_\_\_\_ 360^\circ \\ 33 \ \_\_\_\_ \ \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha = \dfrac{360 \times 33}{40\pi} = \dfrac{297}{\pi} \simeq 94{,}54 = 94^\circ 32' 24''$

Conocido el ángulo el área es:

$A = \dfrac{\pi \cdot \dfrac{297}{\pi}\left(20^2 - 12^2\right)}{360} = \dfrac{297 \times 256}{360} = 212{,}2 \ \text{cm}^2$

23. La superficie de un ángulo inscrito en un cuadrado es de 78,54 cm^2. Halla el área del cuadrado.

Como el lado del cuadrado es el diámetro del círculo, de su superficie calculamos el radio



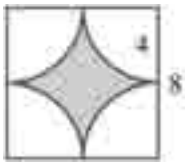
$\pi r^2 = 78{,}54 \Rightarrow$

$\Rightarrow r = \sqrt{\dfrac{78{,}54}{3{,}14}} = \sqrt{25} = 5$

Asi: $A = l^2 = (2r)^2 = 10^2 =$

$= 100$ cm^2

24. Se tiene un cuadrado de lado 8 cm. Con centro en cada vértice se traza un cuarto de circunferencia interior al cuadrado y de 4 cm de radio. Halla el área del cuadrilátero curvilíneo que queda en su interior.



$A = A_{cuadrado} - A_{círculo} = 82 - \pi \times 4^2 =$

$= 64 - 16\pi \simeq 13{,}73$ cm^2

25. El área de una corona circular es de 10π cm^2 y la circunferencia interna mide 4π cm. Calcula el radio de la circunferencia exterior.

De la longitud de la circunferencia interior se deduce su radio

$2\pi r = 4\pi \Rightarrow r = 2$ cm

y del área de la corona circular

$\pi \times (R^2 - 2^2) = 10\pi \Rightarrow \pi R^2 = 10\pi + 4\pi \Rightarrow R^2 = 14 \Rightarrow$

$\Rightarrow R = \sqrt{14} \simeq 3,74$ cm

26. Dibuja el desarrollo de un tetraedro de arista 8 cm y constrúyelo. Calcula su área y su volumen.



Por Pitágoras se calcula a

$a = \sqrt{8^2 - 4^2} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$

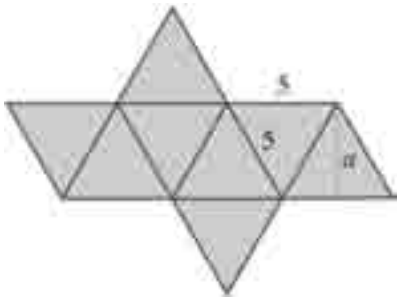
$A = 4\,A_{triángulo} = 4 \times 4a =$

$= 16 \times 4\sqrt{3} =$

$= 64\sqrt{3} \simeq 110,85$ cm^2

$V = \dfrac{l^3\sqrt{2}}{12} = \dfrac{8^3\sqrt{2}}{12} = \dfrac{128\sqrt{2}}{3} \simeq 60,34$ cm^3

27. Dibuja el desarrollo del octaedro de arista 5 cm, recórtalo y construye el poliedro. Calcula su área y su volumen.



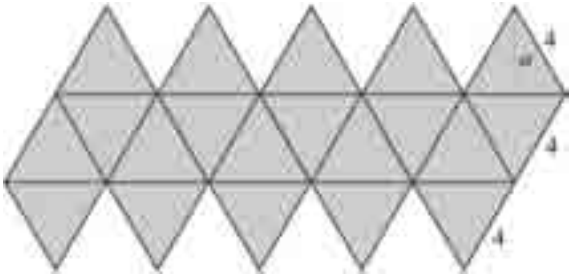
Por Pitágoras.

$a = \sqrt{5^2 - \left(\dfrac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{75}{4}} = \dfrac{5\sqrt{3}}{2}$

$A = 8A_{triángulo} = 8\dfrac{5 \times \dfrac{5\sqrt{3}}{2}}{2} = 50\sqrt{3} \simeq 86,6$ cm^2

$V = \dfrac{l^3\sqrt{2}}{3} = \dfrac{5^3\sqrt{2}}{3} = \dfrac{125\sqrt{2}}{3} \simeq 58,93$ cm^3

28. Dibuja el desarrollo de un icosaedro de arista 4 cm y construye el poliedro correspondiente. Calcula su área.

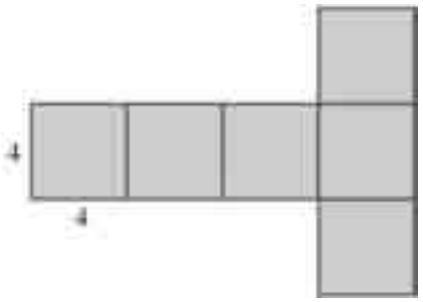


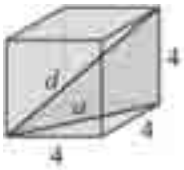
Por Pitágoras

$a = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

$A = 20\,A_{triángulo} = 20 \times \dfrac{4 \times 2\sqrt{3}}{2} = 80\sqrt{3} \simeq 138,56$ cm^2

29. Haz el desarrollo del cubo de 4 cm de arista y constrúyelo. Calcula su diagonal con una aproximación hasta las centésimas.





Por Pitágoras

$a = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

$d = \sqrt{a^2 + 4^2} = \sqrt{32 + 16} = \sqrt{48} =$

$= 4\sqrt{3} \simeq 6,92$ cm

30. Una cara de un dodecaedro regular tiene 1,24 cm de apotema, y 1,8 cm de lado. Halla el área total del dodecaedro.



$A_{pentágono} = 5 \times \dfrac{1,8 \times 1,24}{2} = 5,58$cm^2

$A_{dodecaedro} = 12 \times 5,58 = 66,96$ cm^2

31. Las aristas lateral y básica de un prisma hexagonal regular miden, respectivamente, 5 y 3 cm. Calcula el área lateral, el área total y el volumen del prisma.



$A_L = 6 \times 3 \times 5 = 90$ cm^2

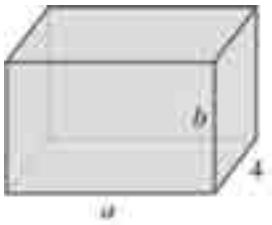
$a = \sqrt{3^2 - \left(\dfrac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{27}{4}} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

$A_{hexágono} = 6 \times \dfrac{3 \times \dfrac{3\sqrt{3}}{2}}{2} = \dfrac{3^3\sqrt{3}}{2} = \dfrac{27\sqrt{3}}{2}$

$A_T = A_L + 2\,A_{hexágono} = 90 + 27\sqrt{3} = 136,76$ cm^2

$V = A_{hexágono} \times h = \dfrac{27\sqrt{3}}{2} \times 5 = 116,91$ cm^3

32. En un ortoedro, cuyo volumen es de 140 cm^3, de las tres aristas que concurren en un vértice, una mide 4 cm y entre las otras dos suman 12 cm. Se desea calcular el área total del ortoedro.



Del volumen se deduce que $4ab = 140 \Rightarrow ab = 35$

Hay que resolver el sistema

$$\left.\begin{array}{l} a+b=12 \\ ab=35 \end{array}\right\} \Rightarrow a=12-b \Big\} \Rightarrow (12-b)b = 35 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b^2 - 12b + 35 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b = \frac{12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \times 35}}{2} = \frac{12 \pm 2}{2} = \begin{cases} 7 \\ 5 \end{cases}$$

Si $b = 5 \Rightarrow a = 7$ y si $b = 7 \Rightarrow a = 5$.

Luego si una arista vale 5 la otra vale 7.

Asi: $A_T = 2 \times 7 \times 5 + 2 \times 4 \times 5 + 2 \times 4 \times 7 =$

$= 70 + 40 + 56 = 166 \text{ cm}^3$

33. Las dimensiones de un estanque rectangular son 18 m y 20 m, respectivamente. Un tubo arroja en dicho estanque agua a razón de 18 litros por segundo. ¿En cuánto tiempo el nivel del agua se elevará a 80 cm.?

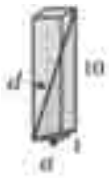
El volumen de agua necesitado será

$18 \times 20 \times 0{,}8 = 288 \text{ m}^3 = 288000 \text{ dm}^3 = 288000\ l$

El tiempo que tardará será: $\frac{288000}{18} = 16000 \text{ seg} =$

$= 266 \text{ min } 40 \text{ seg} = 4\text{h } 26 \text{ min } 40 \text{ seg}.$

34. Una barra de tiza, de base cuadrada, tiene una arista de 1 dm y otra de 1 cm. Calcular el área total, el volumen y la diagonal de la tiza.



$A_T = A_L + 2A_b = 4 \times 1 \times 10 + 2 \times 1 \times 1 =$

$= 42 \text{ cm}^2$

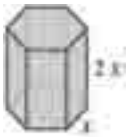
$V = 1 \times 1 \times 10 = 10 \text{ cm}^3$

Por Pitágoras

$a = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \text{ cm}$

$d = \sqrt{2 + 10^2} = \sqrt{102} \simeq 10{,}1 \text{ cm}$

35. Calcula el área lateral y total de un prisma hexagonal regular, que tiene las aristas laterales de doble longitud que las básicas, sabiendo que la suma total de las aristas es 48 cm.



Longitud de las aristas

$24x = 48 \Rightarrow x = 2 \text{ cm}$



$A_L = 6 \times 2 \times 4 = 48 \text{ cm}^2$

Por Pitágoras

$a = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$

$$A_{hexágono} = 6 \times \frac{2\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$$

$$A_T = A_L + 2A_{hexágono} = 48 + 2 \times 6\sqrt{3} =$$

$$= 48 + 12\sqrt{3} \simeq 68{,}78 \text{ cm}^2$$

▶ Pág. 201. Ejercicios



TEMA 10

CILINDROS

PIRÁMIDES

CONOS

SOLUCIONARIO

36. ¿Cuál es la masa de agua contenida en un vaso cilíndrico de hojalata, sabiendo que el desarrollo de su superficie lateral es un cuadrado de 1 dm de lado?

Se calcula el radio de la base

$$2\pi r = 1 \Rightarrow r = \frac{1}{2\pi} \text{ dm}$$

$$\text{Así } V = \pi \cdot \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \cdot 1 = \frac{1}{4\pi} \simeq 0,0795 \text{ dm}^3$$

Como la masa de 1 dm^3 de agua es 1 kilo, la masa del agua contenida es de 0,0795 kilos o 79,5 g.

37. El área total de un cilindro de revolución es 48π cm^2, y la generatriz es la mitad del radio de la base. Calcular el volumen del cilindro.



$$A_T = 2\pi r^2 + 2\pi rh =$$
$$= 2\pi(2x)^2 + 2\pi\, 2x\, x = 12\pi\, x^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 12\pi x^2 = 48\pi \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x = 2 \text{ cm}$$

Así $V = \pi r^2 h = \pi \times 4^2 \times 2 = 32\pi \text{ cm}^3 \simeq 100,5 \text{ cm}^3$

38. La capacidad de un depósito cilíndrico es de 300 hl.

a) Hallar su diámetro, sabiendo que la profundidad es 7,5 m.

b) Calcular el peso del agua contenida en el depósito cuando ésta alcanza una altura de 1,5 m.

300 hl = 30000 l = 30000 dm^3

$V = \pi r^2 h = 75\pi r^2\ dm^3 \Rightarrow r^2 = \frac{30000}{75\pi} = \frac{400}{\pi} \Rightarrow r = \frac{20}{\sqrt{\pi}}$

a) $d = 2r = \frac{40}{\sqrt{\pi}}\ dm \simeq 22,57\ dm$

b) $V = \pi r^2 h = 15\pi r^2 = 15\pi \frac{400}{\pi} = 6000\ dm^3 = 6000\ kg$

39. Hallar la altura que alcanzará el agua en un depósito cilíndrico de 8 m de diámetro cuando se alimente dicho depósito pr medio de un grifo que arroje 720*l* por hora. El grifo está abierto cuatro horas y cuarto.

$V = \pi(40)^2 h = 720 \times \left(4 + \frac{1}{4}\right) \Rightarrow 1600\pi h = 3060 \Rightarrow$

$\Rightarrow h = \frac{3060}{1600\pi} = \frac{153}{80\pi} \simeq 0,61\ dm$

40. Para hacer un depósito se ha construido con un determinado material cuya densidad es 2,8 g/cm³, un muro de 8 m de altura y de forma cilíndrica. Sabiendo que los radios de las dos superficies cilíndricas que lo limitan, exterior e interiormente, son 4 m y 3 m, respectivamente, ¿cuál es el peso del muro?

$V_{muro} = \pi \times 4^2 \times 8 - \pi \times 3^2 \times 8 = 128\pi - 72\pi =$

$= 56\pi\ m^3 \simeq 175,93\ m^3$

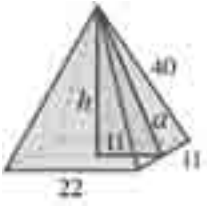
Como 2,8 gr/cm³ = 2,8 × 1000 kg/m³ = 2800 kg/m³ el peso del muro es 175,93 × 2800 = 492601,73 kg

41. ¿Cuál es el volumen de esta pirámide regular?



$V = \frac{14^2 \times 30}{3} = 1960\ cm^3$

42. Calcula el área total y el volumen de una pirámide regular de base cuadrada cuya arista básica mide 22 mm y la arista de una cara 40 mm.



Por Pitágoras

$a = \sqrt{40^2 - 11^2} = \sqrt{1479} \simeq 38,46$

$h = \sqrt{1479 - 11^2} = \sqrt{1358} \simeq 36,85$

$A_T = A_L + A_b = 4 \times \frac{22 \times \sqrt{1479}}{2} + 22^2 =$ 16292,14 + 484 =

$= 2176,14\ mm^2$

$V = \frac{1}{3} \times 22^2 \times 36,85 = 6004,11\ mm^3$

43. Una pirámide triangular regular tiene una arista básica de 5 cm y una altura de 7 cm. Dibuja su desarrollo y constrúyela. Calcula su volumen.

Se calcula la altura de la base, por Pitágoras.



$a = \sqrt{5^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{75}{4}} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$

$A_{base} = \frac{1}{2} \times 5 \times \frac{5\sqrt{3}}{2} = \frac{25\sqrt{3}}{4}$

$V = \frac{1}{3} \times \frac{25\sqrt{3}}{2} \times 7 = \frac{175\sqrt{3}}{12} \simeq 25,26\ cm^3$



La altura de la pirámide cae en el centro del triángulo (baricentro que coincide con el ortocentro por ser regular).

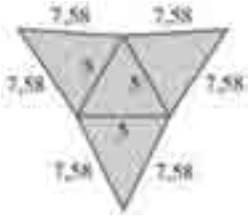
Por eso su distancia al vértice y el lado es de $\frac{2}{3}$ y $\frac{1}{3}$ de la longitud de la altura respectivamente.

$\frac{2}{3}a = \frac{2}{3}\frac{5\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$

Por Pitágoras

$l = \sqrt{7^2 + \left(\frac{5\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{49 + \frac{75}{9}} = \sqrt{\frac{516}{9}} = \sqrt{\frac{172}{3}} \simeq 7,58\ cm$

Por tanto su desarrollo es:



44. a) La pirámide egipcia de Keops tiene base cuadrada de lado 227 m (aproximadamente), su altura mide 137 m. Calcula su volumen.

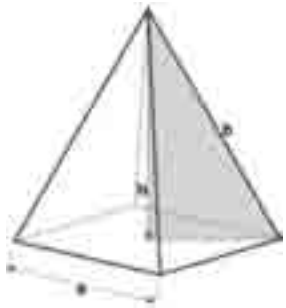
b) Originalmente tenía 3 m más de anchura y 10 m más de altura. ¿Cuántos metros cúbicos se han erosionado a lo largo del tiempo (4 500 años aproximadamente)?

a) $V = \frac{1}{3} \times (227)^2 \times 137 = 2353157,7\ m^3$

b) $V_p = \frac{1}{3} \times (230)^2 \times 147 = 2592100\ m^3$

Se han erosionado 2592100 – 2353157,7 = 238942,3 m^3

45. En este ejercicio se consideran pirámides regulares de altura *h* y base cuadrada de lado *a*. La arista lateral es *b* y el volumen *V*. Completa la tabla y haz un redondeo hasta las centésimas en aquellos resultados no enteros.



a	*b*	*h*	*V*
8	**12**		
8		**10**	
8			**640**
	15	**10**	
		12	**800**

1) Si llamamos d a la diagonal de la base, por Pitágoras

$d = \sqrt{8^2 + 8^2} = 8\sqrt{2} \Rightarrow \frac{d}{2} = 4\sqrt{2}$

$h = \sqrt{12^2 - (4\sqrt{2})^2} = \sqrt{112} = 10,58$

$V = \frac{1}{3} \times 8^2 \times 10,58 \simeq 225,77$

2) Como $d = 4\sqrt{2}$, por Pitágoras

$b = \sqrt{\left(4\sqrt{2}\right)^2 + 10^2} = \sqrt{132} \simeq 11,49$

$V = \frac{1}{3} \times 8^2 \times 10 \simeq 213,33$

3) $V = \frac{1}{3} \times 8^2 \times h = 640 \Rightarrow h = \frac{640 \times 3}{64} = 30$

Como $d = 4\sqrt{2}$, por Pitágoras

$b = \sqrt{\left(4\sqrt{2}\right)^2 + 30^2} = \sqrt{932} \simeq 30,53$

4) Por Pitágoras

$\frac{d}{2} = \sqrt{15^2 - 10^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5} \Rightarrow d = 10\sqrt{5}$

por otra parte $d^2 = a^2 + a^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2 = \frac{d^2}{2} = \frac{500}{2} = 250 \Rightarrow a = \sqrt{250} \simeq 15,81$

$V = \frac{1}{3} \times \left(\sqrt{250}\right)^2 \times 10 \simeq 833,33$

5) $V = \frac{1}{3}a^2 \cdot 12 = 4a^2 = 800 \Rightarrow a^2 = 200 \Rightarrow$

$\Rightarrow a = \sqrt{200} \simeq 14,14$

Por Pitágoras $d^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 \Rightarrow d^2 = 2 \times 200 =$

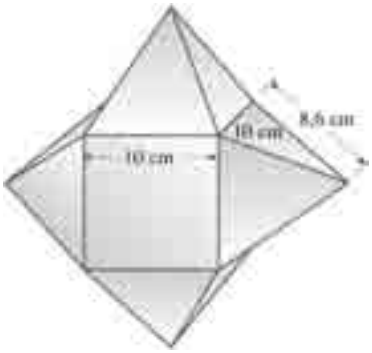
$= 400 \Rightarrow d = 20$ y $\frac{d}{2} = 10$

$b = \sqrt{12^2 + 10^2} = \sqrt{244} \simeq 15,62$

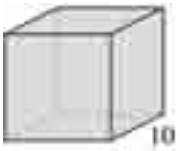
a	*b*	*h*	*V*
8	**12**	10,58	225,77
8	11,49	**10**	213,33
8	30,53	30	**640**
15,81	**15**	**10**	833,33
14,14	15,62	**12**	**800**

46. Descomponer en cuerpos conocidos y calcular el área y el volumen de los siguientes:

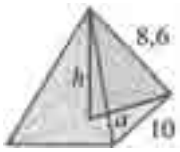
I)



Se descompone en un cubo y cuatro pirámides cuadrangulares regulares.



$V_{cubo} = 10^3 = 1000$ cm^3



Por Pitágoras

$2a^2 = 10^2 \Rightarrow a = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

$h = \sqrt{8,6^2 - 50} = \sqrt{23,96} \simeq 4,89$ cm

$V_{pirámide} = \frac{1}{3} \times 10^2 \times 4,89 = 163,16$ cm^3

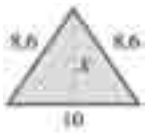
$V_{cuerpo} = V_{cubo} + 4V_{pirámide} = 1000 + 4 \times 163,16 =$

$= 1652,65$ cm^3

El área son dos cuadrados más 16 tiángulos

$A_{cuadrado} = 10^2 = 100$ cm^2

Por Pitágoras



$x = \sqrt{8,6^2 - 5^2} = \sqrt{48,96} \simeq 7$ cm

$A_{triángulo} = \frac{1}{2} \times 10 \times 7 = 35$ cm^2

$A_{cuerpo} = 2A_{cuadrado} + 16A_{triángulo} =$

$= 2 \times 100 + 16 \times 35 = 760$ cm^2

II)



Se descompone en un prisma hexagonal y una pirámide hexagonal.







Se calcula el área del hexágono.

Por Piágoras

$a = \sqrt{6^2 - 3^2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$

$A_{hexágono} = 6\dfrac{6 \times 3\sqrt{3}}{2} = 54\sqrt{3}\ \text{m}^2$

Se calcula la altura de la pirámide, por Pitágoras



$h = \sqrt{8^2 - 6^2} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$

$V_{prisma} = A_{hexágono} \times \text{ altura } = 54\sqrt{3} \times 12 = 648\sqrt{3}\ \text{m}^3 =$

$= 1122,37\ \text{m}^3$

$V_{pirámide} = \dfrac{1}{3} A_{hexágono} \times \text{ altura } = \dfrac{1}{3} 54\sqrt{3} \times 2\sqrt{7} =$

$= 36\sqrt{21}\ \text{m}^3 \simeq 164,97\ \text{m}^3$

$V_{cuerpo} = V_{prisma} + V_{pirámide} = 648\sqrt{3} + 36\sqrt{21} \simeq 1287,34\ \text{m}^3$

El área es la del hexágono más seis rectángulos más seis triángulos.

$A_{hexágono} = 54\sqrt{3}\ \text{m}^3$ ya calculada

$A_{rectángulo} = 12 \times 6 = 72\ \text{m}^2$

Para calcular el área de los triángulos necesitamos conocer su altura.

Por Pitágoras



$h = \sqrt{8^2 - 3^2} = \sqrt{55}$

$A_{triángulo} = \dfrac{1}{2} \times 6 \times \sqrt{55} = 3\sqrt{55}\ \text{m}^2 \simeq 22,25\ \text{m}^2$

$A_{cuerpo} = A_{hexágono} + 6A_{rectángulo} + 6A_{triángulo} =$

$= 54\sqrt{3} + 6 \times 72 + 6 \times 3\sqrt{55} \simeq 93,53 + 432 + 133,49 = 659,02\ \text{m}^2$

47. La construcción idealizada de un reloj de arena es un cilindro de 4 cm de diámetro de las bases y 8 cm de altura. En su interior hay dos conos de las mismas dimensiones. Calcula el volumen de ambos conos.



$V = \dfrac{1}{3} \times \pi \times 2^2 \times 4 = \dfrac{16\pi}{3} \simeq 16,75\ \text{cm}^3$ es el volumen de uno de los dos conos iguales.

48. Juan ha comprado un cornete de helado que tiene 12 cm de altura y 6 cm de diámetro de la base. ¿Cuál es el volumen de helado?

$V = \dfrac{1}{3} \times \pi \times 3^2 \times 12 = 36\pi \simeq 113,1\ \text{cm}^3$

▶ Pág. 202. Ejercicios



CUERPOS EN EL ESPACIO

LA ESFERA

EL GLOBO TERRÁQUEO

SOLUCIONARIO

49. En el ejercicio siguiente *r* y *h* son el radio y la altura de un cono. *A* es el área lateral y *V* el volumen. Completa la tabla y redondea hasta las milésimas en los resultados no enteros.

r	*h*	*A*	*V*
5	**10**		
	10		**1000**
10			**1000**
7		**250**	
5	**12**		

1) Se calcula la generatriz por Pitágoras



$$g = \sqrt{5^2 + 10^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$$

$$A = \pi rg = \pi \times 5 \times 5\sqrt{5} = 25\sqrt{5}\pi \simeq 175,620$$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3} \times \pi \times 5^2 \times 10 = \frac{250\pi}{3} \simeq 261,799$$

2) Como $V = \frac{1}{3} \times \pi r^2 \times 10 = 1000 \Rightarrow$

$$\Rightarrow r = \sqrt{\frac{300}{\pi}} \simeq \sqrt{95,493} \simeq 9,772$$



Se calcula la generatriz por Pitágoras

$$g = \sqrt{100 + \frac{300}{\pi}} = \sqrt{\frac{100\pi + 300}{\pi}} \simeq$$

$$\simeq \sqrt{195,493} \simeq 13,982$$

$$A = \pi rg = \pi \cdot \sqrt{\frac{300}{\pi}} \cdot \sqrt{\frac{100\pi + 300}{\pi}} =$$

$$= \sqrt{300(100\pi + 300)} \simeq \sqrt{184247,78} \simeq 429,241$$

3) Como $V = \frac{1}{3}\pi \times 10^2 \times h = 1000 \Rightarrow h = \frac{30}{\pi} \simeq 9,549$



Por Pitágoras

$$g = \sqrt{\frac{30^2}{\pi^2} + 10^2} = \frac{\sqrt{900 + 100\pi^2}}{\pi}$$

$$A = \pi rg = \pi \times 10 \times \frac{\sqrt{900 + 100\pi^2}}{\pi} = 10\sqrt{900 + 100\pi^2} \simeq$$

$$\simeq 10\sqrt{1886,960} \simeq 434,392$$

4) Como $A = \pi rg = \pi \times 7 \times g = 250 \Rightarrow g = \frac{250}{7\pi}$



Por Pitágoras

$$h = \sqrt{\frac{250^2}{7^2\pi^2} - 7^2} = \frac{\sqrt{62500 - 2401\pi^2}}{7\pi} \simeq$$

$$\simeq \frac{\sqrt{38803,08}}{7\pi} \simeq 8,957$$

$$V = \frac{1}{3}\pi \times 7^2 \times 8,957 \simeq 459,632$$

5) Por el teorema de Pitágoras



$$g = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{169} = 13$$

$A = \pi\, r\, g = \pi \times 5 \times 13 = 65\pi \simeq$
$\simeq 204,204$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \times 25 \times 12 = 100\pi \simeq 314,159$$

r	*h*	*A*	*V*
5	**10**	175,620	261,799
9,772	**10**	429,241	**1000**
10	9,549	434,392	**1000**
7	8,957	**250**	459,632
5	**12**	204,204	314,159

50. Calcular el área total y el volumen del cono generado por el triángulo rectángulo de catetos 3 y 4 cm al girar al rededor del cateto menor. ¿Cuánto mide la generatriz?



Por Pitágoras

$$g = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$A_L = \pi\, rg = \pi \times 4 \times 5 = 20\pi \simeq 62,83 \text{ cm}^2$$

$$A_b = \pi\, r^2 = 16\pi \simeq 50,27 \text{ cm}^2$$

$$A_T = A_L + A_b = 20\pi + 16\pi = 36\pi \simeq 113,10 \text{ cm}^2$$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \times 16 \times 3 = 16\pi \simeq 50,27 \text{ cm}^3$$

51. Calcula el cateto mayor del triángulo rectángulo que al girar engendra un cono de 3 cm de radio y 47,1 cm² de área lateral.



$$A = \pi rg = 3\pi g = 47,1 \Rightarrow g = \frac{47,1}{3\pi} \simeq 5$$

Por Pitágoras

$$h = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{16} = 4$$

El cateto mayor es de 4 cm.

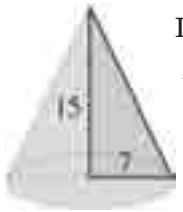
52. Al girar 360º un triángulo rectángulo de catetos 7 y 15 cm alrededor de cada uno de ellos se obtienen dos conos distintos. Halla el área lateral de cada uno.



Hay que calcular la generatriz, por Pitágoras.

$$g = \sqrt{7^2 + 15^2} = \sqrt{274} \simeq 16,55$$

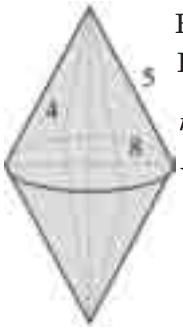
$$A = \pi rg = \pi \times 15 \times \sqrt{274} \simeq 780,04 \text{ cm}^2$$



La generatriz es la misma, entonces

$$A = \pi rg = \pi \times 7 \times \sqrt{274} \simeq 364,02 \text{ cm}^2$$

53. El perímetro de un rombo mide 20 cm y la diagonal mayor 8 cm. Hallar el volumen del cuerpo que resulta al girar el rombo 360º alrededor de la diagonal mayor.



El lado del rombo vale $\frac{20}{4} = 5$ cm

Por Pitágoras

$$r = \sqrt{25 - 16} = 3$$

$$V_{cuerpo} = 2V_{cono} = 2\frac{1}{3}\pi \times 4^2 \times 3 = 32\pi \simeq$$

$$\simeq 100,53 \text{ cm}^3$$

54. El diámetro de la Luna mide 3 480 km. ¿cuál es la superficie lunar? Sabiendo que España mide una superficie de 505 000 km², ¿cuántas «Españas» caben en la Luna?

$S = 4\pi\ r^2 = (2r)^2\pi = d^2\pi = 3480^2\,\pi \simeq 38\,045\,944\ \text{km}^2$

$\dfrac{38045944}{505000} \simeq 75,34 \Rightarrow$ caben 75 "Españas"

55. Calcula la superficie y el volumen de una esfera de 30π m de circunferencia máxima.

$C = 2\pi\ r = 30\pi \Rightarrow\ r = 15$ m

$A = 4\pi\ r^2 = 4\,\pi\,15^2 = 900\pi \simeq 2827,43\ \text{m}^2$

$V = \dfrac{4}{3}\pi r^3 = \dfrac{4}{3}\pi 15^3 = 4500\pi \simeq 14137,17\ \text{m}^3$

56. Una pelota de tenis tiene 56 mm de diámetro y 3 mm de espesor. ¿Qué consumo de goma hace una casa que fabrica 25 000 pelotas diarias si cada cm³ de goma pesa 1,4 gramos?

Se calcula el volumen de goma, que contiene una pelota, en cm³

$V = \dfrac{4}{3}\pi(5,6+0,3)^3 - \dfrac{4}{3}\pi 5,6^3 = \dfrac{4}{3}\pi\left[5,9^3 - 5,6^3\right] =$

$= \dfrac{4}{3}\pi(29,763) = 39,684\pi \simeq 124,67\ \ \text{cm}^3$

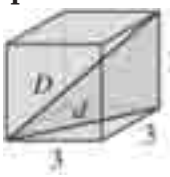
El peso de la goma de una pelota es:

$P = V \times 1,4 = 39,684\pi \times 1,4 = 55,5576\pi \simeq 174,54$ g.

El consumo de goma es $55,5576\pi \times 25000 \simeq$

$\simeq 4363483,7$ g $\simeq 4363,48$ kg

57. Un cubo de 54 cm² de superficie está inscrito en una esfera, halla el volumen del espacio comprendido entre la esfera y el referido poliedro.



De la superficie del cubo se tiene

$6l^2 = 54 \Rightarrow l = 3$

Se calcula la diagonal del cubo que es diámetro de la esfera.

Por Pitágoras

$d = \sqrt{3^2+3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

$D = \sqrt{d^2+3^2} = \sqrt{18+9} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$

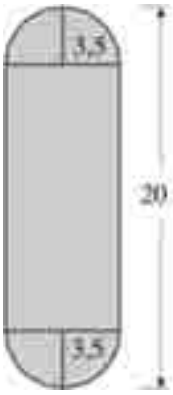
Por tanto el radio de la esfera es: $r = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

$V_{esfera} = \dfrac{4}{3}\pi r^3 = \dfrac{4}{3}\pi\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \dfrac{27\sqrt{3}}{2}\pi \simeq 73,46\ \text{cm}^3$

$V_{cubo} = l^3 = 3^3 = 27$

$V_{comprendido} = \dfrac{27\sqrt{3}}{2}\pi - 27 \simeq 73,46 - 27 = 46,46\ \ \text{cm}^3$

58. La cápsula que contiene un medicamento tiene forma de un cilindro con dos semiesferas en los extremos. La longitud total de la cápsula es de 20 mm y el diámetro del cilindro es de 7 mm. ¿Cuál es la superficie y la capacidad de dicha cápsula?



De la figura se deduce que la altura del cilindro es 13 mm.

Su superficie es la superficie lateral del cilindro más la de una esfera.

$S = 2\pi\ rh + 4\pi\ r^2 =$

$= 2\pi\ \times 3,5 \times 13 + 4\,\pi\ (3,5)^2 \simeq$

$\simeq 91\pi\ + 49\pi = 140\pi \simeq 439,82\ \text{mm}^2$

Su volumen es el del cilindro más el de una esfera

$V = \pi r^2 h + \dfrac{4}{3}\pi r^3 = \pi(3,5)^2 \times 13 + \dfrac{4}{3}\pi(3,5)^3 \simeq$

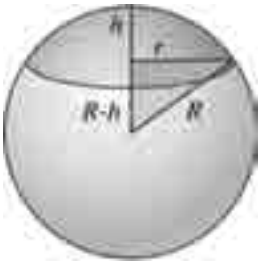
$\simeq 159,25\pi + 57,17\pi \simeq 216,42\pi \simeq 679,89\ \text{mm}^3$

59. Un vaso está lleno de agua. Se introduce en él una esfera y se derraman 115 cm³, de agua. Calcula el radio de la esfera.

$V = \dfrac{4}{3}\pi r^3 = 115 \Rightarrow r^3 = \dfrac{345}{4\pi} \Rightarrow r = \sqrt[3]{\dfrac{345}{4\pi}} \simeq \sqrt[3]{27,45} \simeq$

$\simeq 3,02\ \ \text{cm}$

60. Explica cómo calcular el radio de un casquete conociendo su altura y el radio de la esfera. Haz luego las operaciones para *h* = 2,5 m y *r* = 7m.



Por Pitágoras

$r = \sqrt{R^2 - (R-h)^2} = \sqrt{R^2 - (R^2 - 2Rh + h^2)} =$

$= \sqrt{2Rh - h^2} = \sqrt{(2R-h)h}$

Si $h = 2,5$ m y $R = 7$ m

$r = \sqrt{(14-2,5)\times 2,5} = \sqrt{28,75} \simeq 5,36\ \ \text{m}$

61. Calcula la superficie de la zona que delimitan en una superficie esférica de radio 2,5 cm dos planos paralelos que la cortan determinando

dos casquetes iguales, de radio la mitad del radio de la esfera.



La superficie pedida es la de una zona esférica de anchura $2x$.

Por Pitágoras

$$x = \sqrt{R^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3R^2}{4}} = \frac{R\sqrt{3}}{2}$$

Asi

$$S = 2\pi rh = 2\pi \times 2,5 \times 2,5\sqrt{3} = 12,5\sqrt{3}\pi \simeq 68,01 \quad \text{cm}^2$$

De otra forma. La superficie pedida es la de la esfera menos la de los dos casquetes, que son iguales.

$$S_{casquete} = 2\pi rh = 2\pi \times 2,5 \times \left(2,5 - \frac{2,5\sqrt{3}}{2}\right) \simeq 5\pi \times 0,3349 \simeq$$

$$\simeq 1,6746\pi \simeq 5,2611$$

$$S_{esfera} = 4\pi\, r^2 = 4\pi\, (2,5)^2 = 25\pi \simeq 78,5398$$

$$S_{zona} = S_{esfera} - 2S_{casquete} = 78,5398 - 2 \times 5,2611 \simeq$$

$$\simeq 68,01 \text{ cm}^2$$

62. Aproximadamente el 29 % de la superficie terrestre está ocupado por tierra firme, ¿qué cantidad representa en millones de km^2?

Si la superficie de la tierra es de 510 101 × 10^3 km^2, el 29 % es:

$$\frac{510101 \times 10^3 \times 29}{100} \simeq 147929,290 \times 10^3 \text{ km}^2$$

la tierra firme ocupa una superficie de 147,92929 millones de km^2.

63. ¿Qué longitud de meridiano corresponde a un ángulo central de 1º?, ¿y de un minuto?

Como la longitud de un meridiano es de 40 009 152 m, la longitud correspondiente a 1º es:

$\frac{40009152}{360} \simeq 111136,53$ m; y a un minuto:

$\frac{111136,53}{60} \simeq 1852,27$ m

64. ¿Un grado de latutid equivale siempre a la misma distancia sobre la superficie terrestre? ¿Y si los puntos tienen la misma longitud?

Sí. No porque dependen de la latitud a que se encuentren.

65. ¿Entre qué latitudes y qué longitudes está situada la Península Ibérica?

La Península Ibérica se encuentra entre las latitudes 36º 0' 08" N de Tarifa y 43º 47' 38" N de Estaca de Bares y entre las longitudes de 9º 17' 50" O de Cabo Touriñan y 3º 19' 13" de Cabo Creus.

66. Consulta el mapa de husos horarios y calcula la diferencia horaria entre Moscú y Nueva York. ¿Qué hora es en dichas ciudades si en Londres son las diez de la mañana?

La diferencia horaria entre Moscú y Nueva York es de 8 horas.

Según el mapa de husos horarios, cuando en Londres son las diez de la mañana en Moscú son las 13h y en Nueva York son las 5h.

67. El Ecuador y el meridiano de Greenwich, ¿en cuántas partes dividen a la Tierra? Indica una ciudad de cada una de ellas y entre qué valores están comprendidas sus latitudes y sus longitudes para cada una de estas partes.

La Tierra queda dividida en 4 cuadrantes:

En el cuadrante NE está Moscú.

En el cuadrante NO está Nueva York.

En el cuadrante SE está Sydney.

En el cuadrante SO está Buenos Aires.

Tema 11

Funciones. Generalidades

▸ Programación de aula

Objetivos

- Definir el concepto de función.
- Introducir el vocabulario relacionado con el concepto de función.
- Representar gráficamente una función y especificar sus características.
- Definir el dominio de función.
- Definir el crecimiento y decrecimiento en una función.
- Definir los extremos de una función.
- Caracterizar las funciones continuas.

Criterios de evaluación

- Considerar correspondencias que permiten establecer relaciones funcionales.
- Conocer el vocabulario propio asociado al concepto de función.
- Representar gráficamente funciones.
- Establecer e interpretar el dominio de una función.
- Interpretar el sentido de variación de una función.
- Establecer sobre la gráfica los extremos de una función en el contexto de la situación estudiada.
- Analizar situaciones que permiten o no asignar comportamientos continuos a las funciones.

Contenidos

- **Conceptos** ("saber")
  - Concepto de función. Vocabulario.
  - Dominio e imagen de una función.
  - Características de las gráficas.
  - Crecimiento y decrecimiento.
  - Extremos función.
  - Funciones continuas.
- **Procedimientos** ("Saber hacer")
  - Análisis de correspondencias que permiten establecer relaciones funcionales.
  - Establecimiento e interpretación del dominio.
  - Interpretación del sentido de variación de una función.
  - Establecimiento sobre la gráfica de los extremos de una función en el contexto de la situación estudiada.
  - Análisis de situaciones que permiten o no asignar comportamientos continuos a las funciones.
- **Actitudes** ("Saber ser")
  - Predisposición a la investigación de situaciones descriptibles mediante funciones.
  - Reconocer y valorar la utilidad de las funciones para describir determinados fenómenos.
  - Sensibilidad, interés y gusto por la correcta interpretación de los datos obtenidos.
  - Interés por analizar los resultados obtenidos en la resolución de problemas.
  - Gusto por la representación ordenada y clara de los resultados y de los procesos gráficos efectuados.
  - Interés por la correcta valoración de las propiedades que pueda ofrecer una función.

▸ Programación por competencias

COMPETENCIA MATEMÁTICA

PENSAMIENTO Y RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

Descriptores

1. Advertir la existencia de correspondencias que permiten establecer relaciones funcionales.
2. Entender el alcance de la variable dependiente e independiente.

Desempeño

1. Pone de manifiesto la existencia de correspondencias entre variables.	- Distingue entre variable dependiente e independiente. - Comprende los conceptos a los que se refiere el vocabulario específico utilizado para la caracterización de una función.	- **Práctica 3 de 2º a 3º** (pág. 225) - **Ejemplos 1 y 3 º** (pág. 226 y 228) - **Ejercicios 1 a 4, 11 a 17, 24 a 26 y 29** (pág. 228 y 236 a 238)

CONSTRUCCIÓN DE MODELOS

Descriptores

1.Construir e interpretar la gráfica de una función.
2. Señalar en la gráfica los aspectos relevantes de la función.

Desempeño

1. Grafía la gráfica de una función.	- Construye la gráfica de una función. - Interpreta la gráfica de una función.	- **Práctica 1 de 2º a 3º** (pág. 225) - **Ejemplo 2** (pág. 227) - **Ejercicios 3, 4, 10, 18 a 31** (pág. 228, 231, 233 y 236 a 238)
2. Advierte en la gráfica de una función sus características.	- Señala los aspectos relevantes de la gráfica de una función. - Señala las características relevantes de la gráfica de una función.	- **Ejemplo 4** (pág. 232) - **Ejercicios 5, 7 a 10, 18 a 21, 24 a 31** (pág. 229, 230, 231, 233 y 236 a 238)

PLANTEAR Y RESOLVER PROBLEMAS MATEMÁTICOS

Descriptores

1. Identificar, definir y plantear problemas en los que intervienen relaciones funcionales.
2. Resolver los problemas planteados.

Desempeño

1. Plantea una situación concreta en la que interviene una relación funcional.	- Constata la existencia de correspondencia entre dos variables. - Identifica el papel que realiza cada una de las variables.	- **Práctica 2 de 2º a 3º** (pág. 225) - **Ejemplos y ejercicios del tema** (pág. 226 a 238)
2. Identifica los elementos de esa relación funcional.	- Distingue las características de la función.	- **Ejemplo 3 y 4** (pág. 228 y 232) - **Ejercicios 1 a 6, x 12 a 15, 24 a 29 y 31** (pág. 228, 229 y 236 a 238)
3. Resuelve la cuestión planteada.	- Obtiene la solución numérica. - Obtiene la gráfica. - Analiza la solución y obtiene conclusiones.	- **Ejercicios del tema** (pág. 226 a 238)

UTILIZAR EL LENGUAJE TÉCNICO FORMAL	**Descriptores**		
	1. Trabajar con la expresión formal de una función.		
	Desempeño		
	1. Utiliza la expresión formal de una función.	- Interpreta una relación funcional y la traduce al lenguaje simbólico formal. - Obtiene resultados a partir de las expresiones anteriores.	- **Ejemplos 1 y 3** (pág. 226 y 228) - **Ejercicios 1 a 4, 6, 11 a 17, 24 a 26 y 29** (pág. 228, 229 y 236 a 238)
COMUNICACIÓN MATEMÁTICA	**Descriptores**		
	1. Entender y expresarse sobre temas relacionados con las funciones, con diferentes niveles de precisión teórica y técnica.		
	Desempeño		
	1. Es capaz de entender y expresarse en un argumento que habla de relaciones entre variables.	- Entiende el alcance de una situación de relación entre variables. - Se expresa con claridad para describir oralmente, por escrito o con lenguaje formal, el alcance de una situación de correspondencia funcional.	- **Ejemplos y ejercicios del tema** (pág. 226 a 238)

COMPETENCIA LINGÜÍSTICA

COMPETENCIA LINGÜÍSTICA	**Descriptores**		
	1. Comprender el enunciado de un problema en el que intervienen correspondencias entre variables. 2. Describir con un texto o con una explicación oral breve el alcance de la relación funcional entre dos variables y el proceso seguido para especificarla.		
	Desempeño		
	1. Comprende lo que lee y discrimina e interpreta la información que le da el enunciado de un problema en el que está presente una relación entre variables.	- Identifica la pregunta que se le hace. - Diferencia los distintos elementos que intervienen en una situación de relación entre variables.	- **Ejemplo y ejercicios del tema** (pág. 226 a 238)
	2. Se expresa por escrito de manera adecuada y correcta, con claridad y coherencia, utilizando un lenguaje técnico preciso, en la descripción de una situación de relación entre variables.	- Presenta el texto de la solución de un problema de forma adecuada y correcta. - Selecciona los aspectos relevantes de la solución. - Es capaz de traducir al lenguaje natural el lenguaje formal con el que se expresa una función.	

COMPETENCIA EN CONOCIMIENTO E INTERACCION CON EL MEDIO FISICO

COMPETENCIA EN CONOCIMIENTO E INTERACCION CON EL MEDIO FÍSICO

Descriptores

1.Interpretar la información del mundo real -físico, demográfico, económico, social o cultural- a través de las funciones.

Desempeño

1. Interpreta el entorno cuando en él aparece una correspondencia entre variables.	- Advierte la existencia de variables físicas relacionadas entre sí. - Es capaz de relacionarlas.	- **Introducción** (pág. 224) - Ej**emplos 1, 2 y 4** (pág. 226, 227, 232)) - Ej**ercicios 7 a 10, 18 a 23, 27 y 30** (pág. 230, 231, 233, 236 a 238)
2. Obtiene conclusiones del entorno cuantificando la relación entre dos variables.	- Es capaz de alcanzar una conclusión del mundo real a través de la relación funcional entre dos de sus variables. - Decide opciones de actuación en función de las conclusiones obtenidas.	

COMPETENCIA APRENDER A APRENDER

COMPETENCIA APRENDER A APRENDER

Descriptores

1. Adquirir conciencia, hacer uso de las propias capacidades y conocimientos y desarrollar la curiosidad para iniciarse en el estudio de la modelización funcional de la realidad.

Desempeño

1. Tiene curiosidad y desarrolla habilidades para modelizar situaciones reales a través de funciones.	- Es consciente de que las matemáticas ayudan a modelizar situaciones reales. - Identifica situaciones aptas de modelizarse a través de expresiones funcionales. - Plantea sugerencias de ampliación de los resultados obtenidos tras el análisis de las soluciones a un problema.	- **Introducción** (pág. 224) - E**jercicios 4, 7, 10, 20, 22, 23, 27 y 30** (pág. 228, 230, 233, 237 y 238)

COMPETENCIA CULTURAL Y ARTÍSTICA

COMPENTENCIA CULTURAL Y ...

Descriptores

1. Mostrar el uso de las funciones para representar elementos artísticos.

Desempeño

1. Considera ejemplos de funciones que describen elementos artísticos.	- Relaciona funciones matemáticas y arquitectura.	- **Introducción** (pág. 224)

COMPETENCIA AUTONOMÍA E INICIATIVA PERSONAL

COMPETENCIA AUTONOMÍA E INICIATIVA PERSONAL

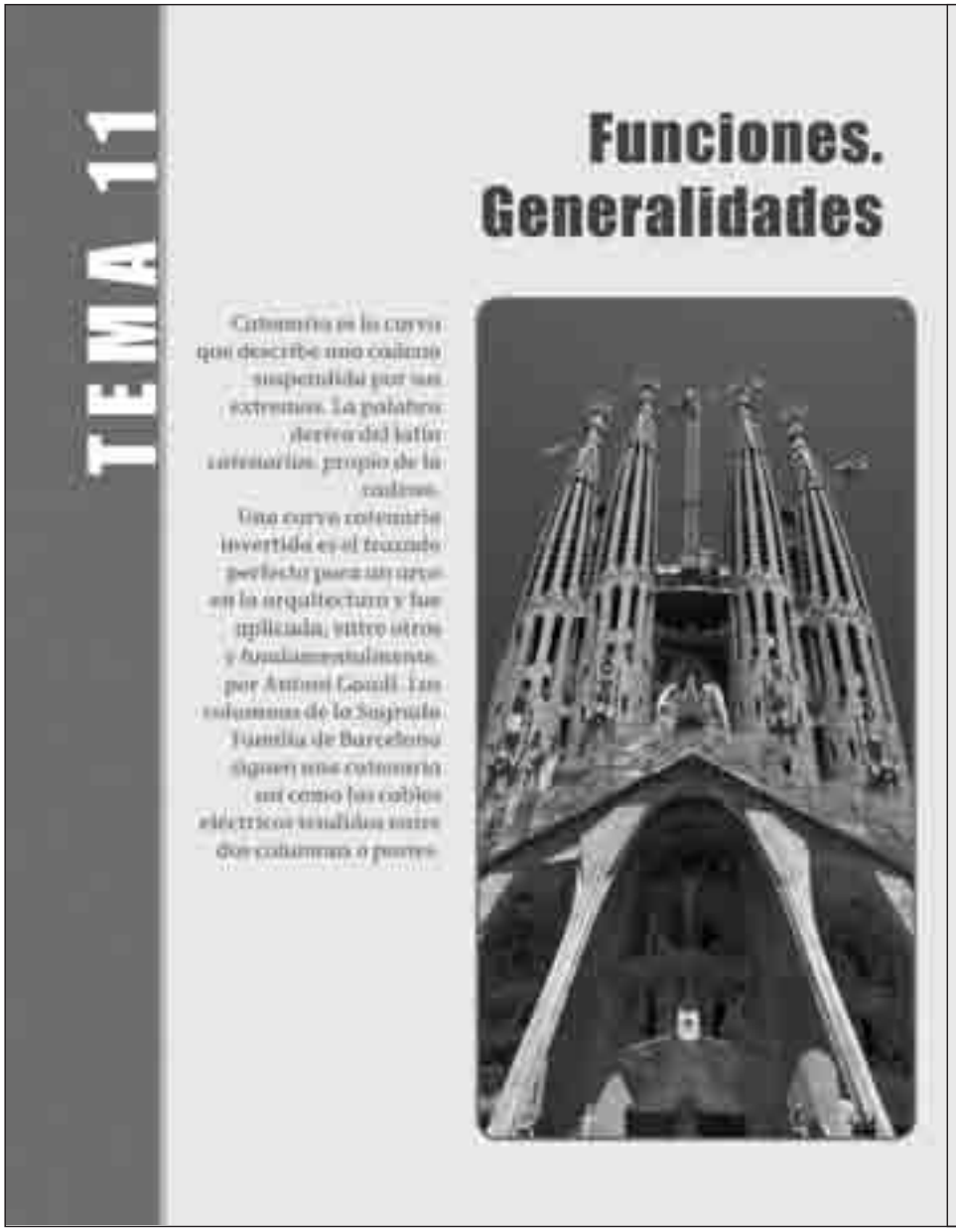
Descriptores

1. Utilizar la modelización funcional como instrumento que orienta la propia actividad con autonomía.
2. Utilizar la modelización funcional para organizar el pensamiento, a elaborar planes y tomar decisiones.

Desempeño

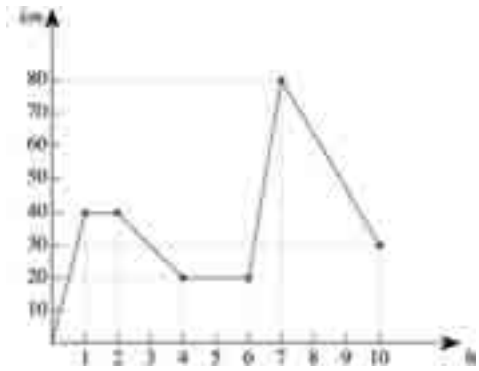
1. Idea y planifica el desarrollo de un ejercicio en el que está presente una función.	- Elige la opción adecuada para la resolución de los ejercicios. - Mantiene la opción hasta llegar a la conclusión final.	- **Ejemplos y ejercicios del tema** (pág. 226 a 238)
2. Evalúa y toma decisiones en función de la solución obtenida.	- Valora el resultado y lo pone en relación con el enunciado del problema resuelto. - Reflexiona sobre si el trabajo efectuado ha sido suficiente para el objetivo propuesto.	
3. Toma decisiones en función de la solución adoptada.	- Decide en función del resultado. - Acepta el posible error de una decisión cuando la solución no es la idónea.	

▶ Pág. 224- 225. Funciones. Generalidades



SOLUCIONARIO

1 Observa esta gráfica y contesta a las cuestiones.



a) En las 10 horas ha recorrido 40 + 20 + 60 + 50 = 170 **km.**

b) Ha estado parado 3 **horas.**

c) La velocidad media en la primera hora es de 40 km/h **y la velocidad media entre las 6 y 7 horas es de** 60 km/h

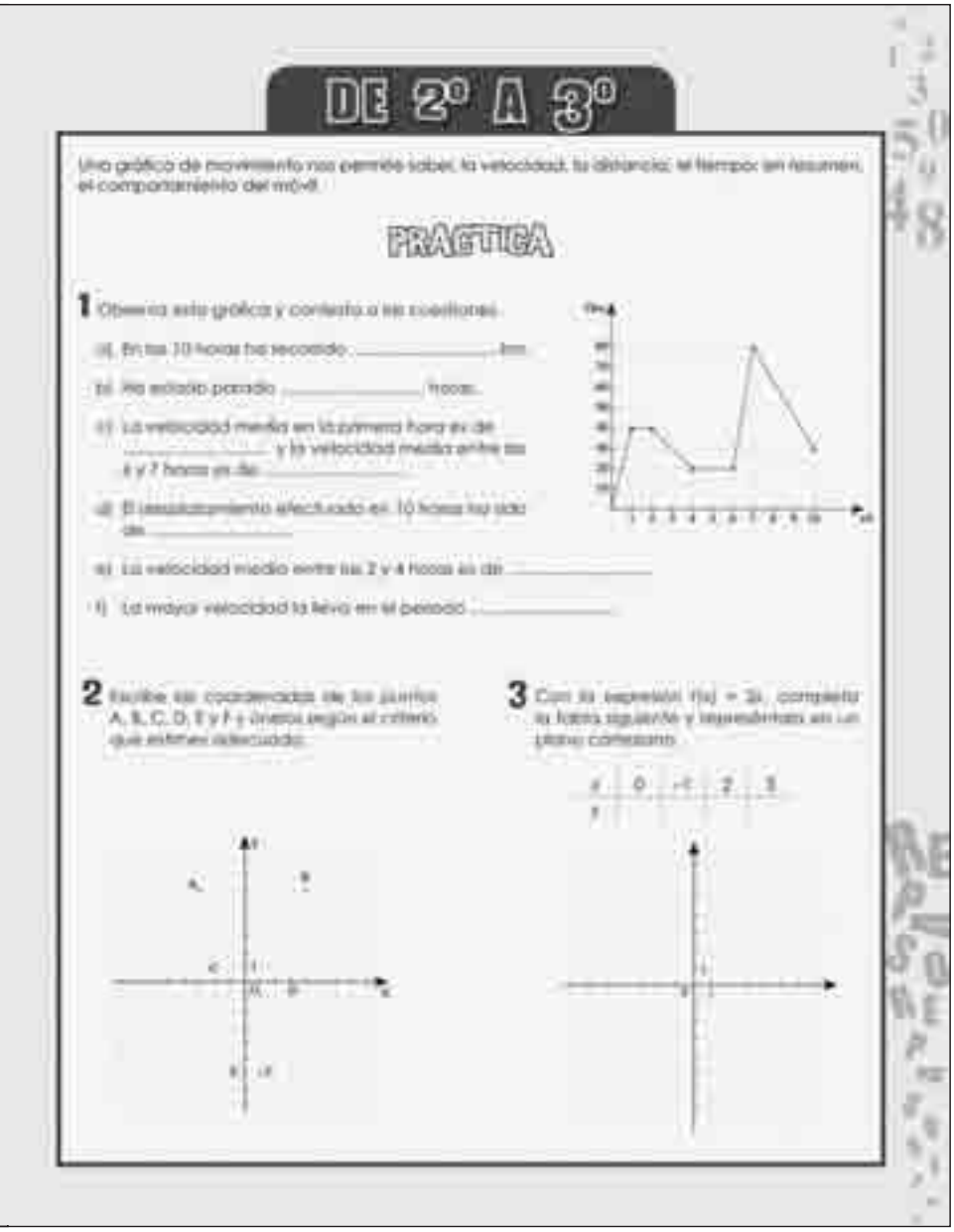
d) El desplazamiento efectuado en 10 horas ha sido de 40 + 20 + 60 + 50 = 170 km.

e) La velocidad media entre las 2 y 4 horas es de 20/2 = 10 km/h

f) La mayor velocidad la lleva en el periodo entre la 6 y 7 horas y es de 60 km/h.

2 Escribe las coordenadas de los puntos A, B, C, D, E y F y únelos según el criterio que estimes adecuado.

A (–3, 6), B (4, 6), C (–2, 0), D (3, 0), E(0, –6), F (1, –6)



DE 2º A 3º

Una gráfica de movimiento nos permite saber, la velocidad, la distancia, el tiempo, en resumen, el comportamiento del móvil.

PRACTICA

1 Observa esta gráfica y contesta a las cuestiones.

a) En las 10 horas ha recorrido _____ km.

b) Ha estado parado _____ horas.

c) La velocidad media en la primera hora es de _____ y la velocidad media entre las 6 y 7 horas es de _____.

d) El desplazamiento efectuado en 10 horas fue de _____.

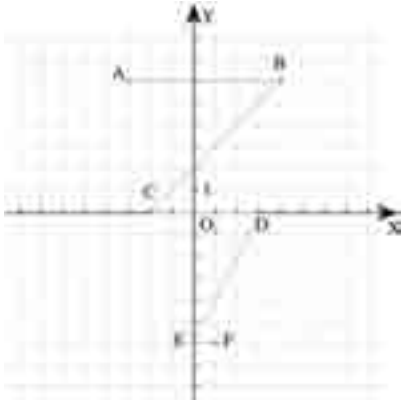
e) La velocidad media entre las 2 y 4 horas es de _____.

f) La mayor velocidad la llevo en el periodo _____.

2 Escribe las coordenadas de los puntos A, B, C, D, E y F y dinos según el criterio que estimes adecuado.

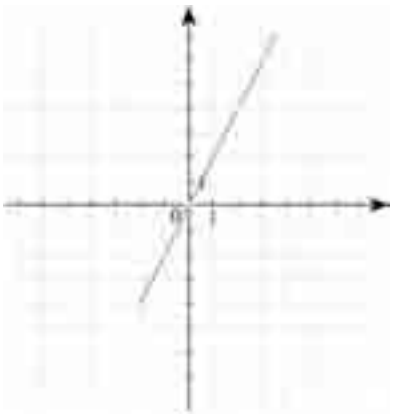
3 Con la expresión $f(x) = 2x$, completa la tabla siguiente y represéntala en un plano cartesiano.

x				
y				



3 Con la expresión $f(x) = 2x$, completa la tabla siguiente y represéntala en un plano cartesiano.

x	0	–1	2	3
y	0	–2	4	6



▶ Pág. 226. 1 Concepto de función. Vocabulario



FUNCIONES. GENERALIDADES

1 Concepto de función. Vocabulario

Cuando entre dos conjuntos cualesquiera es posible establecer una correspondencia, tal que a cada elemento del primero le corresponde un único elemento del segundo, se dice que entre ambos conjuntos existe una relación que llamamos **función**. Tal es el caso de hacer corresponder a cada día del año su temperatura máxima, a cada alumno de un grupo su talla, a cada automóvil su cilindrada, etc.

Función es una correspondencia entre dos conjuntos A y B tal que a cada elemento en A le corresponde un único elemento de B.

A es el **dominio** o conjunto de partida y B es el **conjunto de llegada**.

DEBEMOS SABER

Cuando los conjuntos A y B son conjuntos de números reales se dice que la función es real de variable real.

La notación $y = f(x)$ que se lee "y es función de x" y con esto se indica que los valores que toma "y" dependen o están en función de los que toma "x". Por eso a x se la **variable independiente** mientras que y o $f(x)$ es la imagen de x por la función f y también se llama **variable dependiente**.

El conjunto de todas las imágenes de los elementos del dominio se llama **imagen** de la función.

EJEMPLO

1 En un grupo de 9 niños y niñas de hasta dos años se ha obtenido la tabla siguiente, que expresa la relación entre su talla y su peso:

Talla (cm)	57	64	72	78	78	83	86	87	97
Peso (kg)	5,5	7,2	9	9,8	11	11	13,5	14,6	15,9

Esta correspondencia es una función pues cada elemento del conjunto de tallas tiene una única imagen en el de pesos. El dominio es el conjunto de tallas y la imagen el conjunto de pesos.

Podemos escribir, por ejemplo: $f(57) = 5{,}5$; $f(86) = 11$ o también $f^{-1}(5{,}5) = 57$ o $f^{-1}(11) = 86$ y se dice que la imagen de 57 es 5,5 o que 57 es el **antecedente** o **antiimagen** de 5,5, así como que 86 es el antecedente o antiimagen de 11 por la función f.

➪

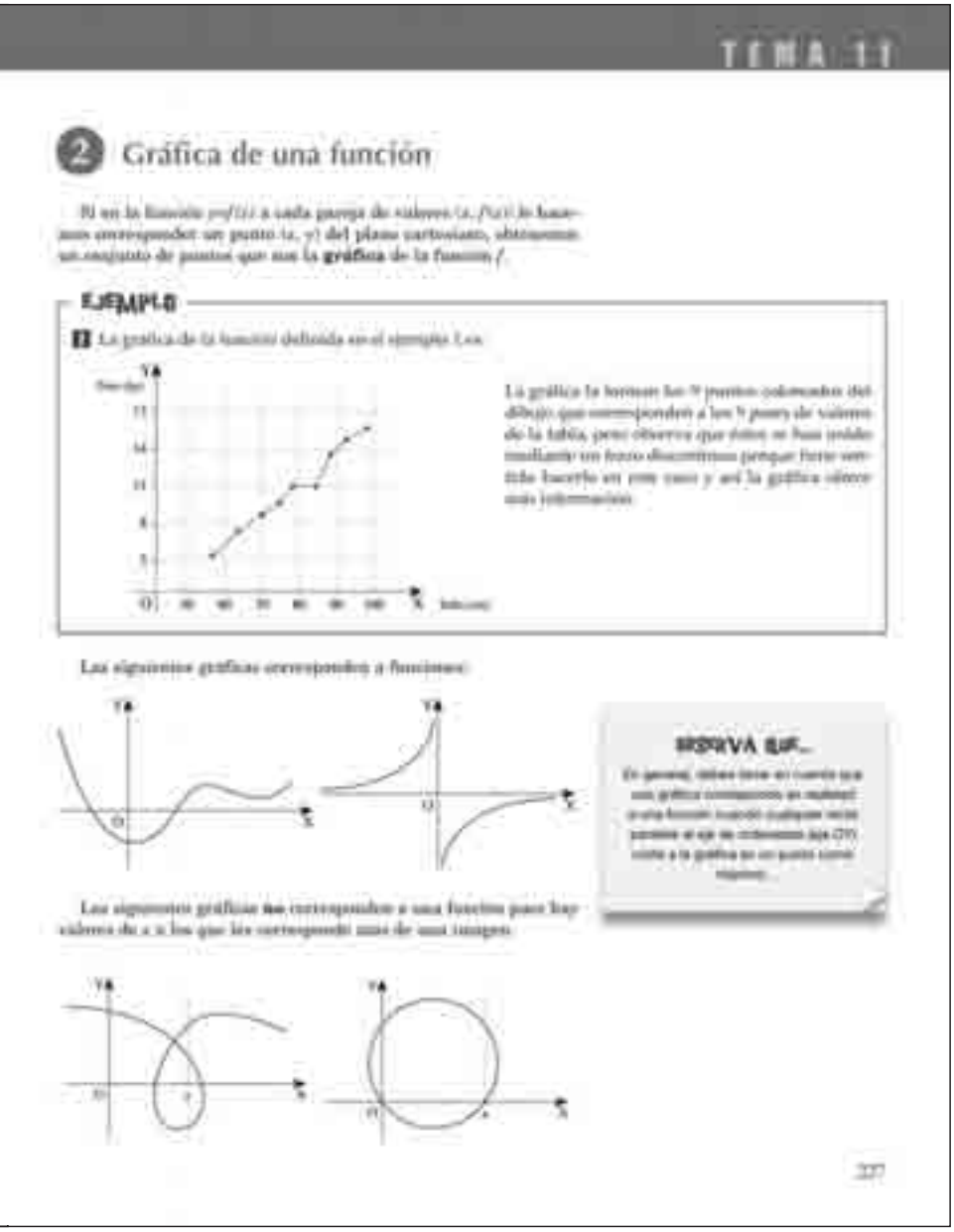
ORIENTACIONES DIDÁCTICAS

Notar la existencia de relaciones entre variables de la vida real y, entre ellas, las funcionales.

Insistir, con ejemplos, en la distinción entre variable dependiente e independiente.

Distinguir en una relación funcional entre el *dónde* se alcanza un valor y el *cuánto* vale la función en aquél.

▶ Pág. 227. 2 Gráfica de una función



TEMA 11

2 Gráfica de una función

Si en la función $y=f(x)$ a cada pareja de valores $(x, f(x))$ le hacemos corresponder un punto (x, y) del plano cartesiano, obtenemos un conjunto de puntos que son la **gráfica** de la función f.

EJEMPLO

1 La gráfica de la función definida en el ejemplo 1 es:

La gráfica la forman los 9 puntos coloreados del dibujo que corresponden a los 9 pares de valores de la tabla, pero observa que estos se han unido mediante un trazo discontinuo porque hay veces hacerlo en este caso y así la gráfica ofrece más información.

Las siguientes gráficas corresponden a funciones:

OBSERVA BIEN...

En general, debes tener en cuenta que una gráfica corresponde a una función si cualquier recta paralela al eje de ordenadas (OY) corta a la gráfica en un punto como máximo.

Las siguientes gráficas no corresponden a una función pues hay valores de x a los que les corresponden más de una imagen:

227

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS

No todas las gráficas lo son de funciones (insistir en la condición recuadrada en el texto).

Puede ser conveniente recordar cómo interpretar un gráfico, aplicado en este caso a la gráfica de una función.

▶ Pág. 228. 3 Dominio de una función



ORIENTACIONES DIDÁCTICAS

En Matemáticas existen operaciones que no admiten definición, por ejemplo, la división por 0.

SOLUCIONARIO

1. ¿Cuál es la función que la imagen de una cantidad "*x*" de dólares es su correspondiente cantidad "*y*" de euros? ¿Cuál es su dominio?

Supuesto el cambio 1 € = 1,3 $ la función es:

$y = \dfrac{x}{1{,}3}$ ó $y = 0{,}77\ x$. (aproximadamente).

Dominio: $D = R$

2. Dada la función $f(x) = \dfrac{x}{2} + 3$ se pide:

a) Su dominio;

$D\ (f) = \mathrm{R}$.

b) $f\ (2)$;

$f\ (2) = \dfrac{2}{2} + 3 = 4$

c) $f\ (0)$;

$f\ (0) = 3$.

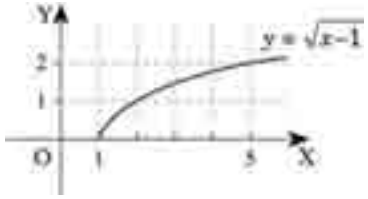
d) Resuelve las ecuacions $f(x) = 5$ y $f(x) = 0$.

$f\ (x) = 5 \Rightarrow \dfrac{x}{2} + 3 = 5 \Rightarrow \dfrac{x}{2} = 2 \Rightarrow x = 4$

$f\ (x) = 0 \Rightarrow \dfrac{x}{2} + 3 = 0 \Rightarrow \dfrac{x}{2} = -3 \Rightarrow x = -6$

3. Determina el dominio de la función $f(x) = \sqrt{x-1}$. Intenta realizar su gráfica.

$D\ (f) = [1, +\infty[$ pues $x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$



4. Un rectángulo tiene la base 10 cm más larga que la altura.

a) Construye las funciones que expresan el perímetro y el área de dicho rectángulo en función de la longitud *x* de la base.

b) Determina el dominio de cada una de ellas y haz su representación gráfica.

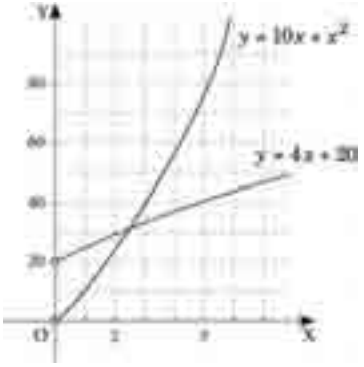


a) Perímetro : $P(x) = 2\ (10 + x) + 2x = 4x + 20$

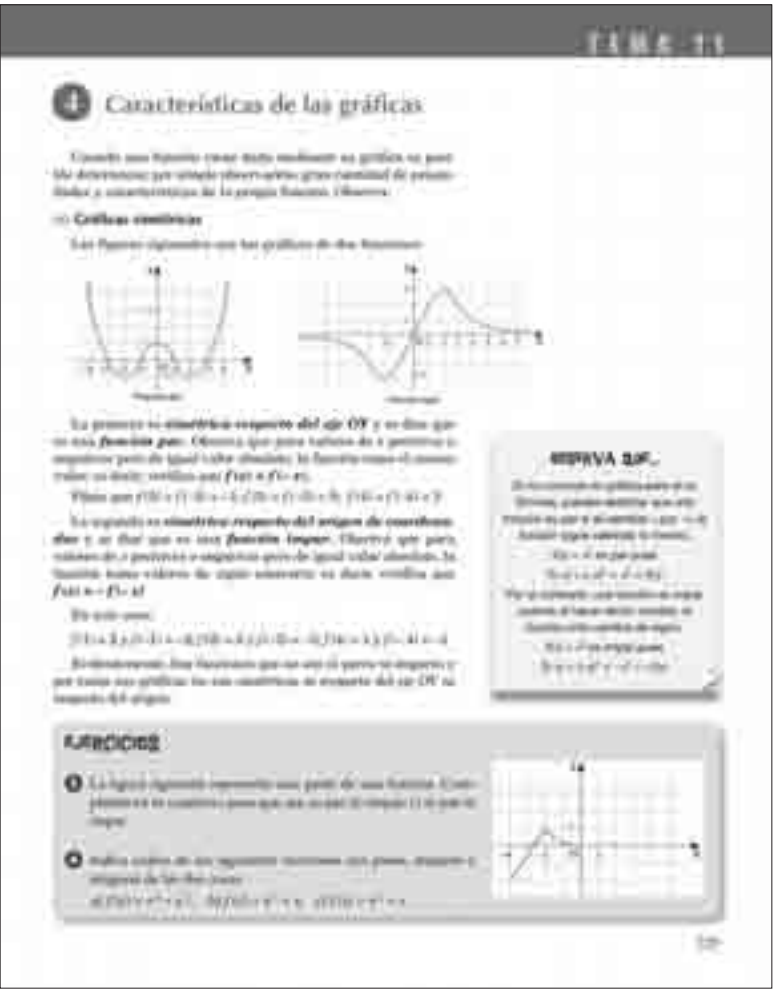
Área: $A(x) = (10 + x) \cdot x = 10x + x^2$

b) $D\ (P) =]0, +\infty[$

c) $D\ (A) =]0, +\infty[$



▶ Pág. 229. 4 Características de las gráficas



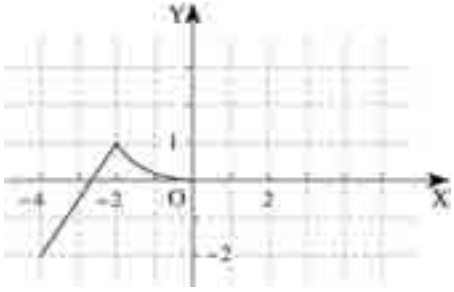
ORIENTACIONES DIDÁCTICAS

Diferenciar distintos tipos de simetría.

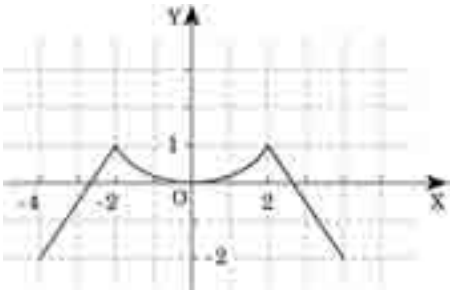
Preguntarse si la periodicidad supone simetría y/o viceversa.

SOLUCIONARIO

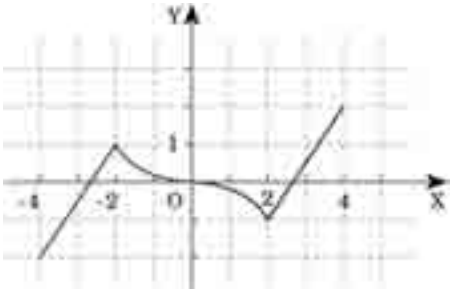
5. La figura siguiente representa una parte de una función. Complétala en tu cuaderno para que sea: a) par; b) impar; c) ni par ni impar.



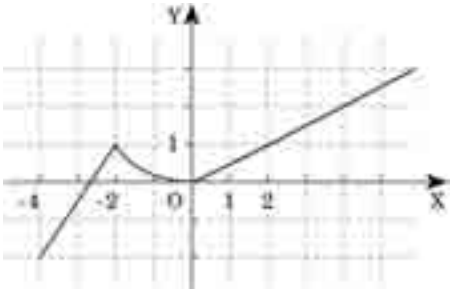
a) Par



b) Impar



c) Ni par ni impar



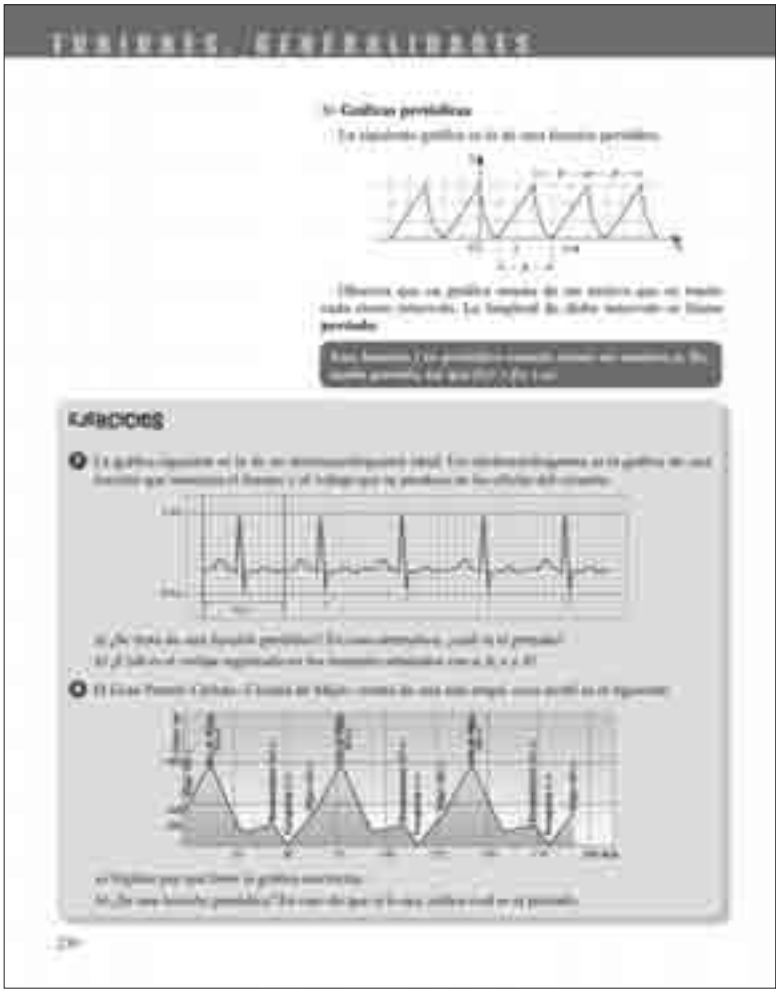
6. Indica cuáles de las siguientes funciones son pares, impares o ninguna de las dos cosas.

a) $f(x) = x^4 + x^2$; $f(-x) = (-x)^4 + (-x)^2 = x^4 + x^2 = f(x) \Rightarrow f$ es par.

b) $f(x) = x^3 + x$; $f(-x) = (-x)^3 + (-x) = -x^3 - x = -f(x) \Rightarrow f$ es impar.

c) $f(x) = x^2 + x$; $f(-x) = (-x)^2 + (-x) = x^2 - x \neq f(x) \Rightarrow$ $\Rightarrow f$ no es par ni impar.

▶ Pág. 230.



SOLUCIONARIO

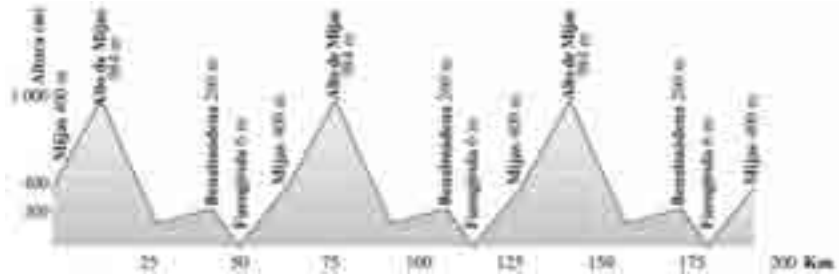
7. La gráfica siguiente es la de un electroardiograma ideal. Un electrocardiograma es la gráfica de una función que relaciona el tiempo y el voltaje que se produce en las células del corazón.



a) ¿Se trata de una función periódica? En caso afirmativo, ¿cuál es el período? Sí es una función periódica de periodo 0,5 s.

b) ¿Cuál es el voltaje registrado en los instantes señalados con a, b, c y d? 0,05 mv (aproximadamente)

8. El Gran Premio Ciclista "Ciudad de Mijas" consta de una sola etapa, cuyo perfil es el siguiente:



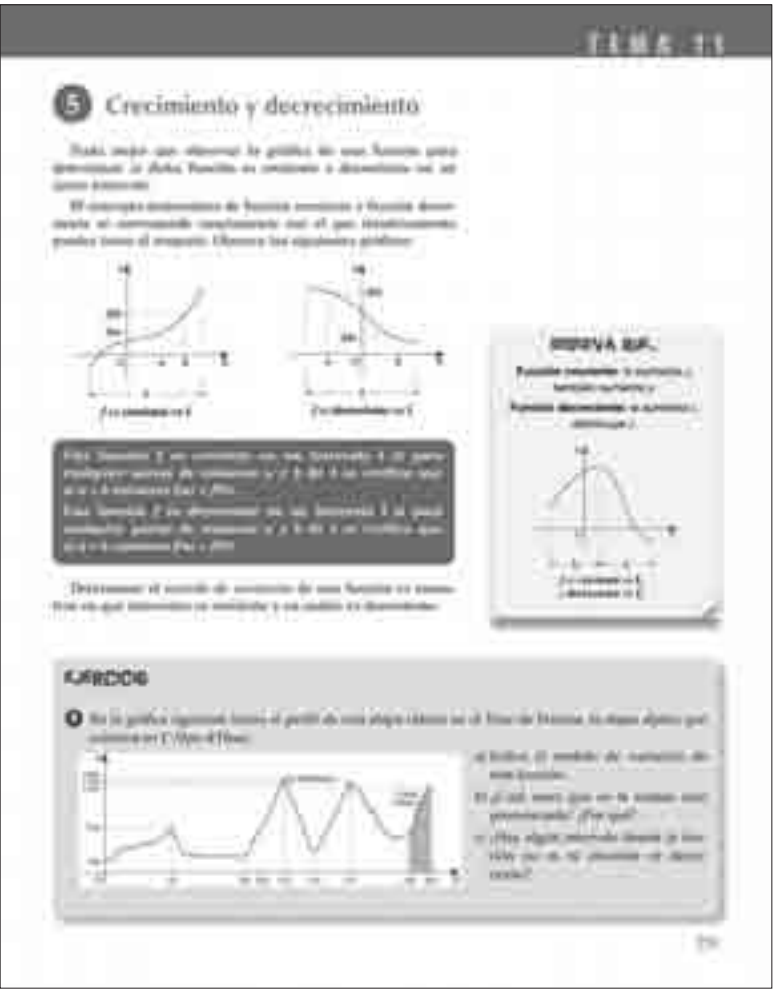
a) Explica por qué tiene la gráfica esa forma.

a) La forma de la gráfica se debe a que es un recorrido de tres vueltas a un mismo circuito.

b) ¿Es una función periódica? En caso de que sí lo sea, indica cuál es el período.

b) Sí es una función periódica. Período = 63 km (aprox.)

▶ Pág. 231.


TEMA 11

5 Crecimiento y decrecimiento

RECUERDA QUE...

EJERCICIOS

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS

Hay situaciones reales en las que una variable crece cuando lo hace otra, o al revés. Caracterizarlas utilizando el concepto matemático de crecimiento y/o decrecimiento.

SOLUCIONARIO

9. En la gráfica siguiente tienes el perfil de una etapa clásica en el Tour de Francia, la etapa alpina que culmina en l'Alpe d'Huez.



a) Indica el sentido de variación de esta función.

Creciente en

$[0, 43[\cup]90, 115[\cup]134, 157[\cup]190, 209[$

Decreciente en $]43, 50[\cup]115, 134[\cup]157, 190[$

b) ¿Cuál crees que es la subida más pronunciada? ¿Por qué?

En $]90, 115[$ sube prácticamente 1600 m, es decir $\frac{1600}{115-95} = 64 \text{ m / km}$

En $]134, 157[$ sube unos 1500 m, esto es $\frac{1500}{157-134} = \frac{1500}{23} = 65 \text{ m / km}$

En $]190, 209[$ sobre unos 1400 m: $\frac{1400}{209-190} = \frac{1400}{19} = 73 \text{ m / km}$

La ascensión al l'Alpe d'Huez (la última) es la más pronunciada.

c) ¿Hay algún intervalo donde la función no es ni creciente ni decreciente?

Entre los kilómetros 50 y 90 (aprox.) la etapa es llana.

▶ Pág. 232. 6 Extremos de una función



FUNCIONES. GENERALIDADES

6 Extremos de una función

Los extremos de una función son los puntos donde esta toma los valores mínimos o máximos.

Hay que distinguir entre dos tipos de extremos: absolutos y relativos.

Una función se dice que tiene un **extremo absoluto** en un punto cuando en él la función alcanza su máximo o mínimo valor. Dicho valor es un máximo o mínimo absoluto.

Por el contrario, cuando se habla de **extremos relativos** se está indicando los puntos donde la función pasa de creciente a decreciente o viceversa. En dichos puntos la función solo toma los mayores o menores valores en sus proximidades y se dice que son sus máximos o mínimos relativos. Una función puede tener más de un extremo relativo. Observa la siguiente figura:

Es muy importante que distingas cuándo la función alcanza un extremo (la x) y cuánto vale dicho extremo (la y).

La función de la gráfica anterior tiene un mínimo absoluto en $x = -6$ y dicho mínimo vale 0 y es el mayor valor de la función; pero también tiene otro mínimo, este relativo, en $x = 1$ y en dicho punto la función vale 3. Observa que en el mínimo relativo la función pasa de creciente a decreciente.

También la función tiene dos máximos, uno de ellos lo alcanza cuando $x = -2$ y vale -3 y tiene las dos calificaciones: absoluto por ser el menor valor de la función y relativo por ser donde la función pasa de decreciente a creciente. El otro mínimo es relativo y está localizado en el punto $(5, 0)$.

EJEMPLO

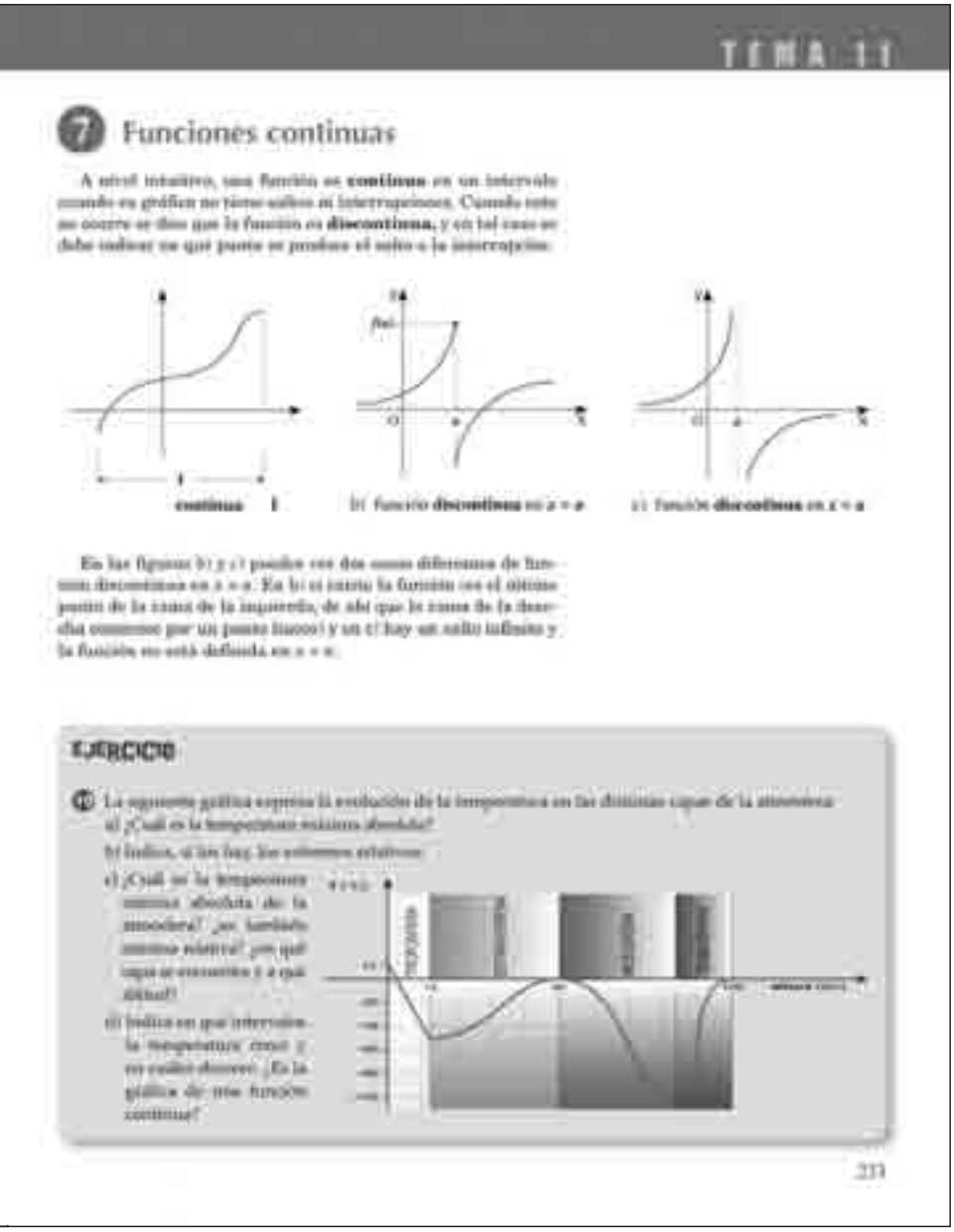
En la gráfica del ejercicio 9 la función tiene un mínimo absoluto en $x = 0$ y vale 220. Tiene además varios máximos y mínimos. Uno de ellos es absoluto y relativo (el correspondiente al año de La Madeleine) pues verifica por una parte que es el máximo valor de la función ($y = 2\,000$), y por otra que en dicho punto la función pasa de ser creciente a decreciente.

232

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS

Distinguir, en un ejemplo real -el desarrollo seguido por la temperatura de un enfermo-, la distinción entre extremo absoluto y relativo.

▸ Pág. 233. 7 Funciones continuas



TEMA 11

7 Funciones continuas

A nivel intuitivo, una función es **continua** en un intervalo cuando su gráfica no tiene saltos ni interrupciones. Cuando esto no ocurre se dice que la función es **discontinua**, y en tal caso se debe indicar en qué punto se produce el salto o la interrupción.

continua b) función discontinua en $x = a$ c) función discontinua en $x = a$

En las figuras b) y c) pueden ver dos casos diferentes de función discontinua en $x = a$. En b) si existe la función en el último punto de la rama de la izquierda, de ahí que la rama de la derecha comience por un punto hueco y en c) hay un salto infinito y la función no está definida en $x = a$.

EJERCICIO

10 La siguiente gráfica expresa la evolución de la temperatura en las distintas capas de la atmósfera:

a) ¿Cuál es la temperatura mínima absoluta?

b) Indica, si los hay, los extremos relativos.

c) ¿Cuál es la temperatura mínima absoluta de la atmósfera? ¿es también mínima relativa? ¿en qué capa se encuentra y a qué altitud?

d) Indica en qué intervalos la temperatura crece y en cuáles decrece. ¿Es la gráfica de una función continua?

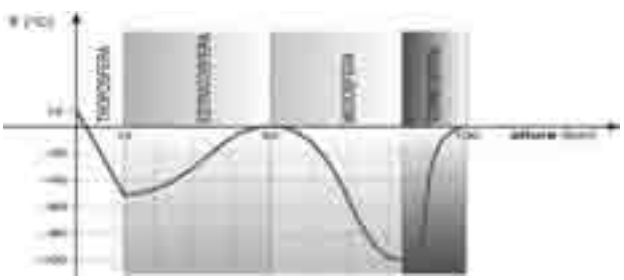
233

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS

Destacar el concepto gráfico de continuidad: el trazo continuo versus un trazo discontinuo.

SOLUCIONARIO

10. La siguiente gráfica expresa la evolución de la temperatura en las distintas capas de la atmósfera:



a) ¿Cuál es la temperatura mínima?

Temperatura máxima absoluta: 12º C.

b) Indica, si los hay, los extremos relativos.

Mínimo relativo en (12, –50) y en (84, –100).

Máximo relativo en (5, 0)

c) ¿Cuál es la temperatura mínima absoluta de la atmósfera? ¿es también mínima relativa? ¿en qué capa se encuentra y a qué altitud?

Mínima absoluta –100 ºC ente la mesosfera y la termosfera.

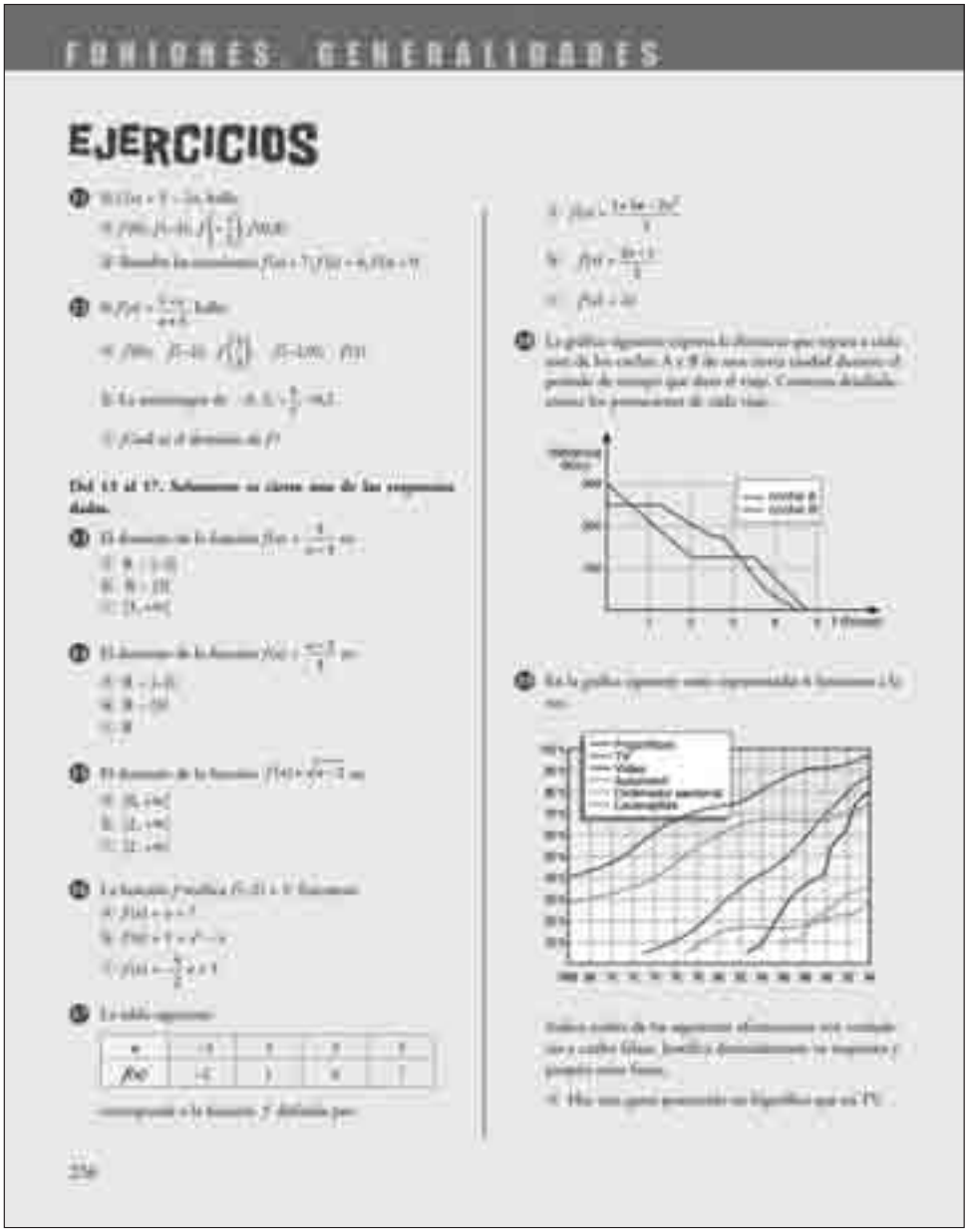
d) Indica en qué intervalos la temperatura crece y en cuáles decrece. ¿Es la gráfica de una función continua?

Crece en]12, 50[y]84, 100[

Decrece en]0, 12[y]50, 84[

Se trata de la gráfica de una función continua.

▶ Pág. 236. Ejercicios



FUNCIONES. GENERALIDADES

EJERCICIOS

SOLUCIONARIO

11. Si $f(x)$: = 3 – 2x, halla:

a) $f(0)$; $f(-3)$; $f\left(-\frac{1}{2}\right)$; $f(0,8)$

$f(0) = 3$; $f(-3) = 3 - 2(-3) = 9$;

$f\left(-\frac{1}{2}\right) = 3 - 2\left(-\frac{1}{2}\right) = 3 + 1 = 4.$

$f(0, 8) = 3 - 2 \cdot 0{,}8 = 3 - 1{,}6 = 1{,}4.$

b) Resuelve las ecuaciones: $f(x) = 7$; $f(x) = 4$; $f(x) = 0$

$f(x) = 7 \Rightarrow 3 - 2x = 7 \Rightarrow 2x = -4 \Rightarrow x = -2$

$f(x) = 4 \Rightarrow 3 - 2x = 4 \Rightarrow 2x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$

$f(x) = 0 \Rightarrow 3 - 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$

12. Si $f(x) = \frac{1-x}{x+3}$ halla:

a) $f(0)$; $f(-2)$; $f\left(\frac{5}{3}\right)$; $f(-2, 9)$; $f(1)$

a) $f(0) = \frac{1-0}{0+3} = \frac{1}{3}$; $f(-2) = \frac{1-(-2)}{-2+3} = \frac{3}{1} = 3$.

$f\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{1-\frac{5}{3}}{\frac{5}{3}+3} = \frac{-\frac{2}{3}}{\frac{14}{3}} = -\frac{1}{7}$; $f(-2,9) = \frac{1+2,9}{-2,9+3} = \frac{3,9}{0,1} = 39$

$f(1) = 0$

b) La antiimagen de –3; 2; $-\frac{3}{7}$; – 0,2

$f^{-1}(-3) \Rightarrow \frac{1-x}{x+3} = -3 \Rightarrow 1 - x = -3x - 9 \Rightarrow 2x = -10 \Rightarrow x = -5$

$f^{-1}(2) \Rightarrow \frac{1-x}{x+3} = 2 \Rightarrow 1 - x = 2x + 6 \Rightarrow -3x = 5 \Rightarrow x = -\frac{5}{3}$

$f^{-1}\left(-\frac{3}{7}\right) \Rightarrow \frac{1-x}{x+3} = -\frac{3}{7} \Rightarrow 7-7x = -3x-9 \Rightarrow -4x = -16 \Rightarrow x = 4$

$f^{-1}(-0,2) \Rightarrow \frac{1-x}{x+3} = -0,2 \Rightarrow 1-x = -0,2x-0,6 \Rightarrow -0,8x = -1,6 \Rightarrow x = 2$

c) ¿Cuál es el dominio de *f*?

$D(f) = R - \{-3\}$

Del 13 al 17. Solamente es cierta una de las respuestas dadas.

13. El dominio de la función $f(x) = \frac{3}{x-3}$ es:

a) $R - \{3\}$

b) $R - \{3\}$

c) $]3, +\infty[$

Cierta la b) $R - \{-3\}$

14. El dominio de la función $f(x) = \frac{x-2}{3}$ es:

a) $R - \{-2\}$

b) $R - \{-3\}$

c) R

Cierta la c) R

15. El dominio de la función $f(x) = \sqrt{x-2}$ es.

a) $[0, +\infty[$

b) $[2, +\infty[$

c) $]2, +\infty[$

Cierta la b) $[2, +\infty[$

16. La función *f* verifica *f* (–2) = 5. Entonces:

a) $f(x) = x + 7$

b) $f(x) = 1 + x^2 - x$

c) $f(x) = -\frac{5}{2}x + 5$

Cierta la a) $f(-2) = -2 + 7 = 5$.

17. La tabla siguiente:

x	–1	1	3	5
$f(x)$	–2	1	4	7

corresponde a la función *f* definida por:

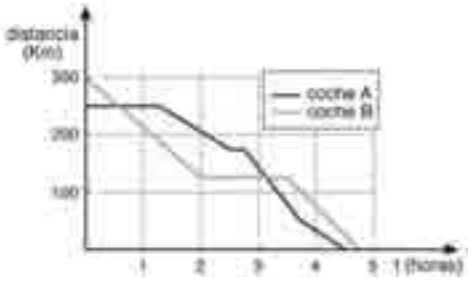
a) $f(x) = \frac{1+3x-2x^2}{2}$

b) $f(x) = \frac{3x-1}{2}$

c) $f(x) = 2x$

Cierta la b) $f(x) = \frac{3x-1}{2}$

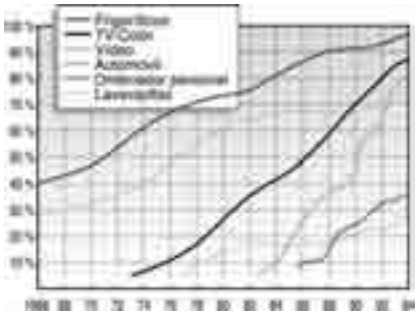
18. La gráfica siguiente expresa la distancia que separa a cada uno de los coches A y B de una cierta ciudad durante el período de tiempo que dura el viaje. Comenta detalladamente los pormenores de cada viaje:



Coche A: sale 1 h. 15 min. después que el coche B. Está a 250 km del punto de llegada. En 1 h 15 min. recorre 75 km a una media de 60 km/h. Descansa 15 min. y luego recorre en 1 h. 125 km (125km/h). En los últimos 45 min. recorre 50 km (66,6 km/h). El viaje dura 3h. 15 min.

Coche B: recorre 175 km en las primeras dos horas (87,5 km/h). Descansa 1 h. 30 min. y luego recorre 125 km en 1 h. 15 min. (velocidad = 100km/h). La duración del viaje es de 4 h. 45 min.

19. En la gráfica siguiente están representadas 6 funciones a la vez.



Indica cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles falsas. Justifica detenidamente tu respuesta y propón otras frases.

a) Hay más gente poseyendo un frigorífico que un TV- color. Cierta.

b) Más de la mitad de los hogares tienen automóvil. Cierta a partir de 1976.

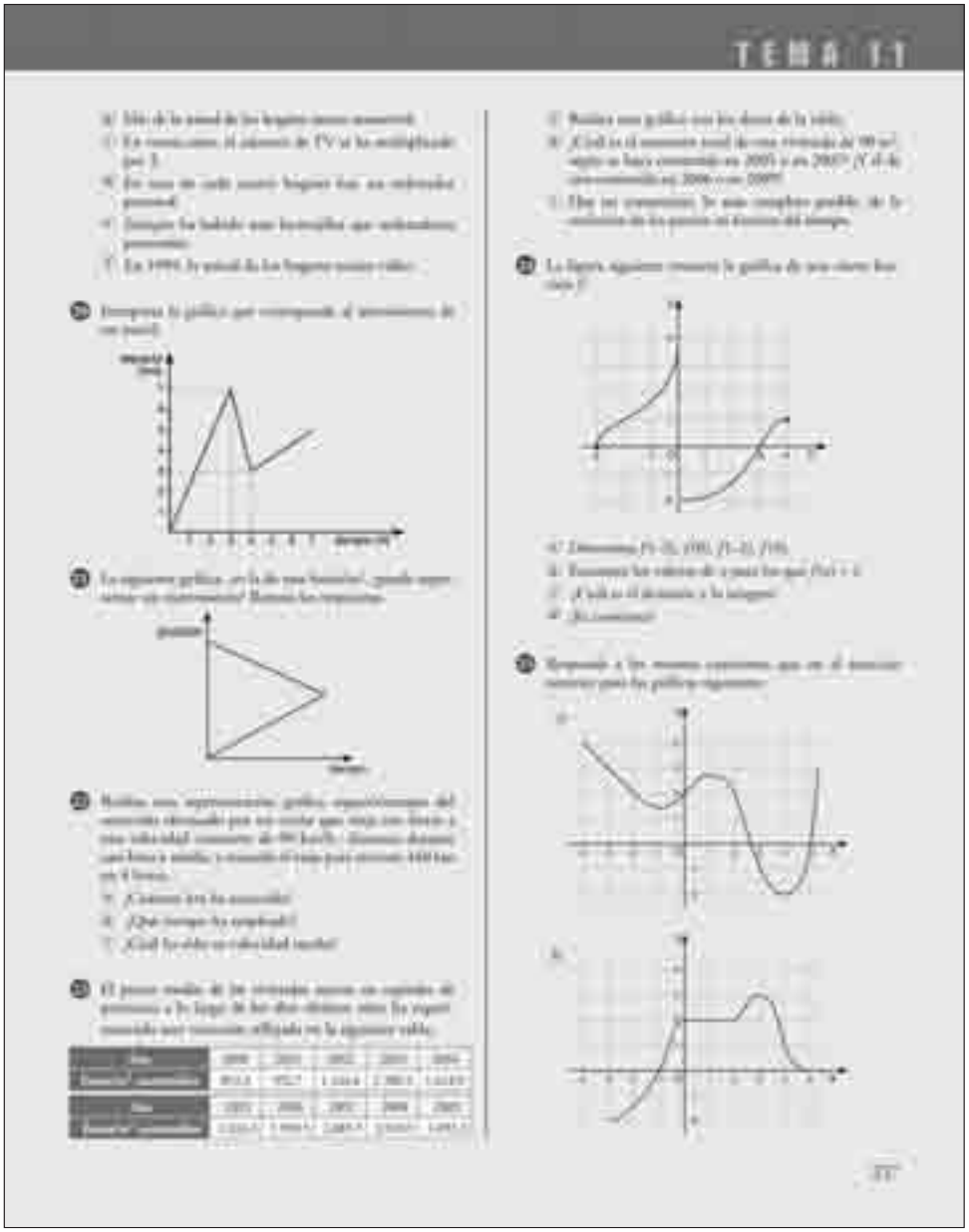
c) En veinte años, el número de TV- color se ha multiplicado por 3. Falso, se ha multiplicado por 8.

d) En uno de cada cuatro hogares hay un ordenador personal. Cierto, pero sólo a partir de 1990.

e) Siempre ha habido más lavavajillas que ordenadores personales. Cierto hasta 1988, falso después.

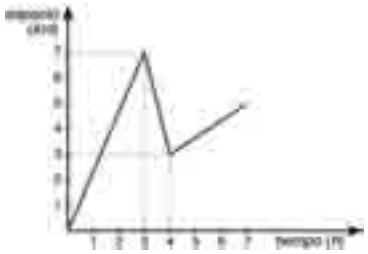
f) En 1989, la mitad de los hogares tenían vídeo. Falso. En 1990 sí era cierto.

▶ Pág. 237. Ejercicios



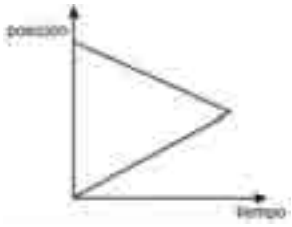
SOLUCIONARIO

20. Interpreta la gráfica que corresponde al movimiento de un móvil.



Al principio se trata de un movimiento de alejamiento. Una segunda parte de regreso hasta la mitad del camino inicial y una tercera de alejamiento a una velocidad menor que en el trayecto inicial.

21. La siguiente gráfica, ¿es la de una función?, ¿puede representar un movimiento? Razona la respuesta.



No es una función pues para un mismo tiempo hay dos posiciones diferentes.

Puede tratarse de dos movimientos que parten de posiciones distantes y en el mismo tiempo se encuentran en un punto.

22. Realiza una representación gráfica espacio/ tiempo del recorrido efectuado por un coche que viaja tres horas a una velocidad constante de 90 km/h.; descansa durante una hora y media, y reanuda el viaje apra recorrer 440 km en 4 horas.

a) ¿Cuántos km ha recorrido?

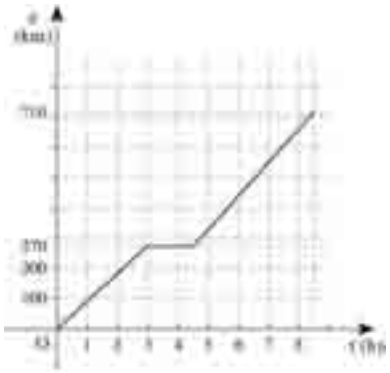
Ha recorrido 710 Km.

b) ¿Qué tiempo ha empleado?

Ha empleado 8 h. 30 min.

c) ¿Cuál ha sido su velocidad media?

$$v = \frac{710}{8,5} = 83,53 \text{ km / h.}$$

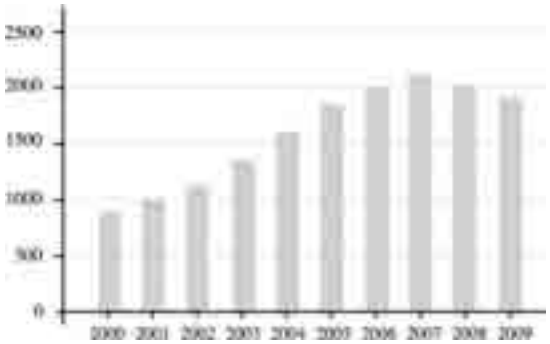


23. El precio medio de las viviendas nuevas en capitales de provincia a lo largo de los diez últimos años ha experimentado una variación reflejada en la siguiente tabla:

Año	2000	2001	2002	2003	2004
Euros/m² construidos	893,3	992,7	1.164,6	1.380,3	1.618,0

Año	2005	2006	2007	2008	2009
Euros/m² construidos	1.824,3	1.990,5	2.085,5	2.018,5	1.892,3

a) Realiza una gráfica con los datos de la tabla.



b) ¿Cuál es el aumento total de una vivienda de 90 m2, según se haya construido en 2003 o en 2007? ¿Y el de una construida en 2006 o en 2009?

El aumento total de 2003 a 2007 es de

(2085,5 – 1380,3) × 90 = 63468 €.

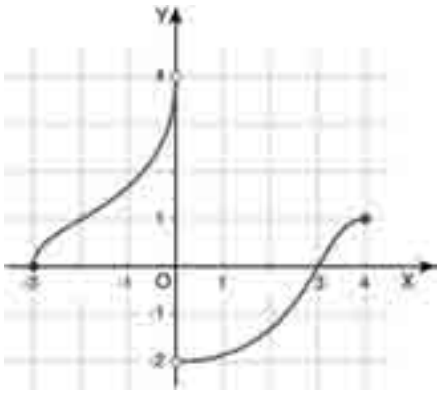
El aumento total de 2006 a 2009 es de

(1892,3 – 1990,5) × 90 = –8838 €

c) Haz un comentario, lo más completo posible, de la evolución de los precios en función del tiempo.

El precio de la vivieda entre 2006 y 2009 disminuyo en 8838 €.

24. La figura siguiente muestra la gráfica de una cierta función *f*:



a) Determina *f*(–3), *f*(0), *f*(–2), *f*(3).

$f(-3) = 0$, $f(0)$ no está definida, $f(-2) = 1$, $f(3) = 0$

b) Encuenta los valores de *x* para los que *f*(*x*) = 1.

$f(x) = 1$ para $x = -2$ y $x = 4$

c) ¿Cuál es el dominio y la imagen?

$D(f) = [-3, 0[\cup]0, 4]$

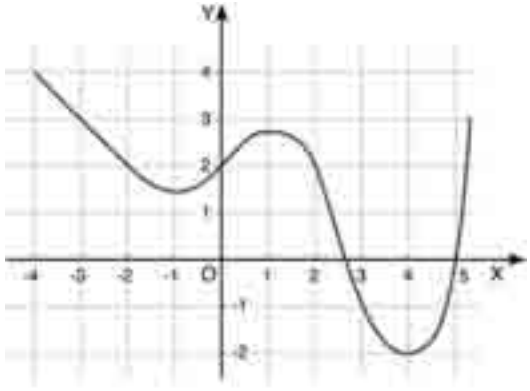
$Im(f) =]-2, 4]$

d) ¿Es continua?

No es continua pues no está definida en $x = 0$

25. Responde a las mismas cuestiones que en el ejercicio anterior para las gráficas siguientes:

a)



a) $f(-3) = 3, f(0) = 2, f(-2) = 2, f(3) = -1$

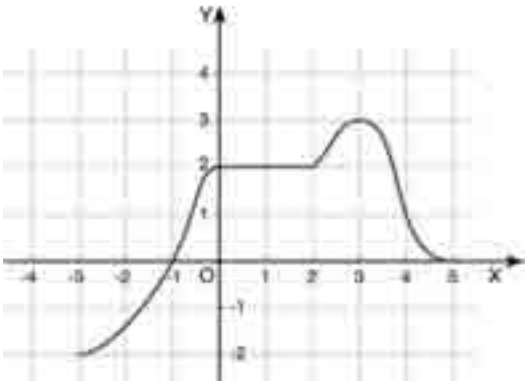
b) $f(x) = 1$ para $x \simeq 2, 3$ y $x \simeq 5, 1$

c) $D(f) = [-4, 5, 2]$

$Im(f) = [-2, 4]$

d) Es continua en todo su dominio.

b)



a) $f(-3) = -2, f(0) = 2, f(-2) \simeq -1{,}3, f(3) = 3$

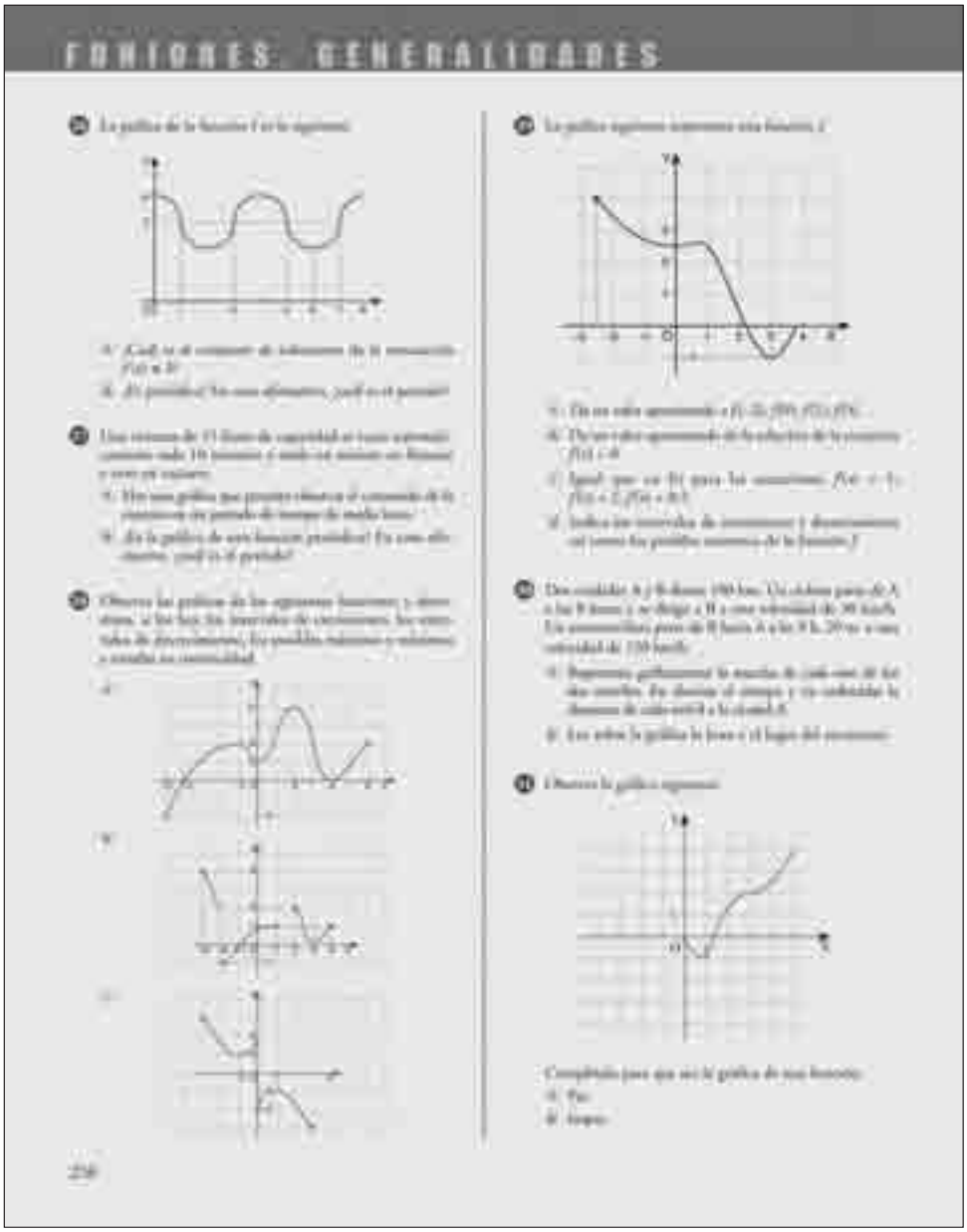
b) $f(x) = 1$ para x $-0{,}6$ y $x = 4$

c) $D(f) = [-3, 5]$

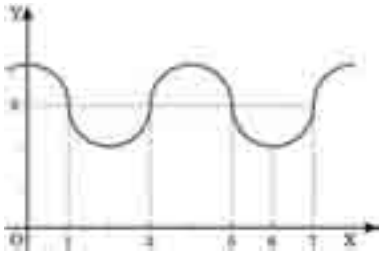
$Im(f) = [-2, 3]$

d) Es continua en todo su dominio.

▶ Pág. 238. Ejercicios


FUNCIONES. GENERALIDADES

26. La gráfica de la función *f* es la siguiente:



a) ¿Cuál es el conjunto de soluciones de la inecuación $f(x) \leq 3$?

$f(x) \leq 3$ si $x \in]1, 3[\cup]5, 7[$

b) ¿Es periódica? En caso afirmativo, ¿cuál es el período?

Sí es periódica de periodo 4.

27. Una cisterna de 15 litros de capacidad se vacía automáticamente cada 10 minutos y tarda un minuto en llenarse y otro en vaciarse.

a) Haz una gráfica que permita observar el contenido de la cisterna en un período de tiempo de media hora.

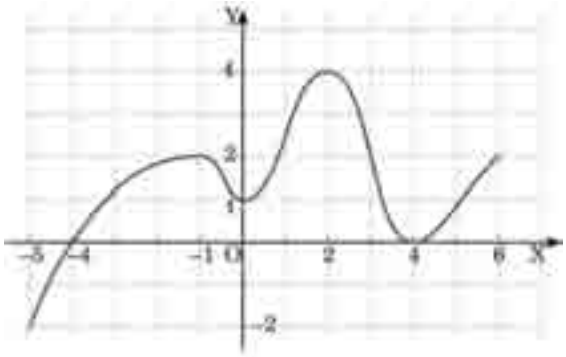
b) ¿Es la gráfica de una función periódica? En caso afirmativo, ¿cuál es el período?

a)



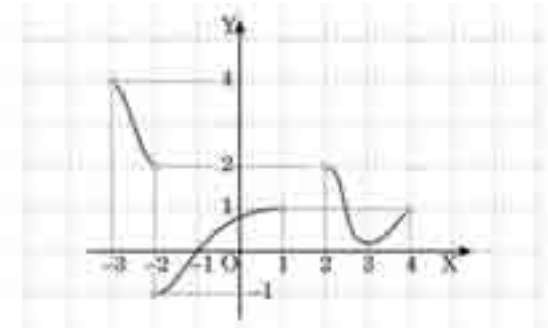
b) Es periódica de periodo 12 minutos.

28. Observa las gráficas de las siguientes funciones y determina. si los hay, los intervalos de crecimiento, los intervalos de decrecimiento, los posibles máximos y mínimos y estudia su continuidad.



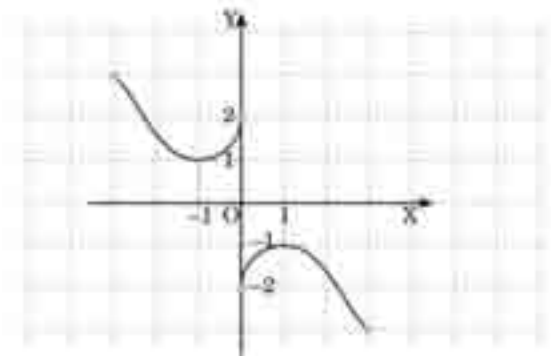
Crece en $]-5, -1[\cup]0, 2[\cup]4, 6[$
Decrece en $]-1, 0[\cup]2, 4[$
máximo relativo en $(-1, 2)$ y $(2, 4)$. El $(2, 4)$ también es máximo absoluto.
Mínimos relativos en $(0, 1)$ y $(4, 0)$
Mínimo absoluto en $(-5, -2)$
Es una función contínua.

b)



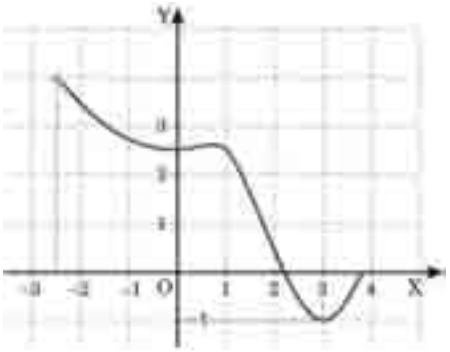
Crece en $]-2, 1[\cup]3, 4[$
Decrece en $]-3, -2[\cup]2, 3[$
Mínimo relativo en $(3, 0)$. No tiene máximos relativos.
Máximo absoluto en $(-3, 4)$. Mínimo absoluto en $(3, -3)$.
Es discontinua en $x = -2$, $x = 1$, $x = 2$.

c)



Crece en $]-1, 0[\cup]0, 1[$
Decrece en $]-3, -1[\cup]1, 3[$
Mínimo relativo en $(-1, 1)$. Máximo relativo en $(1, -1)$.
Máximo absoluto en $(-3, 3)$ y mínimo absoluto en $(3, -3)$.
Es discontinua en $x = 0$.

29. La gráfica siguiente representa una función *f*.



a) Da un valor aproximado a $f(-2)$; $f(0)$; $f(2)$; $f(3)$.

$f(-2)= 3,5$; $f(0)= 2,5$; $f(2)= 0,4$; $f(3)= -1$.

b) Da un valor aproximado de la solución de la ecuación $f(x) = 0$.

$f(x) = 0$ si $x \simeq 2,2$.

c) Igual que en b) para las ecuaciones $f(x) = 1$; $f(x) = 2$; $f(x) = 0,5$.

$f(x) = 1$ si $x \simeq 1,8$

$f(x) = 2$ si $x \simeq 1,3$

$f(x) = 0,5$ si $x = 2$

d) Indica los intervalos de crecimiento y decrecimiento así como los posibles extremos de la función f.

Decrece en $]-2,5, 0[\cup]1, 3[$

Crece en $]0, 1[\cup]3, 4[$

Máximo relativo en (1, 2,5)

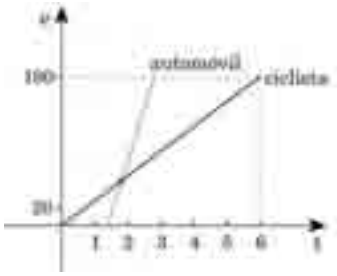
Mínimo relativo en (3, –1). Es también mínimo absoluto.

30. Dos ciudades A y B distan 180 km. Un ciclista parte de A a las 8 horas y se dirige a B a una velocidad de 30 km/h. Un automovilista parte de B hacia A a las 9 h. 20 m. a una velocidad de 120 km/h.

a) Representa gráficamente la marcha de cada uno de los dos móviles. En abscisas el tiempo y en ordenadas la distancia de cada móvil a la ciudad A.

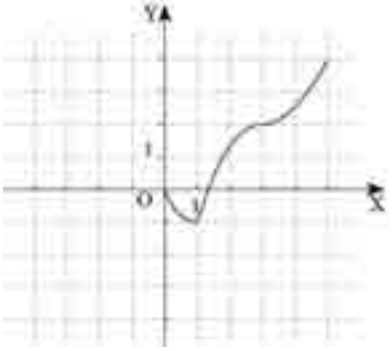
b) Lee sobre la gráfica la hora y el lugar del encuentro.

a)



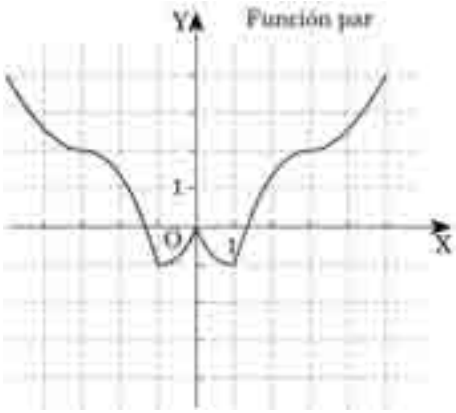
b) Se encuentran a las 1,75 h. (aprox.) de comenzar el ciclista el viaje y a unos 50 km de A (aprox.).

31. Observa la gráfica siguiente:

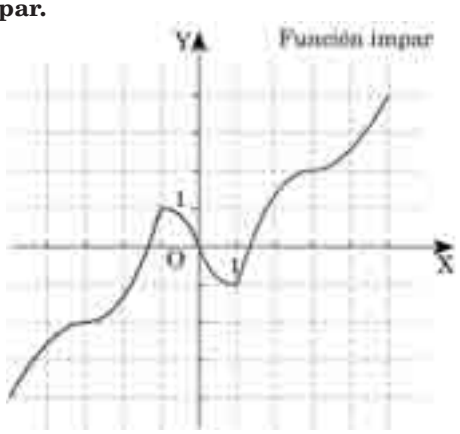


Complétala para que sea la gráfica de una función:

a) Par.



b) Impar.



Tema 12

Funciones lineales y afines

▸ Programación de aula

Objetivos

- Expresar algebraicamente la función lineal.
- Representar gráficamente una función lineal.
- Expresar algebraicamente la función afín.
- Representar gráficamente una función afín.
- Caracterizar rectas paralelas.
- Resolver gráficamente sistemas de ecuaciones lineales.

Criterios de evaluación

- Aplicar la función lineal.
- Representar gráficamente la función lineal.
- Aplicar la función afín.
- Representar gráficamente de la función afín.
- Distinguir entre función lineal y afín.
- Caracterizar las rectas paralelas.
- Resolver sistemas de ecuaciones lineales por el método gráfico.

Contenidos

- **Conceptos** ("saber")
  - Función lineal.
  - Representación gráfica de una función lineal.
  - Función afín.
  - Rectas paralelas.
  - Resolución de sistemas por el método gráfico.
- **Procedimientos** ("Saber hacer")
  - Reconocimiento de situaciones que originan correspondencias afines.
  - Elaboración, en diferentes contextos, de correspondencias afines.
  - Obtención de imágenes o antiimágenes por una función afín.
  - Identificación y determinación de funciones afines.
  - Visualizar gráficamente una relación afín.
  - Realización de gráficas de funciones afines.
  - Formulación de situaciones que permitan detectar las propiedades de la función afín.
- **Actitudes** ("Saber ser")
  - Predisposición favorable a investigar situaciones descriptibles mediante aplicaciones afines.
  - Reconocimiento y valoración de la utilidad de la función afín para describir determinados fenémenos.
  - Sensibilidad, interés y gusto por la correcta interpretación de los datos.
  - Interés por analizar los resultados obtenidos en la resolución de problemas.
  - Gusto por la presentación ordenada y clara de los resultados y de los procesos gráficos efectuados.

▸ Programación por competencias

COMPETENCIA MATEMÁTICA

CONSTRUCCIÓN DE MODELOS

Descriptores

1. Identificar las trayectorias rectilíneas y estudiar sus propiedades.
2. Modelizar el comportamiento de situaciones que requieren trayectorias rectilíneas.

Desempeño

1. Reconoce situaciones que originan correspondencias lineales o afines.	- Identifica la función lineal o afín que describe una situación concreta. - Reconoce las características de una correspondencia lineal o afín. - Expresa gráficamente una correspondencia lineal o afín.	- **Ejemplos y ejercicios del tema** (pág. 240 a 260)

ARGUMENTAR MATEMÁTICAMENTE

Descriptores

1. Relacionar proporcionalidad y función lineal.
2. Relacionar linealidad y la representación gráfica a través de una recta.
3. Caracterizar el paralelismo de dos rectas.

Desempeño

1. Comprende la relación entre proporcionalidad y función lineal o afín.	- Establece la constante de proporcionalidad de una función lineal. - Establece la relación de proporcionalidad entre incrementos en una función afín.	- **Ejemplos 1, 3 y 4** (pág. 243, 246 y 249) - **Ejercicios 1 a 7, 9, 10, 13, 17 a 25, 41 a 53 y 56 a 61)** (pág. 244, 247, 250, 256 a 260)
2. Considera la relación entre linealidad y su representación gráfica a través de una recta.	- Representa gráficamente situaciones lineales o afines. - Especifica las características de una recta.	- **Ejemplos 2, 3 y 5** (pág. 245, 246 y 253) - **Ejercicios 4 a 8, 12, 13, 15, 16, 20, 24 a 40, 48, 53, 54, 56 a 60** (pág. 247, 250, 251, 256 a 260)
3. Distingue cuándo dos rectas son paralelas.	- Caracteriza el paralelismo entre dos rectas	- **Ejemplo 5** (pág. 253) - **Ejercicios 14 a 16, 55 y 61** (pág. 251 y 260)

PLANTEAR Y RESOLVER PROBLEMAS MATEMÁTICOS

Descriptores

1. Identificar, definir y plantear problemas en los que intervienen funciones lineales o afines.
2. Resolver un sistema de ecuaciones lineales por el método gráfico.

Desempeño

1. Plantea una situación concreta que puede expresarse mediante una función lineal o afín.	- Caracteriza una situación de linealidad. - Identifica los elementos que intervienen en ella.	- **Ejercicios 9, 17, 19 a 25, 51 a 53 y 58** (pág. 250, 256, 257, 259 y 260)
2. Resuelve la cuestión planteada.	- Obtiene la solución numérica. - Analiza la solución y obtiene conclusiones.	
3. Resuelve gráficamente un sistema de ecuaciones lineales	- Obtiene la solución numérica. - Analiza la solución y obtiene conclusiones.	- **Ejemplo 5** (pág. 253) - **Ejercicios 54 y 55** (pág. 260)

UTILIZAR EL LENGUAJE TÉCNICO FORMAL			
Descriptores			
1. Trabajar con las expresiones algebraicas de las funciones lineal y afín.			
Desempeño			
1. Trabaja con las expresiones algebraicas de las funciones lineal y afín.	- Distingue e identifica las características de una recta.	**- Ejercicios 5, 10, 12 y 17 a 61** (pág. 247, 250 y 256 a 260)	

COMPETENCIA LINGÜÍSTICA

COMPETENCIA LINGÜÍSTICA			
Descriptores			
1. Comprender el enunciado de un problema en el que interviene una situación rectilínea. 2. Describir con un texto o con una explicación oral breve, especificando los aspectos más relevantes, el proceso de resolución de un problema en el que intervienen las funciones lineales y afines.			
Desempeño			
1. Comprende lo que lee y discrimina e interpreta la información que le da el enunciado de un problema en el que intervienen trayectorias rectilíneas.	- Identifica la pregunta que se le hace. - Diferencia los distintos elementos de un problema en el que intervienen trayectorias rectilíneas.	**- Ejemplo y ejercicios del tema** (pág. 240 a 260)	
2. Se expresa oralmente y por escrito de manera adecuada y correcta, con claridad y coherencia, utilizando un lenguaje preciso, para la descripción de los criterios utilizados en la solución de un problema en el que están presentes funciones lineales y afines.	- Presenta el texto de la solución del problema de forma adecuada y correcta. - Selecciona los aspectos relevantes de la solución. - Es capaz de traducir al lenguaje natural el lenguaje matemático propio de la modelización de las relaciones lineales.		

COMPETENCIA EN CONOCIMIENTO E INTERACCION CON EL MEDIO FISICO

COMPETENCIA EN CONOCIMIENTO E INTERACCION CON EL MEDIO FÍSICO			
Descriptores			
1.Interpretar la información del mundo real, físico y natural, y advertir en él la presencia de situaciones rectilíneas.			
Desempeño			
1. Interpreta el entorno físico cuando en él aparecen situaciones rectilíneas.	- Sintetiza la información recibida. - Relaciona la información recibida con comportamientos rectilíneos.	**- Introducción** (pág. 240) **- Ejercicios 1, 3, 17, 22, 25 y 51** (pág.244, 256, 257 y 259)	
2. Obtiene conclusiones del entorno cuantificando la relación entre dos variables.	- Es capaz de alcanzar una conclusión del mundo real a través de la relación funcional entre dos de sus variables. - Decide opciones de actuación en función de las conclusiones obtenidas.		

COMPETENCIA APRENDER A APRENDER

COMPETENCIA APRENDER A APRENDER

Descriptores

1. Adquirir conciencia y hacer uso de las propias capacidades y conocimientos para iniciarse en el estudio las funciones lineal y afín.
2. Desarrollar la curiosidad en el planteamiento de situaciones que pueden formalizarse con expresiones rectilíneas.

Desempeño

1. Desarrolla habilidades para la comprensión de situaciones rectilíneas.	- Lee los enunciados de los ejercicios con la intención de comprender, relacionar y sintetizar contenidos. - Maneja adecuadamente recursos y técnicas de aprendizaje individual.	- **Ejemplos y ejercicios del tema** (pág. 240 a 260)
2. Desarrolla la curiosidad por la formalización de situaciones que requieren funciones lineales o afines.	- Plantea sugerencias de ampliación a los resultados obtenidos tras el análisis de una situación rectilínea.	

COMPETENCIA CULTURAL Y ARTÍSTICA

COMPENTENCIA CULTURAL Y ARTÍSTICA

Descriptores

1. Relacionar gráficos y dibujos con los datos descriptivos de una trayectoria rectilínea.

Desempeño

1. Representa los datos descriptivos de una trayectoria rectilínea.	- Grafía una función lineal o afín. - Distingue en el dibujo los elementos de la recta.	- **Ejemplos 2, 3 y 5** (pág. 245, 246 y 253) - **Ejercicios 4 a 8, 12, 13, 15, 16, 20, 24 a 40, 48, 53, 54, 56 a 60** (pág. 247, 250, 251, 256 a 260)
2. Valora la utilidad y la coherencia de un gráfico lineal.	- Critica la coherencia y la utilidad de un gráfico lineal.	

COMPETENCIA AUTONOMÍA E INICIATIVA PERSONAL

COMPETENCIA AUTONOMÍA E NICIATIVA PERSONAL

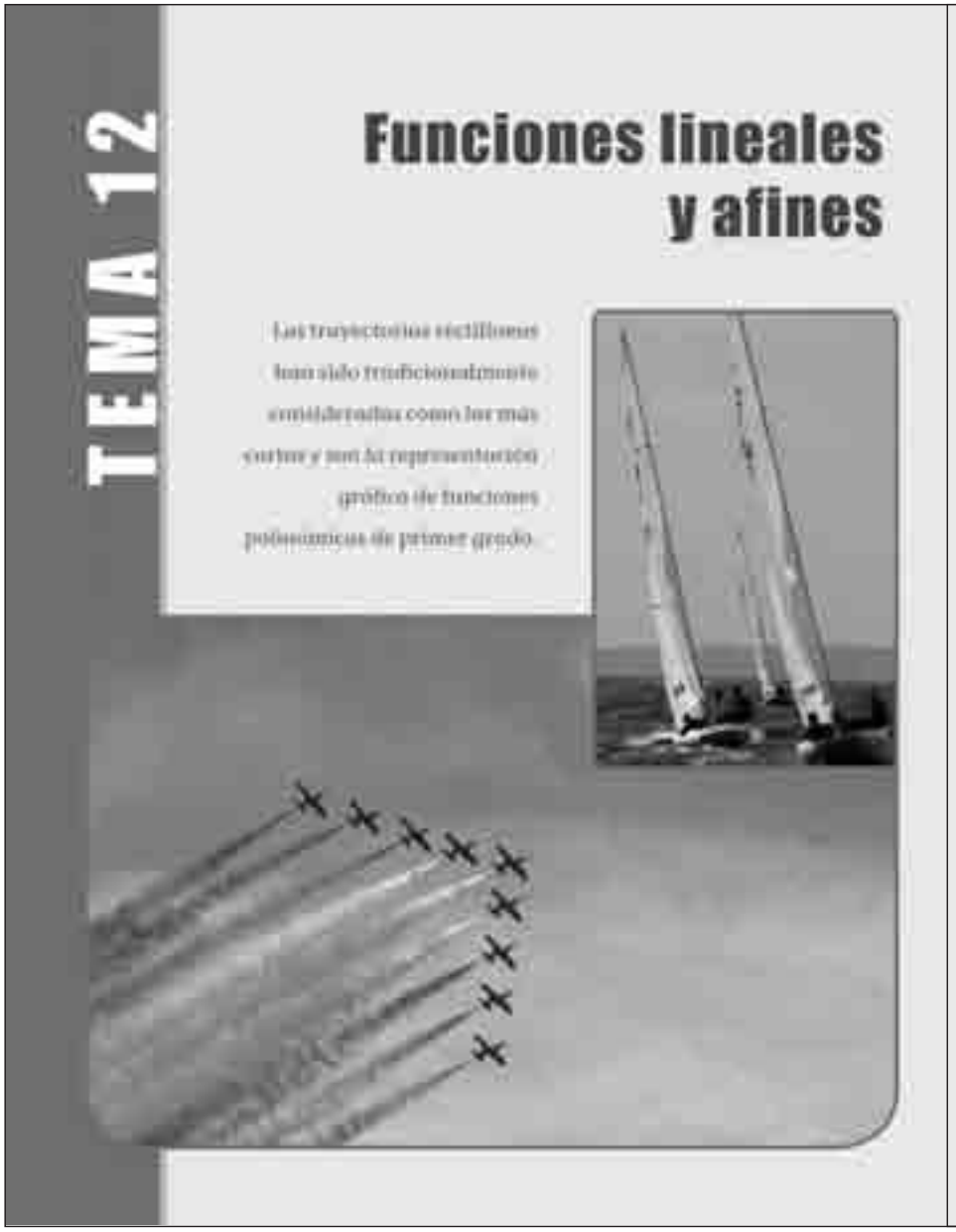
Descriptores

1. Utiliza el lenguaje matemático como instrumento que orienta la propia actividad con autonomía.
2. Contribuye a organizar el pensamiento y a tomar decisiones en situaciones modelizables con funciones lineales y afines.

Desempeño

1. Idea y planifica el desarrollo de un ejercicio en el que están presentes trayectorias rectilíneas.	- Elige la opción adecuada para la resolución del ejercicio. - Mantiene la opción elegida hasta llegar a la conclusión final.	- **Ejemplos y ejercicios del tema** (pág. 240 a 260)
2. Evalúa la solución obtenida y toma decisiones en función del resultado.	- Valora el resultado y lo pone en relación con el enunciado del problema resuelto. - Reflexiona sobre si el trabajo efectuado ha sido suficiente para el objetivo propuesto. - Decide en función del resultado. - Acepta el posible error de la decisión adoptada.	
3. Toma decisiones en función de la solución adoptada.	- Decide en función del resultado. - Acepta el posible error de una decisión cuando la solución no es la idónea.	

▶ Pág. 240 - 241. Funciones. Generalidades



SOLUCIONARIO

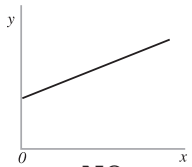
1 Completa las siguientes tablas para que representen valores de magnitudes *x* e *y*, directamente proporcionales:

x	3	5	15
y	12	**20**	**60**

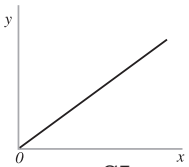
x	2	6	10
y	7	**21**	**35**

x	7	35	**14**
y	10	**50**	20

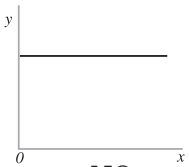
2 ¿Cada una de las gráficas siguientes representa una situación de proporcionalidad?



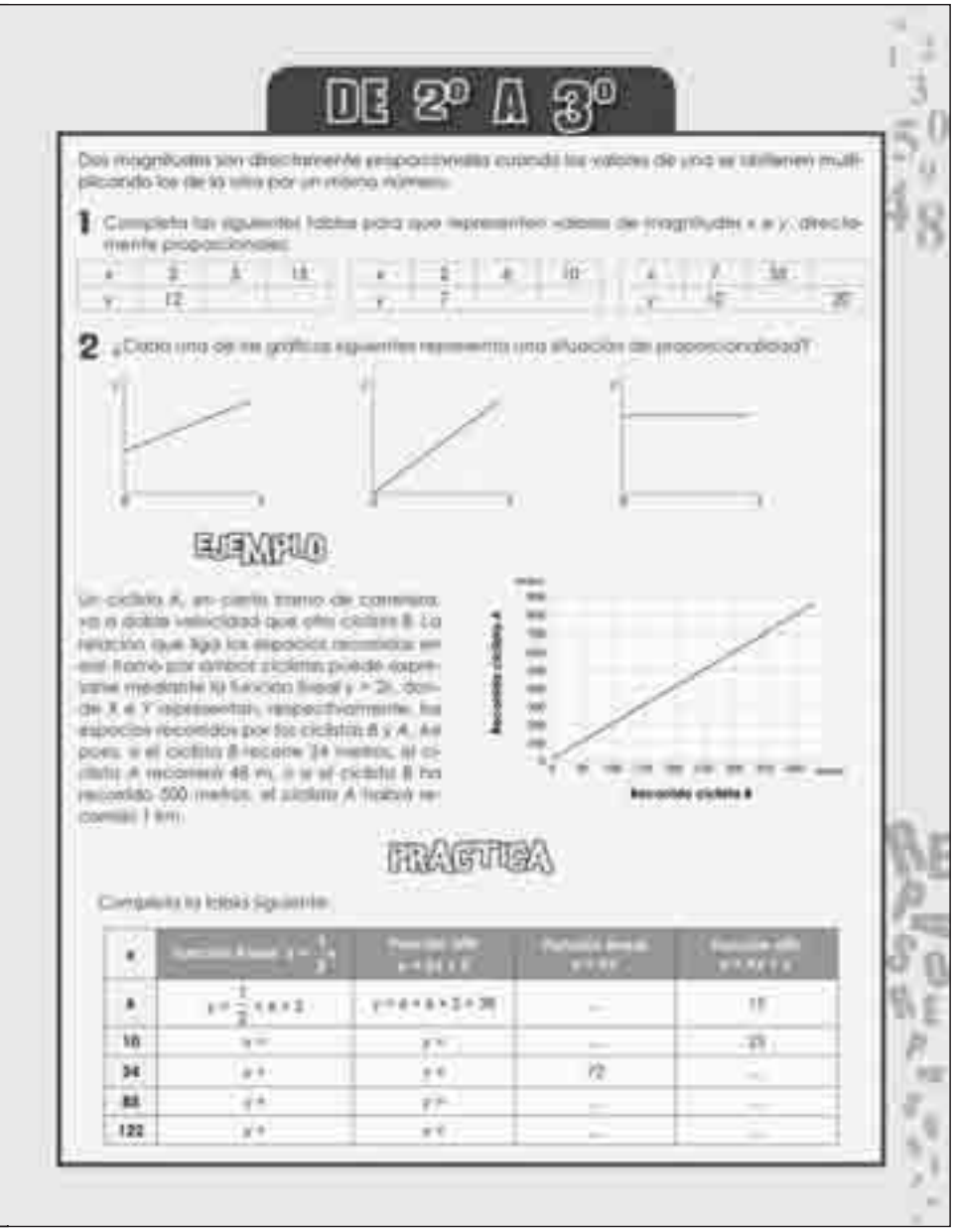
NO



SI



NO


DE 2º A 3º

Dos magnitudes son directamente proporcionales cuando los valores de una se obtienen multiplicando los de la otra por un mismo número.

1 Completa las siguientes tablas para que representen valores de magnitudes x e y directamente proporcionales:

x	2	3	15
y	12		

x	2	4	10
y	7		

x	7	50	
y	15		30

2 ¿Cuál una de las gráficas siguientes representa una situación de proporcionalidad?

EJEMPLO

Un ciclista A, en cierto tramo de carretera, va a doble velocidad que otro ciclista B. La relación que liga los espacios recorridos en ese tramo por ambos ciclistas puede expresarse mediante la función lineal $y = 2x$, donde X e Y representan, respectivamente, los espacios recorridos por los ciclistas B y A. Así pues, si el ciclista B recorre 24 metros, el ciclista A recorrerá 48 m, o si el ciclista B ha recorrido 500 metros, el ciclista A habrá recorrido 1 km.

PRACTICA

Completa la tabla siguiente:

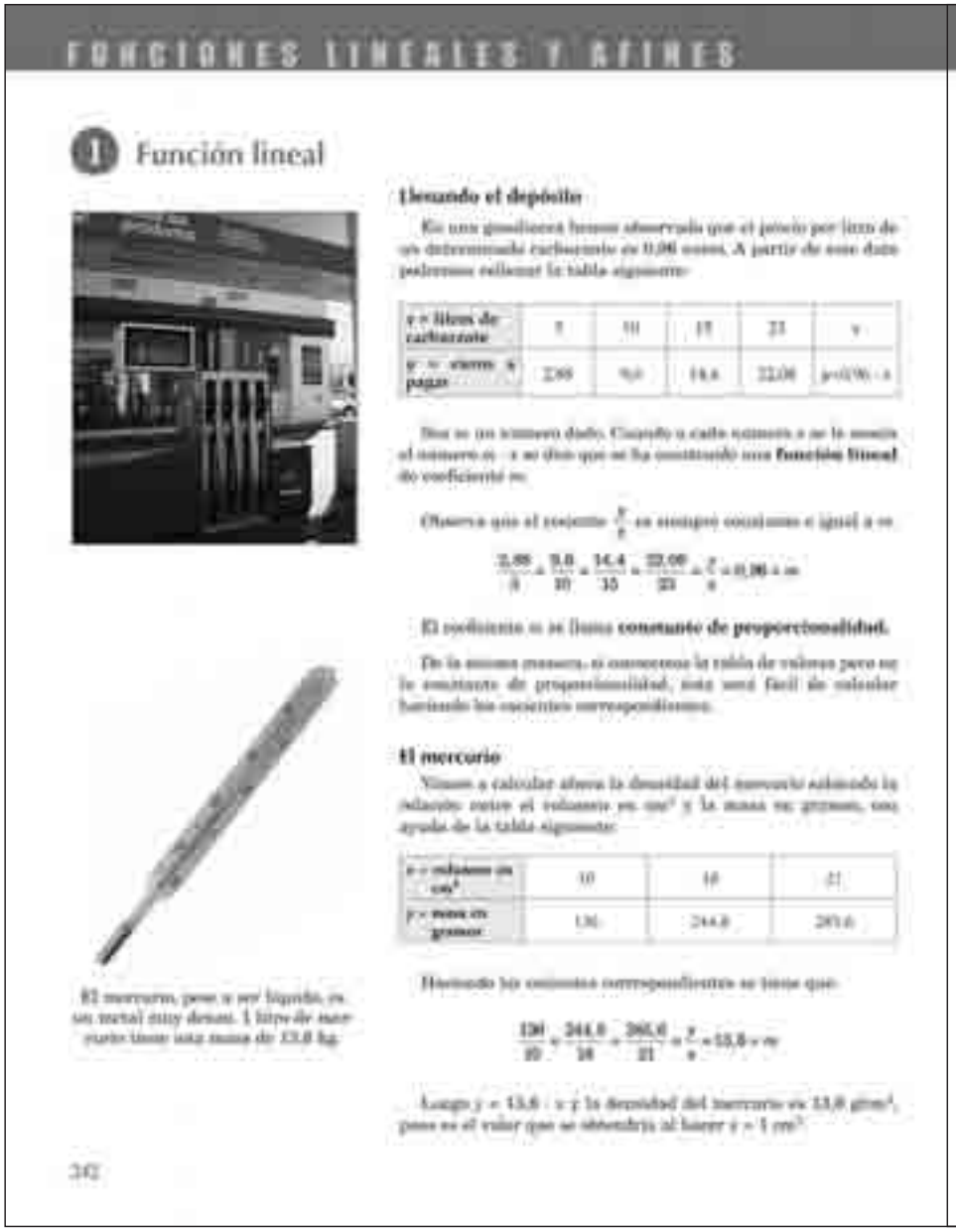
x				
6	$y = \frac{1}{2}x + 2$	$y = 6 \cdot 6 + 2 = 38$	...	15
10	$y =$	$y =$	...	23
24	$y =$	$y =$	72	...
85	$y =$	$y =$	...	...
122	$y =$	$y =$	...	...

PRACTICA

Completa la tabla siguiente:

x	Función lineal $y = \frac{1}{2}x$	Función afín $y = 6x + 2$	Función lineal $y = kx$	Función afín $y = kx + c$
6	$y = \frac{1}{2} \times 6 = 3$	$y = 6 \times 6 + 2 = 38$	$y = 3 \times 6 = 18$	15
10	$y = \frac{1}{2} \times 10 = 5$	$y = 6 \times 10 + 2 = 62$	$y = 3 \times 10 = 30$	23
24	$y = \frac{1}{2} \times 24 = 12$	$y = 6 \times 24 + 2 = 146$	72	$y = 2 \times 24 + 3 = 51$
85	$y = \frac{1}{2} \times 85 = 42{,}5$	$y = 6 \times 85 + 2 = 512$	$y = 3 \times 85 = 255$	$y = 2 \times 85 + 3 = 173$
122	$y = \frac{1}{2} \times 122 = 61$	$y = 6 \times 122 + 2 = 734$	$y = 3 \times 122 = 366$	$y = 2 \times 122 + 3 = 247$

▶ Pág. 242. 1 Función lineal



FUNCIONES LINEALES Y AFINES

1 Función lineal

Llenando el depósito

En una gasolinera hemos observado que el precio por litro de un determinado carburante es 0,98 euros. A partir de este dato pretendemos rellenar la tabla siguiente:

x = litros de carburante	5	10	15	23	x
y = euros a pagar	2,65	9,8	14,4	22,08	y=0,98 · x

Sea m un número dado. Cuando a cada número x se le asocia el número mx se dice que se ha construido una **función lineal** de coeficiente m.

Observa que el cociente $\frac{y}{x}$ es siempre constante e igual a m:

$$\frac{2,65}{5} = \frac{9,8}{10} = \frac{14,4}{15} = \frac{22,08}{23} = \frac{y}{x} = 0,98 = m$$

El coeficiente m se llama **constante de proporcionalidad.**

De la misma manera, si conocemos la razón de valores para ser constante de proporcionalidad, será fácil de calcular hallando los cocientes correspondientes.

El mercurio

Vamos a calcular ahora la densidad del mercurio estudiando la relación entre el volumen en cm^3 y la masa en gramos, con ayuda de la tabla siguiente:

x = volumen en cm^3	10	18	27
y = masa en gramos	136	244,8	367,2

El mercurio, pese a ser líquido, es un metal muy denso. 1 litro de mercurio tiene una masa de 13,6 kg.

Haciendo los cocientes correspondientes se tiene que:

$$\frac{136}{10} = \frac{244,8}{18} = \frac{367,2}{27} = \frac{y}{x} = 13,6 = m$$

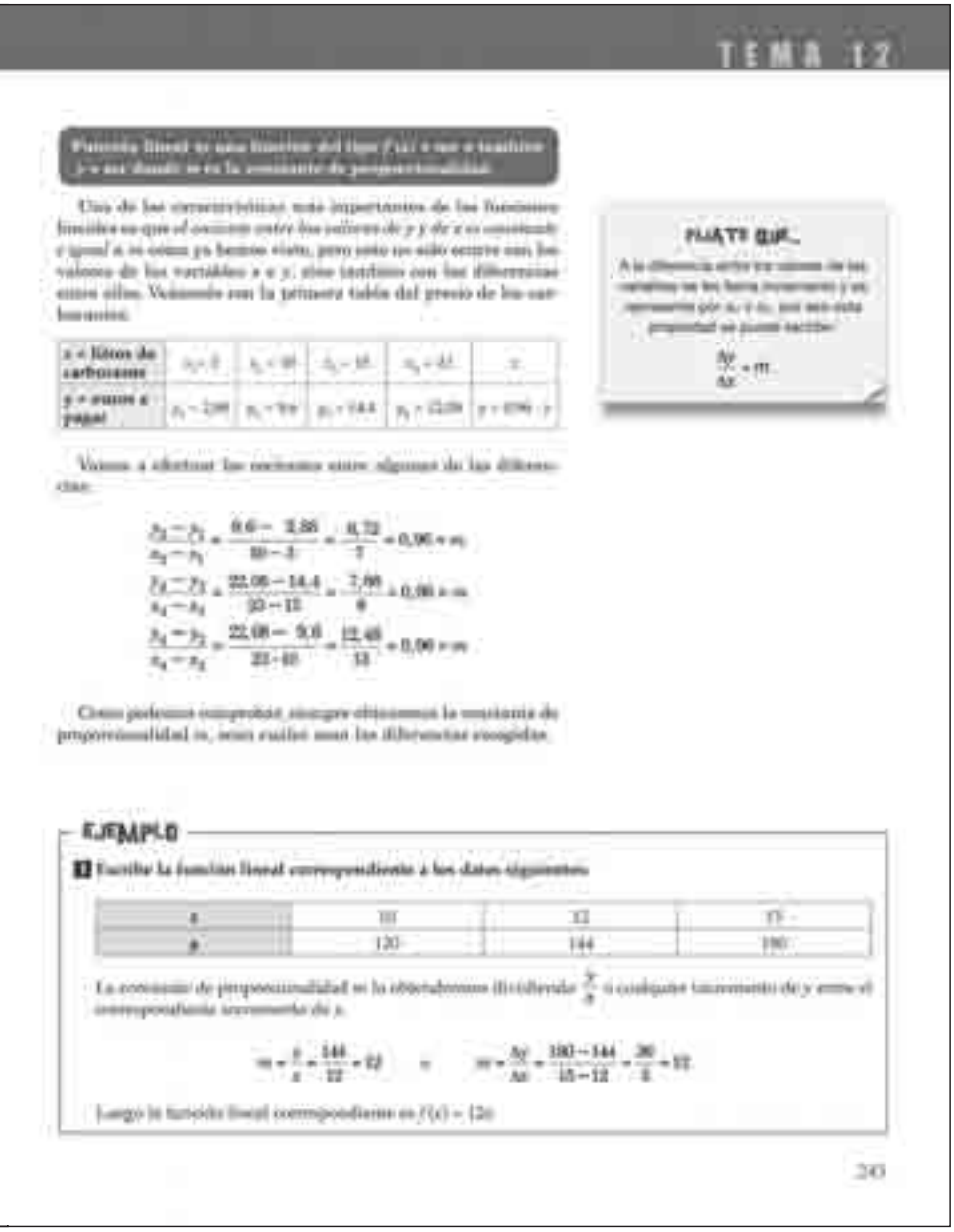
Luego y = 13,6 · x y la densidad del mercurio es 13,6 g/cm^3, pues es el valor que se obtendría al hacer x = 1 cm^3.

242

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS

La función lineal como un ejemplo concreto de función.
En el mundo real existen situaciones descritas por relaciones lineales.
Advertir la relación entre la función lineal y el concepto de proporcionalidad.

▶ Pág. 243



TEMA 12

Una de las características más importantes de las funciones lineales es que *el cociente entre los valores de y y de x es constante e igual a m*, como ya hemos visto, pero esto no sólo ocurre con los valores de las variables x e y, sino también con las diferencias entre ellos. Veámoslo con la primera tabla del precio de los carbonatos.

x = litros de carbonatos					
y = euros a pagar					

Vamos a efectuar los cocientes entre algunas de las diferencias:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0.6 - 2.88}{10 - 3} = \frac{0.72}{1} = 0.96 = m$$

$$\frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3} = \frac{22.08 - 14.4}{23 - 15} = \frac{7.68}{8} = 0.96 = m$$

$$\frac{y_4 - y_2}{x_4 - x_2} = \frac{22.08 - 5.6}{23 - 10} = \frac{16.48}{13} = 0.96 = m$$

Como podemos comprobar, siempre obtenemos la constante de proporcionalidad, sean cuales sean las diferencias escogidas.

PLATS QUE...

A la diferencia entre los valores de las variables se les llama incremento y se representa por Δx e Δy, por eso esta propiedad se puede escribir:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = m$$

EJEMPLO

1 Escribe la función lineal correspondiente a los datos siguientes:

x	10	12	15
y	120	144	180

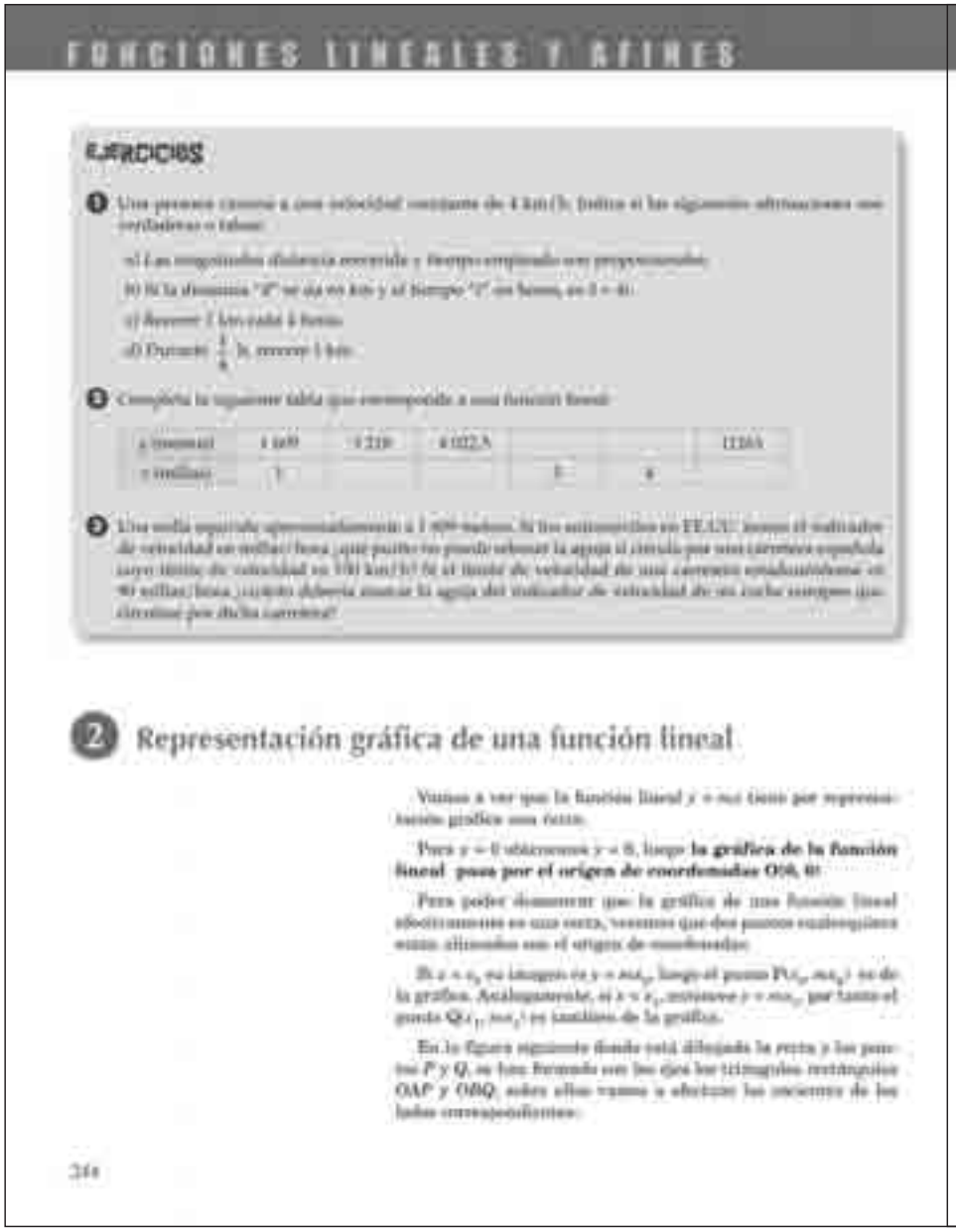
La constante de proporcionalidad se la obtendremos dividiendo $\frac{y}{x}$ o cualquier incremento de y entre el correspondiente incremento de x.

$$m = \frac{y}{x} = \frac{144}{12} = 12 \quad \text{o} \quad m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{180 - 144}{15 - 12} = \frac{36}{3} = 12$$

Luego la función lineal correspondiente es $f(x) = 12x$

243

▶ Pág. 244. 2 Representación gráfica de la función lineal



FUNCIONES LINEALES Y AFINES

EJERCICIOS

2 Representación gráfica de una función lineal

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS

La función lineal es una recta.

Resulta interesante comprobar cómo obtener la constante de proporcionalidad a partir de la gráfica de una recta.

Vocabulario: pendiente e inclinación, términos sinónimos en las funciones lineales.

SOLUCIONARIO

1. Una persona camina a una velocidad constante de 4 km/h. Indica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) Las magnitudes distancia recorrida y tiempo empleado son proporcionales.

VERDADERO. Como $s = v \cdot t$, donde s = distancia recorrida, v = velocidad, t = tiempo empleado, sí hay una relación de proporcionalidad entre s y t.

b) Si la distancia "*d*" se da en km y el tiempo "*t*" en horas, es $d = 4t$.

VERDADERO

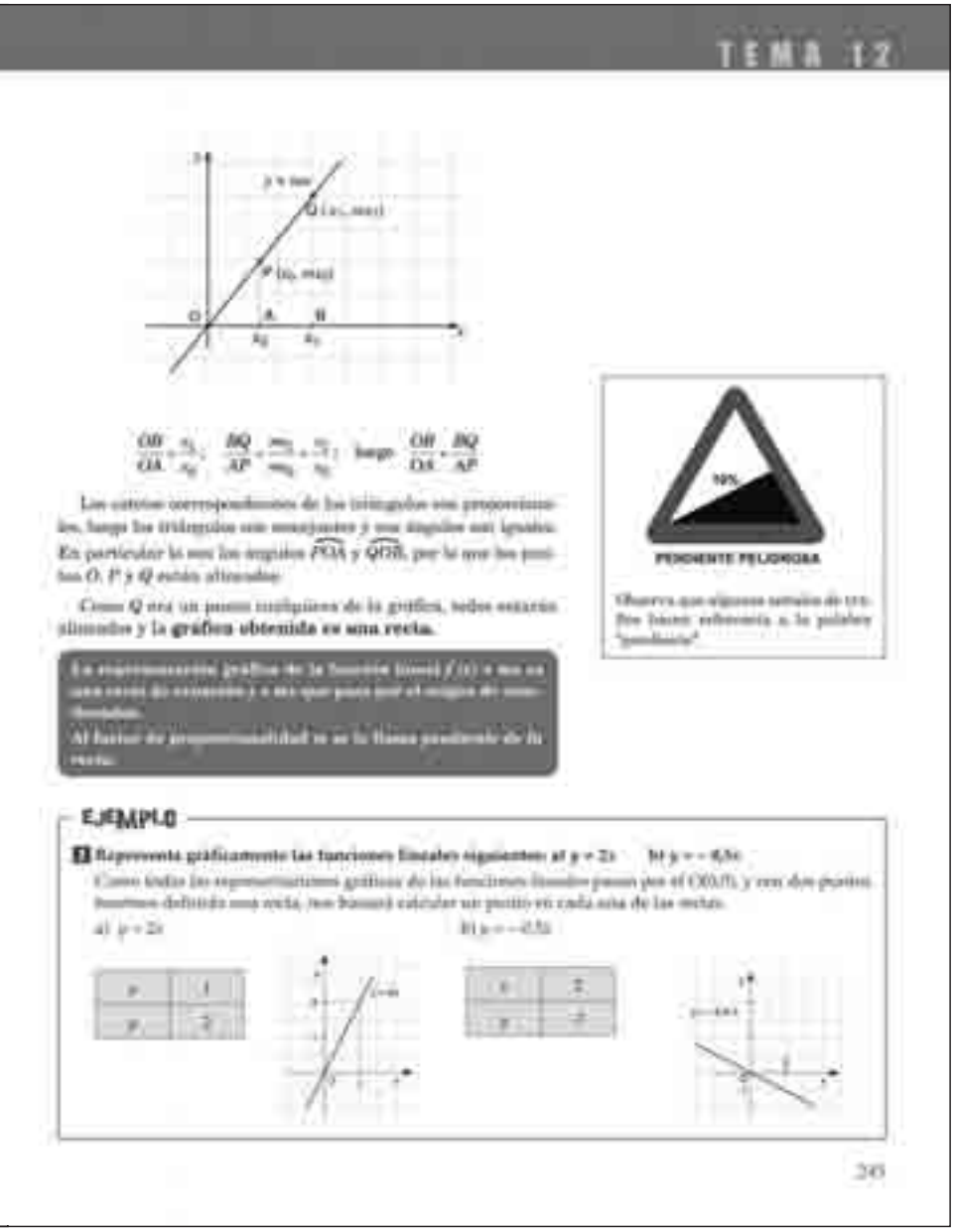
c) Recorre 1 km cada 4 horas.

Falso, recorre 4 km en 1 hora.

d) Durante $\frac{1}{4}$ h. recorre 1 km.

VERDADERO

▶ Pág. 245



TEMA 12

Los cuatro cuadrados de los triángulos son proporcionales, luego los triángulos son semejantes y sus ángulos son iguales. En particular lo son los ángulos $\widehat{POA}$ y $\widehat{QOB}$, por lo que los puntos O, P y Q están alineados.

Como Q era un punto cualquiera de la gráfica, todos estarán alineados y la **gráfica obtenida es una recta.**

EJEMPLO

1 Representa gráficamente las funciones lineales siguientes: a) $y = 2x$ b) $y = -0{,}5x$

Como todas las representaciones gráficas de las funciones lineales pasan por el $(0,0)$, y con dos puntos basta para definir una recta, nos bastará calcular un punto en cada una de las rectas.

a) $y = 2x$ b) $y = -0{,}5x$

x	1
y	2

x	2
y	−1

PENDIENTE PELIGROSA

Observa que algunas señales de tráfico hacen referencia a la palabra "pendiente".

245

2. Completa la siguiente tabla que corresponde a una función lineal:

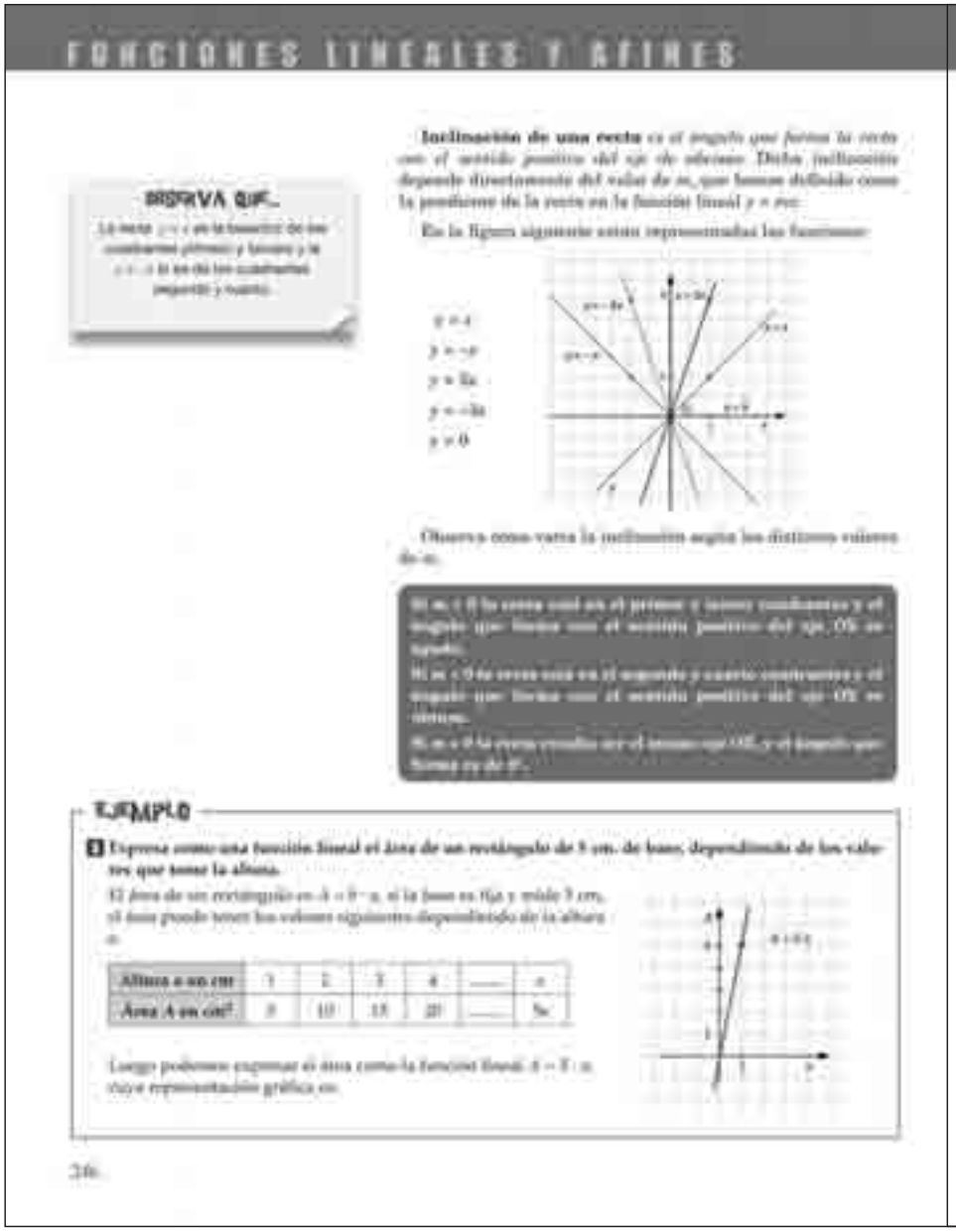
y (metros)	1609	3218	4022,5	$1609 \times 3 = 4827$	$1609 \times 4 = 6436$	11263
x (millas)	1	$\frac{3218}{1609} = 2$	$\frac{4022{,}5}{1609} = 2{,}5$	3	4	$\frac{11263}{1609} = 7$

3. Una milla equivale aproximadamente a 1609 metros. Si los automóviles en EE.UU. tienen el indicador de velocidad en millas/hora ¿qué punto no puede rebasar la aguja si circula por una carretera española cuyo límite de velocidad es 100 km/h? Si el límite de velocidad de una carretera estadounidense es 90 millas/hora ¿cuánto debería marcar la aguja del indicador de velocidad de un coche europeo que circulase por dicha carretera?

$$\frac{1}{x} = \frac{1{,}609}{100} \quad \Big| \quad x = \frac{100}{1{,}609} = 62{,}15 \text{ millas / h}$$

$$\frac{1}{90} = \frac{1{,}609}{y} \quad \Big| \quad y = 90 \times 1{,}609 = 144{,}81 \text{ km / h}$$

▶ Pág. 246.


FUNCIONES LINEALES Y AFINES

Inclinación de una recta es el ángulo que forma la recta con el sentido positivo del eje de abscisas. Dicha inclinación depende directamente del valor de m, que hemos definido como la pendiente de la recta en la función lineal $y = mx$.

En la figura siguiente están representadas las funciones:

$y = x$
$y = -x$
$y = 3x$
$y = -3x$
$y = 0$

Observa cómo varía la inclinación según los distintos valores de m.

OBSERVA QUE...

EJEMPLO

1 Expresa como una función lineal el área de un rectángulo de 3 cm. de base, dependiendo de los valores que tome la altura.

Altura x en cm	1	2	3	4	.....	x
Área A en cm^2	3	6	9	12	.....	$3x$

Luego podemos expresar el área como la función lineal $A = 3 \cdot x$, cuya representación gráfica es:

SOLUCIONARIO

4. Se compran tres cantidades de cable, del mismo precio cada metro, para vallar un terreno. Completa la tabla:

coste total	$y_1 = 3\,900$	$y_2 = 720 \times \frac{3900}{1560} = 1800$	$y_3 = 2312{,}5$
metros cable	$x_1 = 1560$	$x_2 = 720$	$x_3 = \frac{1560}{3900} \times 2312{,}5 = 925$

5. De las siguientes funciones di cuáles son lineales, escribe su pendiente e indica los cuadrantes del plano en los que está su gráfica:

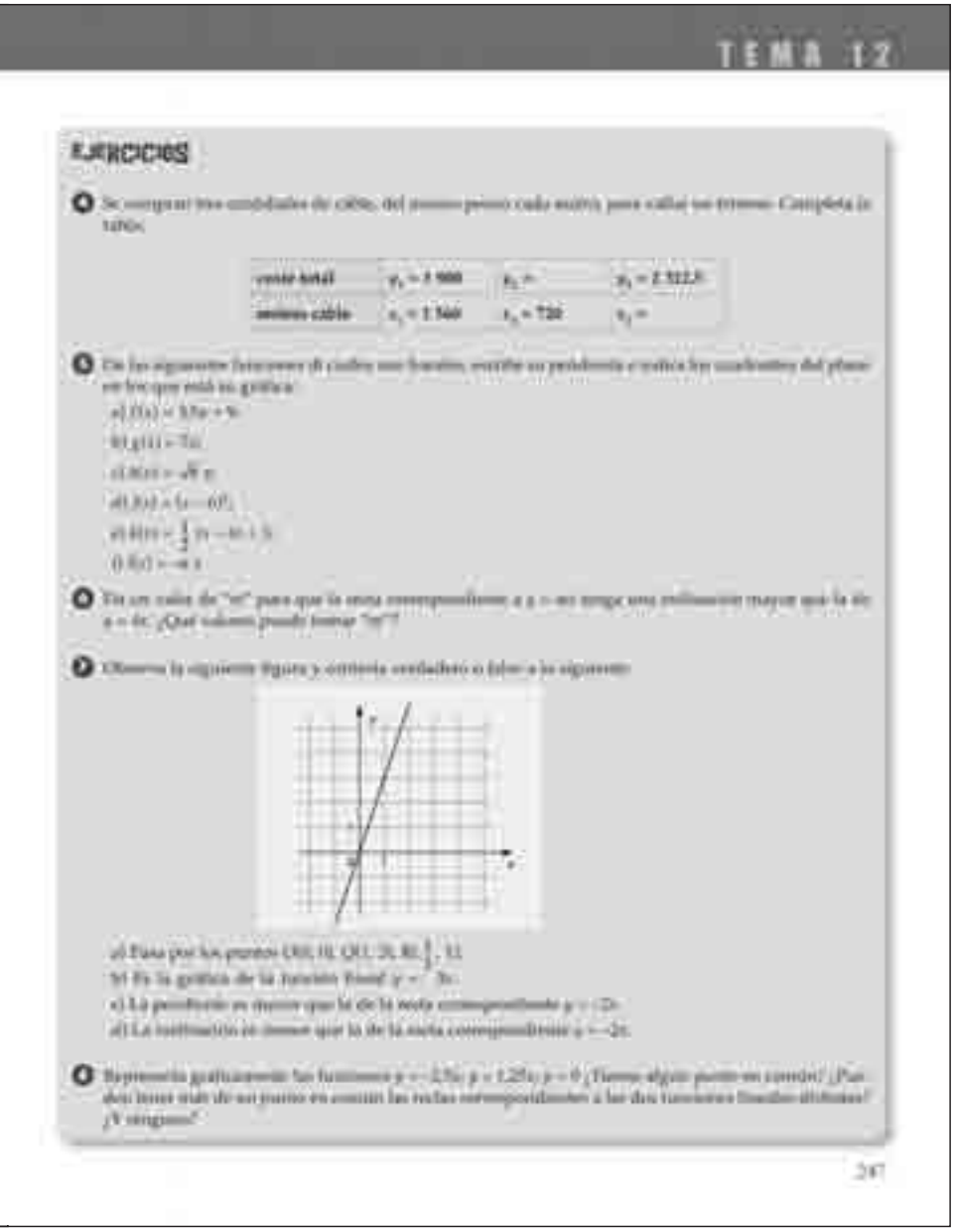
a) $f(x) = 3{,}5x + 9$;
b) $g(x) = 7x$;
c) $h(x) = \sqrt{6}\,x$;
d) $j(x) = (x - 6)2$;
e) $k(x) = \frac{1}{2}(x - 6) + 3$;
f) $l(x) = -\pi x$

Son lineales: $y = 7x$ con pendiente $m = 7$; $y\ \sqrt{6} = x$ con pendiente $m = \frac{1}{2}$;

$y = (x - 6) + 3$ con pendiente $m = \frac{1}{2}$; $y = -\pi x$ con $m = -\pi$

Todas sus gráficas están en los cuadrantes primero y tercero excepto la gráfica de $y = -\pi x$ que lo está en los cuadrante segundo y cuarto.

▶ Pág. 247.



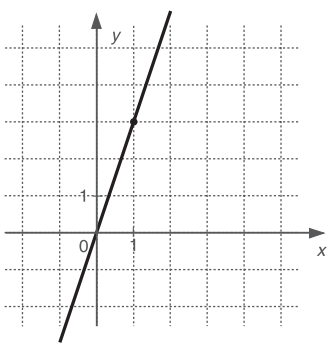
TEMA 12

EJERCICIOS

6. **Da un valor de "*m*" para que la recta correspondiente a $y = mx$ tenga una inclinación mayor que la de $y = 4x$. ¿Qué valores puede tomar "*m*"?**

   m debe ser mayor que 4, que es la pendiente de la recta $y = 4x$.

7. **Observa la siguiente figura y contesta verdadero o falso a lo siguiente:**



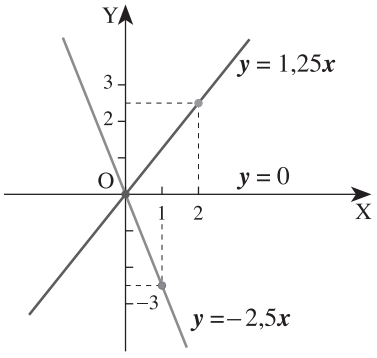
a) Pasa por los puntos $O(0, 0)$, $Q(1, 3)$, $R(\frac{1}{3}, 1)$;
VERDADERO

b) Es la gráfica de la función lineal $y = 3x$.
VERDADERO

c) La pendiente es menor que la de la recta correspondiente $y = -2x$.
FALSO

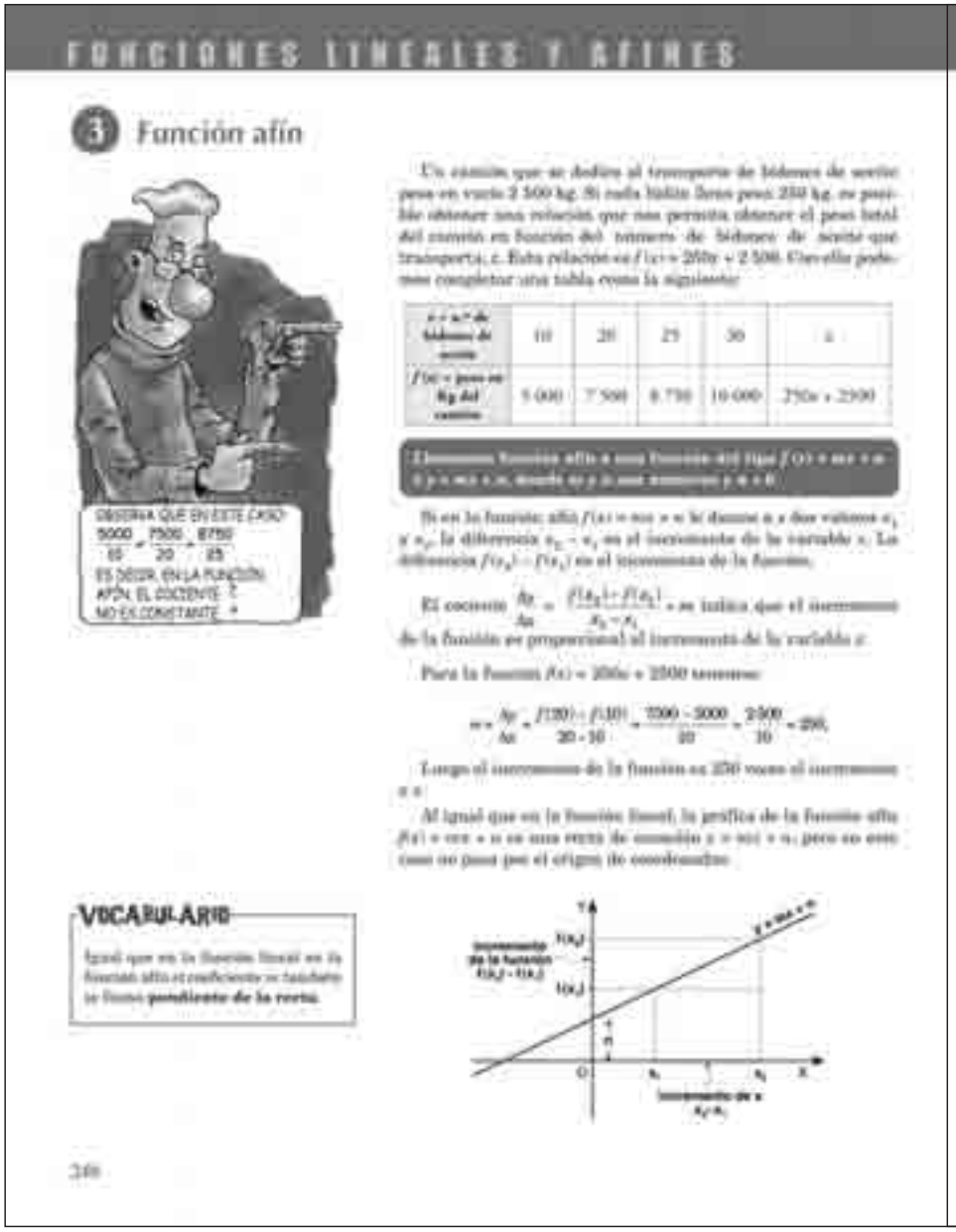
d) La inclinación es menor que la de la recta correspondiente $y = -2x$.
FALSO

8. **Representa gráficamente las funciones $y = -2{,}5x$; $y = 1{,}25x$; $y = 0$ ¿Tienen algún punto en común? ¿Pueden tener más de un punto en común las rectas correspondientes a las dos funciones lineales distintas? ¿Y ninguno?**



Todas pasan por $O(0,0)$ y no tienen más puntos en común.

▶ Pág. 248. 3 Función afín



FUNCIONES LINEALES Y AFINES

3 Función afín

OBSERVA QUE EN ESTE CASO
5000/10 = 7500/20 = 8750/25
ES DECIR, EN LA FUNCIÓN AFÍN EL COCIENTE ? NO ES CONSTANTE.

Un camión que se dedica al transporte de bidones de aceite pesa en vacío 2 500 kg. Si cada bidón lleno pesa 250 kg, es posible obtener una relación que nos permita obtener el peso total del camión en función del número de bidones de aceite que transporta, c. Esta relación es $f(x) = 250x + 2\,500$. Con ella podemos completar una tabla como la siguiente:

x = nº de bidones de aceite	10	20	25	30	x
f(x) = peso en kg del camión	5 000	7 500	8 750	10 000	250x + 2500

Si en la función afín $f(x) = mx + n$ le damos a x dos valores x_1 y x_2, la diferencia $x_2 - x_1$ es el incremento de la variable x. La diferencia $f(x_2) - f(x_1)$ es el incremento de la función.

El cociente $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = m$ indica que el incremento de la función es proporcional al incremento de la variable x.

Para la función $f(x) = 250x + 2500$ tenemos:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(30) - f(10)}{30 - 10} = \frac{7500 - 5000}{10} = \frac{2500}{10} = 250$$

Luego el incremento de la función es 250 veces el incremento de x.

Al igual que en la función lineal, la gráfica de la función afín $f(x) = mx + n$ es una recta de ecuación $y = mx + n$, pero en este caso no pasa por el origen de coordenadas.

VOCABULARIO

Igual que en la función lineal en la función afín el coeficiente se llama también **pendiente de la recta**.

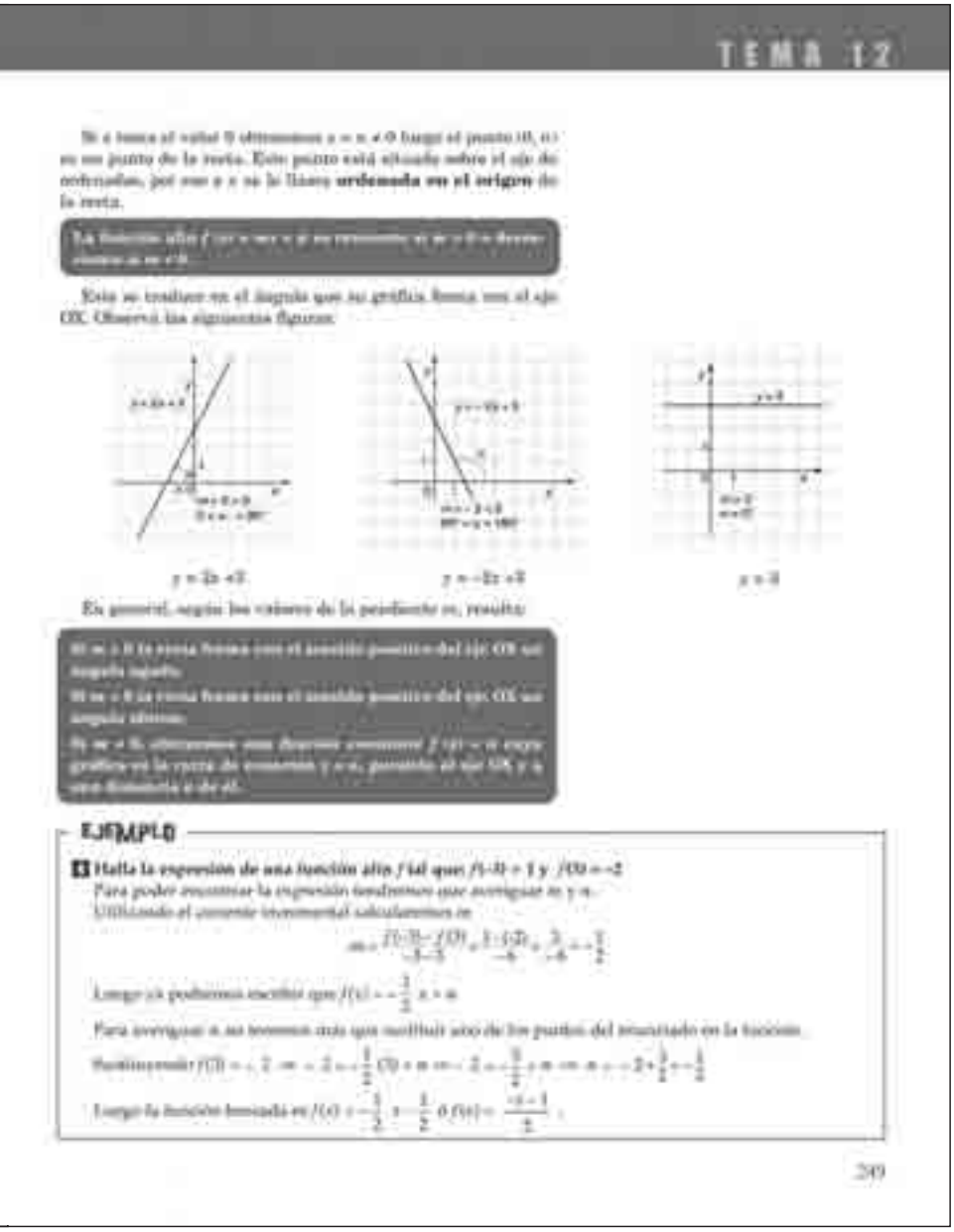
248

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS

Comparar las relaciones lineal y afín: la ordenada en el origen.

La ordenada en el origen "desplaza" la gráfica de la función afín.

▶ Pág. 249



TEMA 12

Si a toma el valor 0 obtenemos $y = n$, $n \neq 0$ luego el punto $(0, n)$ es un punto de la recta. Este punto está situado sobre el eje de ordenadas, por eso a n se le llama **ordenada en el origen** de la recta.

La función afín $f(x) = mx + n$ es creciente si $m > 0$ y decreciente si $m < 0$.

Esto se traduce en el ángulo que su gráfica forma con el eje OX. Observa las siguientes figuras:

$y = 2x + 3$

$y = -2x + 3$

$y = 3$

En general, según los valores de la pendiente m, resulta:

Si $m > 0$ la recta forma con el semieje positivo del eje OX un ángulo agudo.

Si $m < 0$ la recta forma con el semieje positivo del eje OX un ángulo obtuso.

Si $m = 0$, obtenemos una función constante $f(x) = n$ cuya gráfica es la recta de ecuación $y = n$, paralela al eje OX y a una distancia n de él.

EJEMPLO

1 Halla la expresión de una función afín f tal que $f(-3) = 1$ y $f(0) = -2$

Para poder encontrar la expresión tendremos que averiguar m y n.

Utilizando el concepto trabajado calculamos m:

$$m = \frac{f(-3) - f(0)}{-3 - 0} = \frac{1 - (-2)}{-3} = \frac{3}{-3} = -\frac{1}{1}$$

Luego ya podemos escribir que $f(x) = -\frac{1}{1}x + n$

Para averiguar n no tenemos más que sustituir uno de los puntos del enunciado en la función.

Sustituyendo $f(0) = -2$: $-2 = -\frac{1}{1}(0) + n \Rightarrow -2 = -\frac{0}{1} + n \Rightarrow n = -2 + \frac{1}{1} = -\frac{1}{1}$

Luego la función buscada es $f(x) = -\frac{1}{1}x - \frac{1}{1}$ o $f(x) = \frac{-x-1}{1}$.

249

▶ Pág. 250

SOLUCIONARIO

9. Un repartidor de periódicos cobra una cantidad fija diaria de 9 euros más una cantidad variable que depende del número de periódicos repartidos a razón de 0,12 euros por periódico.

a) Escribe la función que permite obtener la cantidad a cobrar "*y*" en función del número de periódicos repartidos "*x*".

$y = 9 + 0{,}12x$

b) Si un día reparte 125 periódicos, ¿cuánto cobra ese día?

Si $x = 125 \rightarrow y = 9 + 0{,}12 \times 125 = 24$ €

c) Si cierto día ha cobrado 19,32 euros, ¿cuántos periódicos ha repartido?

Si $y = 19{,}32$ € $\rightarrow x = \dfrac{19{,}32 - 9}{0{,}12} = 86$

d) ¿Puede cobrar un día 16,86 euros?

No, pues si $y = 16{,}86$ € $\rightarrow x = \dfrac{16{,}86 - 9}{0{,}12} = 65{,}5$

periódicos, *y* no es posible vender medio periódico.

10. De las siguientes funciones di cuáles son funciones afines, indica su pendiente y su ordenada en el origen:

a) $y = \frac{1}{2}x + 2$ Es afín. $m = \frac{1}{2}$, $n = 2$

b) $y = 3(x - 8) + 5$ Es afín. $m = 3$, $n = -19$

c) $y = 2x^2 - 2(x + 1)^2$ Es afín. $m = -4$, $n = -2$

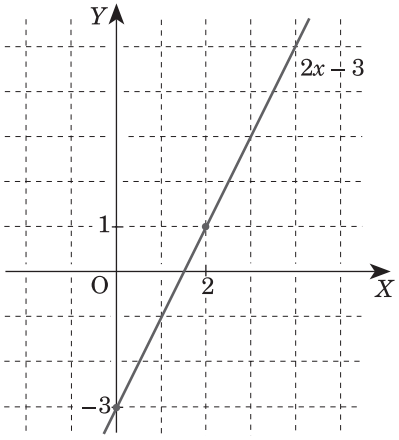
d) $y = 0$ Es lineal. $m = 0$

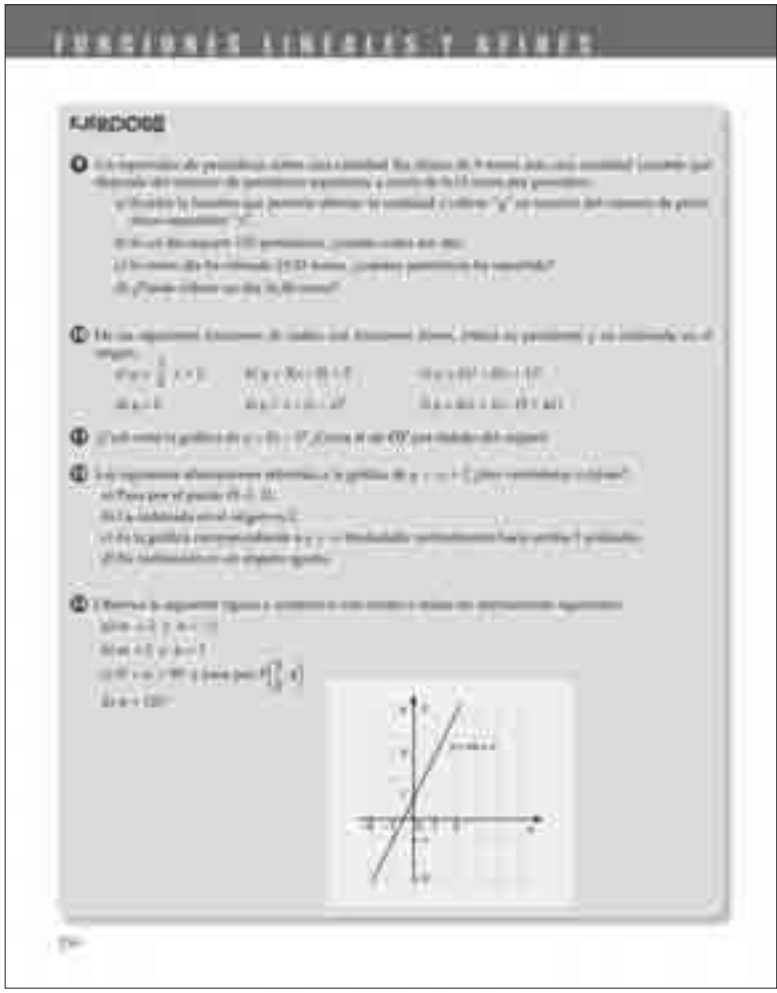
e) $y = x - (1 - x)^2$ No es afín

f) $y = 4(x + 2) - (5 + 4x)$ Es afín. $m = 0$, $n = 3$

11. ¿Cuál sería la gráfica de $y = 2x - 3$? ¿Corta al eje *OY* por debajo del origen?

Su gráfica es una recta que corta al eje *OY* en el punto de ordenada –3.





12. Las siguientes afirmaciones referidas a la gráfica de $y = -x + 2$ ¿Son verdaderas o falsas?

a) Pasa por el punto $P(-1, 2)$.

FALSO

b) La ordenada en el origen es 2.

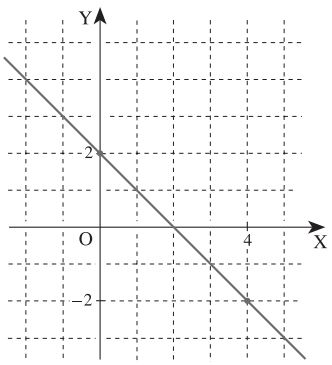
VERDADERO

c) Es la gráfica correspondiente a $y = -x$ trasladada verticalmente hacia arriba 2 unidades.

VERDADERO

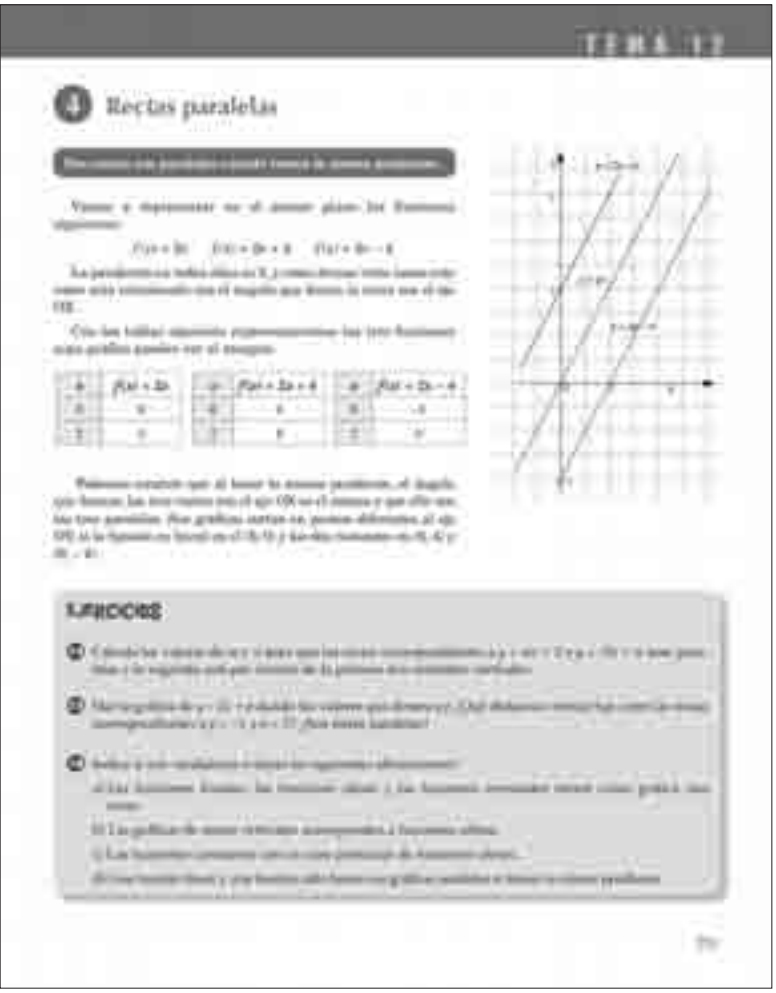
d) Su inclinación es un ángulo agudo.

FALSO



Su gráfica es una recta que corta al eje OY

▶ Pág. 251. 4 Rectas paralelas



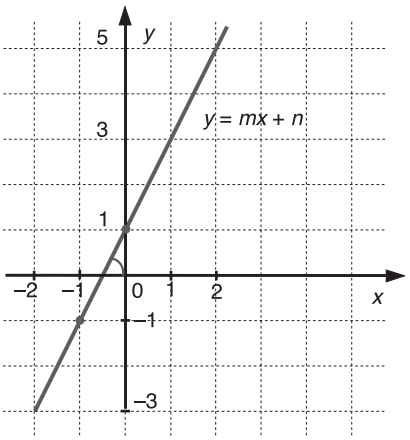
13. Observa la siguiente figura y contesta si son ciertas o falsas las afirmaciones siguientes:

a) $m = 2$ **y** $n = -1$ FALSO

b) $m = 2$ **y** $n = 1$ VERDADERO

c) $0° < \alpha < 90°$ **y pasa por** $P\left(\frac{3}{2}, 4\right)$ VERDADERO

d) $\alpha = 125°$ FALSO



ORIENTACIONES DIDÁCTICAS

Paralelismo e igualdad de la pendiente.

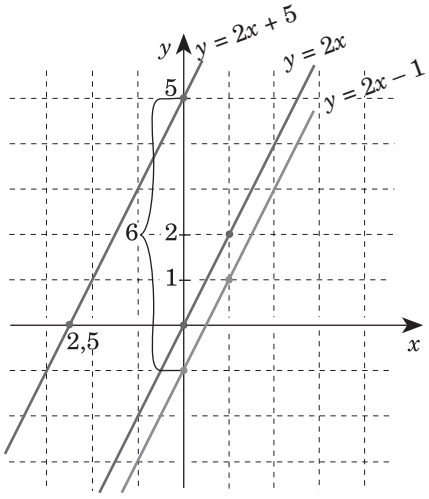
SOLUCIONARIO

14. Calcula los valores de m y n para que las rectas correspondientes a $y = mx + 2$ e $y = -5x + n$ sean paralelas y la segunda esté por encima de la primera dos unidades verticales.

Si son paralelas deben coincidir sus pendientes $\rightarrow m = -5$.

Para que la segunda esté por encima dos unidades verticales, la ordenada en el origen de la segunda recta debe ser dos unidades mayor que la ordenada en el origen de la primera, luego n = 4.

15. Haz la gráfica de $y = 2x + p$ dando los valores que desees a p ¿Qué distancia vertical hay entre las rectas correspondientes a $p = -1$ y $p = 5$? ¿Son todas paralelas?



Son todas paralelas y la distancia entre las rectas $y = 2x + 5$, $y = 2x - 1$, es 6 unidades.

16. Indica si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones?

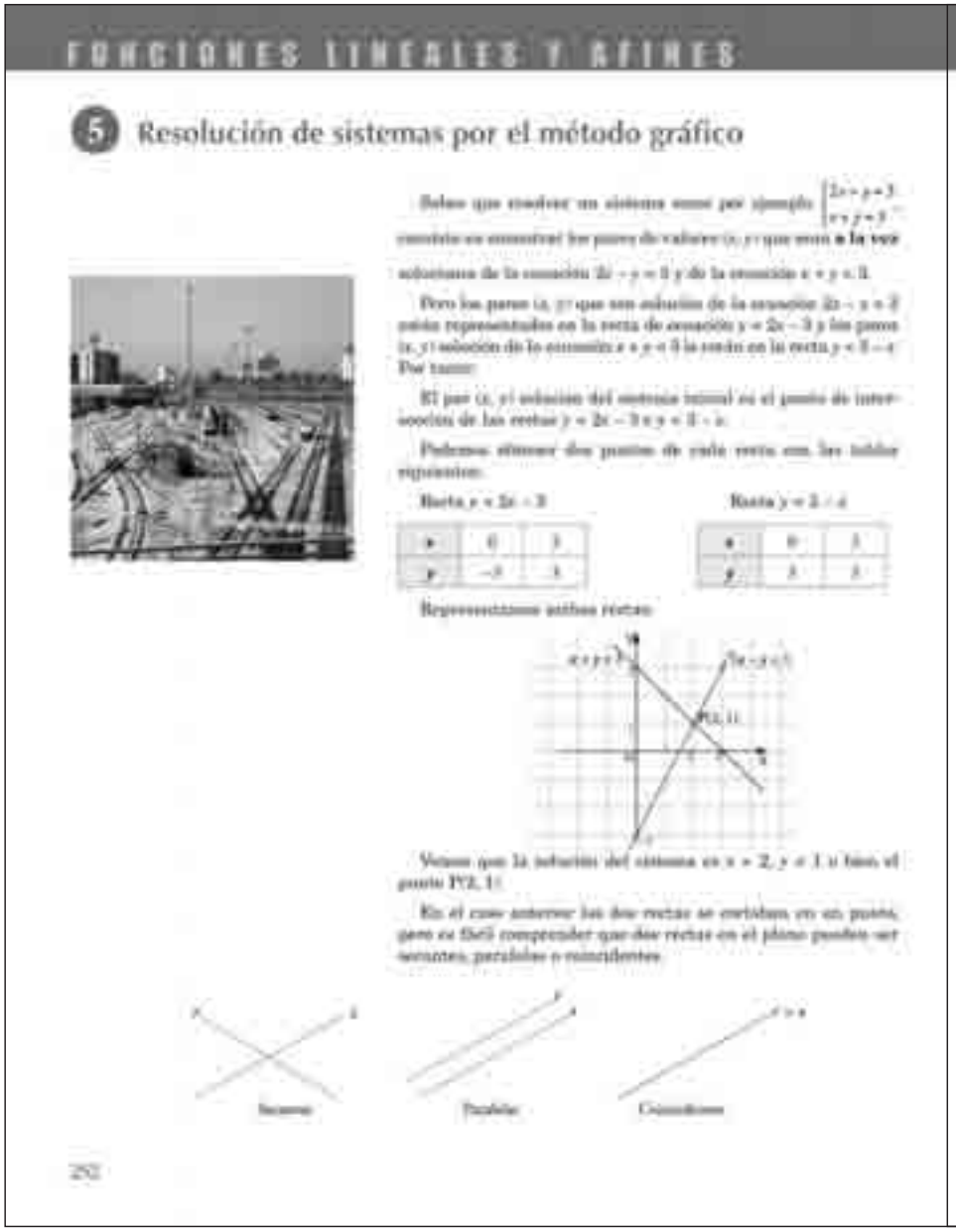
a) Las funciones lineales, las funciones afines y las funciones constantes tienen como gráfica una recta. VERDADERO

b) Las gráficas de rectas verticales corresponden a funciones afines. FALSO

c) Las funciones constantes son un caso particular de funciones afines. VERDADERO

d) Una función lineal y una función afín tienen sus gráficas paralelas si tienen la misma pendiente. VERDADERO

▶ Pág. 252. 5 Resolución de sistemas por el método gráfico



FUNCIONES LINEALES Y AFINES

5 Resolución de sistemas por el método gráfico

Sabes que resolver un sistema como por ejemplo $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + y = 3 \end{cases}$ consiste en encontrar los pares de valores (x, y) que sean **a la vez** soluciones de la ecuación $2x - y = 3$ y de la ecuación $x + y = 3$.

Pero los pares (x, y) que son solución de la ecuación $2x - y = 3$ están representados en la recta de ecuación $y = 2x - 3$ y los pares (x, y) solución de la ecuación $x + y = 3$ lo están en la recta $y = 3 - x$. Por tanto:

El par (x, y) solución del sistema inicial es el punto de intersección de las rectas $y = 2x - 3$ e $y = 3 - x$.

Podemos obtener dos puntos de cada recta con las tablas siguientes:

Recta $r \equiv y = 2x - 3$

x	0	3
y	-3	3

Recta $s \equiv y = 3 - x$

x	0	3
y	3	0

Representamos ambas rectas:

Vemos que la solución del sistema es $x = 2$, $y = 1$ o bien, el punto P(2, 1).

En el caso anterior las dos rectas se cortaban en un punto, pero ya Sabes comprender que dos rectas en el plano pueden ser secantes, paralelas o coincidentes:

Secantes Paralelas Coincidentes

252

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS

Insistir en la clasificación de los sistemas atendiendo a su solución gráfica: el número de cortes entre las funciones afines que componen el sistema.

▶ Pág. 253

Si son **secantes** tienen un punto en común y el sistema de ecuaciones se dice que es **compatible determinado**.

Si son **paralelas** no hay puntos en común y por tanto el sistema no tendrá solución. Es un sistema **incompatible**.

Si son coincidentes todos los puntos de una son de la otra, por tanto el sistema tiene por solución los infinitos puntos de la recta, tiene pues infinitas soluciones y se dice que es un sistema **compatible indeterminado**.

EJEMPLO

1 **Resolver gráficamente los sistemas: a)** $\begin{cases} x - 3y = 2 \\ 2x - 6y = 10 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ -4x + 2y = -2 \end{cases}$

a) Para poder representar la recta despejamos la y en ambas ecuaciones:

$$y = \frac{x-2}{3} \quad ; \quad y = \frac{2x-10}{6} = \frac{x-5}{3}$$

Calculamos dos puntos de cada una de ellas:

x	2	5
y	0	1

x	2	5
y	−1	0

La representación gráfica es:



Luego, al ser las rectas paralelas, el sistema no tendrá solución y será incompatible.

b) Escribimos las ecuaciones así: $y = 2x - 1$ e $y = \frac{4x-2}{2} = 2x - 1$. Luego ambas ecuaciones son en realidad la misma. La tabla es:

x	0	2
y	−1	3

y su representación gráfica es:



El sistema es compatible indeterminado y tiene infinitas soluciones (todos los puntos de la recta son soluciones).

253

▶ Pág. 256. Ejercicios



FUNCIONES LINEALES Y AFINES

EJERCICIOS

FUNCIÓN LINEAL. PROPORCIONALIDAD

SITUACIONES AFINES

SOLUCIONARIO

17. Indica cuáles de los enunciados siguientes corresponden a una situación de proporcionalidad. En los casos afirmativos expresa cuál es la función lineal asociada.

a) El perímetro de un triángulo equilátero es proporcional al lado.

VERDADERO. P = perímetro, x = lado, $P = 3x$

b) El volumen de una pirámide cuadrangular de arista básica 4 cm es proporcional a la altura.

VERDADERO. V = volumen, h = altura,

$V = \frac{1}{3} \times 64 \times h$

c) La longitud de una circunferencia es proporcional al radio.

VERDADERO. $L = 2 \pi r$

d) En un almacén donde todos los precios han sido aumentados un 10 %, los precios nuevos son proporcionales a los antiguos.

VERDADERO. N = precio nuevo, P = precio antiguo, $N = P + 0{,}1 \times P = 1{,}1 \times P$

e) El peso de una persona es proporcional a su altura. FALSO.

f) En un mapa a escala 1 : 5 000 las distancias sobre el mapa son proporcionales a las distancias reales.

VERDADERO. D = distancia real, d = distancia sobre el mapa, $D = 5000\ d$

18. Las tablas siguientes corresponden a series proporcionales? En caso afirmativo, expresa la función lineal asociada.

a)

3	2	–1,5	2,1	–5,2
4,5	3	–2,25	3,15	–7,8

Sí, pues

$$\frac{4,5}{3}=\frac{3}{2}=\frac{-2,25}{-1,5}=\frac{3,15}{2,1}=\frac{-7,8}{-5,2}=1,5 \rightarrow y=1,5x$$

b)

7	5	3	6'5
3'5	2'5	2	3'25

No, pues $\frac{2,5}{5} \neq \frac{2}{3}$

c)

1	2	3	4
2	4	6	10

No, pues $\frac{6}{3} \neq \frac{10}{4}$

d)

$\frac{-3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{-9}{5}$
$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{18}{25}$

No, pues $\frac{{}^{2}/_{3}}{{}^{5}/_{3}} \neq \frac{{}^{18}/_{25}}{{}^{-9}/_{5}}$

19. La empresa suministradora de gas tenía fijada su tarifa en 2009 de la siguiente manera: 6,17 € de tarifa fija (que incluye el alquiler del contador) y una tarifa variable que dependedel número de metros cúbicos consumidos, a 0,40 € cada m³.

a) Expresa la relación entre el número de metros cúbicos de gas consumidos y el precio a pagar.

P = precio a pagar, n = metros cúbicos consumidos, $P = 6,17 + 0,4\ n$

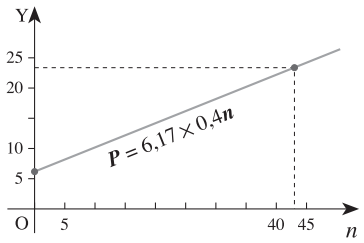
b) ¿Cuánto se debe pagar por un consumo de 43 m³?

Si $n = 43\ m^3 \rightarrow P = 6,17 + 0,4 \times 43 = 23,37\ €$

c) Si h5ay que pagar 35,92 €, ¿cuántos metros cúbicos se han consumido?

Si $P = 35,92\ € \rightarrow n = \frac{35,92-6,17}{0,4} = 74,375\ m^3$

d) Representa gráficamente la función obtenida.



e) Teniendo en cuenta que al importe total de la factura hay que añadirle un I.V.A. del 16 %, ¿cuál es ahora la nueva relación?

$P = (6,17 + 0,4\ n) \times 1,16 = 7,1572 + 0,464\ n$

f) Repite los cálculos b) y c) para la función obtenida en e).

Si $n = 43\ m^3 \rightarrow P = 7,1572 + 0,464 \times 43 = 27,11\ €$

Si $P = 35,92\ € \rightarrow n = \frac{35,92-7,1572}{0,464} = 61,99\ m^3$

20. Éstas son las tarifas de dos empresas dedicadas a alquiler de coches.

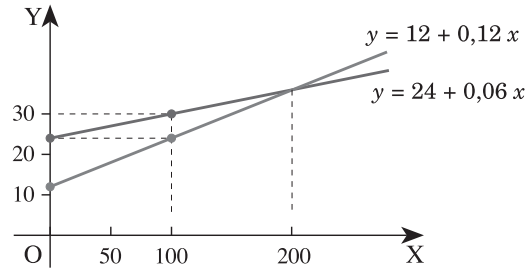


a) Encuentra la expresión que permite obtener, para cada empresa, el precio a pagar diariamente en función del número de kilómetros recorridos.

A : $y = 12 + 0,12x$; B : $y = 24 + 0,06x$

(x = n.º Km/día; y = precio/día)

b) Representa ambas funciones en un mismo sistema de ejes cartesianos.



c) Leyendo sobre la gráfica: ¿Qué empresa deberá seleccionar el Sr. García si durante un día debe alquilar un coche para recorrer 145 km? ¿Y si debe recorrer 234 km?

A: $y = 12 + 0,12 \times 145 = 29,4\ €$

B: $y = 24 + 0,06 \times 145 = 32,7\ €$

Para 145 km es más económica la empresa A

Para 234 km es más económica la empresa B.

d) Para un mismo viaje de 320 km, el Sr. Hernández alquila el coche en A y el Sr. Fernández en B. ¿quién paga más y cuánto?

A: $y = 12 + 0,12 \times 234 = 40,08\ €$

B: $y = 24 + 0,06 \times 234 = 38,04\ €$

El Sr. Hernández, con la empresa A, paga 7,2 € más que el Sr. Fernández, con la empresa B.

▶ Pág. 257. Ejercicios



TEMA 12

REPRESENTACIÓN GRÁFICA

21. Un técnico en electrodomésticos cobra sus servicios a razón de 20,82 € por su desplazamiento y 15 € por cada hora de trabajo.

a) ¿El precio pagado por el cliente es función afín del número de horas de trabajo?

Sí. La relación es $y = 20{,}82 + 15x$ (y = precio, x = n.º horas de trabajo)

b) ¿Cuánto debe pagar un cliente por un trabajo de 30 minutos?, ¿y de 2 horas?, ¿y de 2 horas 45 minutos?

Sí $x = 30$ min; $y = 28{,}32$ €

Sí $x = 2$ horas; $y = 50{,}82$ €

Sí $x = 2{,}75$ horas; $y = 62{,}07$ €

22. Un globo sonda utilizado en el Servicio Meteorológico para medir la temperatura lleva incorporado un termómetro. Se ha observado que por cada 180 m. de altura la temperatura disminuye 1 °C.

Cierto día la temperatura en la superficie es de 15 °C.

a) ¿Qué temperatura esperamos encontrar a los 5 km de altura?

t = temperatura (en grados ºC);
h = altura (en metros)

Si por cada 180 m —— la temperatura disminuye 1° C
por 5 000 m —— x

$x = \dfrac{5000}{150} = 27{,}78$ °C disminuirá en 27,78º C.

Como la temperatura en superficie es de 15 ºC, la temperatura a los 5 km será 15 – 27,78 = –12,78 ºC

b) ¿A qué altura habría una temperatura de –50 °C?

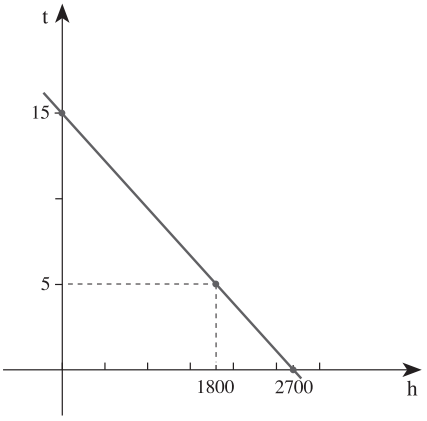
Si por cada 180 m —— la temperatura disminuye 1° C
y —— disminución de 15 °C + 50 °C = 65 °C

$y = 180 \times 65 = 11700$ m

c) Encuentra una fórmula que nos permita hallar la temperatura *t* conociendo la altura *h*. Haz la tabla y la gráfica correspondiente.

$$t = 15 - \frac{h}{180}$$

h (altura en metros)	0	1800	2700
t (temperatura en ºC)	15	5	0



23. Un comerciante de vinos ofrece su producto según la siguiente tarifa:

– 0,96 € la botella de 1 litro.

– Si se compra un recipiente de 20 litros por 2,52 €, el litro cuesta 0,75 €.

a) Expresa los precios *b*(*x*) y *r*(*x*) de *x* litros de vino comprados en botellas o en recipiente.

$b(x) = 0{,}96x$; $r(x) = 2{,}52 + 0{,}75x$

b) Si se desea comprar 10 litros de vino, ¿qué opción es la más económica? ¿Y para 15 litros?

Si $x = 10 \rightarrow b(10) = 0{,}96 \times 10 = 9{,}6$ €

$r(10) = 2{,}52 + 0{,}75 \times 10 = 10{,}02$ €

La opción más económica es comprar el vino embotellado.

Si $x = 15 \rightarrow b(15) = 0{,}96 \times 15 = 14{,}4$ €

$r(15) = 2{,}52 + 0{,}75 \times 15 = 13{,}77$ €

La opción más económica es comprar el vino en recipiente.

c) ¿Qué cantidad habrá que comprar para que sea indiferente una opción u otra?

Si $h(x) = r(x) \rightarrow 0{,}96x = 2{,}52 + 0{,}75x \rightarrow$

$\rightarrow 0{,}21x = 2{,}52 \rightarrow x = 12$ litros

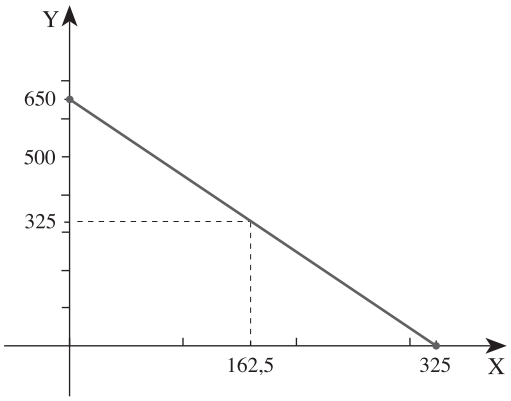
24. En un cine hay 650 espectadores. Una vez terminada la sesión abandonan la sala a un ritmo de 2 personas por segundo.

a) Expresa la relación entre el número de personas *y* que aún permanecen en la sala una vez transcurridos *x* segundos después de terminar la sesión.

$y = 650 - 2x$ (y = personas; x = segundos)

b) Ayúdate de la representación gráfica para determinar:

1) ¿Cuánto tiempo transcurre desde el final de la proyección para que quede en la sala la mitad de los espectadores?



$325 = 650 - 2x \rightarrow x = \dfrac{650 - 325}{2} =$

$= 162{,}5$ segundos = 2 min. y 42,5 segundos.

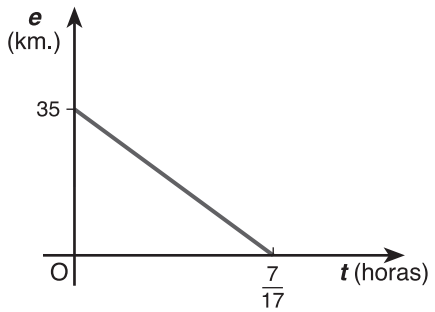
2) ¿Cuánto tiempo tarda en vaciarse la sala?

$0 = 650 - 2x \rightarrow x = \dfrac{650}{2} = 325$ seg. = 5 min. y 25 seg.

25. Un conductor de tren pone en marcha su cronómetro cuando se encuentra a 35 km de la estación. Hasta llegar a destino mantiene una velocidad constante de 85 km/h.

Sea *t* el tiempo (en horas) que tarda en llegar a la estación desde el momento en que acciona el cronómetro y sea *e* el espacio (en km) que le falta por recorrer.

a) Expresa *e* en función de *t* y representa gráficamente dicha función.



e = espacio total – espacio recorrido en un tiempo t

$e = 35 - 85t$ expresados en km y en horas

b) ¿Qué valores mínimo y máximo puede tomar *t*?

Las restricciones del espacio son:

$0 \le e \le 35$: $0 \le t \le \dfrac{35}{85}$ horas = 24 min 42 seg.

26. El punto P(–3, 2) ¿pertenece a la gráfica de la función afín $f(x) = 2x + 8$? ¿Y el punto Q (–4, 1)? ¿Y R (1, 10)?

P(–3,2) → Sí, pues $2 = 2 \times (-3) + 8$

Q(–4,1) → No, pues $1 \neq 2 \times (-4) + 8$

R(1,10) → Sí, pues $10 = 2 \times 1 + 8$

27. Dada la función afín $f(x) = 2x - 3$. Halla las imágenes de los números 2, –3, $\frac{5}{4}$, $\sqrt{2}$.

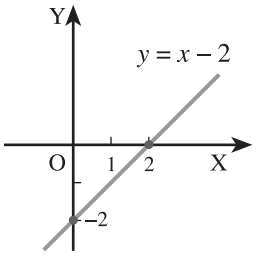
$$f(2) = 1; f(-3) = -9; f\left(\frac{5}{4}\right) = -\frac{1}{2}; f(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} - 3$$

28. Dada la función afín $f(x) = 3{,}5x - 2$ halla el valor de a para que $f(a) = 2$.

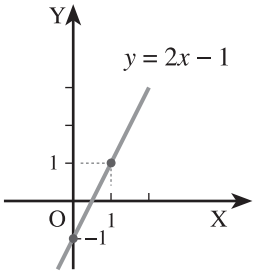
$$f(x) = 3{,}5x - 2; f(a) = 3{,}5a - 2 = 2 \to a = \frac{4}{3{,}5} = \frac{8}{7}$$

Para los ejercicios 29 a 37, representa gráficamente las siguientes funciones:

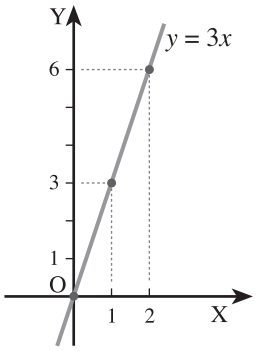
29. $f(x) = x - 2$.



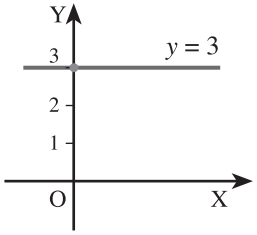
30. $f(x) = 2x - 1$.



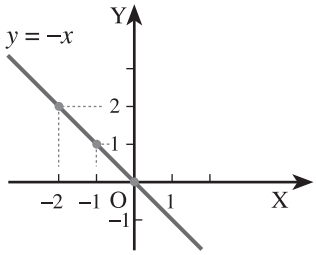
31. $f(x) = 3x$.



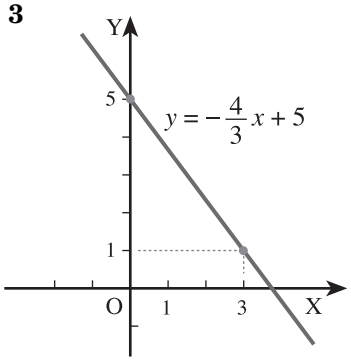
32. $f(x) = 3$.



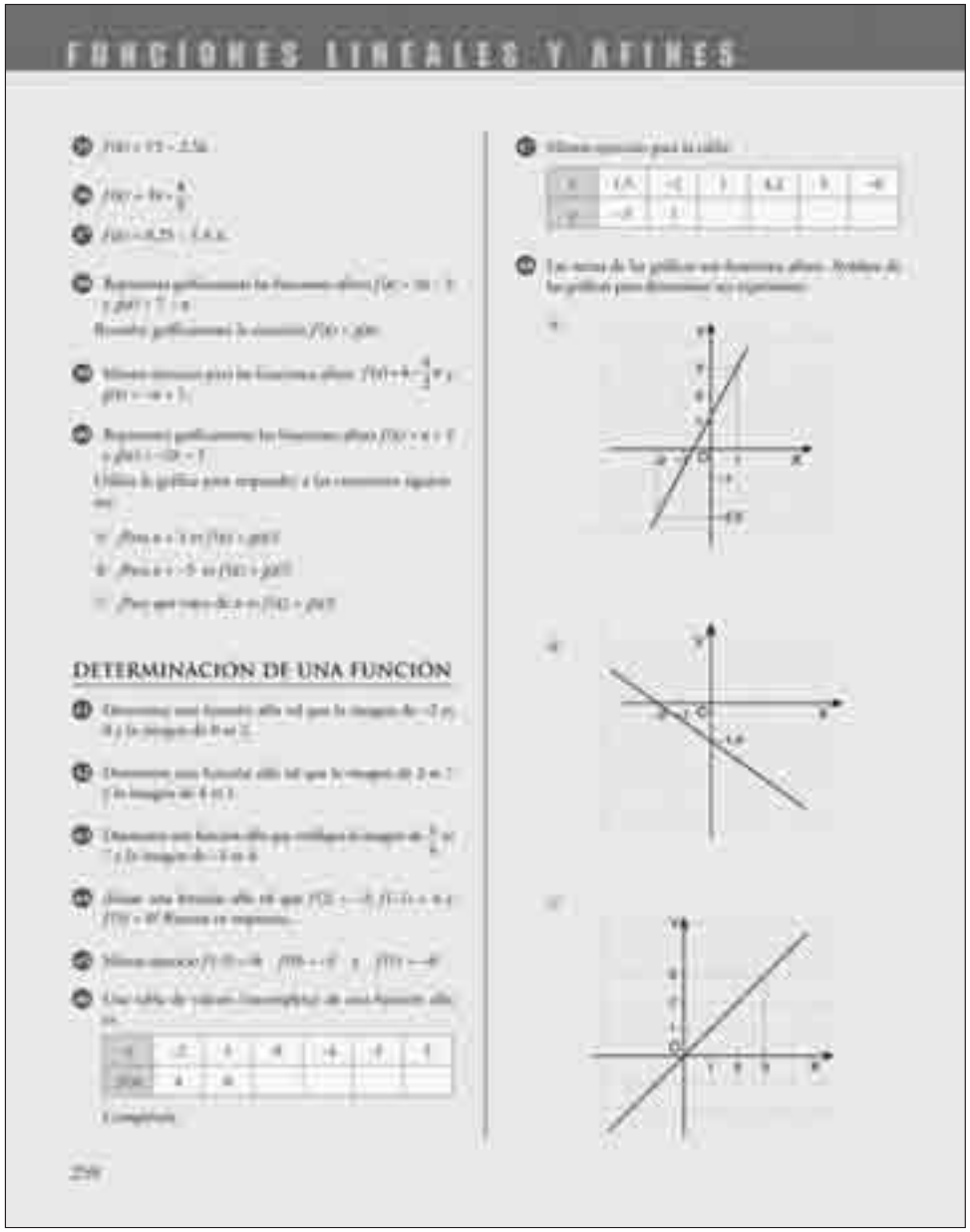
33. $f(x) = -x$.



34. $f(x) = -\frac{4}{3}x + 5$



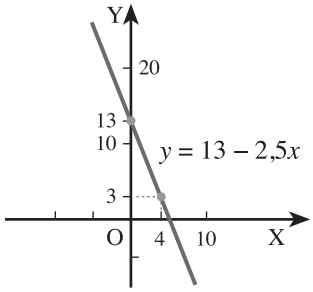
▶ Pág. 258. Ejercicios



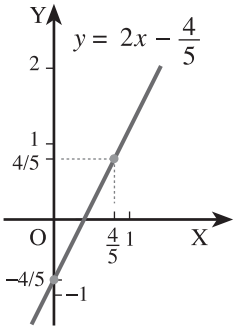
FUNCIONES LINEALES Y AFINES

DETERMINACIÓN DE UNA FUNCIÓN

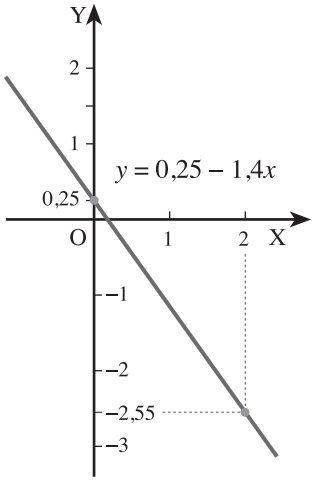
35. $f(x) = 13 - 2{,}5x$.



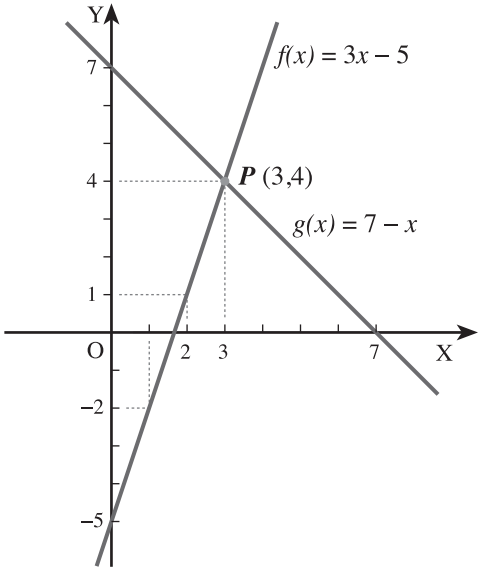
36. $f(x) = 2x - \frac{4}{5}$.



37. $f(x) = 0{,}25 - 1{,}4x$.

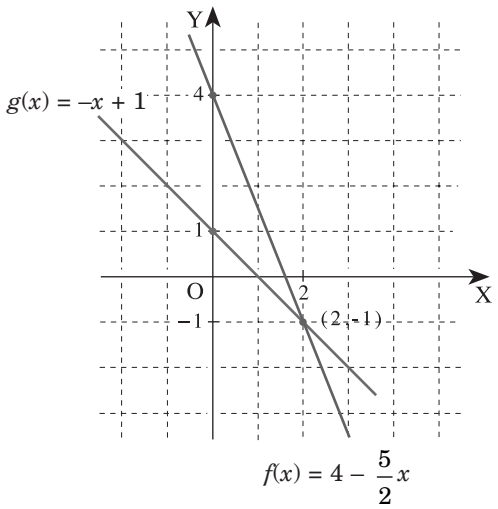


38. Representa gráficamente las funciones afines $f(x) = 3x - 5$ y $g(x) = 7 - x$.
Resuelve gráficamente la ecuación $f(x) = g(x)$.



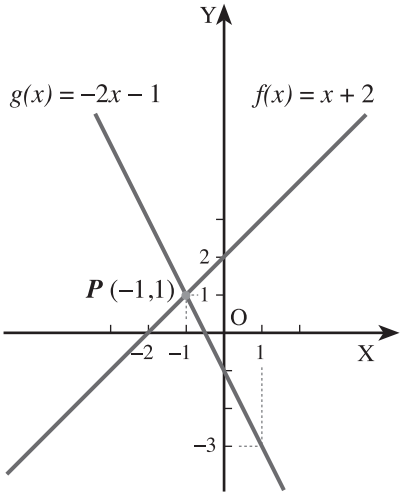
La solución es $x = 3$, pues P(3, 4) es el punto de corte de las dos rectas.

39. Mismo ejercicio para las funciones afines $f(x) = 4 - \frac{5}{2}x$ y $g(x) = -x + 1$.



La solución es $x = 2$, pues $(2, -1)$ es el punto de corte de las dos rectas.

40. Representa gráficamente las funciones afines $f(x) = x + 2$ y $g(x) = -2x - 1$.



Utiliza la gráfica para responder a las cuestiones siguientes:

a) ¿Para $x = 3$ es $f(x) > g(x)$?

Sí. Para $x = 3$ es $f(x) > g(x)$.

b) ¿Para $x = -3$ es $f(x) > g(x)$?

No. Para $x = -3$ es $g(x) > f(x)$.

c) ¿Para qué valor de x es $f(x) = g(x)$?

$f(x) = g(x)$ para $x = -1$.

41. Determina una función afín tal que la imagen de –2 es 0 y la imagen de 0 es 2.

$$f(-2) = 0 \quad f(0) = 2; \quad f(x) = mx + n \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{l} 0 = -2m + n \\ 2 = n \end{array}\right\} \begin{array}{l} m = 1 \\ n = 2 \end{array} \rightarrow y = x + 2$$

42. Determina una función afín tal que la imagen de 2 es 7 y la imagen de 4 es 1.

$$\left.\begin{array}{l} f(2) = 7 \\ f(4) = 1 \end{array}\right\} \frac{f(4) - f(2)}{4 - 2} = \frac{1 - 7}{2} = -3 = m.$$

$f(x) = -3x + n$; como $f(2) = 7 \Rightarrow$

$\Rightarrow 7 = -3 \times 2 + n \rightarrow n = 13$.

$f(x) = -3x + 13$.

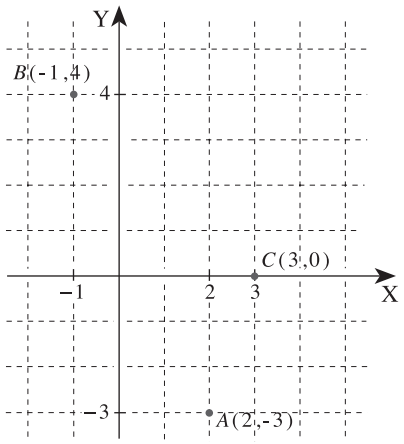
43. Determina una función afín que verifique la imagen de $\frac{3}{5}$ es 7 y la imagen de –3 es 4.

$$f\left(\frac{3}{5}\right) = 7, \; f(-3) = 4, \; f(x) = mx + n \; \rightarrow$$

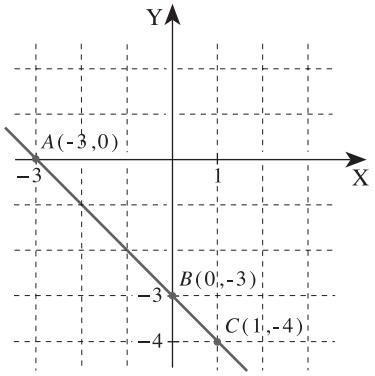
$$\rightarrow \left.\begin{array}{l} 7 = \frac{3}{5}m + n \\ 4 = -3m + n \end{array}\right\} \begin{array}{l} m = \frac{5}{6} \\ n = \frac{13}{2} \end{array} \rightarrow y = \frac{5}{6}x + \frac{13}{2}$$

44. ¿Existe una función afín tal que $f(2) = -3$; $f(-1) = 4$ y $f(3) = 0$? Razona tu respuesta.

No existe ninguna, pues representando gráficamente los puntos $A(2,-3)$, $B(-1,4)$ y $C(3,0)$ se aprecia que no están en una recta.



45. Mismo ejercicio $f(-3) = 0$; $f(0) = -3$ y $f(1) = -4$?



Sí, pues representando gráficamente los puntos $A(-3,0)$, $B(0,-3)$ y $C(1,-4)$ se aprecia que están en la recta $y = -x - 3$.

46. Una tabla de valores (incompleta) de una función afín es:

x	–2	1	0	–4	3	5
$f(x)$	4	0				

Complétala.

x	–2	1	0
$f(x)$	4	0	$-\frac{4}{3}\times 0+\frac{4}{3}=4/3$

x	–4	3	5
$f(x)$	$-\frac{4}{3}\times(-4)+\frac{4}{3}=\frac{20}{3}$	$-\frac{4}{3}\times 3+\frac{4}{3}=-\frac{8}{3}$	$-\frac{4}{3}\times 5+\frac{4}{3}=-\frac{16}{3}$

$$f(x)=mx+n \rightarrow \begin{matrix} 4=-2m+n \\ 0=m+n \end{matrix}\Big\} \begin{matrix} m=-4/3 \\ n=4/3 \end{matrix} \rightarrow y=-\frac{4}{3}x+\frac{4}{3}$$

47. Mismo ejercicio para la tabla:

x	1,5	–2	1	4,2	5	–6
y	–3	1				

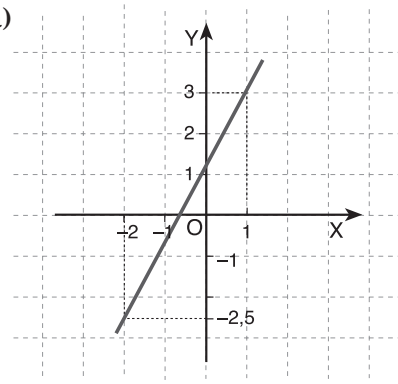
x	1,5	–2	1
y	–3	1	$-\frac{8}{7}\times 1-\frac{9}{7}=-\frac{17}{7}$

x	4,2	5	–6
y	$-\frac{8}{7}\times 4{,}2-\frac{9}{7}=-\frac{213}{35}$	$-\frac{8}{7}\times 5-\frac{9}{7}=-7$	$-\frac{8}{7}\times(-6)-\frac{9}{7}=\frac{39}{7}$

$$f(x)=mx+n \rightarrow \begin{matrix} -3=1{,}5m+n \\ 1=-2m+n \end{matrix}\Big\} \begin{matrix} m=-8/7 \\ n=-9/7 \end{matrix} \rightarrow y=-\frac{8}{7}x-\frac{9}{7}$$

48. Las rectas de las gráficas son funciones afines. Ayúdate de las gráficas para determinar sus expresiones.

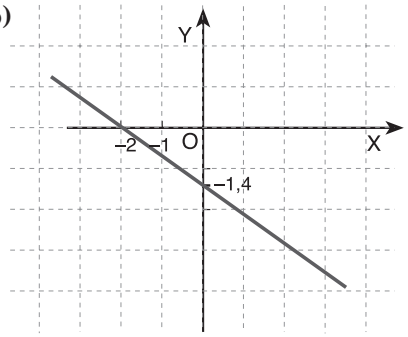
a)



x	–2	1
y	–2,5	3

$$\begin{matrix} -2{,}5=-2m+n \\ 3=1m+n \end{matrix} \quad \begin{matrix} m=11/6 \\ n=7/6 \end{matrix} \rightarrow y=\frac{11}{6}x+\frac{7}{6}$$

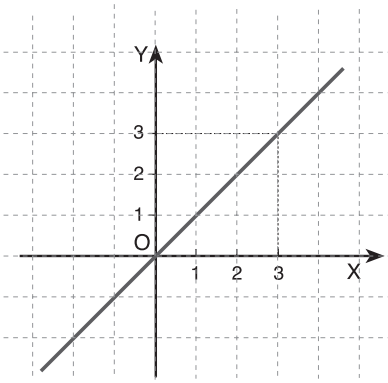
b)



x	–2	0
y	0	–1,4

$$\begin{matrix} 0=-2m+n \\ -1{,}4=n \end{matrix}\Big\} \begin{matrix} m=-7/10 \\ n=-7/5 \end{matrix} \rightarrow y=-\frac{7}{10}x-\frac{7}{5}$$

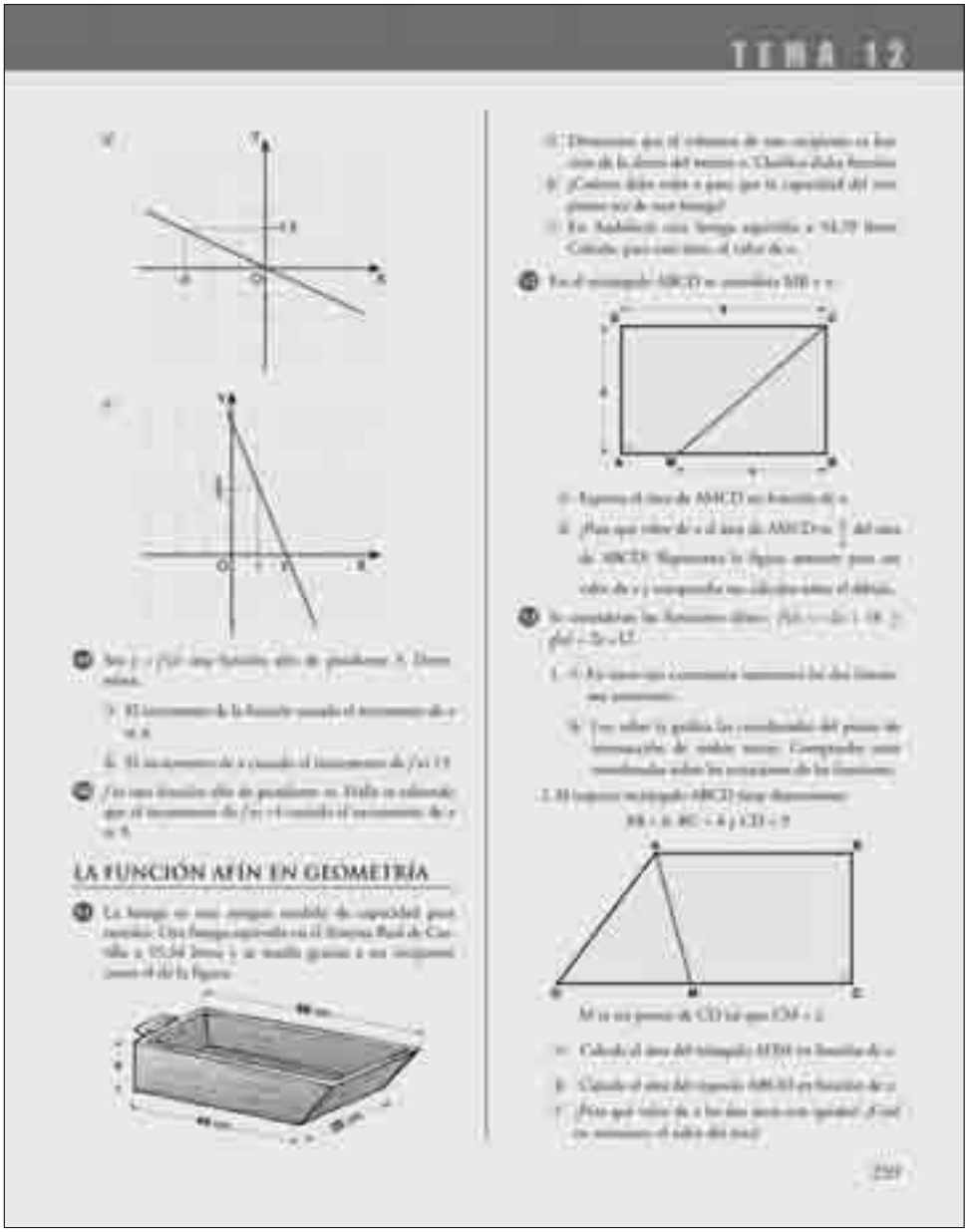
c)



x	0	1
y	0	1

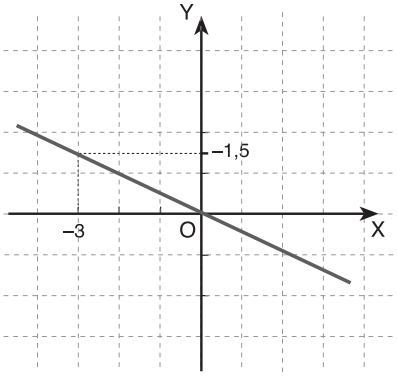
$$y = mx \Rightarrow 1 = m \Rightarrow y = x$$

▶ Pág. 259. Ejercicios


TEMA 12

LA FUNCIÓN AFÍN EN GEOMETRÍA

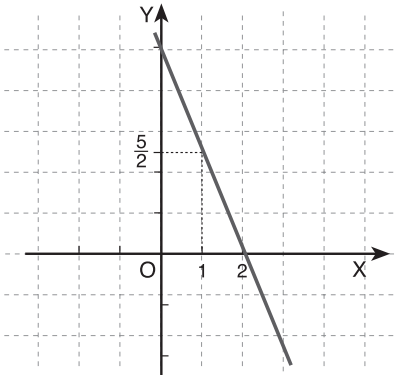
d)



x	–3	0
y	1,5	0

$$y = mx \Rightarrow 1{,}5 = -3\ m \Rightarrow y = \frac{1}{2}x$$

e)



x	2	1
y	0	5/2

$$\left.\begin{array}{l} 0 = 2m + n \\ \dfrac{5}{2} = 1\,m + n \end{array}\right\} \begin{array}{l} m = -5/2 \\ n = 5 \end{array} \rightarrow\ y = \frac{-5}{2}x + 5$$

49. Sea $y = f(x)$ una función afín de pendiente 3. Determina:

a) El incremento de la función cuando el incremento de x es 4.

$$m = \frac{\Delta f}{\Delta x} \rightarrow 3 = \frac{\Delta f}{4} \rightarrow \Delta f = 12$$

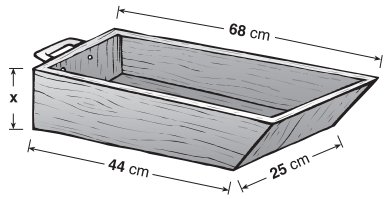
b) El incremento de x cuando el incremento de f es 15.

$$m = \frac{\Delta f}{\Delta x} \rightarrow 3 = \frac{15}{\Delta x} \rightarrow \Delta x = 5$$

50. f es una función afín de pendiente m. Halla m sabiendo que el incremento de f es –4 cuando el incremento de x es 3.

$$m = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{-4}{3}$$

51. La fanega es una antigua medida de capacidad para cereales. Una fanega equivalía en el Sistema Real de Castilla a 55,34 litros y se medía gracias a un recipiente como el de la figura.



a) Demuestra que el volumen de este recipiente es función de la altura del mismo x. Clasifica dicha función.

$V = 1400\ x$

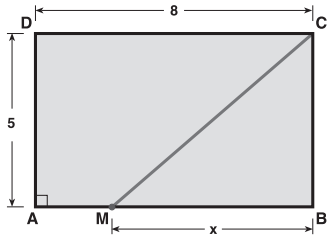
b) ¿Cuánto debe valer x para que la capacidad del recipiente sea de una fanega?

$$55\,340 = 1\,400 \times x \rightarrow x = \frac{55\,340}{1\,400} = 39{,}53 \text{ cm.}$$

c) En Andalucía una fanega equivalía a 54,70 litros. Calcula, para este dato, el valor de x.

$$54\,700 = 1\,400 \times x \rightarrow x = \frac{54\,700}{1\,400} = 39{,}07 \text{ cm.}$$

52. En el rectángulo ABCD se considera MB = x.



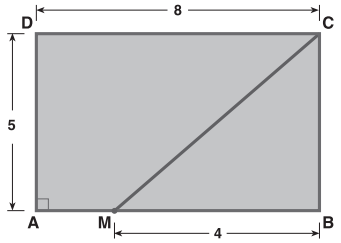
a) Expresa el área de AMCD en función de x.

Área (AMCD) = Área rectángulo (ABCD) –

– Área triángulo (MBC) = $5 \times 8 - \frac{1}{2} \cdot 5x = 40 - \frac{5x}{2}$

b) ¿Para qué valor de x el área de AMCD es $\frac{3}{4}$ del área de ABCD? Representa la figura anterior para ese valor de x y comprueba tus cálculos sobre el dibujo.

$$40 - \frac{5x}{2} = \frac{3}{4} \times 40 \rightarrow 10 = \frac{5x}{2} \rightarrow x = 4 \text{ cm.}$$



Área rectángulo (ABCD) = $8 \times 5 = 40$

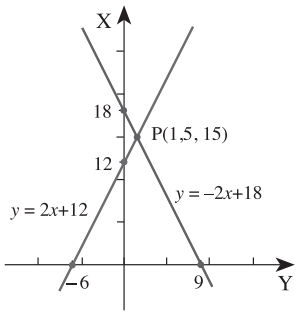
Área triángulo (MBC) = $\frac{1}{2} \times 4 \times 5 = 10$

Área (AMCD) = $40 - 10 = 30$

Área (AMCD) = $\frac{3}{4}$ Área rectángulo (ABCD)

53 Se consideran las funciones afines $f(x) = -2x + 18$ y $g(x) = 2x + 12$.

1. a) En unos ejes cartesianos representa las dos funciones anteriores.



b) Lee sobre la gráfica las coordenadas del punto de intersección de ambas rectas. Comprueba estas coordenadas sobre las ecuaciones de las funciones.

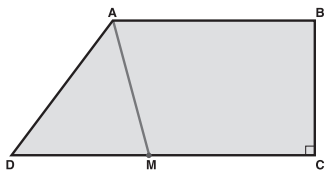
Punto de corte P(1,5, 15)

$f(1{,}5) = -2 \times 1{,}5 + 18 = 15$

$g(1{,}5) = 2 \times 1{,}5 + 12 = 15$

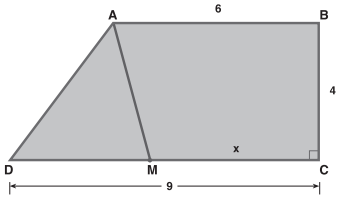
2. El trapecio rectángulo ABCD tiene dimensiones:

AB = 6, BC = 4 y CD = 9.



M es un punto de CD tal que CM = x.

a) Calcula el área del triángulo ADM en función de x.



Área triángulo (ADM) = $\frac{1}{2} \cdot (9 - x) \cdot 4 = 18 - 2x$

b) Calcula el área del trapecio ABCM en función de x.

Área trapecio (ABCM) = $\frac{x+6}{2} \times 4 = 12 + 2x$

c) ¿Para qué valor de x las dos áreas son iguales? ¿Cuál es, entonces, el valor del área?

$18 - 2x = 12 + 2x \rightarrow x = 1{,}5 \rightarrow$

$\rightarrow$ Área $= 18 - 2 \times 1{,}5 = 12 + 2 \times 1{,}5 = 15$

d) Calcula $f(9)$ y $g(9)$. ¿Qué representan geométricamente estos números?

$f(9) = -2 \times 9 + 18 = 0 \quad g(9) = 2 \times 9 + 12 = 30$

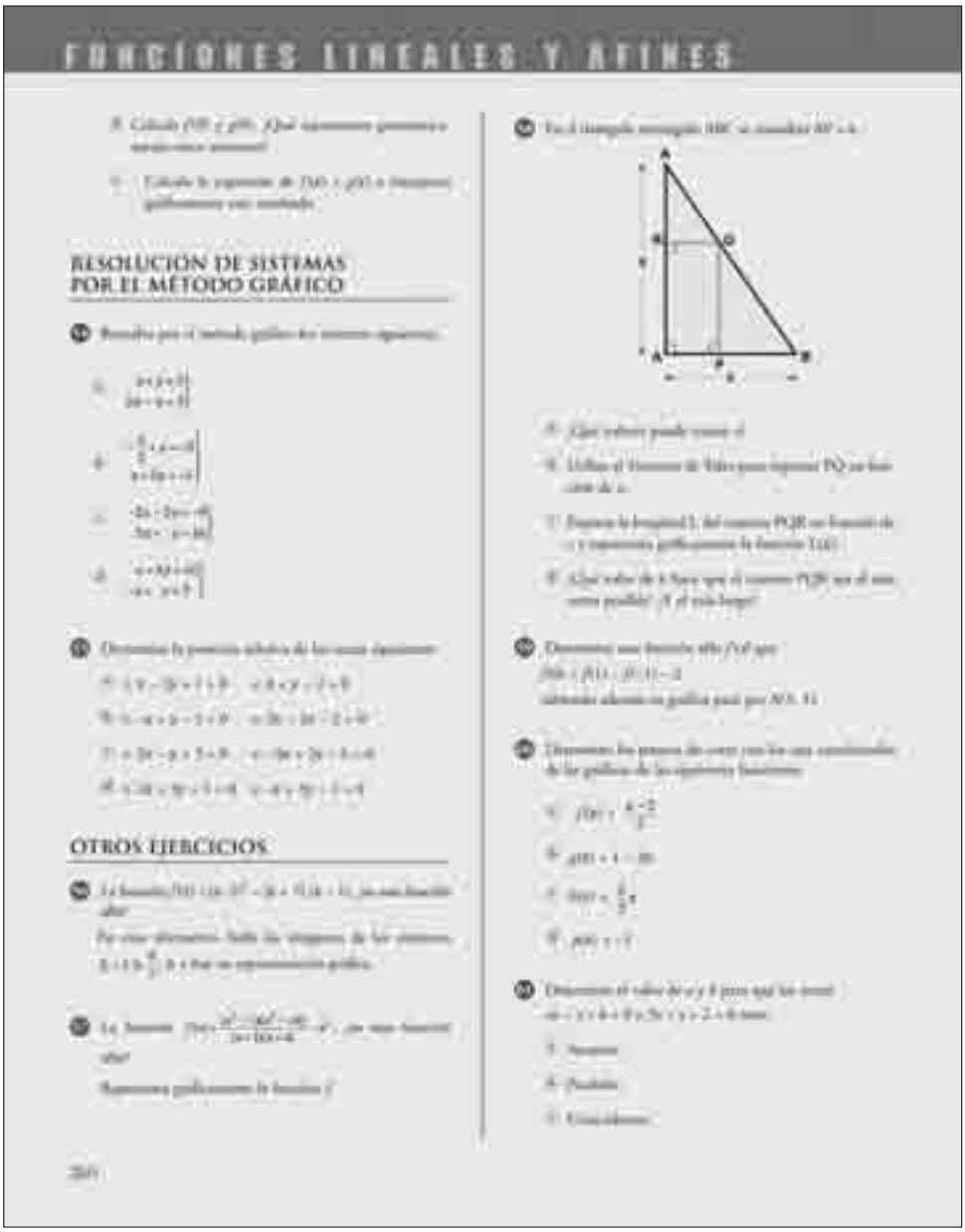
$f(9)$ = es el área del triángulo ADM que tiene base 0

$g(9)$ = es el área del trapecio ABCD

e) Calcula la expresión de $f(x) + g(x)$ e interpreta gráficamente este resultado.

$f(x) + g(x) = 30$ Es una función constante y representa el área del trapecio ABCD.

▶ Pág. 260. Ejercicios



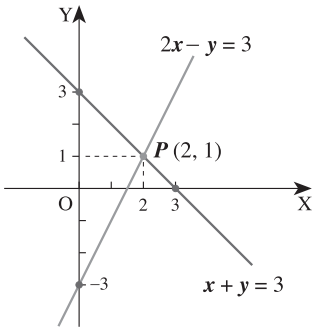
FUNCIONES LINEALES Y AFINES

RESOLUCIÓN DE SISTEMAS POR EL MÉTODO GRÁFICO

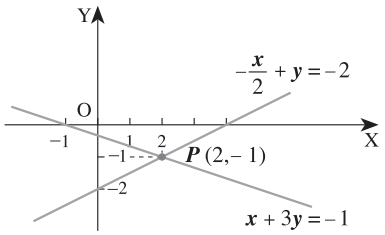
OTROS EJERCICIOS

54. Resuelve por el método gráfico los sistemas siguientes:

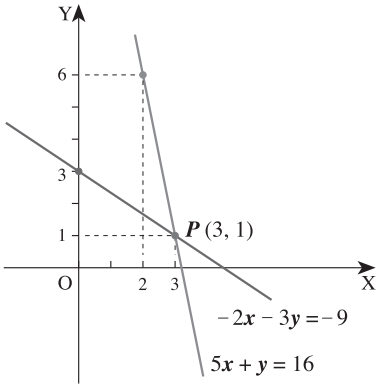
a) $\left.\begin{matrix} x+y=3 \\ 2x-y=3 \end{matrix}\right\}$



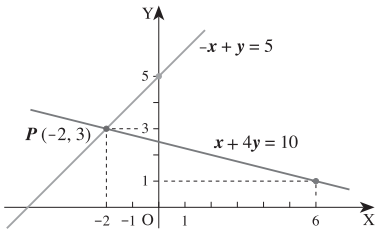
b) $\left.\begin{matrix} -\frac{x}{2}+y=-2 \\ x+3y=-1 \end{matrix}\right\}$



c) $\left.\begin{matrix} -2x-3y=-9 \\ 5x+y=16 \end{matrix}\right\}$

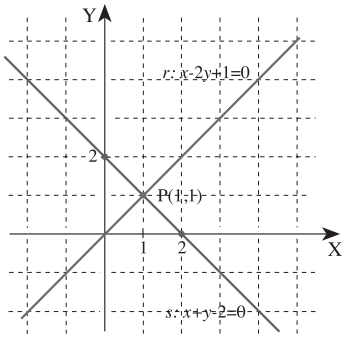


d) $\left.\begin{matrix} x+4y=10 \\ -x+y=5 \end{matrix}\right\}$



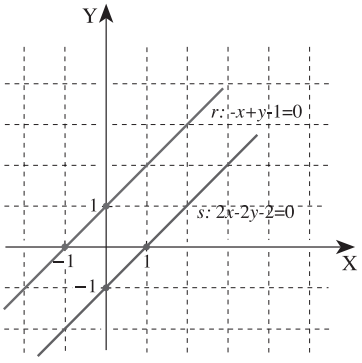
55. Determina la posición relativa de las rectas siguientes:

a) r: $x - 2y + 1 = 0$ s: $x + y - 2 = 0$



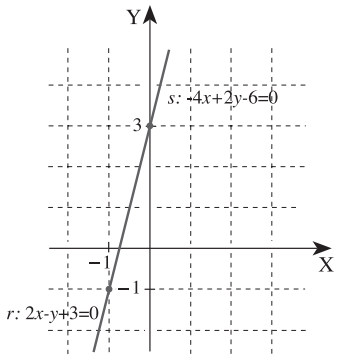
r y *s* son secantes, se cortan en $P(1,1)$

b) r: $-x + y - 1 = 0$ s: $2x - 2y - 2 = 0$



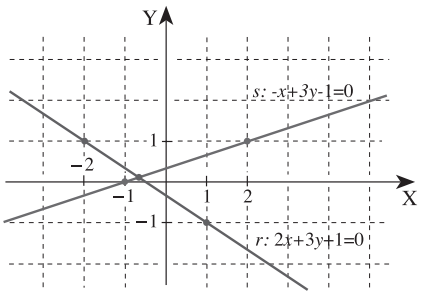
r y *s* son paralelas

c) r: $2x - y + 3 = 0$ s: $-4x + 2y - 6 = 0$



r y *s* son coincidentes

d) r: $2x + 3y + 1 = 0$ s: $-x + 3y - 1 = 0$



r y *s* son secantes, se cortan en $P\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{9}\right)$

56. La función $f(x) = (x-2)^2 - (x + 1)(x - 1)$, ¿es una función afín?

En caso afirmativo, halla las imágenes de los números 2; –1, 5; $\frac{6}{7}$; 0 y haz su representación gráfica.

$f(x) = (x - 2)^2 - (x + 1)(x - 1) =$

$= x^2 - 4x + 4 - (x^2 - 1) = x^2 - 4x - x^2 + 1 + 4$

$f(x) = -4x + 5$. Sí es una función afín.

$f(2) = -3$; $f(-1{,}5) = 11$; $f = \left(\frac{6}{7}\right) = \frac{11}{7}$;

$f(0) = 5$

57. La función $f(x)=\frac{(x^2-1)(x^2-16)}{(x+1)(x+4)}-x^2$, ¿es una función afín?
Representa gráficamente la función *f*.

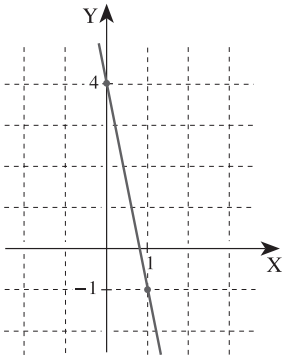
$$f(x)=\frac{(x^2-1)(x^2-16)}{(x+1)(x+4)}-x^2=$$

$$=\frac{(x+1)(x-1)(x+4)(x-4)-x^2(x+1)(x+4)}{(x+1)(x+4)}=$$

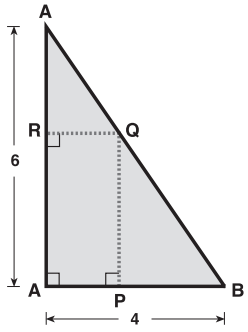
$$=\frac{(x+1)(x+4)\left[(x-1)(x-4)-x^2\right]}{(x+1)(x+4)}=(x-1)(x-4)-x^2=$$

$$=x^2-5x+4-x^2=4-5x$$

Si es una función afín.



58. En el triángulo rectángulo ABC se considera AP = *x*.



a) ¿Qué valores puede tomar *x*?

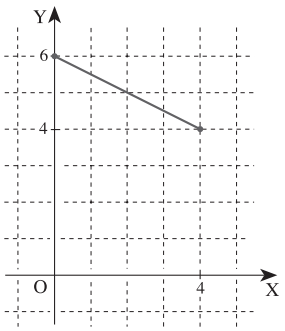
$0 \le x \le 4$

b) Utiliza el Teorema de Tales para expresar PQ en función de *x*.

$$\frac{6}{4}=\frac{PQ}{4-x} \rightarrow PQ=6-\frac{3}{2}x$$

c) Expresa la longitud L del camino PQR en función de *x* y representa gráficamente la función L(*x*).

$$L(x)=6-\frac{3}{2}x+x=6-\frac{x}{2}$$



d) ¿Qué valor de *x* hace que el camino PQR sea el más corto posible? ¿Y el más largo?

Si $x = 4 \rightarrow L(4) = 6 - \frac{4}{2} = 4$ es el camino más corto;

Si $x = 0 \rightarrow L(0) = 6 - \frac{0}{2} = 6$ es el camino más largo

59. Determina una función afín *f* tal que *f*(0) = *f*(1) – *f*(–1) – 2 sabiendo además que su gráfica pasa por A(3, 1).

$f(x) = ax + b \rightarrow f(0) = a \cdot 0 + b = b$

$f(1) = a \cdot 1 + b = a + b$

$f(-1) = a \cdot (-1) + b = -a + b$

$f(3) = a \cdot 3 + b = 3a + b = 1$

$$\left.\begin{array}{l} b=a+b-(-a+b)-2 \\ 3a+b=1 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} b=2a-2 \\ b=1-3a \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{l} a=3/5 \\ b=-4/5 \end{array} \rightarrow f(x)=\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}$$

60. Determina los puntos de corte con los ejes coordenados de las gráficas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{x-2}{3}$

Con el eje OX:

$$y=0 \rightarrow 0=\frac{x-2}{3} \rightarrow x=2 \rightarrow P_1(2,0)$$

Con el eje OY:

$$x=0 \rightarrow f(0)=\frac{0-2}{3}=-2/3 \rightarrow P_2\left(0,-2/3\right)$$

b) $g(x) = 1 - 3x$

Con el eje OX:

$$y=0 \rightarrow 0=1-3x \rightarrow x=1/3 \rightarrow P_1\left(1/3,0\right)$$

Con el eje OY:

$x = 0 \rightarrow f(0) = 1 - 3 \times 0 = 1 \rightarrow P_2(0, 1)$

c) $h(x) = \frac{2}{5}x$

Con el eje OX:

$$y=0 \rightarrow 0=\frac{2}{5}x \rightarrow x=0 \rightarrow P_1(0,0)$$

Con el eje OY:

$$x=0 \rightarrow f(0)=\frac{2}{5}\times 0=0 \rightarrow P_2(0,0)$$

Se trata de una función lineal, por eso sólo corta en el origen de coordenadas.

d) $p(x) = -1$

Con el eje OX: $y = 0 \rightarrow 0 = -1$ es un absurdo $\rightarrow$ la función $p(x) = -1$ no corta al eje OX

Con el eje OY: $x = 0 \rightarrow f(0) = -1 \rightarrow P_2(0, -1)$

61. Determina el valor de *a* y *b* para que las rectas $ax - y + b = 0$ y $3x + y + 2 = 0$ sean:

a) Secantes. Si $a \neq -3$ las dos rectas son secantes.

b) Paralelas. Si $a = -3$ y $b \neq -2$ las rectas son paralelas.

c) Coincidentes. Si $a = -3$ y $b = -2$ las rectas son coincidentes.

Tema 13

Tablas de frecuencias y gráficos estadísticos

▸ Programación de aula

Objetivos

- Distinguir entre población y muestra.
- Distinguir entre variable y atributo.
- Construir una tabla de frecuencias con datos sin agrupar.
- Construir una tabla de frecuencias con datos agrupados.
- Distinguir entre los tipos de frecuencias que intervienen en una tabla.
- Representar gráficamente una tabla de frecuencias sin agrupar.
- Representar gráficamente una tabla de frecuencias agrupadas.
- Distinguir entre gráficos estadísticos.

Criterios de evaluación

- Distiguir entre población y muestra.
- Valorar la representatividad de una muestra.
- Construir una tabla de frecuencias con datos sin agrupar.
- Construir una tabla de frecuencias con datos agrupados.
- Distinguir los elementos que intervienen en una tabla de frecuencias.
- Calcular los elementos que intervienen en una tabla de frecuencias.
- Elegir la representación gráfica una tabla de frecuencias sin agrupar.
- Elegir la representación gráfica una tabla de frecuencias agrupadas.
- Valorar sobre la utilidad de un gráfico estadístico.

Contenidos

- **Conceptos** ("saber")
  - Población y muestra.
  - Organización de datos.
  - Construcción de una tabla de frecuencias
  - Diagrama de barras.
  - Histogramas.
  - Diagramas de sectores.
  - Pictogramas.y cartogramas

- **Procedimientos** ("Saber hacer")
  - Utilización e interpretación del lenguaje estadístico teniendo en cuenta la situación que representa, y utilizando el vocabulario y los símbolos adecuados.
  - Interpretación y elaboración de tablas numéricas a partir de conjuntos de datos, teniendo en cuenta el fenómeno a que se refieren.
  - Utilización e interpretación del lenguaje gráfico teniendo en cuenta la situación que se representa y utilizando el vocabulario y los símbolos adecuados.
  - Interpretación y elaboración de gráficas a partir de tablas numéricas, eligiendo en cada caso el tipo de gráfica más adecuada.
  - Utilización de distintas fuentes documentales (anuarios, revistas, bancos de datos, etc.) para obtener información de tipo estadístico.
  - Detección de errores en las gráficas que puedan afectar a su interpretación.
  - Planificación y realización individual y colectiva de toma de datos utilizando técnicas de encuesta, muestreo, recuento y construcción de tablas y gráficos estadísticos.

- **Actitudes** ("Saber ser")
  - Reconocimiento y valoración de la utilidad de los lenguajes gráfico y estadístico para representar y resolver problemas de la vida cotidiana y del conocimiento científico.
  - Valoración de la incidencia de los nuevos medios tecnológicos en el tratamiento y representación gráfica de las informaciones de índole muy diversa.
  - Reconocimiento y valoración del trabajo en equipo como la manera más eficaz para realizar determinadas actividades (planificar y llevar a cabo experiencias, toma de datos, etc.).
  - Sensibilidad y gusto por la precisión, el orden y la claridad en el tratamiento y presentación de los datos y resultados relativos a observaciones, experiencias y encuestas.

▸ Programación por competencias

COMPETENCIA MATEMÁTICA

PENSAMIENTO Y RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

Descriptores

1. Distinguir entre una investigación censal y otra muestral.
2. Entender la extensión y las limitaciones de la presentación de datos en forma de tabla de frecuencias.
3. Extender, tras abstraer sus propiedades, el concepto de tabla de frecuencias a cualquier conjunto de datos.

Desempeño

1. Advierte la diferencia entre una investigación exhaustiva y otra parcial.	- Distingue la población de una muestra.	- **Ejemplo 3** (pág. 265) - **Ejercicio 14** (pág. 279)
2. Advierte la diferencia entre una variable y un atributo.	- Distingue entre modalidades y valores.	- **Ejemplo 1** (pág. 264) - **Ejercicio 1** (pág. 265)
3. Comprende el concepto de tabla de frecuencias y los criterios para su correcta elaboración.	- Presenta un conjunto de datos tras recuento en una tabla de frecuencias. - Distingue según se trate de una variable o un atributo. - Comprende el sentido de la tabla de frecuencias como presentación operativa de un conjunto de datos. - Interpreta adecuadamente el contenido de una tabla de frecuencias. - Distingue los diferentes tipos de frecuencias. - Es capaz de construir una tabla numérica a partir de alguno de los tipos de frecuencias.	- **Ejemplos 4, 5, 6 y 7** (pág. 266 a 269) - **Ejercicios 2, 3 y 4** (pág. 270) - **Ejercicios 6 a 25** (pág. 278 a 280)

REPRESENTAR ENTIDADES MATEMÁTICAS

Descriptores

1.Utilizar y entender la relación interna entre los tipos de frecuencia de una tabla de frecuencias.
2. Escoger entre una tabla con datos agrupados y otra con datos sin agrupar atendiendo a la naturaleza de los datos.
3. Representar gráficamente una tabla de frecuencias.

Desempeño

1. Construye una tabla de frecuencias con datos sin agrupar.	- Distingue entre variable y atributo. - Obtiene los distintos tipos de frecuencia. - Efectúa una comprobación de la tabla a partir de los totales.	- **Ejemplo 1** (pág. 264) - **Ejercicio 1** (pág. 265) - **Ejemplos 4, 5 y 6** (pág. 265 a 267) - **Ejercicios 2 y 3** (pág. 270) - **Ejercicios 6 a 11** (pág. 278) - **Ejercicios 20, 21 y 24** (pág. 280)
2. Construye una tabla de frecuencias con datos agrupados.	- Obtiene los distintos tipos de frecuencia. - Efectúa una comprobación de la coherencia de la tabla a partir de los totales.	- **Ejemplo 7** (pág. 269) - **Ejercicios 3** (pág. 270) - **Ejercicios 12 a 14** pág. 279)
3. Asocia la tabla de frecuencias a un gráfico apropiado.	- Distingue entre variable y atributo. - Elige la representación gráfica que se adapta mejor al tipo de tabla. - Critica la validez de la representación gráfica de la tabla de frecuencias. - Construye una tabla de frecuencias a partir de un gráfico estadístico.	- **Ejemplo 1** (pág. 264) - **Ejercicio 1** (pág. 265) - **Ejemplos 8 a 11** (pág. 271 a 273),) - **Ejemplo 12 y ejercicios 5** (pág. 274) - **Ejercicios 6, 7 y 9 a 11** (pág. 278) - **Ejercicios 19 y 22 a 25** (pág. 279)

ARGUMENTAR MATEMÁTICAMENTE

Descriptores

1. Analizar la coherencia interna de una tabla de frecuencias con datos agrupados y sin agrupar.

Desempeño

1. Demuestra la relación existente entre las frecuencias absolutas, relativas, acumuladas y sus totales respectivos.	- Calcula la suma de las frecuencias absolutas. - Comprueba el valor de la suma de las frecuencias absolutas y relativas. - Comprueba el valor de la última frecuencia acumulada.	- **Ejemplos 5, 6 y** (pág. 267 a 269) - **Ejercicios 2, 8, 10, 11, 14, 15, 21 y 23** (pág. 270 y 278 a 280)
2. Transforma las frecuencias en porcentajes.	- Interpreta la información en porcentajes. - Advierte la diferencia de expresión en porcentaje o en tanto por uno.	

PLANTEAR Y RESOLVER PROBLEMAS MATEMÁTICOS

Descriptores

1. Identificar, definir y plantear problemas matemáticos en los que intervienen datos estadísticos.
2. Resolver diferentes problemas matemáticos en los que intervienen datos estadísticos.

Desempeño

1. Plantea una situación concreta utilizando una tabla de frecuencias.	- Trabaja con un conjunto de datos.	- **Ejemplo 7** (pág. 269) - **Ejercicios 4 y 6 a 25** (pág. 270 y 278 a 280)
2. Identifica cómo los elementos de una tabla de frecuencias interaccionan con los datos de los que proceden.	- Calcula los diferentes tipos de frecuencia. - Relaciona las frecuencias con los datos de las que proceden.	
3. Expresa gráficamente la información tratada.	- Grafía la tabla utilizando el gráfico adecuado. - Critica la mala confección de un gráfico estadístico.	- **Ejemplos 8 a 12** (pág. 271 a 274) - **Ejercicios 5 a 7 y 9 a 25** (pág. 274 y 278 a 280)
4. Resuelve la cuestión planteada.	- Obtiene la solución numérica. - Obtiene la solución gráfica.	- **Ejercicios del tema** (pág. 265 a 280)

COMPETENCIA LINGÜÍSTICA

COMPETENCIA LINGÜÍSTICA

Descriptores

1. Comprender el enunciado de un problema en el que interviene un conjunto de datos y diferenciar las ideas fundamentales que nos permitan expresarlo en forma de tabla de frecuencias y gráfico asociado.
2. Ser capaces de indicar con un texto breve las soluciones del problema.
3. Ser capaces de indicar con una explicación oral breve los aspectos relevantes del problema planteado.

Desempeño

1. Comprende lo que lee.	- Identifica la pregunta que se le hace. - Identifica los elementos que intervienen.	- **Ejemplo y ejercicios del tema** (pág. 265 a 280)
2. Discrimina e interpreta la información que le da el enunciado de un problema en el que interviene la presentación en tablas estadísticas de un conjunto de datos.	- Diferencia los tipos de frecuencia que intervienen en una tabla.	- **Ejemplos 4 a 7** (pág. 266 a 269) - **Ejercicios 2, 3 y 6 a 25** (pág. 270 y 278 a 280)
3. Se expresa por escrito de manera adecuada y correcta, con claridad y coherencia, utilizando un lenguaje preciso.	- Presenta el texto de la solución del problema de forma adecuada y correcta. - Selecciona los aspectos relevantes de la solución.	- **Ejercicios del tema** (pág. 265 a 280)

COMPETENCIA SOCIAL Y CIUDADANA

COMPETENCIA SOCIAL Y CIUDADANA

Descriptores

1. Utilizar la estadística para mejorar el conocimiento de la realidad económica, demográfica y cultural de la sociedad.
2. Conocer aplicaciones de la estadística para la medición de fenómenos sociales.

Desempeño

1. Describe el proceso y presentación de resultados de un recuento electoral.	- Utiliza una tabla de frecuencias para presentar un resultado electoral.	- **Ejemplos 4 y 12** (pág. 266 y 274)
2. Analiza la información de datos de carácter social.	- Utiliza una tabla de frecuencias para presentar la información. - Describe los resultados del análisis. - Utiliza un gráfico estadístico apropiado como acompañamiento de una tabla de frecuencias.	- **Ejemplos 1, 3, 4, 8 y 12 y ejercicios 1, 7, 8, 15, 16, 23 y 25** (pág. 264 a 280)

COMPETENCIA EN CONOCIMIENTO E INTERACCION CON EL MEDIO FISICO

COMPETENCIA EN CONOCIMIENTO E INTERACCION CON EL MEDIO FÍSICO

Descriptores

1.Interpretar la información del mundo real -físico, económico, social o cultural- y relacionarlos con el concepto estadístico de tabla de frecuencias.
2. Fomentar la reflexión para poder intervenir en la sociedad desde una perspectiva crítica y reflexiva, basada en información numérica.

Desempeño

1. Interpreta información numérica del mundo físico y las presenta en una tabla de frecuencias.	- Sintetiza la información. - Expone la información con precisión. - Expone adecuadamente el proceso que traslada la información a la tabla de frecuencias.	- **Introducción** (pág. 262) - **Ejemplos 3 a 6** (pág.265 a 268) - **Ejercicios del tema** (pág.265 a 280)
2. Obtiene conclusiones en relación al mundo que le rodea a partir de la información numérica presentada en forma de tabla de frecuencias.	- Relaciona conclusiones con la realidad observada. - Decide opciones de actuación en función de las conclusiones obtenidas.	- **Ejemplos y ejercicios del tema** (pág.265 a 280)
3. Obtiene conclusiones en relación al mundo que le rodea a partir de la información presentada en forma de gráfico estadístico.	- Relaciona conclusiones con la realidad observada. - Decide opciones de actuación en función de las conclusiones obtenidas.	

COMPETENCIA DIGITAL Y TRATAMIENTO DE LA INFORMACION

COMPETENCIA EN CONOCIMIENTO E INTERACCION CON EL MEDIO FÍSICO

Descriptores

1.Confeccionar esquemas lógicos de cálculo para cumplimentar una tabla de frecuencias.

Desempeño

1. Interpreta, organiza y contrasta la información contenida en un conjunto de datos.	- Resume y sintetiza la información. - Realiza las actividades de organización de los datos exigidas para su presentación en forma de tabla de frecuencias.	- **Ejemplos y ejercicios del tema** (pág.265 a 280)
2. Expone y presenta los resultados de manera ordenada y clara, transmitiéndola así oralmente o por escrito.	- Presenta los resultados de forma clara y ordenada. - Respeta y cumple el lenguaje matemático. - Presenta los resultados con un gráfico estadístico adecuado.	

COMPETENCIA APRENDER A APRENDER

COMPETENCIA APRENDER A APRENDER

Descriptores

1. Adquirir conciencia y hacer uso de las propias capacidades y conocimientos para iniciarse en el aprendizaje de la estadística.
2. Ser capaz de continuar aprendiendo de manera cada vez más eficaz y autónoma de acuerdo a los propios objetivos y necesidades.
3 Desarrollar la curiosidad de plantearse preguntas sobre un conjunto de datos, formalizarlas y resolverlas con la estadística.
4. Utilizar estrategias de aprendizaje para afrontar la toma de decisiones tras el análisis de la información de una tabla de frecuencias.

Desempeño

1. Desarrolla habilidades de obtención de datos.	- Lee los enunciados de los ejercicios con la intención de comprender, relacionar y sintetizar contenidos. - Maneja adecuadamente recursos y técnicas de aprendizaje individual.	- **Ejemplos y ejercicios del tema** (pág. 265 a 280)
2. Aplica técnicas de estudio y de trabajo con el fin de comprender, sintetizar y relacionar los conceptos estádisticos.	- Realiza resúmenes. - Efectúa anotaciones marginales. - Subraya. - Realiza esquemas. - Realiza mapas conceptuales.	
3. Desarrolla la curiosidad por la metodología estadística.	- Plantea sugerencias de ampliación a los resultados obtenidos tras el análisis de un conjunto de datos.	- **Ejemplos 3 y 8** (pág. 265 y 271)

COMPETENCIA CULTURAL Y ARTÍSTICA

COMPENTENCIA CULTURAL Y ARTÍSTICA

Descriptores

1. Relacionar gráficos y dibujos con una tabla de frecuencias.
2. Criticar la validez y oportunidad de un gráfico estadístico.

Desempeño

1. Relaciona la información de una tabla de frecuencias con su gráfico correspondiente.	- Construye e interpreta un diagrama de barras. - Construye e interpreta un diagrama de sectores. - Construye e interpreta un histograma. - Construye e interpreta un pictograma.	- **Ejemplos 8 a 12** (pág.271 a 274) - **Ejercicios 5 a 7 y 9 a 25** (pág.274 y 278 a 280)
2. Identifica representaciones gráficas y dibujos con la tabla de frecuencias que representan.	- Interpreta en un gráfico estadístico. - Relaciona dibujo y estadística.	
3. Valora la utilidad y la coherencia de un gráfico estadístico.	- Critica la coherencia de un gráfico estadístico. - Critica la utilidad de un gráfico estadístico.	- **Ejemplo 8** (pág.271) - **Ejercicios 10, 11 y 24** (pág. 278 y 279)

COMPETENCIA AUTONOMÍA E INICIATIVA PERSONAL

COMPETENCIA AUTONOMÍA E INICIATIVA PERSONAL

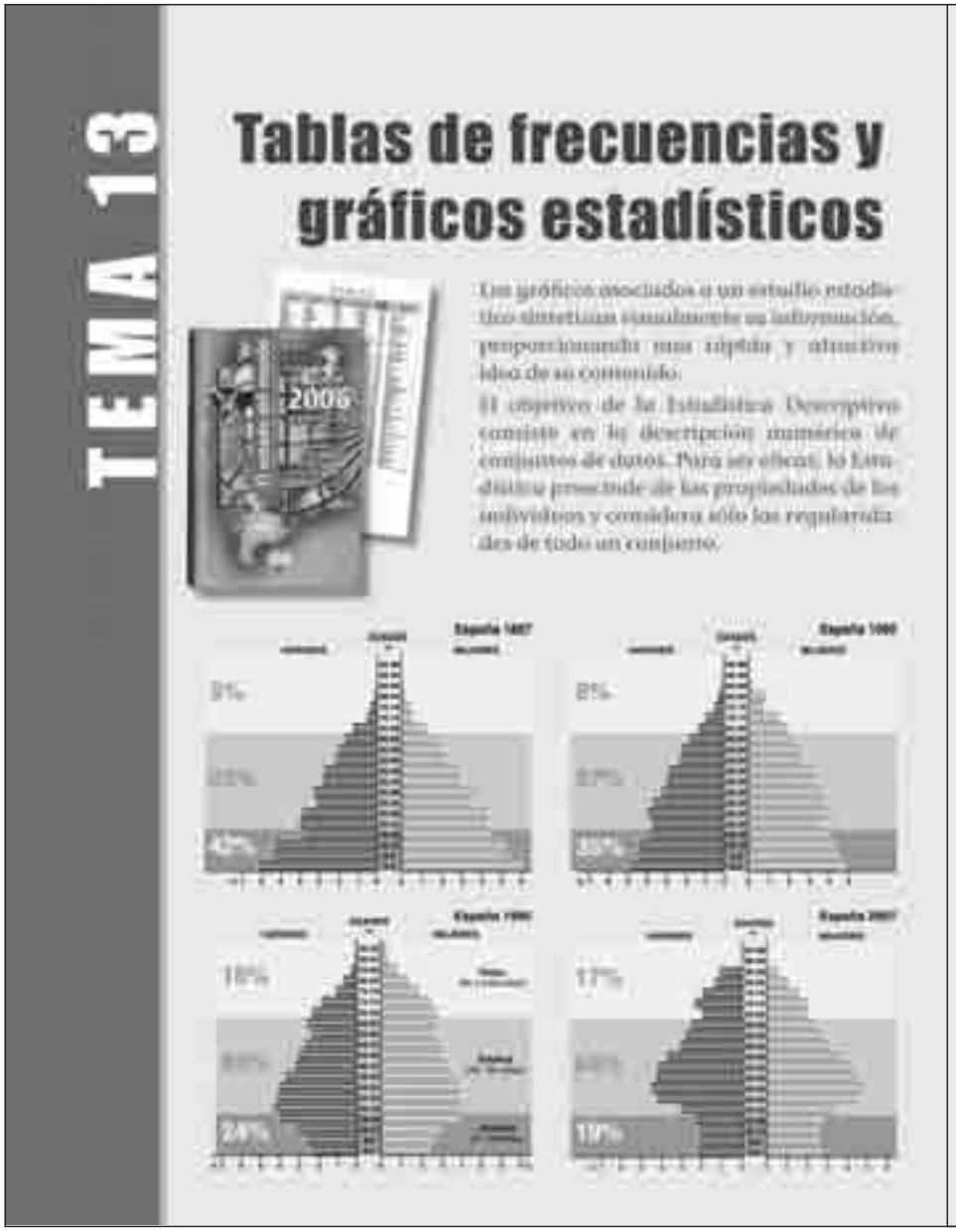
Descriptores

1. Utiliza el lenguaje estadístico como instrumento que orienta la propia actividad con autonomía.
2. Contribuye a organizar el pensamiento, a elaborar planes y tomar decisiones.

Desempeño

1. Idea y planifica el desarrollo de un ejercicio.	- Elige la opción adecuada para la resolución de los ejercicios. - Mantiene la opción hasta llegar a la conclusión final.	- **Ejemplos y ejercicios del tema** (pág. 265 a 280)
2. Evalúa la solución obtenida.	- Valora el resultado y lo pone en relación con el enunciado del problema resuelto.	
3. Toma decisiones en función del resultado obtenido.	- Decide en función del resultado.	- **Ejemplos 3, 4 y 12** (pág. 265, 266 y 274) - **Ejercicios 8, 11 y 14** (pág. 278 y 279)

▶ Pág. 262 - 263. Tablas de frecuencias y gráficos estadísticos



SOLUCIONARIO

PRACTICA

En una encuesta sobre hábitos de ocio dirigida a los escolares de una gran ciudad se les ha preguntado por el número de películas que han visto en la televisión en los últimos tres meses. Se han anotado las contestaciones de los 20 alumnos de una clase de 3º de ESO, que han sido las siguientes: 0, 1, 2, 5, 0, 9, 6, 8, 7, 3, 2, 4, 9, 4, más de 10, 9, 10, 4, 6 y 4.

Con esta información completa la siguiente tabla:

¿Cuántos alumnos han visto menos de seis películas? 11

¿Qué porcentaje supone? 55 %

¿Cuántos alumnos han visto ocho o más películas? 6

¿Qué porcentaje supone? 30 %

La tabla de frecuencias anterior puede representarse gráficamente con un apropiado gráfico estadístico.

Películas vionadas (variable estadística)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	>10	Total
nº alumnos (frecuencia absoluta)	**2**	**1**	**2**	**1**	**4**	**1**	**2**	**1**	**1**	**3**	**1**	**1**	20
% (frecuencia relativa × 100)	**10**	**5**	**10**	**5**	**20**	**5**	**10**	**5**	**5**	**15**	**5**	**5**	100



DE 2º A 3º

El número de veces que se repite un valor concreto de una **variable estadística** observada sobre una **población** define su **frecuencia absoluta**, n_i. Cuando ésta se pone en relación al **tamaño** total de la población N, se obtiene la **frecuencia relativa**, $f_i = \frac{n_i}{N}$.

La tabla que recoge las frecuencias para los distintos valores de la variable estadística es una **tabla de frecuencias**. Los **gráficos estadísticos** asociados a una tabla de frecuencias proporcionan una idea visual de su contenido. Ejemplos de ellos son el **diagrama de barras** y el **de sectores**.

PRACTICA

En una encuesta sobre hábitos de ocio dirigida a los escolares de una gran ciudad se les ha preguntado por el número de películas que han visto en la televisión en los últimos tres meses. Se han anotado las contestaciones de los 30 alumnos de una clase de 3º de ESO, que han sido las siguientes:

0, 1, 2, 5, 10, 9, 6, 8, 7, 3, 2, 4, 9, 4, más de 10, 8, 10, 6, 6 y 4.

Con esta información completa la siguiente tabla.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	>10	Total

¿Cuántos alumnos han visto menos de seis películas? _____

¿Qué porcentaje supone? _____

¿Cuántos alumnos han visto ocho o más películas? _____

¿Qué porcentaje supone? _____

La tabla de frecuencias anterior puede representarse gráficamente con un apropiado gráfico estadístico.

PRACTICA

Completa el diagrama de barras asociado a la tabla del ejemplo anterior.

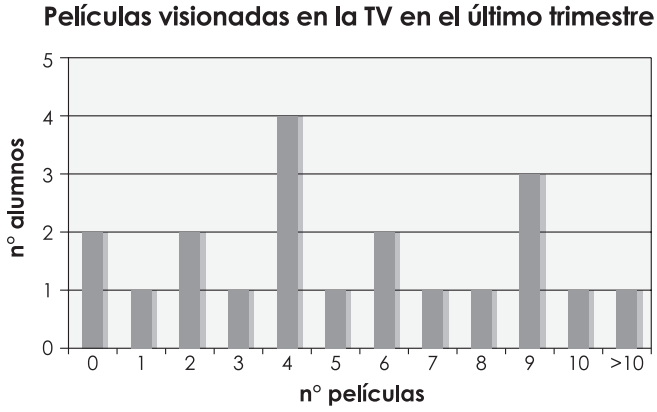
Películas visionadas en la TV en el último trimestre

nº alumnos

nº películas

PRACTICA

Completa el diagrama de barras asociado a la tabla del ejemplo anterior:



▶ Pág. 264. 1 Población y muestra. Elección de la muestra. Representatividad



TABLAS DE FRECUENCIAS Y GRÁFICOS ESTADÍSTICOS

1 Población y muestra. Elección de la muestra. Representatividad

Población es un conjunto homogéneo de elementos (personas, coches, casas, etc.) sobre el que se va a realizar un estudio.

Variable estadística es cada una de las características observadas sobre los elementos de una población. Cada uno de los valores que toma la variable estadística es un **dato estadístico**.

Así, por ejemplo, el conjunto de los alumnos de la clase en la que estoy matriculado es una *población*. Sobre ella puedo considerar varias *variables estadísticas*: la edad, la altura, el distrito postal en el que residen, el sexo, la nota del último examen de Matemáticas... Los datos estadísticos asociados al primero de la lista podrían ser, respectivamente: 15 años; 166 cm; 46015; hombre; 3,8...

Los datos estadísticos serán **cualitativos** cuando no se puedan expresar numéricamente y **cuantitativos** cuando se expresen numéricamente.

La variable estadística que nos proporciona datos cualitativos es un atributo y las distintas alternativas que puede tomar se las llama **modalidades**.

Cuando la variable estadística nos proporciona datos cuantitativos se simplemente una **variable** y las distintas alternativas son **valores**.

Una variable estadística se llama **discreta** cuando sólo puede tomar valores aislados. En caso contrario se dice que es **continua**.

El proceso por el cual a las modalidades de un atributo se les asigna valores numéricos se conoce como **codificación**. Y así, en un Censo de Población, la modalidad "hombre" del atributo sexo suele codificarse con el 1, y la modalidad "mujer" con el 6.

EJEMPLO

1 a) Considera las personas que habitan en cierto bloque. El "estado civil" es un atributo que tiene las siguientes modalidades: soltero, casado, viudo, divorciado y separado.

b) En el conjunto de automóviles que realizan el trayecto Valencia-Madrid un día cualquiera, el "tiempo invertido por un automóvil en dicho trayecto" es una variable y toma cualquier valor desde, por ejemplo, un mínimo de 2 horas, hasta un máximo de 7 horas y 30 minutos.

264

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS

Necesidad de la investigación muestral frente la investigación *censal*: por ejemplo, en el control de calidad cuando se produce la destrucción de la pieza analizada.

Distinguir claramente entre atributo y variable.

Insistir en la imposibilidad de determinar con exactitud si una muestra es o no representativa.

Métodos de selección de muestras aleatorias: sistemática, arranque aleatorio, estratificada, de conglomerados... Utilizar una encuesta real –por ejemplo, la Encuesta de Población Activa, cuya metodología puede consultarse en HYPERLINK "http://www.ine.es" www.ine.es - para ilustrarlos.

Invitar a los alumnos que consulten fuentes de información estadística.

El uso de una Tabla de números aleatorios.

▶ Pág. 265

EJEMPLO

La variable "número de hermanos" es discreta, pues sólo puede tomar los valores 0, 1, 2... (no hay ninguna persona que tenga, por ejemplo, 2,4 hermanos). En cambio, la variable "edad" es continua, pues la edad de una persona puede ser, en teoría, cualquier valor mayor que 0.

Cuando la población tiene un número amplio de elementos N puede ser estudiada en su totalidad. Pero cuando es muy grande, resulta necesario extraer de ella una muestra.

Una **muestra** es un subconjunto de una población. Con ella pretendemos simplificar su estudio, pensando que las características de la muestra se parecerán a las de la población.

Una muestra se dice **representativa** cuando respeta en todo la composición de la población. Para que una muestra sea representativa es necesario que se obtenga de forma **aleatoria**, esto es, que los elementos que la forman hayan sido obtenidos mediante un procedimiento de azar.

Cuando una muestra está bien elegida, las conclusiones que se obtienen de ella pueden extenderse a la población de la que procede.



EJEMPLO

Imagina que deseas conocer cuántas horas diarias de televisión ven los alumnos de un centro escolar. Dado que el número de individuos a encuestar es muy elevado puedes adoptar la siguiente estrategia: *entrarás a la hora de salida en la puerta y preguntarás a uno de cada diez.* Si eliges al azar un número como el 3 y el 10 –por ejemplo, el 7– de manera que los cuestionados sean los que salen por la puerta en las posiciones 7, 17, 27, *etc., acabas de definir una muestra sistemática con arranque aleatorio.* De toda la población de alumnos del centro, el 13% de los alumnos de un centro escolar ven la televisión más de 3 horas diarias, una muestra representativa también respetará este porcentaje.

Observa que somos sabedores con exactitud si una muestra es o no representativa, para ello siempre tendremos perfectamente la población y, previamente, extraeremos una muestra para poder conocerla.

EJERCICIO

Considera una población formada por los establecimientos ubicados en un polígono industrial. ¿Qué tipo de dato –cualitativo o cuantitativo– proporcionan las siguientes variables estadísticas: "actividad de la empresa", "número de trabajadores", "categoría laboral de un trabajador dentro de la empresa", "potencia eléctrica instalada", "tipo de combustible utilizado en el proceso de producción"?

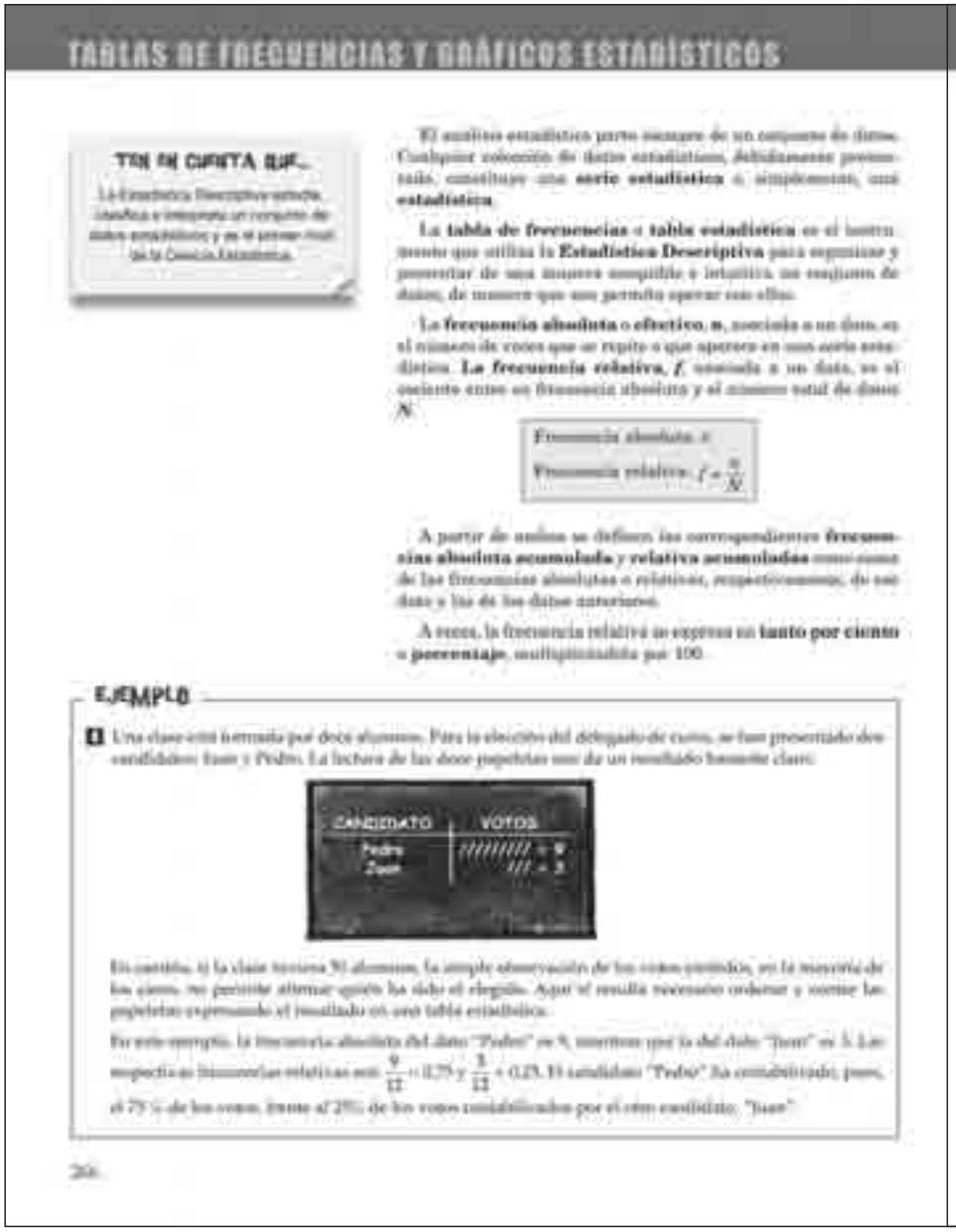
SOLUCIONARIO

1. Considera una población formada por los establecimientos ubicados en un polígono industrial. ¿Qué tipo de dato –cualitativo o cuantitativo– proporcionan las siguientes variables estadísticas: "actividad de la empresa", "número de trabajadores", "categoría laboral de un trabajador dentro de la empresa", "potencia eléctrica instalada", "tipo de combustible utilizado en el proceso de producción"?

Cualitativos: actividad de la empresa", "categoría laboral de un trabajador dentro de la empresa" y "combustible utilizado en el proceso de producción".

Cuantitativos: "número de trabajadores" y "potencia eléctrica instalada".

▶ Pág. 266



TABLAS DE FRECUENCIAS Y GRÁFICOS ESTADÍSTICOS

TEN EN CUENTA QUE...

La Estadística Descriptiva estudia, clasifica e interpreta un conjunto de datos estadísticos y se ocupa principalmente de la Ciencia Estadística.

El análisis estadístico parte siempre de un conjunto de datos. Cualquier colección de datos estadísticos, debidamente presentados, constituye una **serie estadística** o, simplemente, una **estadística**.

La **tabla de frecuencias** o **tabla estadística** es el instrumento que utiliza la **Estadística Descriptiva** para organizar y presentar de una manera sencilla e intuitiva un conjunto de datos, de manera que nos permita operar con ellos.

La **frecuencia absoluta** o **efectivo**, n_i, asociada a un dato, es el número de veces que se repite o que aparece en una serie estadística. **La frecuencia relativa**, f_i, asociada a un dato, es el cociente entre su frecuencia absoluta y el número total de datos N.

Frecuencia absoluta: n_i

Frecuencia relativa: $f_i = \frac{n_i}{N}$

A partir de ambas se definen las correspondientes **frecuencias absoluta acumulada** y **relativa acumulada** como sumas de las frecuencias absolutas o relativas, respectivamente, de ese dato y las de los datos anteriores.

A veces, la frecuencia relativa se expresa en **tanto por ciento** o **porcentaje**, multiplicándola por 100.

EJEMPLO

1 Una clase está formada por doce alumnos. Para la elección del delegado de curso, se han presentado dos candidatos: Juan y Pedro. La lectura de las doce papeletas nos da un resultado bastante claro:

En cambio, si la clase tuviera 30 alumnos, la simple observación de los votos emitidos no nos permite afirmar quién ha sido el elegido. Aquí sí resulta necesario ordenar y contar las papeletas expresando el resultado en una tabla estadística.

En este ejemplo, la frecuencia absoluta del dato "Pedro" es 9, mientras que la del dato "Juan" es 3. Las respectivas frecuencias relativas son $\frac{9}{12} = 0,75$ y $\frac{3}{12} = 0,25$. El candidato "Pedro" ha conseguido, pues, el 75 % de los votos, frente al 25% de los votos conseguidos por el otro candidato, "Juan".

26

▶ Pág. 267. 2 Construcción de una tabla de frecuencias



TEMA 13

2 Construcción de una tabla de frecuencias

Una tabla estadística o tabla de frecuencias consta, esencialmente, de una doble columna. En la primera de ellas se expresan los distintos valores o modalidades de la variable estadística asociada a la serie de datos estudiada. La segunda columna recoge las frecuencias absolutas de cada *valor* o modalidad. A partir de las frecuencias absolutas podrán obtenerse las otras frecuencias (relativas y acumuladas), añadiendo las oportunas columnas a las dos iniciales. El siguiente ejemplo ilustra la elaboración de una tabla estadística correspondiente a un atributo.

EJEMPLO

1 Se ha preguntado a 25 familias por la titulación académica de sus cabezas de familia. Las respuestas fueron que 7 cabezas de familia no tienen estudios, 8 tienen estudios primarios, 5 estudios secundarios, 4 estudios superiores y 1 tiene la titulación de Doctor. La tabla de frecuencias que presenta la información anterior con motivo de todas las frecuencias definidas, es:

Titulación	Frecuencia absoluta (n_i)	Frecuencia relativa (f_i)	%	Frecuencia absoluta acumulada	Frecuencia relativa acumulada	%
Sin estudios	7	$7 / 25 = 0,28$	28 %	7	$7 / 25 = 0,28$	28 %
Primarios	8	$8 / 25 = 0,32$	32 %	$7 + 8 = 15$	$(7 + 8) / 25 = 0,60$	60 %
Secundarios	5	$5 / 25 = 0,20$	20 %	$7 + 8 + 5 = 20$	$(7 + 8 + 5) / 25 = 0,80$	80 %
Superiores	4	$4 / 25 = 0,16$	16 %	$7 + 8 + 5 + 4 = 24$	$(7 + 8 + 5 + 4) / 25 = 0,96$	96 %
Doctores	1	$1 / 25 = 0,04$	4 %	$7 + 8 + 5 + 4 + 1 = 25$	$(7 + 8 + 5 + 4 + 1) / 25 = 1$	100 %
Totales	$N = 25$	1	100 %			

267

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS

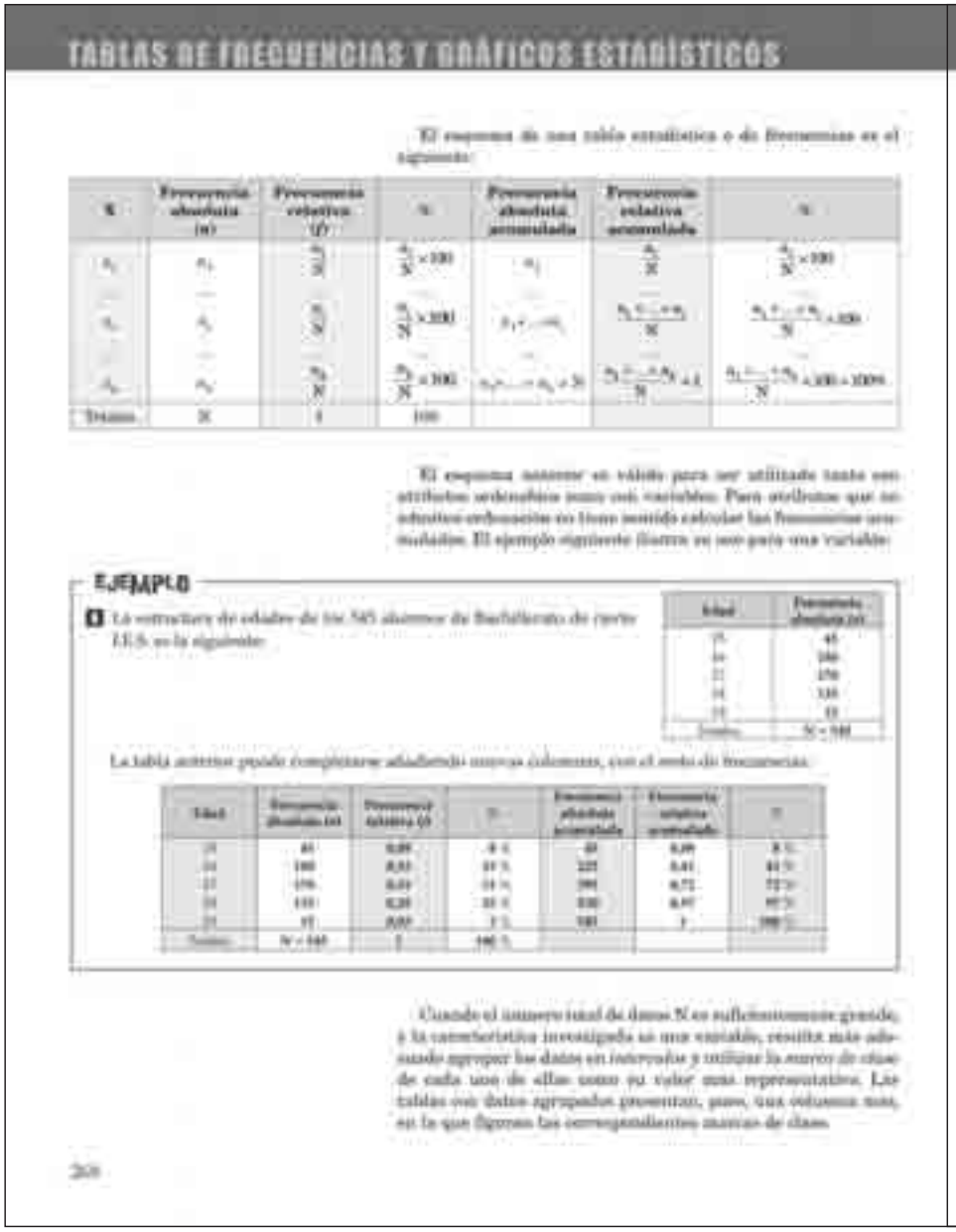
Diseñar una investigación referida a los alumnos de la clase para construir una tabla de frecuencias con sus respuestas. Por ejemplo, una elección de delegado de clase.

Distinguir claramente entre la frecuencia relativa –el tanto por uno– y el correspondiente porcentaje –el tanto por cien–.

Trabajar con los elementos de una tabla de frecuencia.

Advertir que una tabla de frecuencias con datos agrupados se reduce, operativamente, a una con los datos sin agrupar utilizando las respectivas marcas de clase.

▶ Pág. 268



TABLAS DE FRECUENCIAS Y GRÁFICOS ESTADÍSTICOS

El esquema de una tabla estadística o de frecuencias es el siguiente:

x_i	Frecuencia absoluta (n_i)	Frecuencia relativa (f_i)	%	Frecuencia absoluta acumulada	Frecuencia relativa acumulada	%
x_1	n_1	$\frac{n_1}{N}$	$\frac{n_1}{N}\cdot 100$	n_1	$\frac{n_1}{N}$	$\frac{n_1}{N}\cdot 100$
...	...	...	...	...	...	...
x_k	n_k	$\frac{n_k}{N}$	$\frac{n_k}{N}\cdot 100$	$n_1+\dots+n_k$	$\frac{n_1+\dots+n_k}{N}$	$\frac{n_1+\dots+n_k}{N}\cdot 100$
...	...	...	...	...	...	...
x_n	n_n	$\frac{n_n}{N}$	$\frac{n_n}{N}\cdot 100$	$n_1+\dots+n_n=N$	$\frac{n_1+\dots+n_n}{N}=1$	$\frac{n_1+\dots+n_n}{N}\cdot 100=100\%$
Totales	N	1	100			

El esquema anterior es válido para ser utilizado tanto con atributos ordenables como con variables. Para atributos que no admiten ordenación no tiene sentido calcular las frecuencias acumuladas. El ejemplo siguiente ilustra su uso para una variable.

EJEMPLO

1 La estructura de edades de los 345 alumnos de Bachillerato de cierto I.E.S. es la siguiente:

Edad	Frecuencia absoluta (n_i)
16	45
17	180
18	170
19	130
20	15
Totales	$N = 540$

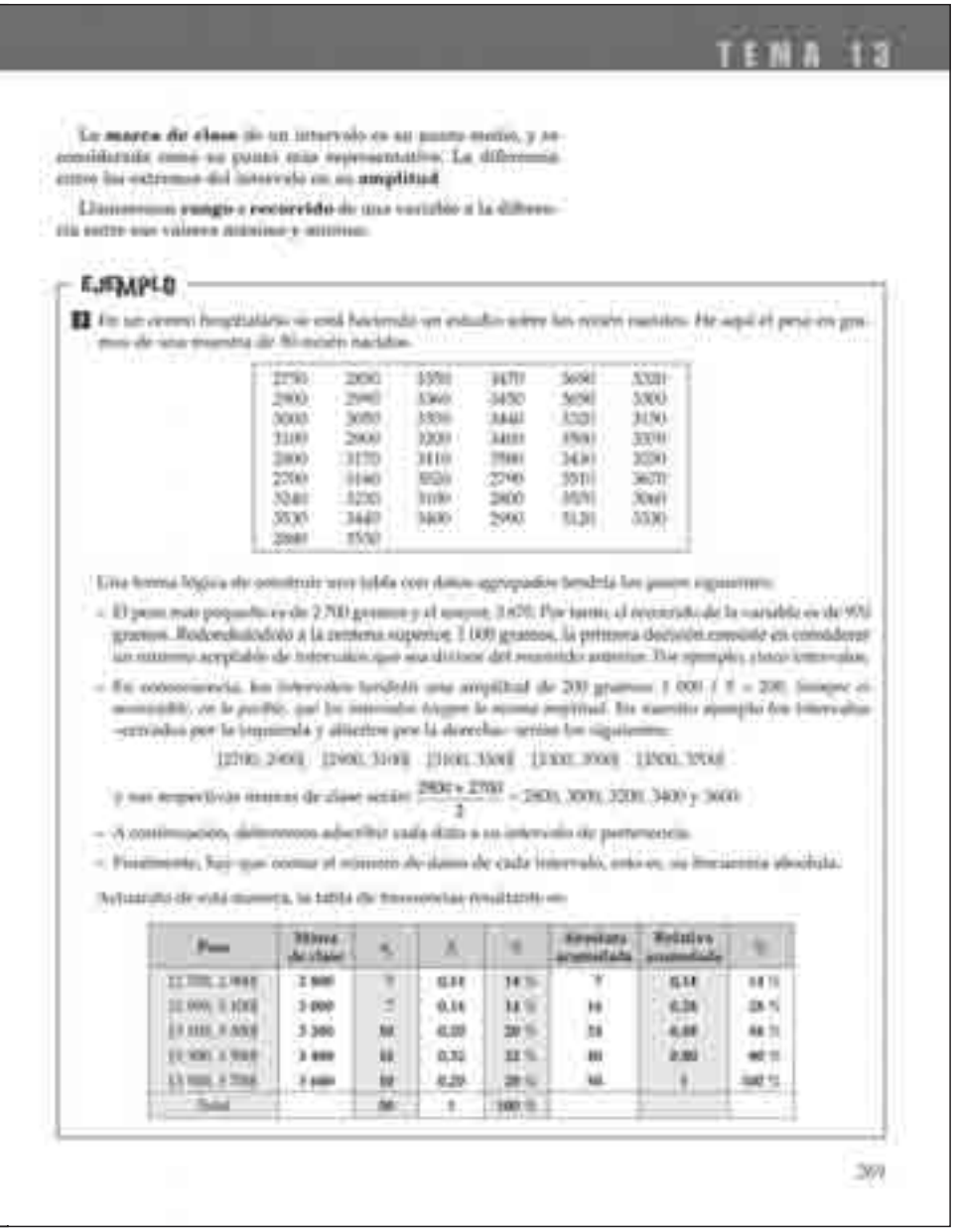
La tabla anterior puede completarse añadiendo nuevas columnas, con el resto de frecuencias:

Edad	Frecuencia absoluta (n_i)	Frecuencia relativa (f_i)	%	Frecuencia absoluta acumulada	Frecuencia relativa acumulada	%
16	45	0,09	9 %	45	0,09	9 %
17	180	0,33	33 %	225	0,42	42 %
18	170	0,31	31 %	395	0,73	73 %
19	130	0,24	24 %	525	0,97	97 %
20	15	0,03	3 %	540	1	100 %
Totales	$N = 540$	1	100 %			

Cuando el número total de datos N es suficientemente grande, y la característica investigada es una variable, resulta más adecuado agrupar los datos en *intervalos* y utilizar la *marca de clase* de cada uno de ellos como su valor más representativo. Las tablas con datos agrupados presentan, pues, una columna más, en la que figuran las correspondientes marcas de clase.

268

▶ Pág. 269



TEMA 13

La **marca de clase** de un intervalo es su punto medio, y se considerará como su punto más representativo. La diferencia entre los extremos del intervalo es su **amplitud**.

Llamaremos **rango o recorrido** de una variable a la diferencia entre sus valores máximo y mínimo.

EJEMPLO

1 En un centro hospitalario se está haciendo un estudio sobre los recién nacidos. He aquí el peso en gramos de una muestra de 90 recién nacidos.

2750	2890	3350	3470	3690	3320
2900	2990	3360	3450	3650	3300
3000	3050	3550	3440	3320	3150
3100	2900	3200	3400	3500	3350
2800	3170	3410	3580	3430	3200
2700	3140	3520	2740	3510	3670
3240	3230	3150	2800	3570	3060
3530	3440	3400	2990	3120	3330
2880	3550				

Una forma lógica de construir una tabla con datos agrupados tendría los pasos siguientes:

- El peso más pequeño es de 2 700 gramos y el mayor, 3 670. Por tanto, el recorrido de la variable es de 970 gramos. Redondeándolo a la centena superior, 1 000 gramos, la primera decisión consiste en considerar un número aceptable de intervalos que sea divisor del recorrido anterior. Por ejemplo, cinco intervalos.
- En consecuencia, los intervalos tendrán una amplitud de 200 gramos: 1 000 : 5 = 200. Siempre es necesario, en la medida, que los intervalos tengan la misma amplitud. En nuestro ejemplo los intervalos –cerrados por la izquierda y abiertos por la derecha– serían los siguientes:

$$[2700;\ 2900[\quad [2900;\ 3100[\quad [3100;\ 3300[\quad [3300;\ 3500[\quad [3500;\ 3700[$$

y sus respectivas marcas de clase serían: $\frac{2900 + 2700}{2} = 2800,\ 3000,\ 3200,\ 3400$ y 3600.

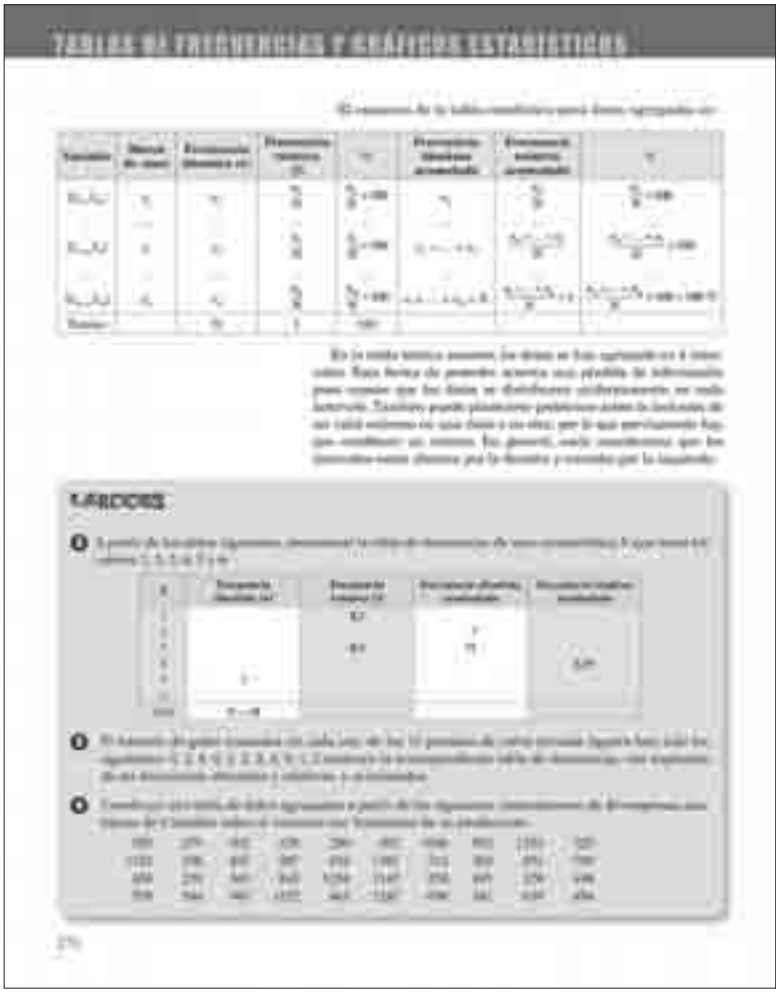
- A continuación, debemos adscribir cada dato a su intervalo de pertenencia.
- Finalmente, hay que contar el número de datos de cada intervalo, esto es, su frecuencia absoluta.

Aplicando de esta manera, la tabla de frecuencias resultaría así:

Peso	Marca de clase	n_i	f_i	f_i	Absoluta acumulada	Relativa acumulada	F_i
[2 700, 2 900[	2 800	7	0,11	11 %	7	0,11	11 %
[2 900, 3 100[	3 000	17	0,26	26 %	24	0,37	37 %
[3 100, 3 300[	3 200	32	0,49	49 %	56	0,86	86 %
[3 300, 3 500[	3 400	11	0,17	17 %	67	1,03	103 %
[3 500, 3 700[	3 600	19	0,29	29 %	86	1	132 %
Total		86	1	132 %			

269

▶ Pág. 270



SOLUCIONARIO

2. A partir de los datos siguientes, reconstruir la tabla de frecuencias de una característica X que toma los valores 1, 2, 3, 4, 5 y 6:

X	Frecuencia absoluta (n)	Frecuencia relativa (f)	Frecuencia absoluta acumulada	Frecuencia relativa acumulada
1		**0,2**		
2			**7**	
3		**0,2**	**11**	
4				**0,75**
5	3			
6				
Total	**N = 20**			

Podemos empezar con la frecuencia absoluta asociada al valor de la variable $x = 11$.

Dado que $f = \frac{n}{N}$, resulta $0{,}2 = \frac{n}{20} \rightarrow n = 4$. A partir de ahí se va reconstruyendo toda la tabla.

X	Frecuencia absoluta (n)	Frecuencia relativa (f)	Frecuencia absoluta acumulada	Frecuencia relativa acumulada
1	4	**0,2**	4	0,20
2	3	0,15	**7**	0,35
3	4	**0,2**	**11**	0,55
4	4	0,20	15	**0,75**
5	**3**	0,15	18	0,90
6	2	0,10	20	1
Total	**N = 20**	1		

3. El número de goles marcados en cada uno de los 10 partidos de cierta jornada liguera han sido los siguientes: 0, 2, 4, 0, 1, 3, 2, 4, 0, 1. Construye la correspondiente tabla de frecuencias, con expresión de las frecuencias absolutas y relativas, y acumuladas.

X = nº goles	n	f	absoluta acumulada	relativa acumulada
0	3	$\frac{3}{10} = 0{,}3$	3	0,3
1	2	$\frac{2}{10} = 0{,}2$	5	0,5
2	2	$\frac{2}{10} = 0{,}2$	7	0,7
3	1	$\frac{1}{10} = 0{,}1$	8	0,8
4	2	$\frac{2}{10} = 0{,}2$	10	1
Total	N = 10			

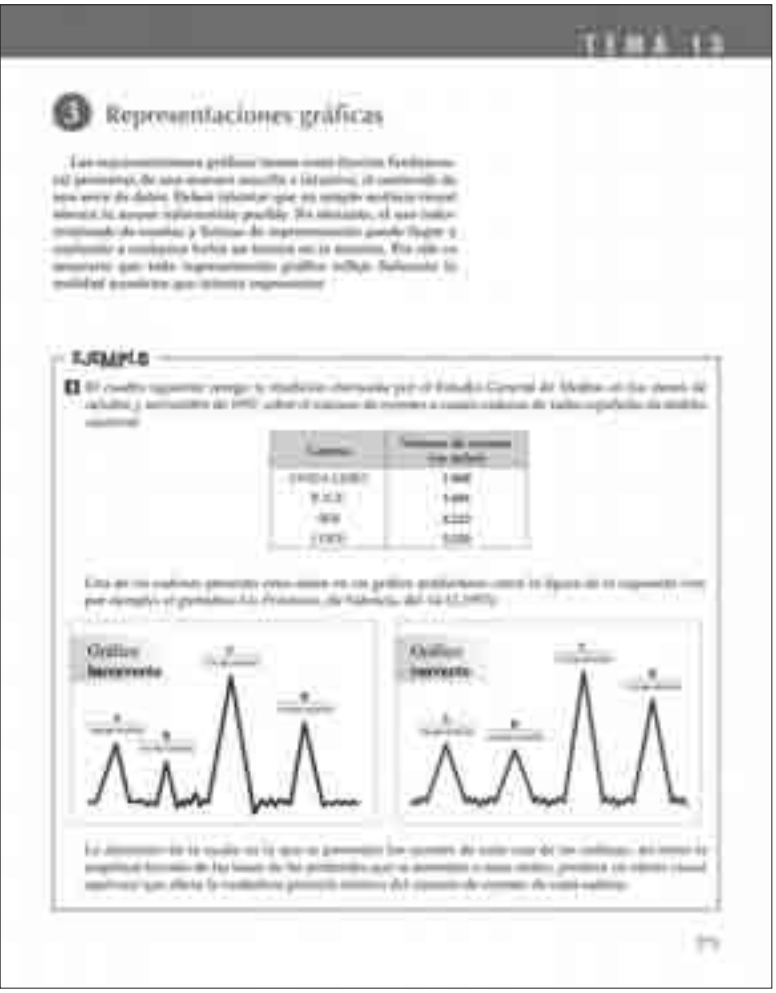
4. Construye una tabla de datos agrupados a partir de las siguientes contestaciones de 40 empresas azulejeras de Castellón sobre el volumen (en Toneladas) de su producción:

300 275 562 678 250 952 1006 852 1253 325
1125 298 457 987 652 1381 512 369 851 789
458 259 365 845 1254 1147 258 695 278 698
578 548 987 1152 463 1247 698 541 639 854

No hay solución única, pues depende de cómo se hayan definido los intervalos de agrupación. Una posible solución es:

X = producción (en Tm)	marca de clase	n	f	%	absoluta relativa	acumulada acumulada
[250, 500[	375	13	0,325	32,5	13	0,325
[500, 750[	625	11	0,275	27,5	24	0,600
[750, 1000[	875	8	0,200	20,0	32	0,800
[1000, 1250[	1125	5	0,125	12,5	37	0,925
[1250, 1500[	1375	3	0,075	7,5	40	1
Total		40		100		

▶ Pág. 271. 3 Representaciones gráficas



ORIENTACIONES DIDÁCTICAS

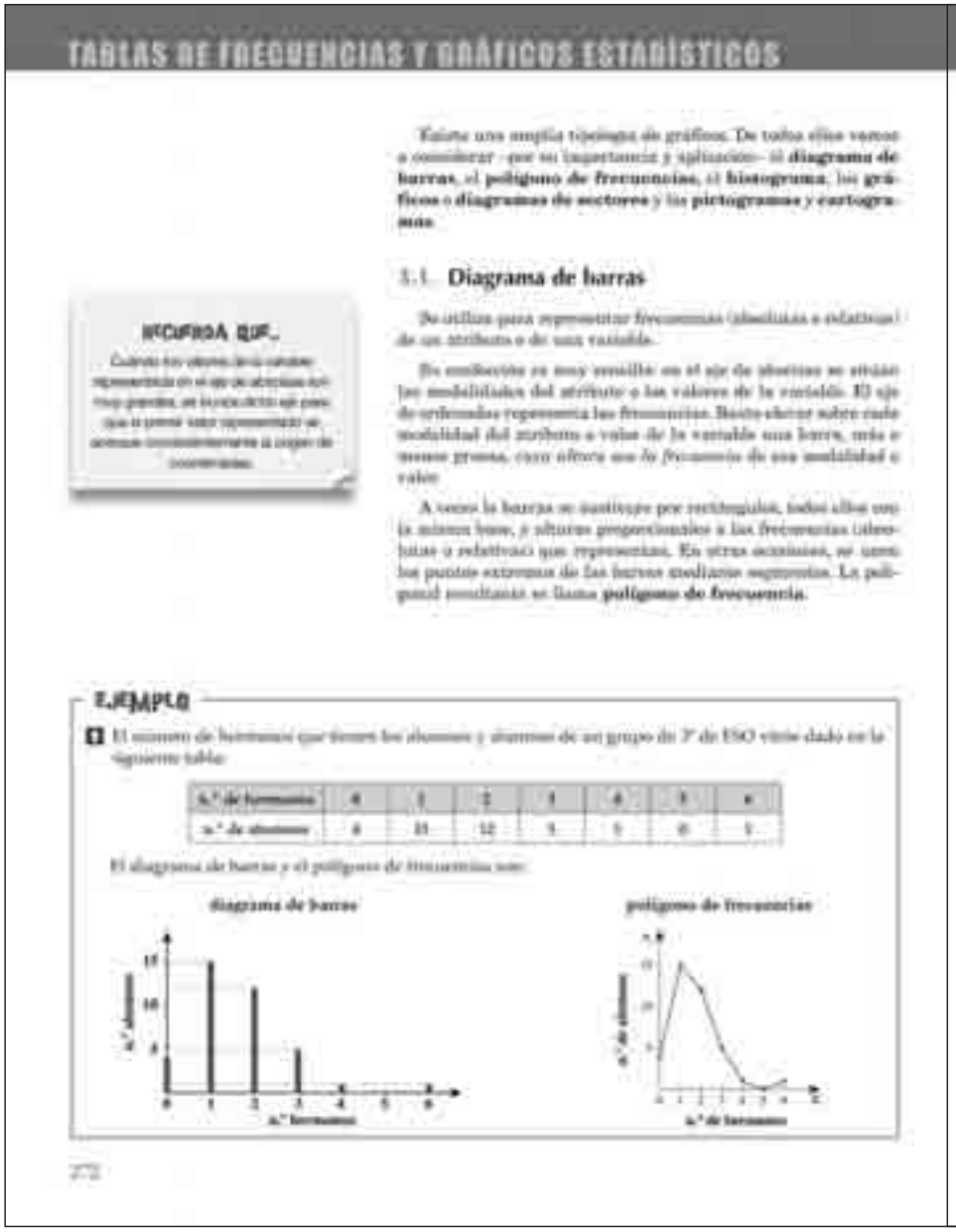
Un gráfico mal confeccionado –por ejemplo, modificando las escalas de representación- puede ofrecer una idea distorsionada del fenómeno que representa.

Las pirámides de población de países con distintas demografías ponen de manifiesto una variada tipología de pirámides (en forma de huso, invertida, piramidal, etc.).

Para una variable con intervalos de distinta amplitud, forzar la construcción errónea del histograma haciendo las alturas de los rectángulos directamente proporcionales a las frecuencias, y no las áreas. Compararlo con el histograma correcto.

Para una misma variable construir los diferentes gráficos estudiados y compararlos, decantándose por el más ilustrativo.

▶ Pág. 272



TABLAS DE FRECUENCIAS Y GRÁFICOS ESTADÍSTICOS

Existe una amplia tipología de gráficos. De todos ellos vamos a considerar –por su importancia y aplicación– el **diagrama de barras**, el **polígono de frecuencias**, el **histograma**, los **gráficos o diagramas de sectores** y los **pictogramas y cartogramas**.

3.1. Diagrama de barras

Se utiliza para representar frecuencias (absolutas o relativas) de un atributo o de una variable.

En ambos es muy sencillo: en el eje de abscisas se sitúan las modalidades del atributo o los valores de la variable. El eje de ordenadas representa las frecuencias. Basta elevar sobre cada modalidad del atributo o valor de la variable una barra, más o menos gruesa, cuya altura sea la frecuencia de esa modalidad o valor.

RECUERDA QUE...

Cuando los valores de la variable representada en el eje de abscisas son muy grandes, se toma como eje para que el primer valor representado se aparezca inmediatamente a la vista de cualquiera.

A veces la barra se sustituye por rectángulos, todos ellos con la misma base, y alturas proporcionales a las frecuencias (absolutas o relativas) que representan. En otras ocasiones, se unen los puntos extremos de las barras mediante segmentos. La poligonal resultante se llama **polígono de frecuencia**.

EJEMPLO

1 El número de hermanos que tienen los alumnos y alumnas de un grupo de 3º de ESO viene dado en la siguiente tabla:

nº de hermanos	0	1	2	3	4	5	6
nº de alumnos	4	15	12	5	1	0	1

El diagrama de barras y el polígono de frecuencias son:

diagrama de barras

polígono de frecuencias

272

▶ Pág. 273

3.2. Histogramas

Cuando la característica a representar es cuantitativa y sus valores están agrupados en intervalos, la representación gráfica más adecuada es el **histograma**.

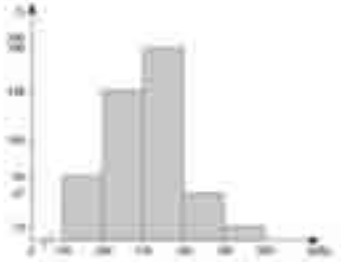
Un histograma está formado por rectángulos de áreas proporcionales a las frecuencias.

Si los intervalos son todos de la **misma amplitud**, su base será la amplitud del intervalo **y su altura es la frecuencia** (absoluta o relativa). Si los intervalos **no son todos de la misma amplitud**, su base será la amplitud de cada intervalo y **su altura la densidad de frecuencia**, que es el cociente entre la frecuencia absoluta y la amplitud del intervalo.

EJEMPLOS

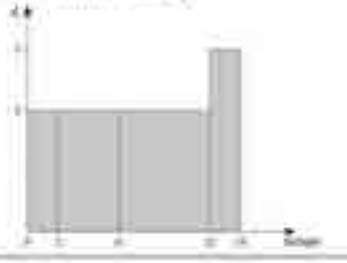
1. Las tallas de los alumnos en un instituto de Secundaria están distribuidas según la siguiente tabla. Observa que al ser todos los intervalos de igual amplitud, en el histograma correspondiente todos los rectángulos tienen una altura igual a la frecuencia.

Talla (cm)	f_i
[150, 160[	64
[160, 170[	128
[170, 180[	100
[180, 190[	47
[190, 200[	16



2. Se ha preguntado a 27 corredores por su tiempo de ayuntte en minutos exactos. Las correspondientes respuestas el tiempo en minutos se recogen en la tabla siguiente, en la que al tener los intervalos distinta amplitud se ha añadido una columna con las densidades de frecuencia, d_i.

$[a_i, a_{i+1}[$	f_i	d_i
[0, 2[	4	$4/2 = 2$
[2, 4[	9	$9/2 = 2$
[4, 12[	12	$12/8 = 2$
[12, 18[	6	$6/6 = 1$



273

▶ Pág. 274


TABLAS DE FRECUENCIAS Y GRÁFICOS ESTADÍSTICOS

La **pirámide de edades** de una población recoge, por sexos, el número de personas que tiene dicha población en cada edad considerada. Suelen publicarse presentando los datos agrupados en intervalos quinquenales de edad y en tantos por ciento. Su resultado de mucha utilidad en el estudio y previsión demográficos.

1.3. Diagramas de sectores

Se utiliza para representar frecuencias (absolutas o relativas) de un atributo o de una variable si bien es un uso extendido en para los primeros.

En los diagramas de sectores *el ángulo central es proporcional a la frecuencia*. La superficie total de un círculo se reparte en tantos sectores circulares como modalidades tenga un atributo o valores tenga una variable), correspondiendo a cada sector un número de grados directamente proporcional a su frecuencia.

Los gráficos o diagramas de sectores son muy utilizados en medios gráficos y divulgativos, y presentan variantes atendiendo a su representación espacial.

EJEMPLO

El resultado electoral suele representarse mediante un diagrama de sectores. Y así, la siguiente tabla recoge la composición de las Cortes Valencianas resultante de las Elecciones Autonómicas celebradas el 27 de mayo de 2007 (fuente: Valencià d'Estadística)

Partido	Escaños	Ángulo del sector
PP	44	
PSOE	38	
COMPROMÍS PV	7	
Total	89	

EJERCICIO

El número de sesiones de cine a las que han asistido el último mes el alumnado de un grupo de 2º de ESO está dado en la siguiente tabla:

N.º sesiones	0	1	2	3	4	6
Alumnos	7	10	12	4	1	1

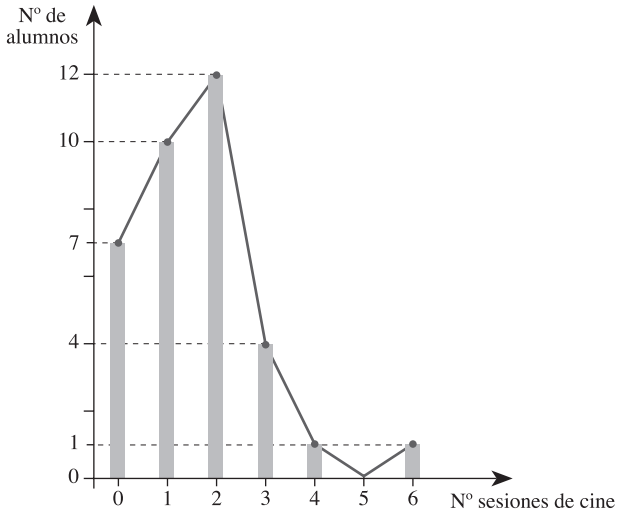
Construir los correspondientes diagrama de barras y polígonos de frecuencias.

SOLUCIONARIO

5. El número de sesiones de cine a las que han asistido el último mes el alumnado de un grupo de 2º de ESO está dado en la siguiente tabla:

N.° sesiones	0	1	2	3	4	6
Alumnos	7	10	12	4	1	1

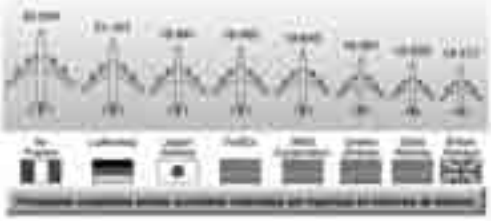
Construir los correspondientes diagrama de barras y polígonos de frecuencias.



▶ Pág. 275

3.4. Pictogramas y cartogramas

Un **pictograma** se utiliza, fundamentalmente, para representar frecuencias de un atributo. Es una representación gráfica que utiliza un *dibujo alusivo al tema estudiado y de tamaño proporcional a la frecuencia*. Se trata de un gráfico muy empleado en la divulgación de datos y el acierto para seleccionar el motivo que representa el fenómeno puede dar lugar a gráficos muy originales.



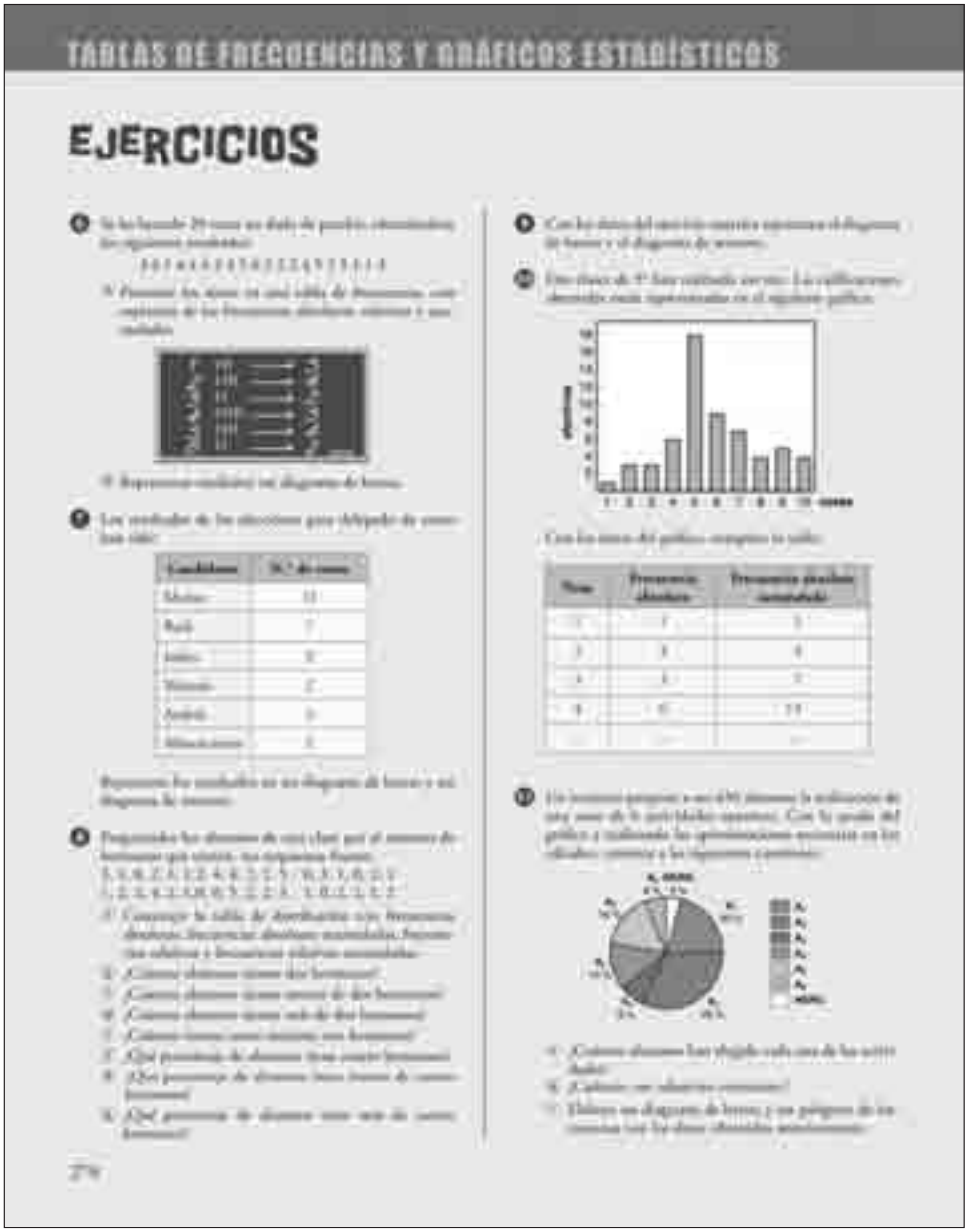
Los **cartogramas** son representaciones de datos sobre mapas. Se clasifican los datos según una escala determinada, y mediante intensidades de color o diseños grafiados se representa esto en la zona territorial correspondiente. También son muy utilizados y de gran divulgación en medios informativos.





Dividendo bruto (€) por acción de Telefónica

▶ Pág. 278. Ejercicios



TABLAS DE FRECUENCIAS Y GRÁFICOS ESTADÍSTICOS

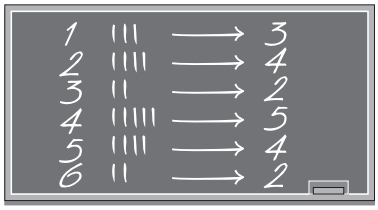
EJERCICIOS

SOLUCIONARIO

6. Se ha lanzado 20 veces un dado de parchís, obteniéndose los siguientes resultados:

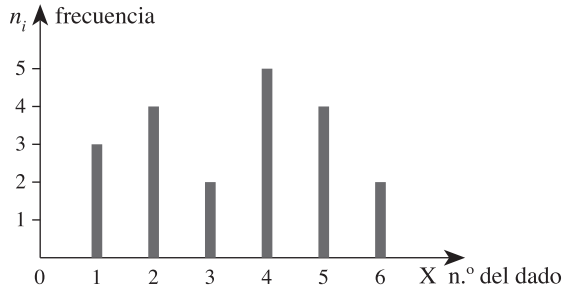
3 6 1 4 4 4 2 4 5 6 5 2 2 4 5 2 5 1 1 3

a) Presentar los datos en una tabla de frecuencias, con expresión de las frecuencias absolutas, relativas y acumuladas;



X = Cara del dado	n	f	absoluta acumulada	acumulada relativa
1	3	0,15	3	0,15
2	4	0,20	7	0,35
3	2	0,10	9	0,45
4	5	0,25	14	0,70
5	4	0,20	18	0,90
6	2	0,10	20	1
	20	1		

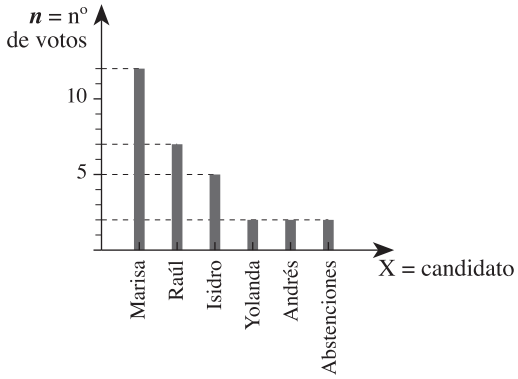
b) Representar mediante un diagrama de barras.



7. Los resultados de las elecciones para delegado de curso han sido:

Candidatos	N.° de votos
Marisa	12
Raúl	7
Isidro	5
Yolanda	2
Andrés	2
Abstenciones	2

Representa los resultados en un diagrama de barras y un diagrama de sectores.



Nº total de votos = 12 + 7+ 5 + 2 + 2+ 2 = 30

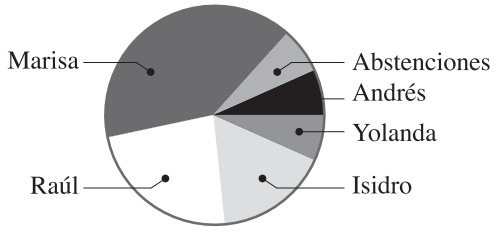
Total votos 30 .....360º
Marisa 12.....x $\quad x = \dfrac{360^\circ \times 12}{30} = 144^\circ$

Total votos 30 .....360º
Raúl 7.....x $\quad x = \dfrac{360^\circ \times 7}{30} = 84^\circ$

Total votos 30 .....360º
Isidro 5.....x $\quad x = \dfrac{360^\circ \times 5}{30} = 60^\circ$

Total votos 30 .....360º
Yolanda 2.....x $\quad x = \dfrac{360^\circ \times 2}{360} = 24^\circ$

Correspondiendo la misma amplitud para Andrés y Abstenciones.



8. Preguntados los alumnos de una clase por el número de hermanos que tenían, sus respuestas fueron:

3, 1, 0, 2, 1, 1, 2, 4, 4, 2, 1, 5, 0, 3, 1, 0, 2, 1

1, 2, 2, 4, 2, 1, 0, 0, 5, 2, 2, 3, 1, 0, 2, 2, 1, 2

a) Construye la tabla de distribución con frecuencias absolutas, frecuencias absolutas acumuladas, frecuencias relativas y frecuencias relativas acumuladas.

n.º hermanos x	Efectivo n	Abs. Acum.	Frec. Relativa	Relat. Acum.
0	6	6	0,17	0,17
1	10	16	0,28	0,45
2	12	28	0,33	0,78
3	3	31	0,08	0,86
4	3	34	0,08	0,94
5	2	36	0,05	0,99
	N = 36			

b) ¿Cuántos alumnos tienen dos hermanos?

12 alumnos tienen 2 hermanos.

c) ¿Cuántos alumnos tienen menos de dos hermanos?

6 + 10 = 16 alumnos tienen menos de dos hermanos.

d) ¿Cuántos alumnos tienen más de dos hermanos?

3 + 3 +2 = 8 alumnos tienen más de dos hermanos.

e) ¿Cuántos tienen como máximo tres hermanos?

6 + 10 + 12+ 3 = 31 alumnos tienen como máximo tres hermanos.

f) ¿Qué porcentaje de alumnos tiene cuatro hermanos?

0,08 × 100 = 8 % tienen 4 hermanos.

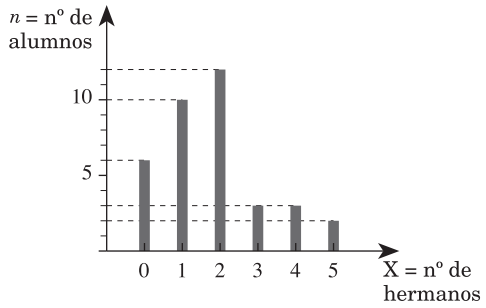
g) ¿Qué porcentaje de alumnos tiene menos de cuatro hermanos?

0,86 × 100 = 86 % tienen menos de 4 hermanos.

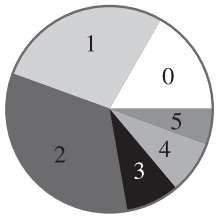
h) ¿Qué porcentaje de alumnos tiene más de cuatro hermanos?

0,05 × 100 = 5 % tienen más de 4 hermanos.

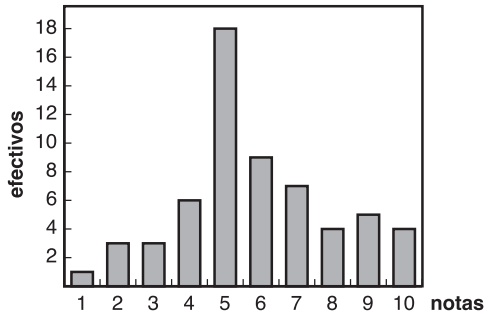
9. Con los datos del ejercicio anterior representa el diagrama de barras y el diagrama de sectores.



Todos los alumnos Alumnos con 0 hermanos	36.....360 6.....x	$x = \frac{360^\circ \times 6}{36} = 60^\circ$
Todos los alumnos Alumnos con 1 hermano	36.....360º 10.....x	$x = \frac{360^\circ \times 10}{36} = 100^\circ$
Todos los alumnos Alumnos con 2 hermanos	36.....360º 12.....x	$x = \frac{360^\circ \times 12}{36} = 120^\circ$
Todos los alumnos Alumnos con 3 o 4 hermanos	36.....360º 3.....x	$x = \frac{360^\circ \times 3}{36} = 30^\circ$
Todos los alumnos Alumnos con 5 hermanos	36.....360º 2.....x	$x = \frac{360^\circ \times 2}{36} = 20^\circ$



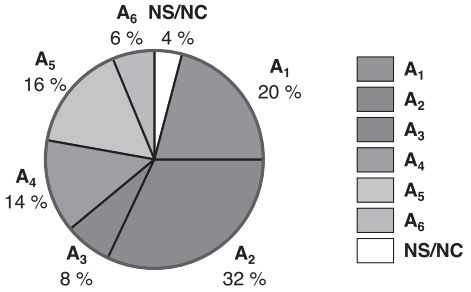
10. Dos clases de 3° han realizado un test. Las calificaciones obtenidas están representadas en el siguiente gráfico:



Con los datos del gráfico, completa la tabla:

X = Nota	*n* = Efectivo	Efectivo acumulado
1	1	1
2	3	4
3	3	7
4	6	13
5	18	31
6	9	40
7	7	47
8	4	51
9	5	56
10	4	60

11. Un instituto propone a sus 650 alumnos la realización de una serie de 6 actividades optativas. Con la ayuda del gráfico y realizando las aproximaciones necesarias en los cálculos, contesta a las siguientes cuestiones:



a) ¿Cuántos alumnos han elegido cada una de las actividades?

A_1: 650 × 0,2 = 130 alumnos

A_2: 650 × 0,32 = 208 alumnos

A_3: 650 × 0,08 = 52 alumnos

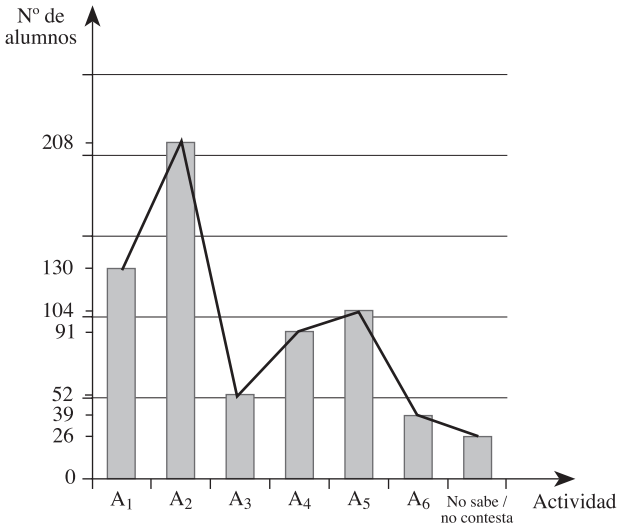
A_4: 650 × 0,14 = 91 alumnos

A_5: 650 × 0,16 = 39 alumnos

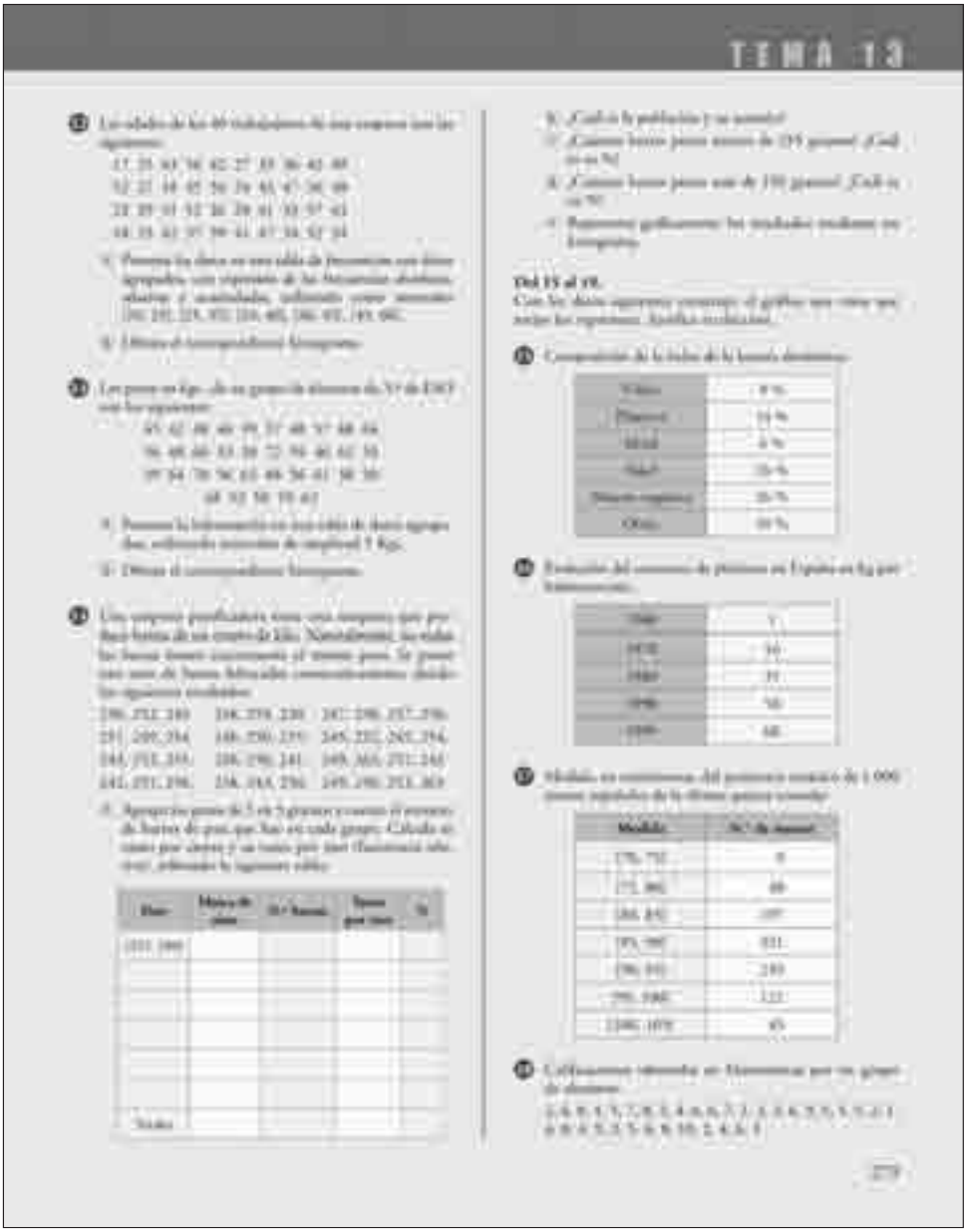
b) ¿Cuántos «no saben/no contestan»?

no saben/ no contestan: 650 × 0,04 = 26 alumnos.

c) Elabora un diagrama de barras y un polígono de frecuencias con los datos obtenidos anteriormente.



▶ Pág. 279. Ejercicios


TEMA 13

SOLUCIONARIO

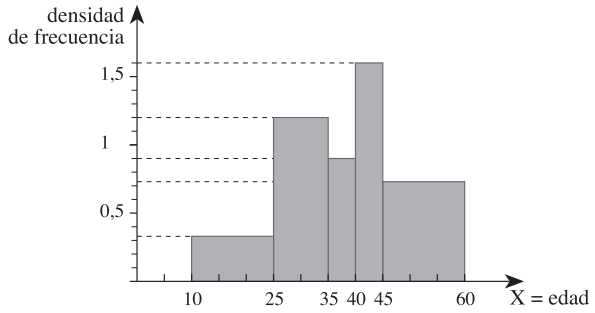
12. Las edades de los 40 trabajadores de una empresa son las siguientes:

17 25 43 56 42 27 33 36 42 49 52 27 18 45 56 24 43 47 36 48
23 29 31 53 26 28 41 33 57 43 18 25 42 37 39 41 47 34 52 34

a) Presenta los datos en una tabla de frecuencias con datos agrupados, con expresión de las frecuencias absolutas, relativas y acumuladas, utilizando como intervalos [10, 25[, [25, 35[, [35, 40[, [40, 45[, [45, 60[.

X = Edad	*n*	*f*	absoluta acumulada	relativa acumulada	densidad de frecuencia
[10,25[	5	0,125	5	0,125	0,33
[25,35[	12	0,300	17	0,425	1,20
[35,40[	4	0,100	21	0,525	0,90
[40,45[	8	0,200	29	0,725	1,60
[45,60[	11	0,275	40	1	0,73
	40	1			

b) Dibuja el correspondiente histograma.



Como los intervalos tienen distinta amplitud, en la tabla del apartado a) se ha añadido una columna final con las densidades de frecuencia. El histograma se construye colocando estas densidades en el eje de ordenadas.

13. Los pesos en kgs., de un grupo de alumnos de 3.º de ESO son los siguientes:

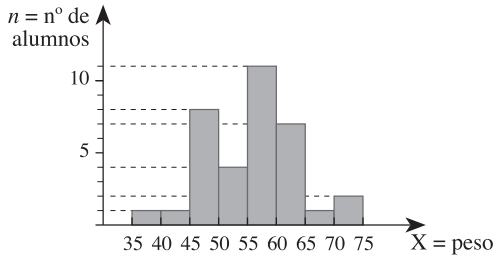
45 42 48 46 39 57 48 57 68 64
56 48 60 53 58 72 59 46 62 53
59 64 70 56 62 48 56 61 58 50
48 53 58 59 62

a) Presenta la información en una tabla de datos agrupados, utilizando intervalos de amplitud 5 Kgs.

No hay solución única, pues depende de cómo se hayan definido los intervalos de agrupación. Una solución posible es:

X = Peso en Kg	*n*
[35,40[	1
[40,45[	1
[45,50[	8
[50,55[	4
[55,60[	11
[60,65[	7
[65,70[	1
[70,75[	2
	35

b) Dibuja el correspondiente histograma.



14. Una empresa panificadora tiene una máquina que produce barras de un cuarto de kilo. Naturalmente, no todas las barras tienen exactamente el mismo peso. Se pesan una serie de barras fabricadas consecutivamente, dando los siguientes resultados:

256, 252, 249 248, 259, 239, 247, 238, 257, 250,
251, 249, 254 246, 250, 255, 245, 252, 245, 254,
243, 253, 255, 250, 250, 241, 249, 263, 251, 243
242, 251, 258, 238, 243, 250, 249, 250, 253, 263

a) Agrupa los pesos de 5 en 5 gramos y cuenta el número de barras de pan que hay en cada grupo. Calcula su tanto por ciento y su tanto por uno (frecuencia relativa), rellenado la siguiente tabla:

No hay solución única, pues depende de cómo se hayan definido los intervalos de agrupación. Una solución posible es:

Peso	Marca de clase	N.º barras	Tanto por uno	%	% Acum.
[235, 240]	237	3	0,075	7,5	7,5
[240, 245]	242	5	0,125	12,5	20
[245, 250]	247	9	0,225	22,5	42,5
[250, 255]	252	15	0,375	37,5	80
[255, 260]	257	6	0,15	15	95
[260, 265]	262	2	0,05	5	100
Totales		40	1	100	

b) Cuál es la población y su tamaño?

La población estudiada es la producción de barras de pan elaboradas por una máquina panificadora. Su tamaño es 40.

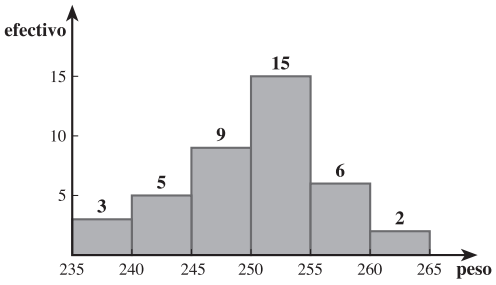
c) ¿Cuántas barras pesan menos de 255 gramos? ¿Cuál es su %?

32 barras pesan menos de 255 g. Equivale al 80 %.

d) ¿Cuántas barras pesan más de 250 gramos? ¿Cuál es su %?

23 barras pesan más de 250 g. Equivale al 57,5 %.

e) Representa gráficamente los resultados mediante un histograma.



Del 15 al 19. Con los datos siguientes construye el gráfico que creas que mejor los representa. Justifica tu elección.

15. Composición de la bolsa de la basura doméstica:

Vidrio	8 %
Plásticos	14 %
Metal	6 %
Papel	26 %
Materia orgánica	26 %
Otros	20 %

Es un atributo, y podemos representarlo con un diagrama de barras o un gráfico de sectores. Si utilizamos este último procederíamos así:

360º .....100% total bolsa
x.....8% vidrio
$x = \frac{360º \times 8}{100} = 28,8º$

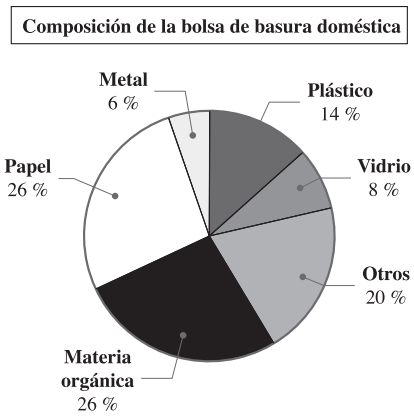
360º .....100% total bolsa
x.....14% plásticos
$x = \frac{360º \times 14}{100} = 50,4º$

360º .....100% total bolsa
x.....6% metal
$x = \frac{360º \times 6}{100} = 21,6º$

360º .....100% total bolsa
x.....26% papel
$x = \frac{360º \times 26}{100} = 93,6º$

360º .....100% total bolsa
x.....26% materia orgánica
$x = \frac{360º \times 26}{100} = 93,6º$

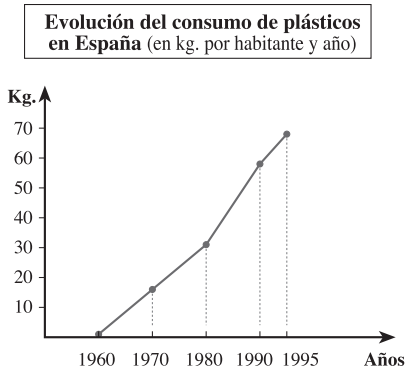
360º .....100% total bolsa
x.....20% otros
$x = \frac{360º \times 20}{100} = 72º$



16. Evolución del consumo de plásticos en España en kg por habitante/año.

1960	1
1970	16
1980	31
1990	58
1995	68

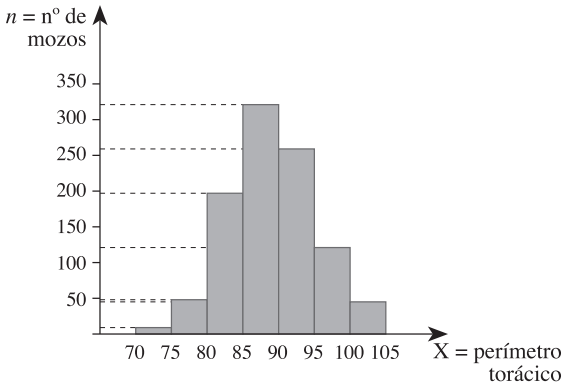
El consumo de plásticos es una característica a lo largo del tiempo. Podemos utilizar el diagrama de barras, el diagrama de sectores y el polígono de frecuencias. Si utilizamos este último asociaríamos el valor de consumo a las frecuencias, y los años a los valores de la variable y procederíamos así:



17. Medida, en centímetros, del perímetro torácico de 1.000 mozos españoles de la última quinta censada:

Medida	N.° de mozos
[70, 75[	9
[75, 80[	48
[80, 85[	197
[85, 90[	321
[90, 95[	259
[95, 100[	121
[100, 105[	45

Tenemos una variable cuyos valores están agrupados en intervalos. En este caso el gráfico apropiado es el histograma.



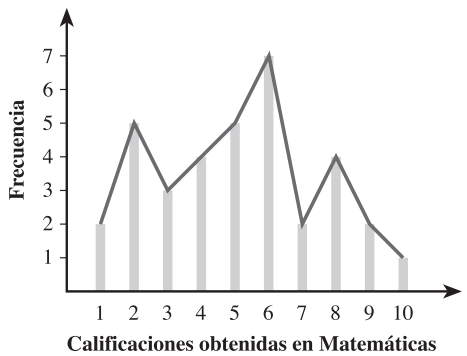
18. Calificaciones obtenidas en Matemáticas por un grupo de alumnos:

2, 6, 8, 4, 5, 7, 8, 2, 4, 6, 6, 7, 1, 3, 3, 6, 9, 5, 5, 5, 2, 1, 6, 8, 4, 9, 2, 5, 6, 8, 10, 2, 4, 6, 3

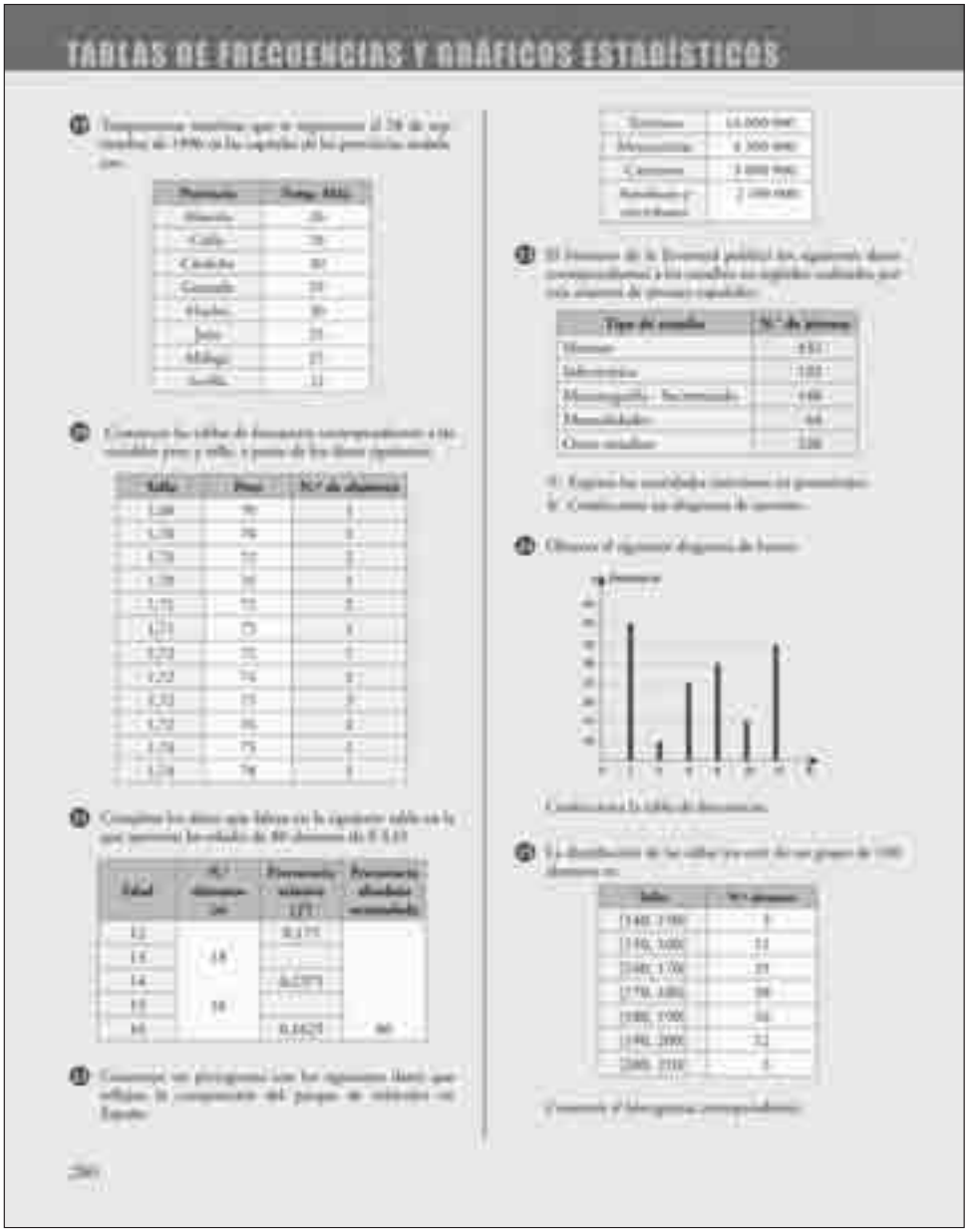
La calificación es la variable. Si presentamos los datos a través de una tabla de frecuencias con los datos sin agrupar es:

x	n
1	2
2	5
3	3
4	4
5	5
6	7
7	2
8	4
9	2
10	1
	35

El gráfico apropiado sería un diagrama de barras o un polígono de frecuencias. El siguiente gráfico coge los dos en la misma representación.



▶ Pág. 280. Ejercicios

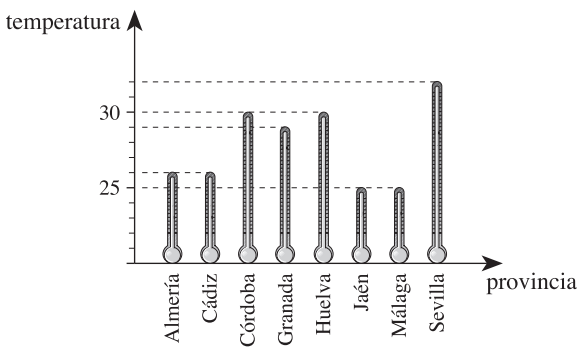

TABLAS DE FRECUENCIAS Y GRÁFICOS ESTADÍSTICOS

SOLUCIONARIO

19. Temperaturas máximas que se registraron el 28 de septiembre de 1996 en las capitales de las provincias andaluzas:

Provincia	Temp. Máx.
Almería	26
Cádiz	26
Córdoba	30
Granada	29
Huelva	30
Jaén	25
Málaga	25
Sevilla	32

La temperatura máxima es una característica asociada a los nombres de las ocho capitales andaluzas. El gráfico más apropiado sería un diagrama de barras, colocando en abscisas las modalidades del atributo "capital de provincia" y en ordenadas el valor de la temperatura, asociada a una frecuencia.



20. Construye las tablas de frecuencia correspondientes a las variables peso y talla, a partir de los datos siguientes:

Talla	Peso	N.º de alumnos
1,68	70	1
1,70	70	2
1,70	72	2
1,70	76	1
1,71	72	3
1,71	75	1
1,72	72	1
1,72	74	2
1,72	75	3
1,72	76	2
1,74	75	1
1,74	78	1

x = talla	frecuencia absoluta (n)	frecuencia relativa (f)	frecuencia absoluta acumulada	frecuencia relativa acumulada	%
1,68	1	$\frac{1}{20} = 0,05$	1	0,05	5%
1,70	5	$\frac{5}{20} = 0,25$	6	0,30	25%
1,71	4	$\frac{4}{20} = 0,20$	10	0,50	20%
1,72	8	$\frac{8}{20} = 0,40$	18	0,90	40%
1,74	2	$\frac{2}{20} = 0,10$	20	1	10%
	N = 20				100%

x = peso	frecuencia absoluta (n)	frecuencia relativa (f)	frecuencia absoluta acumulada	frecuencia relativa acumulada	%
70	3	$\frac{3}{20} = 0,15$	3	0,15	15%
72	6	$\frac{6}{20} = 0,30$	9	0,45	30%
74	2	$\frac{2}{20} = 0,10$	11	0,55	10%
75	5	$\frac{5}{20} = 0,25$	16	0,80	25%
76	3	$\frac{3}{20} = 0,15$	19	0,95	15%
78	1	$\frac{1}{20} = 0,05$	20	1	5%
	N = 20				100%

21. Completa los datos que faltan en la siguiente tabla en la que aparecen las edades de 80 alumnos de E.S.O.

Edad	N.° alumnos (n)	Frecuencia relativa (f)	Frecuencia absoluta acumulada
12		0,175	
13	18		
14		0,2375	
15	16		
16		0,1625	80

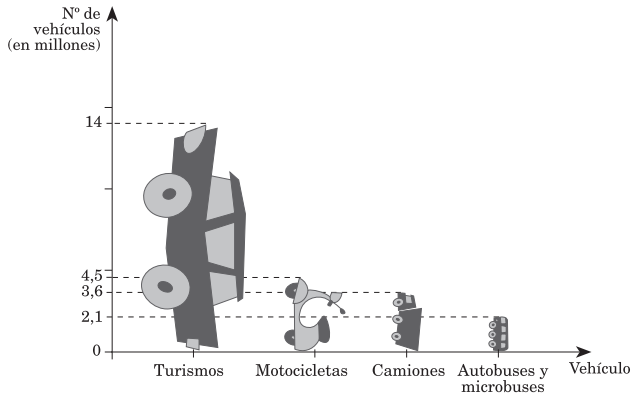
Empezamos, por ejemplo, con la frecuencia absoluta correspondiene al primer valor de la variable, $x = 12$.

Como $N = 80$ y $f = \frac{n}{N} \rightarrow n = 0,175 \times 80 = 14$ que es la frecuencia absoluta para $x = 12$:

Edad	N.° alumnos (n)	Frecuencia relativa (f)	Frecuencia absoluta acumulada
12	14	**0,175**	14
13	**18**	0,225	32
14	19	**0,2375**	51
15	**16**	0,200	67
16	13	**0,1625**	**80**
	80	1	

22. Construye un pictograma con los siguientes datos que reflejan la composición del parque de vehículos en España.

Turismos	14 000 000
Motocicletas	4 500 000
Camiones	3 600 000
Autobuses y microbuses	2 100 000



23. El Instituto de la Juventud publicó los siguientes datos correspondientes a los estudios no reglados realizados por una muestra de jóvenes españoles:

Tipo de estudio	N.° de jóvenes
Idiomas	432
Informática	192
Mecanografía - Secretariado	148
Manualidades	64
Otros estudios	320

a) Expresa las cantidades anteriores en porcentajes.

X = Tipo de estudio	%
Idiomas	37,4
Informática	16,6
Mecanografía - Secretariado	12,8
Manualidades	5,5
Otros estudios	27,7
	100

b) Confecciona un diagrama de sectores.

En total, la muestra se realizó a
432 + 192 + 148 + 64 + 320 = 1156 jóvenes.
Los vectores del gráfico se construyen así.

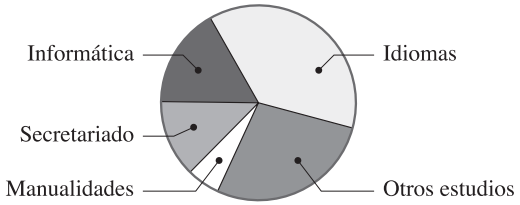
360º .... 1156 jóvenes
x ..... 432 idiomas
$x = \dfrac{360º \times 432}{1156} = 134,5º$

360º .... 1156 jóvenes
x ..... 192 informática
$x = \dfrac{360º \times 192}{1156} = 59,8º$

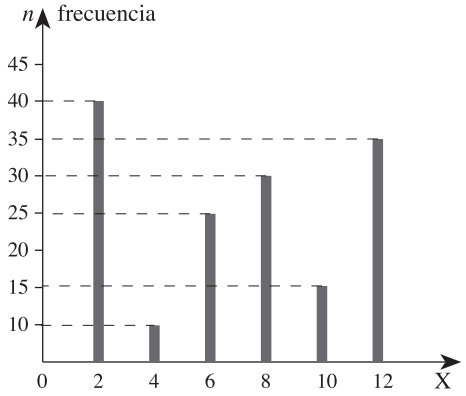
360º .... 1156 jovenes
x ..... 148 mecanografía-secretariado
$x = \dfrac{360º \times 148}{1156} = 46,1º$

360º .... 1156 jóvenes
x ..... 64 manualidades
$x = \dfrac{360º \times 64}{1156} = 19,9º$

360º .... 1156 jóvenes
x ..... 320 otros estudios
$x = \dfrac{360º \times 64}{1156} = 19,9º$



24. Observa el siguiente diagrama de barras:



Confecciona la tabla de frecuencias.

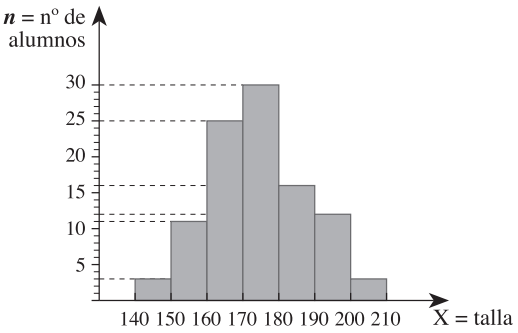
x	frecuencia absoluta (n)	frecuencia relativa (f)	frecuencia absoluta acumul.	frecuencia relativa acumul.	%
2	40	$^{40}/_{155} = 0,26$	40	0,26	0,26 × 100 = 26%
4	10	$^{10}/_{155} = 0,06$	50	0,32	0,06 × 100 = 6%
6	25	$^{25}/_{155} = 0,16$	75	0,48	0,16 × 100 = 16%
8	30	$^{30}/_{155} = 0,19$	105	0,67	0,19 × 100 = 19%
10	15	$^{15}/_{155} = 0,10$	120	0,77	0,10 × 100 = 10%
12	35	$^{35}/_{155} = 0,23$	155	1	0,23 × 100 = 23%
	N = 155	1			100%

25. La distribución de las tallas (en cm) de un grupo de 100 alumnos es:

Tallas	N.º alumnos
[140, 150[	3
[150, 160[	11
[160, 170[	25
[170, 180[	30
[180, 190[	16
[190, 200[	12
[200, 210[	3

Construir el histograma correspondiente.

Todos los intervalos son de la misma amplitud, por lo que no hay que calcular las densidades de frecuencia y, en ordenadas, podemos colocar directamente la frecuencia absoluta.



Tema 14

Parámetros de centralización y dispersión

▸ Programación de aula

Objetivos

- Resumir una tabla de frecuencias a partir de los parámetros estadísticos.
- Conocer algunos parámetros de centralización: media aritmética, mediana y moda.
- Conocer las propiedades de la media aritmética.
- Interpretar los parámetros de centralización
- Conocer algunos parámetros de dispersión: rango, varianza y desviación típica.
- Conocer las propiedades de la varianza.
- Interpretar los parámetros de dispersión.
- Definir e interpretar la dispersión relativa: el coeficiente de variación.
- Utilizar la calculadora para cálculos estadísticos.

Criterios de evaluación

- Distinguir entre los parámetros estadísticos según su finalidad.
- Interpretar la media aritmética.
- Utilizar las propiedades de la media aritmética.
- Interpretar la mediana.
- Interpretar la moda.
- Interpretar la varianza y desviación típica.
- Utilizar las propiedades de la varianza.
- Interpretar el coeficiente de variación.
- Utilizar la calculadora en modo estadístico.

Contenidos

- **Conceptos** ("saber")
  - Utilidad de los parámetros estadísticos.
  - Parámetros de centralización.
  - Parámetros de dispersión.
  - Uso de la calculadora. Los paquetes estadísticos.
- **Procedimientos** ("Saber hacer")
  - Planificación y realización individual y colectiva de tomas de datos, utilizando técnicas de recuento y construcción de tablas estadísticas.
  - Correcta utilización del vocabulario básico de la Estadística.
  - Uso adecuado de la calculadora en modo estadístico.
  - Utilización e interpretación de los parámetros estadísticos de centralización en relación con el fenómeno estudiado.
  - Utilización e interpretación de los parámetros estadísticos de dispersión en relación con el fenómeno estudiado.
  - Interpretación y elaboración de tablas numéricas a partir de datos.
- **Actitudes** ("Saber ser")
  - Reconocimiento y valoración de la utilidad de los lenguajes gráfico y estadístico para presentar y resolver problemas de la vida cotidiana.
  - Valorar el poder de la Estadística Descriptiva para representar gran cantidad de datos utilizando unos pocos parámetros.
  - Adquirir la costumbre de interpretar la información estadística que aparece en los medios de comunicación.

▸ Programación por competencias

COMPETENCIA MATEMÁTICA

PENSAMIENTO Y RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

Descriptores

1. Sintetizar una tabla de frecuencias en sus parámetros estadísticos y calcularlos.
2. Interpretar los parámetros de una tabla de frecuencias para advertir las características básicas de la variable a la que se refiere la tabla.

Desempeño

1. Pone de manifiesto las características básicas de una tabla de frecuencias a través de los parámetros estadísticos deducidos de ella.	- Asocia las características de una tabla de frecuencias a su parámetro respectivo. - Determina el alcance interpretativo de cada parámetro estadístico.	- **Ejemplos 1, 6 a 11 y 15** (pág. 285, 288 a 290, 293 y 296) - **Ejercicios 5 a 8 y 9 a 29** (pág. 296 y 300 a 302)
2. Interpreta el significado de los parámetros estadísticos.	- Compara entre sí los parámetros estadísticos. - Extiende el significado del parámetro estadístico a la característica correspondiente de una tabla de frecuencias.	- **Ejemplos 1, 6, 7, 9 a 11 y 15** (pág. 285, 288, 290, 293 y 296) - **Ejercicios 9 a 29** (pág. 300 a 302)

REPRESENTAR ENTIDADES MATEMÁTICAS

Descriptores

1.Utilizar y entender la media aritmética como valor central y característico de una tabla de frecuencias.
2. Utilizar y entender la mediana como valor que ocupa la posición central de una tabla de frecuencias.
3. Utilizar y entender la moda como valor más repetido de una tabla de frecuencias.
4. Utilizar y entender la varianza como medida de la representatividad de una media aritmética.

Desempeño

1. Valora la media aritmética.	- Calcula la media aritmética. - Interpreta la media aritmética.	- **Ejemplos 1 a 6** (pág. 285 a 288) - **Ejercicios 1, 3 y 4** (pág. 291) - **Ejercicios 9 a 29** (pág. 300 a 302)
2. Valora la mediana.	- Calcula la mediana. - Interpreta la mediana.	- **Ejemplos 7 y 8** (pág. 288 y 289) - **Ejercicios 1 y 2** (pág. 291 - **Ejercicios 9, 10, 12, 14, 16 a 24, 26 y 28** (pág. 300 a 302)
3. Valora la moda.	- Calcula la moda. - Interpreta la moda.	- **Ejemplos 9 y 10** (pág. 290) - **Ejercicios 1 y 2** (pág. 291) - **Ejercicios 9 a 12, 14, 19, 22 a 24 y 26 a 28** (pág. 300 a 302)
4. Valora la varianza y la desviación típica.	- Calcula la varianza. - Calcula la desviación típica. - Interpreta la varianza. - Justifica la desviación típica y la interpreta.	- **Ejemplos 11 a 14** (pág. 293 a 296)) - **Ejercicios 5 a 8** (pág. 293 a 296) - **Ejercicios 9, 10, 12 a 14, 16, 18, 19, 21, 22, 26 y 28** (pág. 300 a 302)

<table>
<tr><td rowspan="5">ARGUMENTAR MATEMÁTICAMENTE</td><td colspan="3">Descriptores</td></tr>
<tr><td colspan="3">1. Demostrar propiedades de la media aritmética y de la varianza.
2. Utilizar las propiedades de la media aritmética y de la varianza para calcularlas en ciertas situaciones.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Desempeño</td></tr>
<tr><td>1. Demuestra las propiedades de la media aritmética y de la varianza.</td><td>- Obtiene la media aritmética y la varianza para una transformación lineal de la variable.
- Comprueba la utilidad del cálculo anterior.</td><td>- Ejemplos 2 a 5 (pág. 286 y 287)
- Ejercicios 3 y 4 (pág. 291)
- Ejemplos 12 a 14 y ejercicios 5 a 7 (pág. 294 a 296)</td></tr>
<tr><td>2. Compara la representatividad de las medias aritméticas de dos tablas de frecuencias distintas.</td><td>- Calcula el coeficiente de variación.
- Decide sobre la representatividad de las medias aritméticas de dos tablas de frecuencias distintas.</td><td>- Ejemplos 15 y ejercicio 8 (pág. 296)
- Ejercicios 10, 14, 16, 18, 21 y 26 (pág. 300 a 302)</td></tr>
<tr><td rowspan="5">PLANTEAR Y RESOLVER PROBLEMAS MATEMÁTICOS</td><td colspan="3">Descriptores</td></tr>
<tr><td colspan="3">1. Identificar, definir y plantear problemas matemáticos de obtención de parámetros estadísticos.
2 Resolver diferentes problemas matemáticos de obtención de parámetros estadísticos.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Desempeño</td></tr>
<tr><td>1. Plantea una situación concreta en la que interviene el cálculo de los parámetros de una tabla de frecuencias.</td><td>- Trabaja con un conjunto de datos.
- Distingue entre diferentes parámetros estadísticos.</td><td rowspan="3">- Ejemplos y ejercicios del tema (pág. 284 a 302)</td></tr>
<tr><td>2. Identifica cómo los parámetros estadísticos resumen el contenido de una tabla de frecuencias.</td><td>- Calcula los diferentes parámetros estadísticos.
- Interpreta el valor obtenido para los parámetros calculados.</td></tr>
<tr><td>3. Resuelve la cuestión planteada.</td><td>- Obtiene la solución numérica.
- Analiza la solución y obtiene conclusiones.</td></tr>
<tr><td rowspan="5">UTILIZAR EL LENGUAJE TÉCNICO FORMAL</td><td colspan="3">Descriptores</td></tr>
<tr><td colspan="3">1. Interpretar el lenguaje simbólico y formal de la Estadística.
2. Trabajar con expresiones simbólicas y fórmulas, en especial, el sumatorio.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Desempeño</td></tr>
<tr><td>3. Trabaja con las expresiones formales de los parámetros estadísticos.</td><td>- Calcula las expresiones de los parámetros estadísticos aplicándolas a un conjunto de datos.
- Interpreta las expresiones formales atendiendo a la finalidad del parámetro al que se refieren.</td><td>- Ejemplos y ejercicios del tema (pág. 284 a 302)</td></tr>
</table>

COMPETENCIA LINGÜÍSTICA

COMPETENCIA LINGÜÍSTICA

Descriptores

1. Comprender el enunciado de un problema en el que interviene una tabla de frecuencias que hay que resumir en forma de sus características más relevantes.
2. Ser capaces de indicar con un texto o una explicación oral breve los aspectos relevantes del problema planteado.
3. Ser capaces de describir con un texto o con una explicación oral breve el proceso de cálculo realizado.
4. Advertir el lenguaje propio de una calculadora como alternativa a los lenguajes natural y matemático.

Desempeño

1. Comprende lo que lee.	- Identifica la pregunta que se le hace. - Identifica los elementos estadísticos que intervienen.	- **Ejemplo y ejercicios del tema** (pág. 265 a 280)
2. Discrimina e interpreta la información que le da el enunciado de un problema.	- Diferencia los distintos tipos de variables. - Diferencia los distintos parámetros estadísticos.	- **Ejemplos 4 a 7** (pág. 266 a 269) - **Ejercicios 2, 3 y 6 a 25** (pág. 270 y 278 a 280)
3. Se expresa por escrito de manera adecuada y correcta, con claridad y coherencia, utilizando un lenguaje preciso.	- Presenta el texto de la solución del problema de forma adecuada y correcta. - Selecciona los aspectos relevantes de la solución. - Es capaz de traducir al lenguaje natural el lenguaje formal de las matemáticas.	- **Ejemplos y ejercicios del tema** (pág.284 a 302)

COMPETENCIA SOCIAL Y CIUDADANA

COMPETENCIA SOCIAL Y CIUDADANA

Descriptores

1. Utilizar la estadística para mejorar el conocimiento de la realidad económica, demográfica y cultural de la sociedad.
2. Conocer aplicaciones de la estadística en la medición de fenómenos sociales.

Desempeño

1. Analiza información estadística de carácter social.	- Utiliza información de características demográficas y sociales. - Analiza información de características sociales y obtiene conclusiones.	- **Ejemplo 15** (pág. 296) - **Ejercicios 11, 13, 21, 24 y 25** (pág. 300 a 302)
2. Plantea las posibilidades de la Estadística Descriptiva para el conocimiento del comportamiento social.	- Utiliza los parámetros estadísticos para acercarse al conocimiento social y ciudadano. - Plantea las necesidades que exige el conocimiento de la sociedad y valora cuáles pueden resolverse por la estadística.	

COMPETENCIA EN CONOCIMIENTO E INTERACCION CON EL MEDIO FISICO

COMPETENCIA EN CONOCIMIENTO E INTERACCION CON EL MEDIO FÍSICO

Descriptores

1.Interpretar la información del mundo real -físico, económico, social o cultural- y resumir sus características numéricas fundamentales.
2. Fomentar la reflexión para poder intervenir en el entorno físico desde una perspectiva crítica y reflexiva, basada en la información numérica resumida en forma de parámetros estadísticos.

Desempeño

1. Interpreta información numérica del mundo físico y la resume en unas pocas medidas o parámetros.	- Sintetiza la información. - Expone la información con precisión. - Expone adecuadamente el proceso que resume la información.	- **Ejemplo 15** (pág.296) - **Ejercicios 4, 7, 11, 13 y 25** (pág.291, 296, 300 y 302)
2. Obtiene conclusiones en relación al mundo físico que le rodea a partir de la información que proporcionada por los parámetros.	- Relaciona las conclusiones con la realidad observada. - Decide opciones de actuación en función de las conclusiones obtenidas.	- **Ejemplos y ejercicios del tema** (pág.284 a 302)

COMPETENCIA DIGITAL Y TRATAMIENTO DE LA INFORMACION

COMPETENCIA EN CONOCIMIENTO E INTERACCION CON EL MEDIO FÍSICO

Descriptores

1.Confeccionar esquemas lógicos de cálculo para obtener las principales características o parámetros de una tabla de frecuencias.
2. Codificar el lenguaje estadístico.
3. Utilizar la calculadora y el lenguaje digital para el cálculo de parámetros estadísticos.

Desempeño

1. Interpreta, organiza y contrasta la información de los parámetros obtenidos de un conjunto de datos.	- Resume y sintetiza la información. - Reconoce que el lenguaje estadístico supone codificar la información que proporciona un conjunto de datos.	- **Ejemplos y ejercicios del tema** (pág.284 a 302)
2. Expone y presenta los resultados de manera ordenada y clara, transmitiéndola así oralmente o por escrito.	- Presenta los resultados de forma clara y ordenada. - Respeta y cumple el lenguaje estadístico.	
3. Emplea la calculadora para el cálculo de parámetros estadísticos.	- Interpreta el lenguaje de una calculadora. - Traduce el lenguaje estadístico a lenguaje digital.	- **"Uso de la calculadora"** (pág.297) - **Ejercicios 9 a 29** (pág.300 a 302)

COMPETENCIA APRENDER A APRENDER

COMPETENCIA APRENDER A APRENDER

Descriptores

1. Adquirir conciencia y hacer uso de las propias capacidades y conocimientos para iniciarse en el estudio de los parámetros deducidos de una tabla de frecuencias.
2. Ser capaz de continuar aprendiendo de manera cada vez más eficaz y autónoma de acuerdo a los propios objetivos y necesidades.
3. Desarrollar la curiosidad de plantearse preguntas sobre la capacidad de los parámetros estadísticos para resumir el comportamiento de un conjunto de datos.

Desempeño

1. Desarrolla habilidades para la comprensión.	- Lee los enunciados de los ejercicios con la intención de comprender, relacionar y sintetizar contenidos. - Maneja adecuadamente recursos y técnicas de aprendizaje individual.	- **Ejemplos y ejercicios del tema** (pág. 284 a 302)
2. Aplica técnicas de estudio y de trabajo con el fin de comprender, sintetizar y relacionar los conceptos estadísticos.	- Realiza resúmenes. - Efectúa anotaciones marginales. - Subraya. - Realiza esquemas. - Realiza mapas conceptuales.	
3. Desarrolla la curiosidad por la metodología estadística.	- Plantea sugerencias de ampliación a los resultados obtenidos tras el análisis de un conjunto de datos.	- **Ejemplos 6, 7, 12 y 15** (pág. 288, 294 y 296 - **Ejercicios 10, 14 20 y 23** (pág. 300 a 302)

COMPETENCIA AUTONOMÍA E INICIATIVA PERSONAL

COMPETENCIA AUTONOMÍA E INICIATIVA PERSONAL

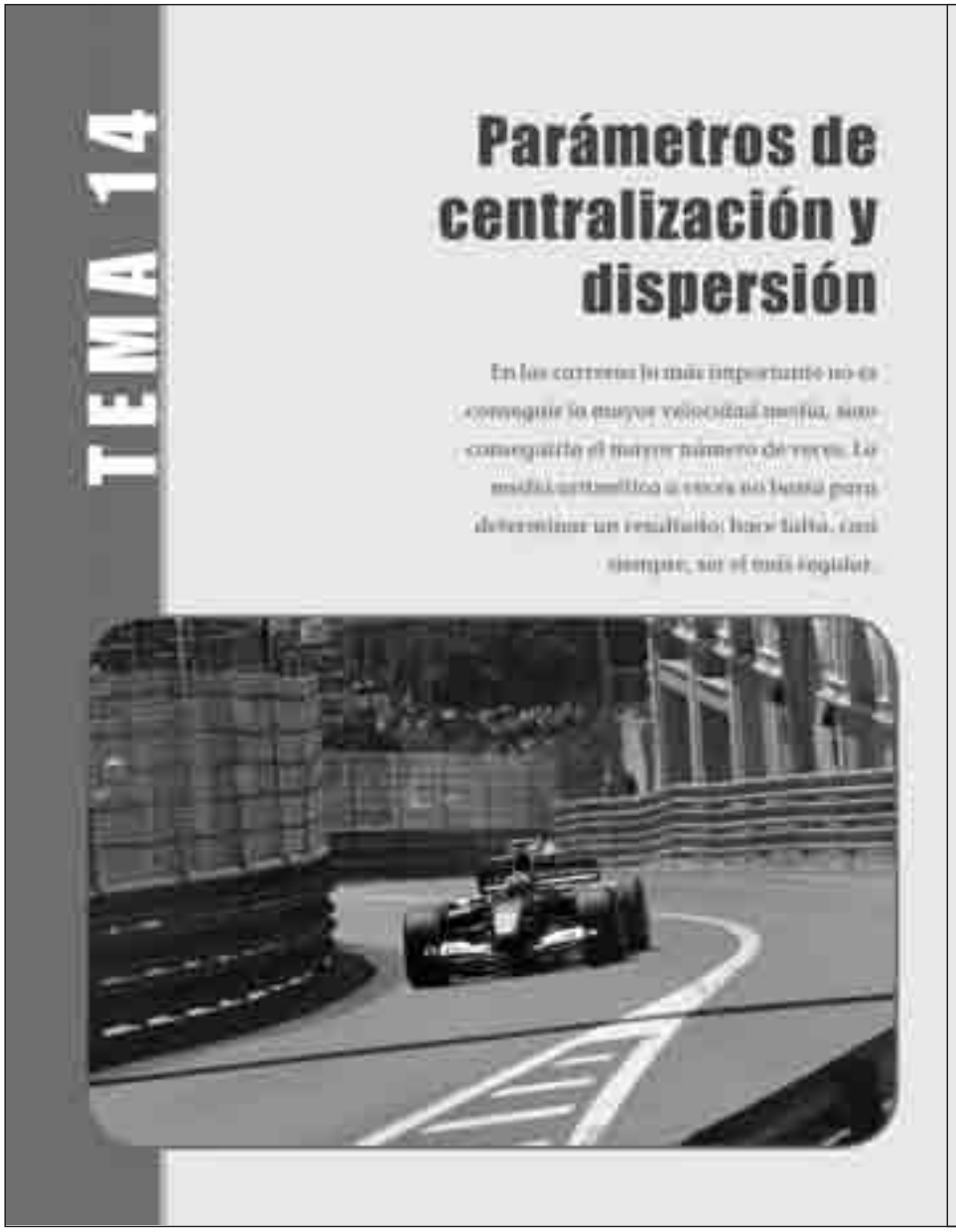
Descriptores

1. Utilizar el lenguaje estadístico como instrumento que orienta la propia actividad con autonomía.
2. Utilizar estrategias para afrontar la toma de decisiones tras analizar las características de una tabla de frecuencias expresadas por sus parámetros.

Desempeño

1. Idea y planifica el desarrollo de un ejercicio.	- Elige la opción adecuada para la resolución de los ejercicios. - Mantiene la opción hasta llegar a la conclusión final.	- **Ejemplos y ejercicios del tema** (pág. 284 a 302)
2. Evalúa la solución obtenida.	- Valora el resultado y lo pone en relación con el enunciado del problema resuelto. - Reflexiona sobre si el trabajo efectuado ha sido suficiente para el objetivo propuesto.	
3. Toma decisiones en función del resultado obtenido.	- Decide en función del resultado.	- **Eejemplos 12 y 15** (pág. 294 y 295) - **Ejercicios 8, 11, 13, 17, 20, 21 y 23** (pág. 295 y 300 a 302)

▶ Pág. 282 - 283. Parámetros de centralización y dispersión



SOLUCIONARIO

PRACTICA

Se han anotado las puntuaciones obtenidas por los 12 alumnos de una clase de 3º de ESO en un examen de Matemáticas y en otro de Física, y se han presentado en las siguientes tablas de frecuencias:

Puntuación en Matemáticas	nº alumnos	Puntuación en Física	nº alumnos
3	1	2	2
4	2	3	3
5	4	5	4
6	2	7	1
7	2	8	1
8	1	9	1
Total	**12**	**Total**	**12**

¿Cuál es la *media*, *moda* y *mediana* de las puntuaciones de Matemáticas?

Media aritmética = 5,4

Moda = 5

Mediana = 5

¿Cuál es la media, moda y mediana de las puntuaciones de Física?

Media aritmética = 4,75

Moda = 5

Mediana = 5



DE 2º A 3º

Los **parámetros estadísticos** resumen la información de una tabla de frecuencias, y presentan sus características más relevantes. En muchas ocasiones son suficientes para dar respuesta a las principales preguntas que formulemos sobre cualquier circunstancia relacionada con la tabla que nos interese.

En la **media aritmética** intervienen todos los valores de la variable estadística, ponderados por sus respectivas frecuencias. La **moda** es el valor de la variable estadística más frecuente, esto es, el que más se repite. La **mediana** es el valor que ocupa el lugar central tras la ordenación de los valores de menos a más.

PRACTICA

Se han anotado las puntuaciones obtenidas por los 12 alumnos de una clase de 3º de ESO en un examen de Matemáticas y en otro de Física, y se han presentado en las siguientes tablas de frecuencias:

3	1	3	2
4	3	4	3
5	4	5	4
6	2	6	1
7	1	8	1
8	1	9	1
total	12	total	12

¿Cuál es la media, moda y mediana de las puntuaciones de Matemáticas?

Media aritmética = _____ Moda = _____ Mediana = _____

¿Cuál es la media, moda y mediana de las puntuaciones de Física?

Media aritmética = _____ Moda = _____ Mediana = _____

Las tablas de frecuencias anteriores pueden representarse gráficamente con un apropiado gráfico estadístico.

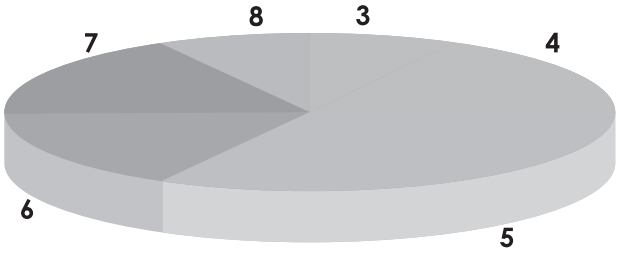
PRACTICA

El diagrama de sectores asociado a la tabla de puntuaciones en Matemáticas es el siguiente:

Calcula la amplitud de los sectores que corresponden a cada una de las puntuaciones.

PRACTICA

El diagrama de sectores asociado a la tabla de puntuaciones en Matemáticas es el siguiente:



Calcula la amplitud de los sectores que corresponden a cada una de las puntuaciones.

Puntuación en matemáticas	Amplitud en grados
3	$\frac{360}{12} \times 1 = 30°$
4	60°
5	120°
6	60°
7	60°
8	30°

▶ Pág. 284. 1 Utilidad de los parámetros estadísticos



PARÁMETROS DE CENTRALIZACIÓN Y DISPERSIÓN

1 Utilidad de los parámetros estadísticos

Edad	Número absoluto (n)
De 0 a 4 años	220.894
De 5 a 9 años	216.991
De 10 a 14 años	231.469
De 15 a 19 años	270.186
De 20 a 24 años	315.749
De 25 a 29 años	419.113
De 30 a 34 años	412.317
De 35 a 39 años	351.197
De 40 a 44 años	362.080
De 45 a 49 años	300.361
De 50 a 54 años	274.093
De 55 a 59 años	226.883
De 60 a 64 años	241.870
De 65 a 69 años	226.082
De 70 a 74 años	203.149
De 75 a 79 años	160.791
De 80 a 84 años	107.913
De 85 y más años	75.343
Total	4.897.649

En la anterior unidad se desarrollaba el primer paso del análisis estadístico, consistente en la presentación de los datos en una tabla de frecuencias. A continuación, resulta imprescindible resumir la información de la tabla en unos pocos **parámetros estadísticos** o **medidas descriptivas de los datos**, que proporcionan de una manera abreviada una idea aproximada de los hechos más relevantes descritos por los datos.

Al observar una tabla como la que tienes al margen, extraída del Padrón Municipal de Habitantes de la Comunidad Valenciana de 2005, surgen, de inmediato, las siguientes preguntas:

¿en joven o viejo la población valenciana?

¿cuál es su edad más representativa?

¿hasta qué punto puede considerar la media de las edades como una buena descripción de la edad de los valencianos?

¿hay aproximadamente igual efectivo de jóvenes que de mayores?

las edades de los valencianos, ¿se encuentra alrededor de su media?

Todas estas preguntas pueden contestarse calculando un número muy pequeño de parámetros —no más de cuatro o cinco—, que proporcionan una idea intuitiva sobre la característica "edad" de la población valenciana.

Los parámetros estadísticos asociados a una tabla de frecuencias pueden clasificarse atendiendo al hecho que pretenden medir. Y así, si deseas destacar sus características o valores más relevantes hablaremos de **parámetros de centralización**. Para determinar la *representatividad* de estos parámetros, esto es, cuál es la situación de los valores de la tabla respecto de un parámetro central, utilizaremos los **parámetros de dispersión**.

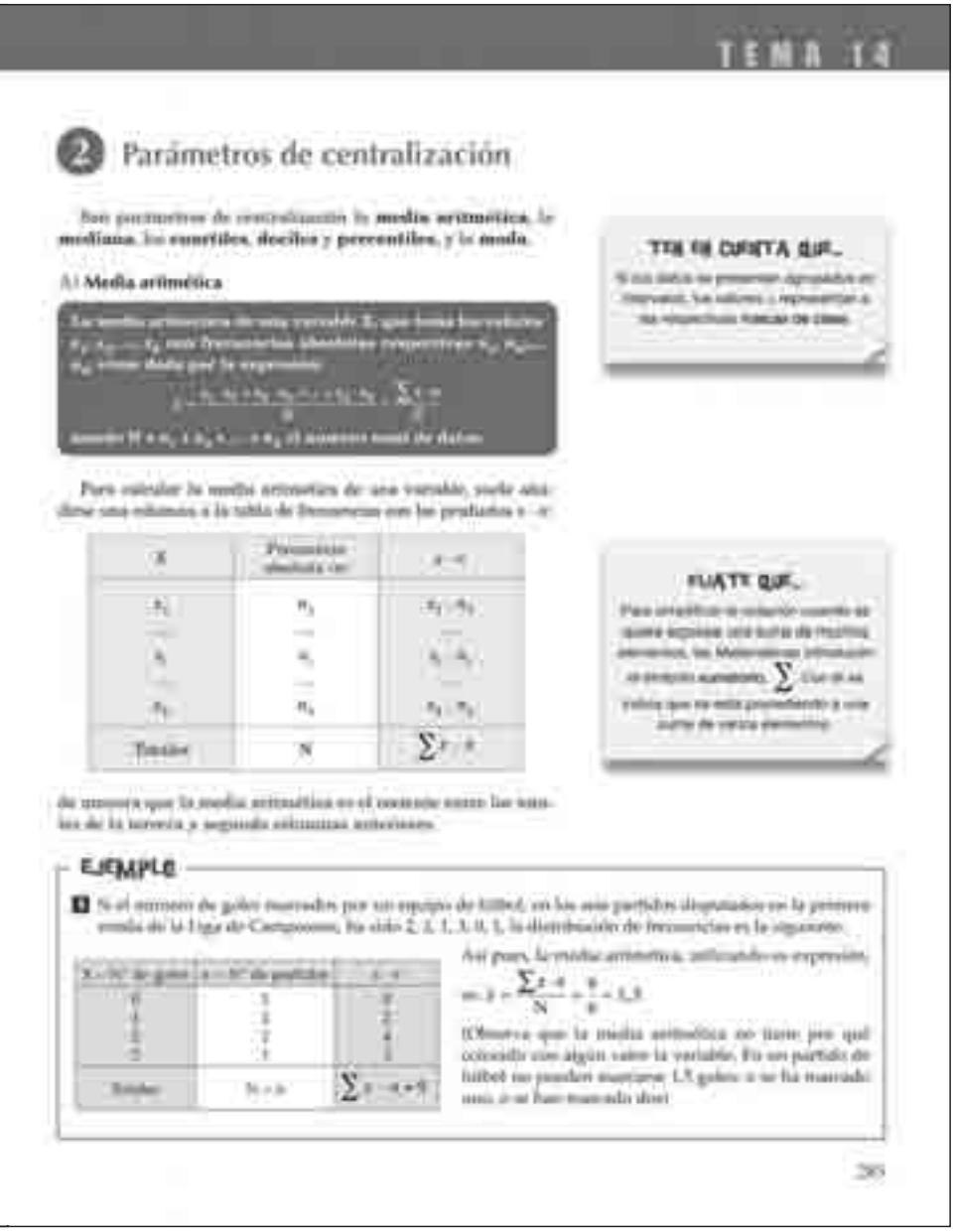
284

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS

Destacar la utilidad de los parámetros estadísticos a la hora de trabajar con ellos y no tener que hacerlo con la tabla de frecuencias de la que proceden.

Trabajar con la web del INE, www.ine.es. Elegir en ella una tabla de frecuencias y, atendiendo a la naturaleza de la variable elegida, formularse preguntas relacionadas con ella y que pueden contestarse calculando sus respectivos parámetros.

▶ Pág. 285. 2 Parámetros de centralización



TEMA 14

2 Parámetros de centralización

Son parámetros de centralización la **media aritmética**, la **mediana**, los **cuartiles**, **deciles** y **percentiles**, y la **moda**.

A) **Media aritmética**

La media aritmética de una variable Σ que toma los valores $x_1, x_2, \ldots, x_n$ con frecuencias absolutas respectivas $n_1, n_2, \ldots, n_n$ viene dada por la expresión:

$$\bar{x} = \frac{x_1 \cdot n_1 + x_2 \cdot n_2 + \ldots + x_n \cdot n_n}{N} = \frac{\sum x \cdot n}{N}$$

donde $N = n_1 + n_2 + \ldots + n_n$ el número total de datos.

Para calcular la media aritmética de una variable, suele añadirse una columna a la tabla de frecuencias con los productos $x \cdot n$:

x	Frecuencia absoluta (n)	$x \cdot n$
x_1	n_1	$x_1 \cdot n_1$
...	...	...
x_i	n_i	$x_i \cdot n_i$
...	...	...
x_n	n_n	$x_n \cdot n_n$
Totales	N	$\sum x \cdot n$

de manera que la media aritmética es el cociente entre las sumas de la tercera y segunda columnas anteriores.

TEN EN CUENTA QUE...

Si los datos se presentan agrupados en intervalos, los valores x_i representan a los respectivos marcas de clase.

FIJATE QUE...

Para simplificar la notación usamos en ocasiones una suma de muchos elementos, las Matemáticas introducen el símbolo sumatorio, $\sum$. Con él se indica que se está procediendo a una suma de varios elementos.

EJEMPLO

1 Si el número de goles marcados por un equipo de fútbol, en los seis partidos disputados en la primera vuelta de la Liga de Campeones, ha sido 2, 1, 1, 3, 0, 1, la distribución de frecuencias es la siguiente:

x_i = Nº de goles	n_i = Nº de partidos	$x_i \cdot n_i$
0	1	0
1	3	3
2	1	2
3	1	3
Totales	$N = 6$	$\sum x \cdot n = 8$

Así pues, la media aritmética, utilizando su expresión, es:

$$\bar{x} = \frac{\sum x \cdot n}{N} = \frac{8}{6} = 1{,}3$$

Observa que la media aritmética no tiene por qué coincidir con algún valor la variable. En un partido de fútbol no pueden marcarse 1,3 goles: o se ha marcado uno, o se han marcado dos.

285

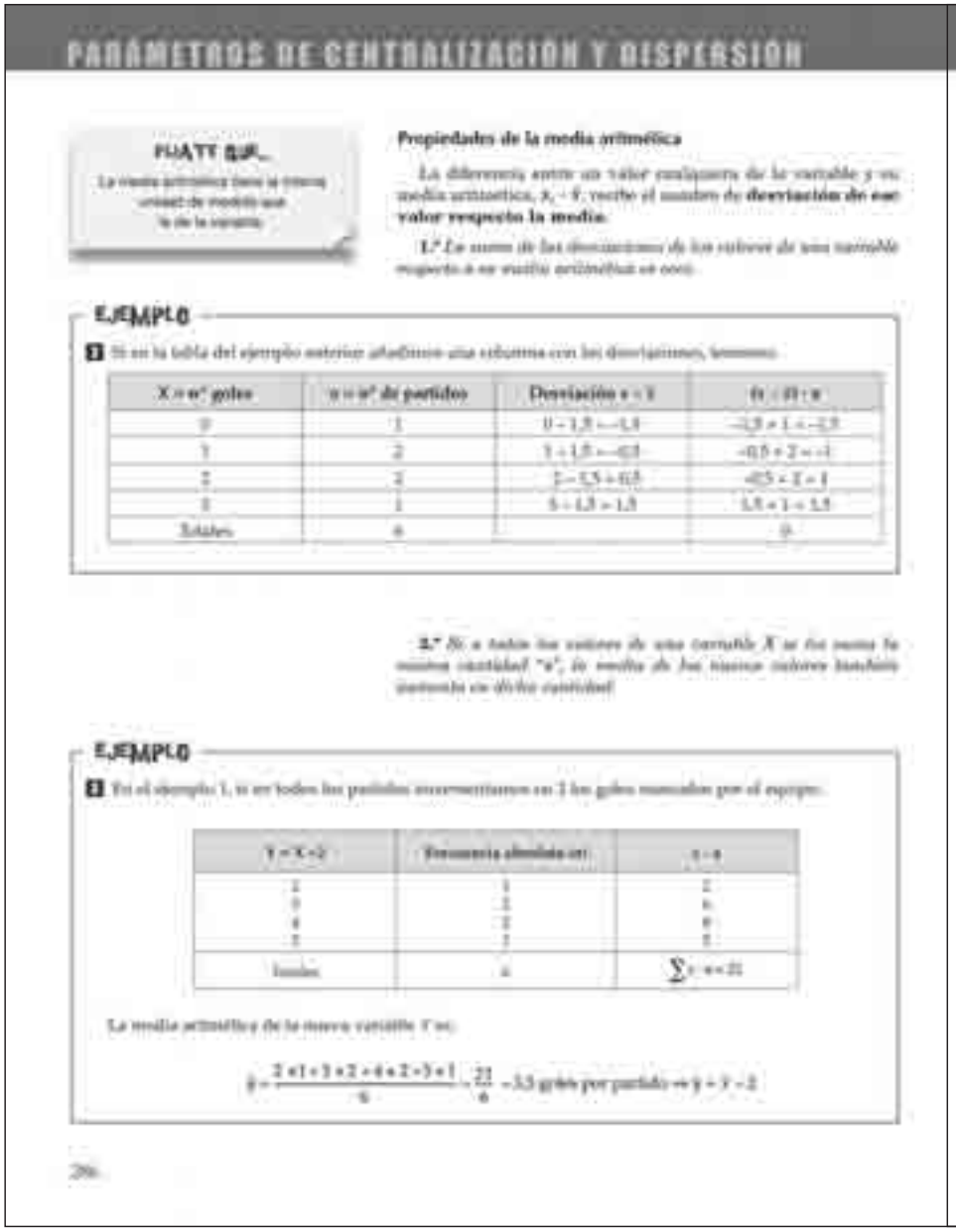
ORIENTACIONES DIDÁCTICAS

Plantear una situación en la que la existencia de uno o unos pocos valores atípicos invaliden la representatividad de la media aritmética.

Discutir sobre la "centralidad" de la moda, que sí la tienen la media aritmética y la mediana.

Plantear una variable definida para los alumnos de una clase. Sobre la tabla de frecuencias correspondiente calcular los parámetros de centralización.

▶ Pág. 286



PARÁMETROS DE CENTRALIZACIÓN Y DISPERSIÓN

Propiedades de la media aritmética

La diferencia entre un valor cualquiera de la variable y su media aritmética, $x_i - \bar{x}$, recibe el nombre de **desviación de ese valor respecto la media**.

1.ª La suma de las desviaciones de los valores de una variable respecto a su media aritmética es cero.

EJEMPLO

Si en la tabla del ejemplo anterior añadimos una columna con las desviaciones, tenemos:

X = nº goles	n = nº de partidos	Desviación $x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x}) \cdot n_i$
0	1	$0 - 1{,}5 = -1{,}5$	$-1{,}5 \cdot 1 = -1{,}5$
1	2	$1 - 1{,}5 = -0{,}5$	$-0{,}5 \cdot 2 = -1$
2	2	$2 - 1{,}5 = 0{,}5$	$0{,}5 \cdot 2 = 1$
3	1	$3 - 1{,}5 = 1{,}5$	$1{,}5 \cdot 1 = 1{,}5$
Totales	6		0

2.ª Si a todos los valores de una variable X se les suma la misma cantidad "a", la media de los nuevos valores también aumenta en dicha cantidad.

EJEMPLO

En el ejemplo 1, si en todos los partidos anteriormente en 2 los goles marcados por el equipo:

Y = X + 2	Frecuencia absoluta n_i	$y_i \cdot n_i$
2	1	2
3	2	6
4	2	8
5	1	5
Totales	6	$\sum y_i \cdot n_i = 21$

La media aritmética de la nueva variable Y es:

$$\bar{y} = \frac{2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 2 + 5 \cdot 1}{6} = \frac{21}{6} = 3{,}5 \text{ goles por partido} \Rightarrow \bar{y} = \bar{x} + 2$$

▶ Pág. 287

3.ª *Si a todos los valores de una variable X se les multiplica por la misma cantidad "b", la media de los nuevos valores también quedará multiplicada por dicha cantidad.*

EJEMPLO

En el ejemplo 1, si multiplicamos por 5 los goles marcados por el equipo en todos los partidos:

$Y = 5X$	Frecuencia absoluta (n_i)	$x_i \cdot n_i$
0	5	0
5	2	5
10	2	12
15	1	15
Totales	n	$\sum x_i \cdot n_i = 27$

La media aritmética de la nueva variable Y es:

$$\bar{y} = \frac{0 \cdot 5 + 5 \cdot 2 + 10 \cdot 2 + 15 \cdot 1}{9} = \frac{27}{6} = 4{,}5 \text{ goles por partido es } \bar{y} = 5\bar{x}$$

Las propiedades 2.ª y 3.ª aparecen se resumen en una:

Si Y es una variable que guarda con otra, X, la relación $Y = b \cdot X + a$, entonces las medias aritméticas guardan la misma relación: $\bar{y} = b \cdot \bar{x} + a$.

EJEMPLO

Para alquilar una grúa de feria debe pagar un importe fijo, de 1,5 euros, más 2,3 euros por cada hora de juego. Por término medio, sus partidas de feria suelen durar 3,6 horas. Denotando por I (en euros) el importe del alquiler y por H el tiempo (en horas) de juego, el importe del alquiler de la grúa de feria será:

$$I = 1{,}5 + 2{,}3 \cdot H$$

De ahí que la media aritmética de I sea: $\bar{I} = 1{,}5 + 2{,}3 \cdot \bar{H} = 1{,}5 + 2{,}3 \cdot 3{,}6 = 9{,}78$ euros

La media aritmética, como medida de centralización, presenta las siguientes ventajas: su interpretación es clara, se halla de un valor único para cada conjunto de datos. Estas ventajas hacen de la media aritmética la más utilizada como medida de centralización.



No obstante, el hecho de que en el cálculo de la media aritmética intervengan todos los datos puede llegar a invalidar su utilidad. Se trata de aquellos casos en los que existe algún **dato atípico**, esto es, un valor o extremadamente pequeño o extremadamente grande respecto a los demás, que puede arrastrar a la media aritmética hacia un valor no central y, por ello, no representativo de todo el conjunto.

287

▶ Pág. 288



PARÁMETROS DE CENTRALIZACIÓN Y DISPERSIÓN

EJEMPLO

1 Un concesionario de coches tiene en plantilla a diez vendedores. En el último mes dos de ellos vendieron 6 vehículos, tres vendedores vendieron 8 coches, otros tres vendedores formalizaron la venta de 9 unidades, un vendedor consiguió vender diez coches y, finalmente, el último vendedor fue capaz de vender 14 vehículos. La media de coches vendidos por vendedor es de 21,6, valor que está influenciado por las extraordinarias ventas del último de ellos, y no representa bien el trabajo para el conjunto del concesionario en donde las ventas por empleado oscilan entre 6 y 10 coches vendidos.

ADVIERTE QUE...

Anteriormente se definió la mediana de un dibujo ordenado.

11 La Mediana

La mediana es otro parámetro de centralización que no tiene el inconveniente comentado para la media aritmética, puesto que intenta caracterizar la posición de equilibrio entre las frecuencias observadas a uno y otro lado de ella. Es de aplicación tanto para variables cuya naturaleza admite una ordenación natural.

La mediana de una variable se define como el valor tal que la mitad de valores de la variable quedan por debajo o son iguales a él, y la otra mitad son iguales o superiores al mismo.

Para obtener la mediana de una variable distinguiremos según que el número de datos sea par o impar. Si la variable tiene un número impar de datos, la mediana es el valor que ocupa la posición central, una vez ordenados. Si la variable tiene un número par de datos, la mediana es la media aritmética de los datos que ocupan las posiciones centrales, una vez ordenados todos los datos.

Si los datos se presentaran agrupados en intervalos, por similitud, hablaremos de la **marca de clase mediana e intervalo mediano.**

EJEMPLO

1 Las notas obtenidas en Física por 11 alumnos de una clase (un número impar de datos) han sido las siguientes: 6, 4, 6, 5, 7, 3, 5, 3, 6, 6, 5. Para obtener la mediana, debemos ordenar las notas anteriores, de menor a mayor.

Nota	3	3	4	5	5	6	6	6	7	8	9
Posición	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	7ª	8ª	9ª	10ª	11ª

Aplicando la definición de mediana, ésta será aquella nota que ocupa la posición central, esto es, la posición sexta (pues tendrá cinco observaciones por debajo y cinco por encima). La mediana es, pues, $Me = 5$.

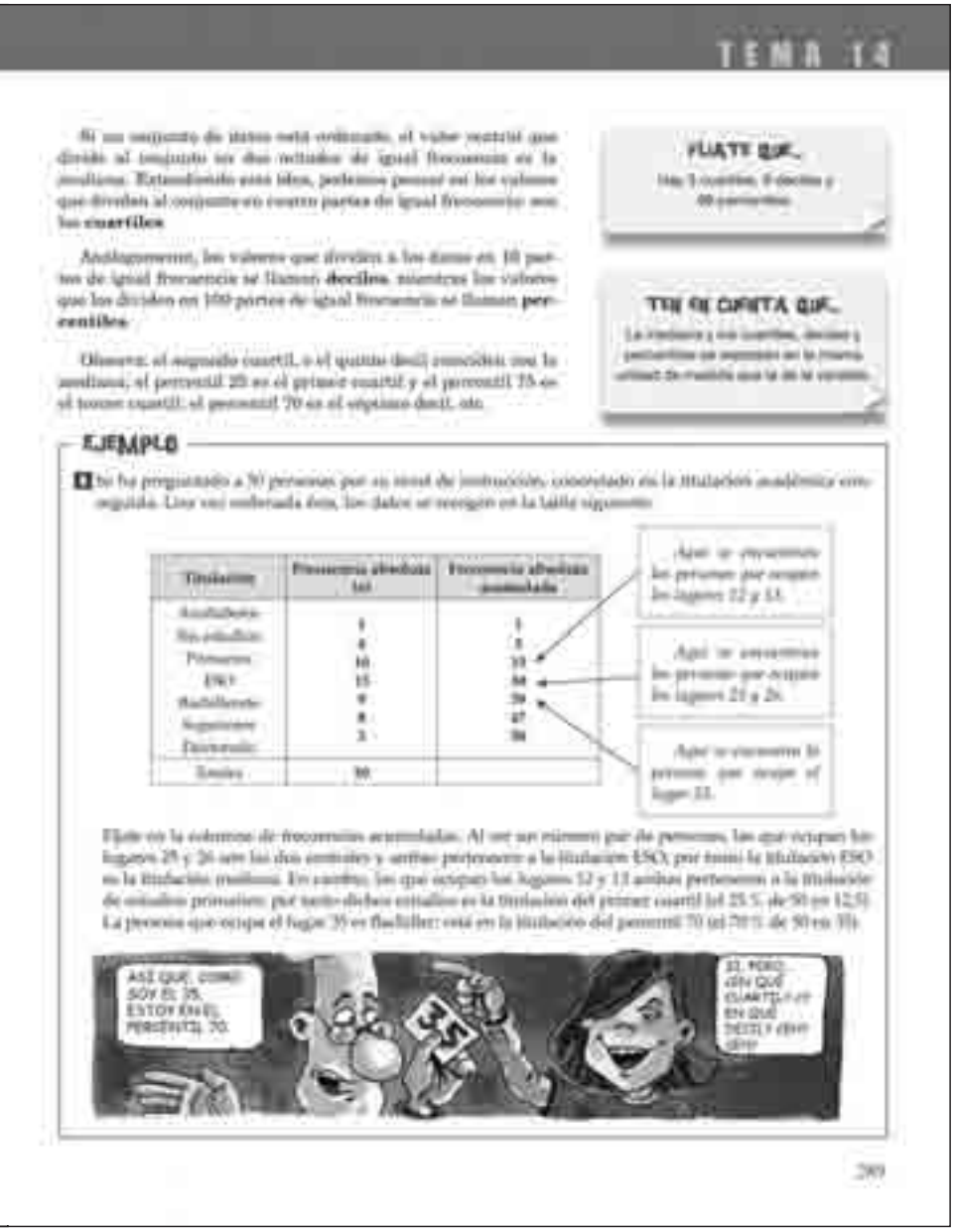
Si hubiéramos sido 10 los alumnos que se presentaron al examen de Física (un número par de datos), estudiemos calificaciones las siguientes: 3, 4, 4, 5, 7, 3, 5, 3, 4, 6. La ordenación de las mismas sería:

Nota	3	3	3	4	4	5	5	6	6	7
Posición	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	7ª	8ª	9ª	10ª

En este caso, la mediana sería la media aritmética de las notas que ocupan las posiciones quinta y sexta, en cuanto que ambas, iguales y por debajo, o iguales y por encima, tienen el mismo número de observaciones:

$$Me = \frac{4+5}{2} = 4{,}5$$

▶ Pág. 289



TEMA 14

Si un conjunto de datos está ordenado, el valor central que divide al conjunto en dos mitades de igual frecuencia es la mediana. Extendiendo esta idea, podemos pensar en los valores que dividen al conjunto en cuatro partes de igual frecuencia: son los **cuartiles**.

Análogamente, los valores que dividen a los datos en 10 partes de igual frecuencia se llaman **deciles**, mientras los valores que los dividen en 100 partes de igual frecuencia se llaman **percentiles**.

Observa: el segundo cuartil, o el quinto decil coinciden con la mediana; el percentil 20 es el primer cuartil y el percentil 75 es el tercer cuartil; el percentil 70 es el séptimo decil, etc.

FIJATE QUE...

Hay 3 cuartiles, 9 deciles y 99 percentiles.

TEN EN CUENTA QUE...

La mediana y los cuartiles, deciles y percentiles se expresan en la misma unidad de medida que la de la variable.

EJEMPLO

Se ha preguntado a 50 personas por su nivel de instrucción, concretado en la titulación académica conseguida. Una vez ordenada esta, los datos se recogen en la tabla siguiente:

Titulación	Frecuencia absoluta (n_i)	Frecuencia absoluta acumulada
Analfabeto	1	1
Sin estudios	4	5
Primarios	10	15
ESO	15	30
Bachillerato	9	39
Superiores	8	47
Doctorado	3	50
Totales	50	

Aquí se encuentran las personas que ocupan los lugares 12 y 13.

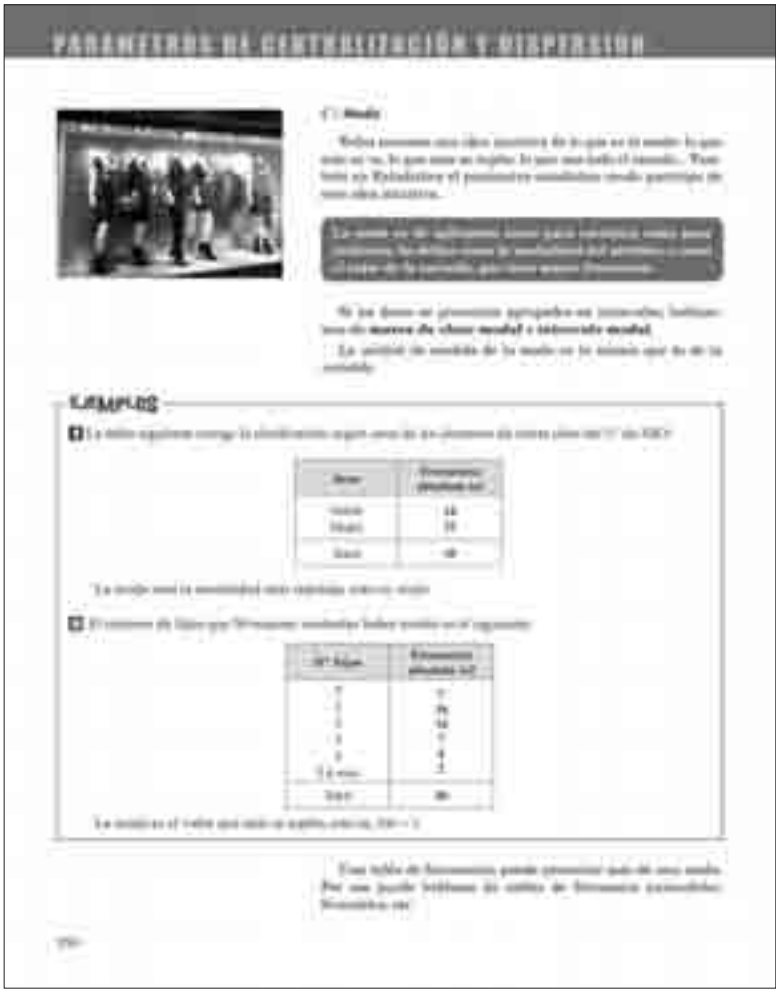
Aquí se encuentran las personas que ocupan los lugares 25 y 26.

Aquí se encuentran las personas que ocupan el lugar 33.

Fíjate en la columna de frecuencias acumuladas. Al ser un número par de personas, las que ocupan los lugares 25 y 26 son las dos centrales y ambas pertenecen a la titulación ESO; por tanto la titulación ESO es la titulación mediana. En cambio, las que ocupan los lugares 12 y 13 ambas pertenecen a la titulación de estudios primarios; por tanto dichos estudios es la titulación del primer cuartil (el 25 % de 50 es 12,5). La persona que ocupa el lugar 35 es fácilmente está en la titulación del percentil 70 (el 70 % de 50 es 35).

289

▶ Pág. 290



SOLUCIONARIO

1. Las respuestas proporcionadas por los alumnos de una clase al ser preguntados por el número de hermanos que tenían, se recogen en la siguiente tabla:

N.° hermanos	Frecuencia absoluta (n)
0	6
1	10
2	12
3	3
4	3
5	2
Total	36

A partir de esta tabla determinar la correspondiente media aritmética, mediana y moda de la variable "n.º de hermanos" para los alumnos de la clase.

Esta es la mayor frecuencia

Aquí están las observaciones 18 y 19

x = N.° hermanos	Frecuencia absoluta (n)	$x \cdot n$	Frecuencia absoluta acumulada
0	**6**	0	**6**
1	**10**	10	**16**
2	**12**	24	**28**
3	**3**	9	**31**
4	**3**	12	**34**
5	**2**	10	**36**
Total	N = 36	$\sum x \cdot n = 65$	

$$\bar{x} = \frac{\sum x \cdot n}{N} = \frac{65}{36} = 1{,}81 \text{ hermanos}$$

$$M_e = \frac{\text{valor de la observación n°18} + \text{valor de la observación n°19}}{2} =$$

$$= \frac{2+2}{2} = 2 \text{ hermanos}$$

2. A una muestra de 100 personas se les ha preguntado por su titulación académica. Las respuestas han sido las siguientes:

Titulación	Frecuencia absoluta (n)
Analfabetos	5
Sin estudios	15
Primaria	27
ESO	23
Bachillerato	15
Diplomatura Universitaria	8
Licenciatura	6
Doctorado	1
Total	100

Calcula la mediana y la moda del atributo "titulación".

▶ Pág. 291



Esta es la mayor frecuencia

Aquí están las observaciones 50 y 51

Titulación	Frecuencia absoluta (n)	Frecuencia acumulada
Analfabetos	5	5
Sin estudios	15	20
Primaria	27	47
ESO	23	70
Bachillerato	15	85
Diplomatura Universitaria	8	93
Licenciatura	6	99
Doctorado	1	100
Total	100	

Me = ESO
Mo = Primaria

3. La media aritmética de una variable X es $\bar{x}$ = 2,1. Calcula la media aritmética de las siguientes variables:

a) $Y_1 = 5X$

$y_1 = 5x \to \bar{y}_1 = 5 \cdot \bar{x} = 5 \times 2{,}1 = 10{,}5$

b) $Y_2 = X + 7$

$y_2 = x + 7 \to \bar{y}_2 = \bar{x} + 7 = 2{,}1 + 7 = 9{,}1$

c) $Y_3 = 5X + 7$

$y_3 = 5x + 7 \to \bar{y}_3 = 5\bar{x} + 7 = 5 \times 2{,}1 + 7 = 17{,}5$

4. El coste de una llamada realizada a través de un teléfono móvil tiene dos componentes: una cuota fija por establecimiento de llamada, de 0,12 euros, más 0,22 euros por el tiempo (expresado en minutos) que dure la conversación. Si en el año 2009 el tiempo medio que duraron mis llamadas fue de 4,6 minutos, calcula: a) para la variable "Importe de una llamada con mi teléfono móvil antes de impuestos indirectos" su media aritmética; b) Idem, para la variable "Importe de una llamada con mi teléfono móvil incluyendo los impuestos indirectos (el IVA)", sabiendo que el tipo impositivo del IVA para las llamadas telefónicas era del 16%.

a) x = tiempo (en minutos);

y = importe llamada sin IVA (en €);

$y = 0{,}22x + 0{,}12 \to \bar{y} = 0{,}22\bar{x} + 0{,}12 =$

$= 0{,}22 \times 4{,}6 + 0{,}12 = 1{,}13$ €

b) V= importe llamada con IVA (en €)

$V = 1{,}16y \to \bar{V} = 1{,}16 \times 1{,}13 = 1{,}31$ €

▶ Pág. 292. 3 Parámetros de dispersión



PARÁMETROS DE CENTRALIZACIÓN Y DISPERSIÓN

3 Parámetros de dispersión

En ocasión la afirmación de que hay tres tipos de mentiras: las falsedades, las medias verdades y las estadísticas. Y para ilustrarlo se presenta el caso que plantea el reparto de un pollo entre dos personas, una rica y otra pobre: el rico se come todo el pollo —sin lo que queda asiado—, mientras que el pobre se queda sin comer. Y se concluye afirmando que la Estadística presenta una buena situación, al afirmar que, por término medio, todos han comido medio pollo, con lo que se encuentran igualmente satisfechos.

Detrás de la anterior hay una pregunta relevante: ¿hasta qué punto puede creer en una media aritmética, de forma que no suponga un error apreciable al utilizarla como descripción de un conjunto de datos? La Estadística va a resolverla —en cierto...—, definiendo las **medidas o parámetros de dispersión**.

El **rango** o **recorrido**, definido en el tema anterior, puede considerarse como una medida de dispersión muy sencilla, pues ofrece la dimensión del abanico de valores que puede tomar una variable. Sin embargo, las verdaderas medidas de dispersión miden el grado de alejamiento o separación de las observaciones respecto los parámetros de centralización. Sobre cada parámetro de centralización puede definirse una o varias medidas de dispersión. Nosotros, sin embargo, sólo vamos a considerar la varianza y la desviación típica, ambas medidas de dispersión ligadas a la media aritmética.

OBSERVA QUE...

La varianza es la media aritmética de los cuadrados de las desviaciones.

A) La varianza y la desviación típica

La **varianza** de una variable X, que toma los valores $x_1, x_2, \ldots, x_k$ con frecuencias absolutas respectivas $n_1, n_2, \ldots, n_k$, y que tiene como media $\bar{x}$, viene dada por la expresión:

$$s^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 \cdot n_1 + (x_2 - \bar{x})^2 \cdot n_2 + \ldots + (x_k - \bar{x})^2 \cdot n_k}{N} = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 \cdot n_i}{N}$$

donde $N = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$ el número total de datos.

Si los datos se presentan agrupados en intervalos, los valores x_i en la expresión anterior representan a las respectivas marcas de clase.

La varianza nunca será negativa, será más grande cuanto más alejados estén los valores de la variable a su media aritmética. Conviene la varianza sea mayor, la media aritmética pierde representatividad.

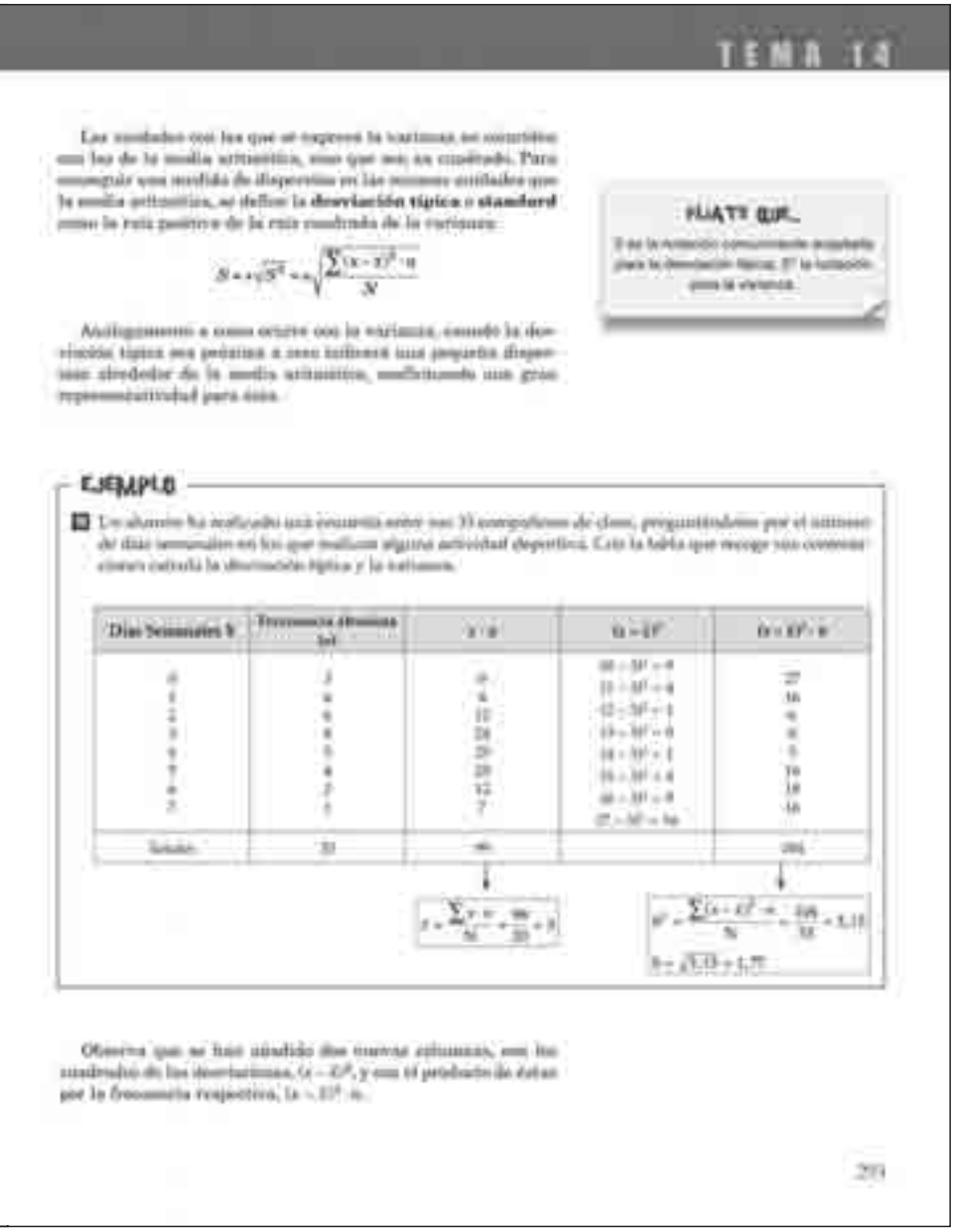
292

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS

Insistir en la diferencia entre varianza y desviación típica y justificar la importancia de que la medida de dispersión y la de centralización se expresen en las mismas unidades.

Elegir dos tablas de frecuencias de la web del INE que correspondan a variables expresadas en distintas unidades. Comparar sus dispersiones a través de una medida de dispersión relativa.

▶ Pág. 293



TEMA 14

Las unidades con las que se expresa la varianza no coinciden con las de la media aritmética, sino que son su cuadrado. Para conseguir una medida de dispersión en las mismas unidades que la media aritmética, se define la **desviación típica** o **standard** como la raíz positiva de la raíz cuadrada de la variança:

$$S = +\sqrt{S^2} = +\sqrt{\frac{\sum (x - \bar{x})^2 \cdot n}{N}}$$

Asociaremos a esta misma con la variança, cuando la desviación típica sea pequeña a cero tendrá una pequeña dispersión alrededor de la media aritmética, manifestando una gran representatividad para esta.

NOTA IMP.

S es la notación comunmente aceptada para la desviación típica, S^2 la notación para la varianza.

EJEMPLO

Un alumno ha realizado una encuesta entre sus 33 compañeros de clase, preguntándoles por el número de días semanales en los que realizan alguna actividad deportiva. Esta la tabla que recoge sus conteos (tras calcular la desviación típica y la variança.

Días Semanales x_i	Frecuencia absoluta (n_i)	$x_i \cdot n_i$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^2 \cdot n_i$
0	3	0	$(0-3)^2 = 9$	27
1	4	4	$(1-3)^2 = 4$	16
2	6	12	$(2-3)^2 = 1$	6
3	8	24	$(3-3)^2 = 0$	0
4	5	20	$(4-3)^2 = 1$	5
5	4	20	$(5-3)^2 = 4$	16
6	2	12	$(6-3)^2 = 9$	18
7	1	7	$(7-3)^2 = 16$	16
Totales	33	99		104

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i \cdot n_i}{N} = \frac{99}{33} = 3$$

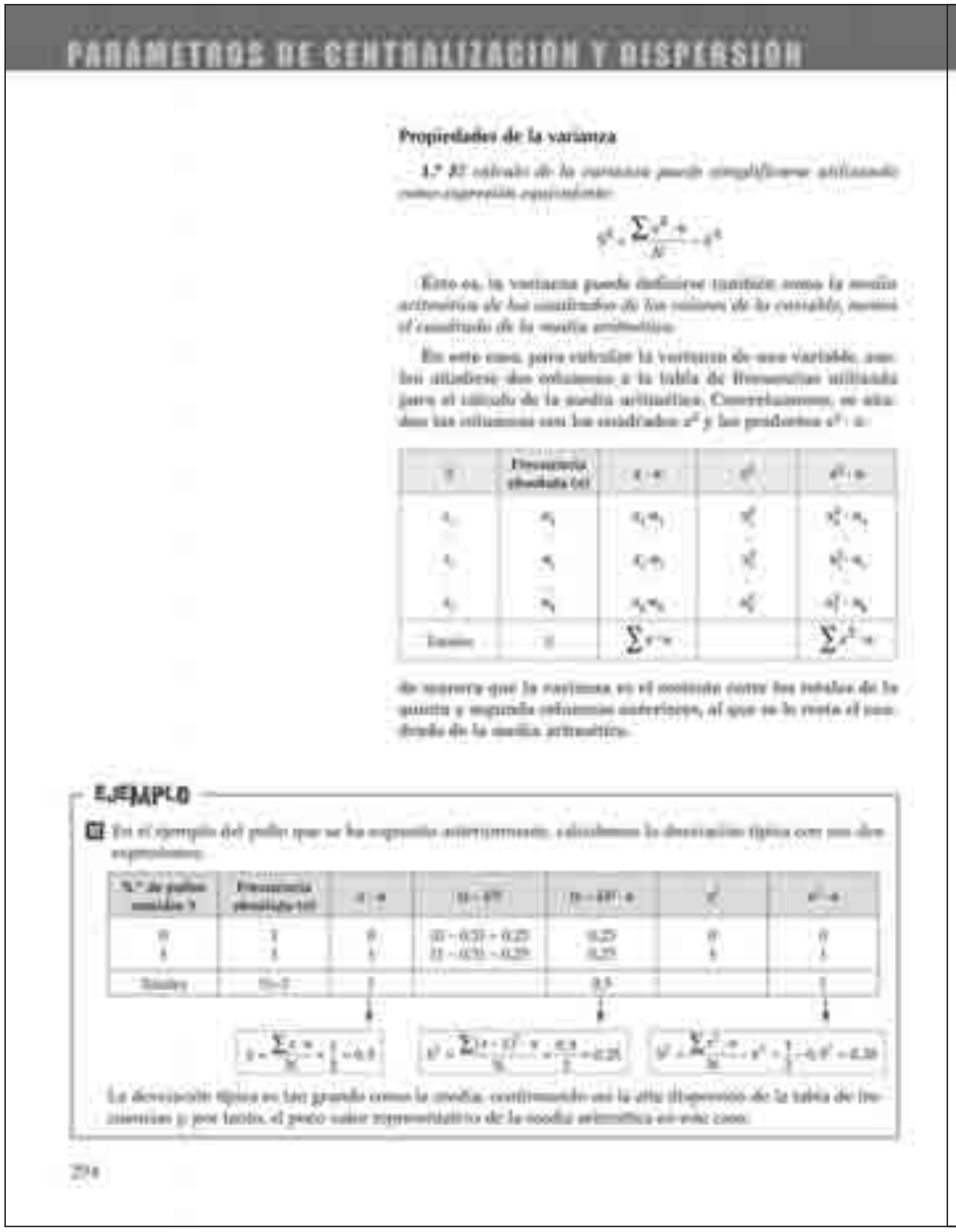
$$S^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 \cdot n_i}{N} = \frac{104}{33} = 3,15$$

$$S = \sqrt{3,15} = 1,77$$

Observa que se han añadido dos nuevas columnas, una los cuadrados de las desviaciones, $(x_i - \bar{x})^2$, y una el producto de estas por la frecuencia respectiva, $(x_i - \bar{x})^2 \cdot n_i$.

293

▶ Pág. 294



PARÁMETROS DE CENTRALIZACIÓN Y DISPERSIÓN

Propiedades de la varianza

1.ª El cálculo de la varianza puede simplificarse utilizando esta expresión equivalente:

$$\sigma^2 = \frac{\sum x_i^2 \cdot n_i}{N} - \bar{x}^2$$

Esto es, la varianza puede definirse también como la media aritmética de los cuadrados de los valores de la variable, menos el cuadrado de la media aritmética.

En este caso, para calcular la varianza de una variable, con los anteriores dos columnas a la tabla de frecuencias utilizada para el cálculo de la media aritmética. Construiremos, es decir, dos columnas con los cuadrados x^2 y los productos $x^2 \cdot n$:

x_i	Frecuencia absoluta (n_i)	$x_i \cdot n_i$	x_i^2	$x_i^2 \cdot n_i$
x_1	n_1	$x_1 n_1$	x_1^2	$x_1^2 \cdot n_1$
x_2	n_2	$x_2 n_2$	x_2^2	$x_2^2 \cdot n_2$
x_3	n_3	$x_3 n_3$	x_3^2	$x_3^2 \cdot n_3$
Totales	N	$\sum x_i \cdot n_i$		$\sum x_i^2 \cdot n_i$

de manera que la varianza es el cociente entre los totales de la quinta y segunda columnas anteriores, al que se le resta el cuadrado de la media aritmética.

EJEMPLO

En el ejemplo del pulso que se ha expuesto anteriormente, calculemos la desviación típica con sus dos expresiones:

N.º de pulso cardíaco x_i	Frecuencia absoluta (n_i)	$x_i \cdot n_i$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^2 \cdot n_i$	x_i^2	$x_i^2 \cdot n_i$
0	3	0	$(0 - 0.5)^2 = 0.25$	0.75	0	0
1	1	1	$(1 - 0.5)^2 = 0.25$	0.25	1	1
Totales	$N = 4$	1		1		1

$$\sigma = \frac{\sum x_i \cdot n_i}{N} - \bar{x}^2 = \frac{1}{4} - 0.5^2 = 0.5$$

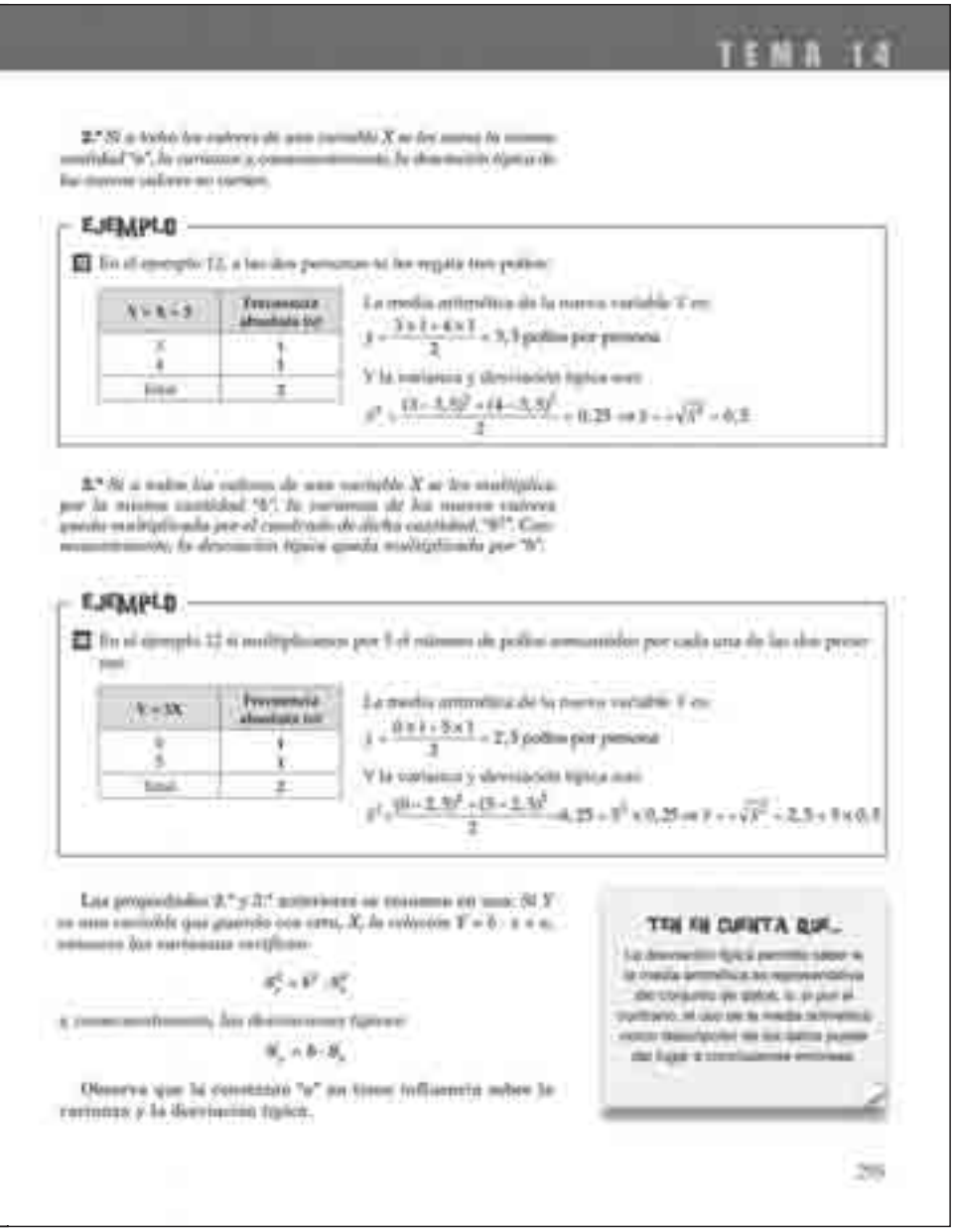
$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 \cdot n_i}{N} = \frac{1}{4} = 0.25$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum x_i^2 \cdot n_i}{N} - \bar{x}^2 = \frac{1}{4} - 0.5^2 = 0.25$$

La desviación típica es tan grande como la media, confirmando así la alta dispersión de la tabla de frecuencias y, por tanto, el poco valor representativo de la media aritmética en este caso.

294

▶ Pág. 295



TEMA 14

2.ª *Si a todos los valores de una variable X se les suma la misma cantidad "a", la varianza y consecuentemente, la desviación típica de los nuevos valores no varían.*

EJEMPLO

En el ejemplo 12, a las dos personas se les regala tres pelotas:

$Y = X + 3$	Frecuencia absoluta (n_i)
3	1
4	1
total	2

La media aritmética de la nueva variable Y es:

$\bar{y} = \frac{3 \times 1 + 4 \times 1}{2} = 3{,}5$ pelotas por persona

Y la varianza y desviación típica son:

$\sigma_y^2 = \frac{(3 - 3{,}5)^2 + (4 - 3{,}5)^2}{2} = 0{,}25 \Rightarrow \sigma_y = \sqrt{\sigma_y^2} = 0{,}5$

3.ª *Si a todos los valores de una variable X se les multiplica por la misma cantidad "b", la varianza de los nuevos valores queda multiplicada por el cuadrado de dicha cantidad, "b". Consecuentemente, la desviación típica queda multiplicada por "b".*

EJEMPLO

En el ejemplo 12 si multiplicamos por 3 el número de pelotas aportadas por cada una de las dos personas:

$Y = 3X$	Frecuencia absoluta (n_i)
0	1
3	1
total	2

La media aritmética de la nueva variable Y es:

$\bar{y} = \frac{0 \times 1 + 3 \times 1}{2} = 1{,}5$ pelotas por persona

Y la varianza y desviación típica son:

$\sigma_y^2 = \frac{(0 - 1{,}5)^2 + (3 - 1{,}5)^2}{2} = 2{,}25 = 3^2 \times 0{,}25 \Rightarrow \sigma_y = \sqrt{\sigma_y^2} = 1{,}5 = 3 \times 0{,}5$

Las propiedades 2.ª y 3.ª anteriores se resumen en una: *Si Y es una variable que guarda con otra, X, la relación $Y = b \cdot x + a$, entonces las varianzas verifican:*

$$\sigma_y^2 = b^2 \cdot \sigma_x^2$$

y consecuentemente, las desviaciones típicas:

$$\sigma_y = b \cdot \sigma_x$$

Observa que la constante "a" no tiene influencia sobre la varianza y la desviación típica.

TEN EN CUENTA QUE...

La desviación típica permite saber si la media aritmética es representativa del conjunto de datos, o, si por el contrario, el uso de la media aritmética como descriptor de los datos puede dar lugar a conclusiones erróneas.

295

▶ Pág. 296



SOLUCIONARIO

5. Calcula la varianza y desviación típica con los datos de la tabla del ejercicio 1.

x = Nº hermanos	Frecuencia absoluta	x^2	$x^2 \cdot n$
0	6	0	0
1	10	1	10
2	12	4	48
3	3	9	27
4	3	16	48
5	2	25	50
Total	N = 36		$\sum x^2 \cdot n = 183$

$\bar{x} = 1,81$ (ver ejercicio 1)

$$S^2 = \frac{\sum x^2 \times n}{N} - \bar{x}^2 = \frac{183}{36} - 1,81^2 = 1,81$$

$$S = \sqrt{S^2} = 1,34$$

6. Si la varianza de la variable X es $S^2 = 1,21$, calcula la varianza y desviación típica de las siguientes variables:

a) $Y_1 = 5X \rightarrow S^2_{y_1} = 5^2 \times S^2_x = 25 \times 1,21 = 30,25 \rightarrow S_{y_1} = \sqrt{30,25} = 5,5$

b) $Y_2 = X + 7 \rightarrow S^2_x = S^2_{y_2} = 1,21 \rightarrow S_{y_2} = \sqrt{1,21} = 1,1$

c) $Y_3 = 5X + 7 \rightarrow S^2_{y_3} = 5^2 \times S^2_x = 25 \times 1,21 = 30,25 \rightarrow S_{y_3} = \sqrt{30,25} = 5,5$

7. En el ejercicio 4, si la desviación típica que duran mis llamadas es de 2,7 minutos, calcular: *a)* para la variable "Importe de una llamada con mi teléfono móvil antes de impuestos indirectos" la varianza y desviación típica; *b)* Idem, para la variable "Importe de una llamada con mi teléfono móvil incluyendo los impuestos indirectos (el IVA)", sabiendo que el tipo impositivo del IVA para las llamadas telefónicas era en el año 2009 del 16 %.

a) X = tiempo (en minutos); Y = importe llamada sin IVA (en €);

$$Y = 0,22x + 0,12 \rightarrow S^2_y = 0,22^2 \times S^2_x = 0,22^2 \times 2,7^2 = 0,353 \rightarrow S = \sqrt{0,353} = 0,594$$

b) V = importe llamada con IVA (en €)

$$V = 1,16y \rightarrow S^2_v = 1,16^2 \times S^2_v = 1,16^2 \times 0,353 = 0,475 \rightarrow S = \sqrt{0,475} = 0,689$$

▶ Pág. 297. 4 Uso de la calculadora



4 Uso de la calculadora. Los paquetes estadísticos

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS

Manejar una calculadora científica en modo estadístico, para apreciar su utilidad en el cálculo de la media y la varianza.

Hacer lo mismo con una hoja EXCEL, y apreciar la cantidad de parámetros que pueden calcularse con ella.

8. Sabiendo que la media aritmética de la variable X en el ejercicio 6 es $\bar{x} = 5$, calcula el coeficiente de variación de las variables Y_1, Y_2 y Y_3. ¿Para cuál de estas variables la dispersión relativa es mayor?

a) Para $Y_1 = 5X \rightarrow \bar{Y}_1 = 5\bar{X} = 5 \times 5 = 25 \rightarrow CV_{Y_1} = \dfrac{Sy_1}{\bar{Y}_1} = \dfrac{5,5}{25} = 0,22$

b) Para $Y_2 = X + 7 \rightarrow \bar{Y}_2 = \bar{X} + 7 = 5 + 7 = 12 \rightarrow CV_{Y_2} = \dfrac{Sy_2}{\bar{Y}_2} = \dfrac{1,1}{12} = 0,09$

c) Para $\bar{Y}_3 = 5X + 7 \rightarrow \bar{Y}_3 = 5\bar{X} + 7 = 5 \times 5 + 7 \rightarrow CV_{Y_3} = \dfrac{Sy_3}{\bar{Y}_3} = \dfrac{5,50}{32} = 0,17$

La mayor dispersión relativa corresponde a la variable Y_1.

▶ Pág. 300. Ejercicios



PARÁMETROS DE CENTRALIZACIÓN Y DISPERSIÓN

EJERCICIOS

SOLUCIONARIO

9. Preguntados los alumnos de una clase por el número de veces que han ido al cine el último mes, sus respuestas fueron:

3, 1, 0, 2, 1, 1, 2, 4, 4, 2, 1, 5, 2, 3, 1, 1, 2, 1
1, 2, 2, 2, 2, 1, 0, 0, 5, 2, 2, 3, 1, 0, 2, 2, 2, 1, 2

Construye la tabla de frecuencias y calcula la media, la moda, la mediana, los cuartiles, la desviación típica y el coeficiente de variación.

esta es la mayor frecuencia

aquí están las observaciones nº 9 y 10

x = Nº hermanos	Frecuencia absoluta (n)	$x \cdot n$	x^2	$x^2 \cdot n$	Frecuencia absoluta acumulada
0	4	0	0	0	4
1	11	11	1	1	(15)
2	(14)	28	4	56	(29)
3	3	9	9	27	32
4	2	8	16	32	34
5	2	10	25	50	36
Total	N = 36	$\sum x \cdot n = 66$		$\sum x^2 \cdot n = 166$	

aquí están las observaciones nº 18 y 19

aquí están las observaciones nº 27 y 28

$\bar{x} = \frac{\sum x \cdot n}{N} = \frac{66}{36} = 1,83$; Mo = 2; Me = 2º cuartil = 2; 3º cuartil = 1; 1º cuartil = 1

$CV_x = \frac{S}{\bar{x}} = \frac{1,26}{1,83} = 0,69$; $S = \sqrt{\frac{\sum x^2 n}{N} - \bar{x}^2} = \sqrt{\frac{166}{36} - 1,83^2} = 1,26$

10. He aquí los pesos, en kilos, de un grupo de alumnos de 3.º

45, 42, 48, 46, 39, 57, 48, 57, 68, 64, 56, 48, 60, 53, 58, 72, 59, 46, 62, 53, 59, 64, 70, 56, 62, 48, 56, 61, 58, 50, 48, 53, 58, 59, 62.

a) Calcula la media, la moda, la mediana y los cuartiles de esta distribución.

x = Nº hermanos	Frecuencia absoluta (n)	$x \cdot n$	x^2	$x^2 \cdot n$	Frecuencia absoluta acumulada
39	1	39	1521	1521	1
42	1	42	1764	1764	2
45	1	45	2025	2025	3
46	2	92	2116	4232	5
48	(5)	240	2304	11520	(10)
50	1	50	2500	2500	11
53	3	159	2809	8427	14
56	3	168	3136	9408	(17)
57	2	114	3249	6498	19
58	3	174	3364	10092	22
59	3	177	3481	10443	25
60	1	60	3600	3600	(26)
61	1	61	3721	3721	(27)
62	3	186	3844	11532	30
64	2	128	4096	8192	32
68	1	68	4624	4624	33
70	1	70	4900	4900	34
72	1	72	5184	5184	35
Total	N = 36	$\sum x \cdot n = 1945$		$\sum x^2 \cdot n = 110183$	

esta es la mayor frecuencia

aquí estan las observaciones nº 8 y 9.

aquí esta la observación nº 17

aquí esta la observación nº 26

aquí esta la observación nº 27

$\bar{x} = \frac{\sum x \cdot n}{N} = \frac{1945}{35} = 55,57$ Mo = 48

Me = 2º cuartil = 57, 1er cuartil = 10, 3er cuartil = $\frac{61+62}{2}$ = 61,5

b) ¿Cuál sería la moda y la media si se consideran los pesos en gramos?

Y = peso en gramos = $1000\,X \rightarrow \bar{Y} = 1000 \cdot \bar{X} = 1000 \times 55,57 = 55\,570$ gramos.

$Mo_y = 1000 \cdot Mo_x = 1000 \cdot 48 = 48\,000$ gramos

c) Calcula la desviación típica y el coeficiente de variación.

$S = \sqrt{\frac{\sum x^2 \cdot n}{N} - \bar{x}^2} = \sqrt{\frac{110183}{35} - 55,57^2} = 7,75$ $CV_x = \frac{S}{\bar{x}} = \frac{7,75}{55,57} = 0,14$

d) Agrupa los datos en intervalos de amplitud 5 kgs, y calcula la media, intervalos mediano y modal y desviación típica.

peso	frecuencia absuluta (n)	marca de clase x	$x \cdot n$	x^2	$x^2 \cdot n$	frecuencia absoluta acumulada
[35, 40[	1	37,5	37,5	1406,25	1406,25	1
[40, 45[	1	42,5	42,5	1806,25	1806,25	2
[45, 50[	8	47,5	380,0	2256,25	18050	10
[50, 55[	4	52,5	210,0	2756,25	11025	14
[55, 60[	(11)	57,5	632,5	3306,25	36368,75	(25)
[60, 65[	7	62,5	437,5	3906,25	27343,75	32
[65, 70[	1	67,5	67,5	4556,25	4556,25	33
[70, 75[	2	72,5	145,0	5256,25	10512,5	35
Total	N = 35		$\sum x \cdot n = 1952,5$		$\sum x^2 \cdot n = 111068,75$	

esta es la mayor frecuencia

aquí está la observación nº 17

$$\bar{x} = \frac{\sum x \cdot n}{N} = \frac{1952,5}{35} = 55,79$$

intervalo mediano = [55, 60[;

intervalo modal = [55, 60[

$$S = \sqrt{\frac{\sum x \cdot n}{N} - \bar{x}^2} = \sqrt{\frac{111068,75}{35} - 55,79^2} = 7,8$$

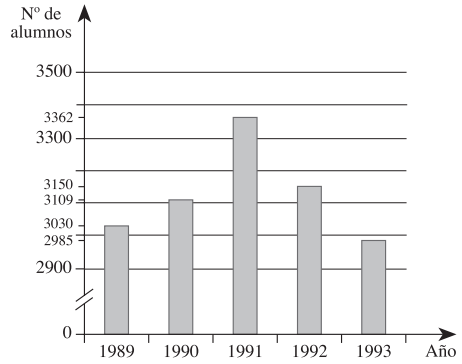
e) Comenta las diferencias entre los resultados obtenidos.

La agrupación de datos simplifica los cálculos, si bien introduce cierta arbitrariedad que se concreta en la no coincidencia entre sus resultados y los obtenidos con los datos sin agrupar.

11. El número de accidentes en zona urbana con víctimas desde 1989 a 1993, queda reflejado en la tabla:

Año	Accidentes
1989	3 030
1990	3 109
1991	3 362
1992	3 150
1993	2 985

a) Haz la representación gráfica que creas que refleja mejor el fenómeno.



b) Calcula la media de accidentes en estos cinco años.

$$\bar{x} = \frac{3030 + 3109 + 3362 + 3150 + 2985}{5} = 3127,2$$

c) ¿Qué incremento o disminución en valor absoluto y en % se ha producido en un año respecto del anterior?

Año	Accidente	Variación absoluta	Variación (en %)
1989	3030		
1990	3109	3109 – 3030 = 79	$\frac{79}{3030} \times 100 = 2,61\%$
1991	3362	3362 – 3109 = 253	$\frac{253}{3109} \times 100 = 8,14\%$
1992	3150	3150 – 3362 = –212	$\frac{-212}{3362} \times 100 = -6,31\%$
1993	2985	2985 – 3150 = –165	$\frac{-165}{3150} \times 100 = -5,24\%$

d) ¿Tiene sentido hablar de la moda de esta distribución?

No. Cada valor tiene frecuencia uno.

12. Calcula, con la siguiente información proporcionada por 200 alumnos de 3.º de ESO de cierta localidad, respecto el número de días al mes que dedican a actividades deportivas:

N.° días	N.° de alumnos
De 0 a 4	**12**
De 5 a 9	**38**
De 10 a 14	**75**
De 15 a 19	**60**
De 20 a 24	**15**
Total	**200**

Nº días	frec. absoluta	marca de clase (x)	$x \cdot n$	x^2	$x^2 \cdot n$	frecuencia absoluta acumulada
de 0 a 4	12	2,5	30	6,25	75	12
de 5 a 9	38	7,5	285	56,25	213,5	50
de 10 a 14	(75)	12,5	937,5	156,25	11718,75	(125)
de 15 a 19	60	17,5	1050	306,25	18375	185
de 20 a 24	15	22,5	337,5	506,25	7593,75	200
Total	200		$\sum x \cdot n = 2640$		$\sum x^2 \cdot n = 39900$	

esta es la mayor frecuencia

aquí estan las observaciones nº 100 y 101

a) La media aritmética.

$$\bar{x} = \frac{\sum x \cdot n}{N} = \frac{2640}{200} = 13,2$$

b) Los intervalos mediano y modal.

Intervalo mediano = [10, 15 [

Intervalo modal = [10, 15 [

c) La desviación típica.

$$S = \sqrt{\frac{\sum x^2 \cdot n}{N} - \bar{x}^2} = \sqrt{\frac{39900}{200} - 13,2^2}, = 5,03$$

13. La evolución del número de objetores de conciencia desde 1985 a 1994 es el que refleja la tabla:

Año	Número de objetores
1985	12 170
1986	6 407
1987	8 897
1988	11 049
1989	13 130
1990	27 398
1991	28 051
1992	42 454
1993	68 209
1994	77 121

a) Calcula la media.

$$\bar{X} = \frac{12170 + 6407 + \ldots + 68209 + 77121}{10} =$$

$$= \frac{294886}{10} = 29488,6$$

b) ¿Queda aceptablemente representado por la media este fenómeno? Calcula la desviación típica.

$$S = \sqrt{\frac{\sum x^2}{N} - \bar{x}^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{12170^2 + 6407^2 + \ldots + 68209^2 + 77121^2}{10} - 29488,6^2} =$$

$$= 24097,2$$

Como la desviación típica es muy alta (vale casi tanto como la media), la media aritmética no es representativa.

14. Las edades de los 40 trabajadores de una empresa son las siguientes:

17 25 43 56 42 27 33 36 42 49
52 27 18 45 56 24 43 47 36 48
23 29 31 53 26 28 41 33 57 43
18 25 42 37 39 41 47 34 52 34

a) Calcula la media, la moda, la mediana y los cuartiles de esta distribución.

x = edad	Frecuencia absoluta (n)	$x \cdot n$	x^2	$x^2 \cdot n$	Frecuencia absoluta acumulada	
17	1	17	289	289	1	
18	2	36	324	648	3	
23	1	23	529	529	4	
24	1	24	576	576	5	
25	2	50	625	1250	7	
26	1	26	676	676	8	aquí esta la observación nº 10
27	2	54	729	1458	(10)	
28	1	28	784	784	(11)	aquí esta la observación nº 11
29	1	29	841	841	12	
31	1	31	961	961	13	
33	2	66	1089	2178	15	
34	2	68	1156	2312	17	
36	2	72	1296	2592	19	aquí esta la observación nº 20
37	1	37	1369	1369	(20)	
39	1	39	1521	1521	(21)	aquí esta la observación nº 21
41	2	82	1681	3362	23	
42	(3)	126	1764	5292	26	
43	(3)	129	1849	5547	29	aquí esta la observación nº 30
45	1	45	2025	2025	(30)	
47	2	94	2209	4418	(32)	aquí esta la observación nº 31.
48	1	48	2304	2304	33	
49	1	49	2401	2401	34	
52	2	104	2704	5408	36	
53	1	53	2809	2809	37	
56	2	112	3136	6272	39	
57	1	57	3249	3249	40	
Total	40	$\sum x \cdot n = 1499$		$\sum x^2 \cdot n = 61071$		

esta es la mayor frecuencia

$$\bar{x} = \frac{\sum x \cdot n}{N} = \frac{1499}{40} = 37,475$$

Hay dos modas Mo = 42 y 43.

$$M_e = 2º \text{ cuartil} = \frac{37+39}{2} = 38$$

$$1º \text{ cuartil} = \frac{27+28}{2} = 27,5$$

$$3º \text{ cuartil} = \frac{45+47}{2} = 46$$

b) Calcula la desviación típica y el coeficiente de variación.

$$S = \sqrt{\frac{\sum x^2 \cdot n}{N} - \bar{x}^2} = \sqrt{\frac{61071}{40} - 37,475^2} = 11,06$$

$$CV_x = \frac{S}{\bar{x}} = \frac{11,06}{37,475} = 0,295$$

c) Obtén la tabla de frecuencias agrupando los datos en intervalos de amplitud 5 años.

edades	frecuencia absoluta (n)	marca de clase x	$x \cdot n$	x^2	$x^2 \cdot n$	frecuencia absoluta acumulada
[15, 20[	3	17,5	52,5	306,25	918,75	3
[20, 25[	2	22,5	45	506,25	1012,5	5
[25, 30[	7	27,5	192,5	756,25	5293,75	12
[30, 35[	5	32,5	162,5	1056,25	5281,25	17
[35, 40[	4	37,5	150	1406,25	5625	(21)
[40, 45[	(8)	42,5	340	1806,25	14450	29
[45, 50[	5	47,5	237,5	2256,25	11281,25	34
[50, 55[	3	52,5	157,5	2756,25	8268,75	37
[55, 60[	3	57,5	172,5	3306,25	9918,75	40
Total	40		$\sum x \cdot n = 1510$		$\sum x^2 \cdot n = 62050$	

esta es la mayor frecuencia

aquí estan las observaciones nº 20 y 21

d) Calcula, en la tabla de datos agrupados, la media aritmética, y los intervalos mediano y modal.

$$\bar{x} = \frac{\sum x \cdot n}{N} = \frac{1510}{40} = 37,75$$

Intervalo mediano = [35, 40[

Intervalo modal = [40, 45[

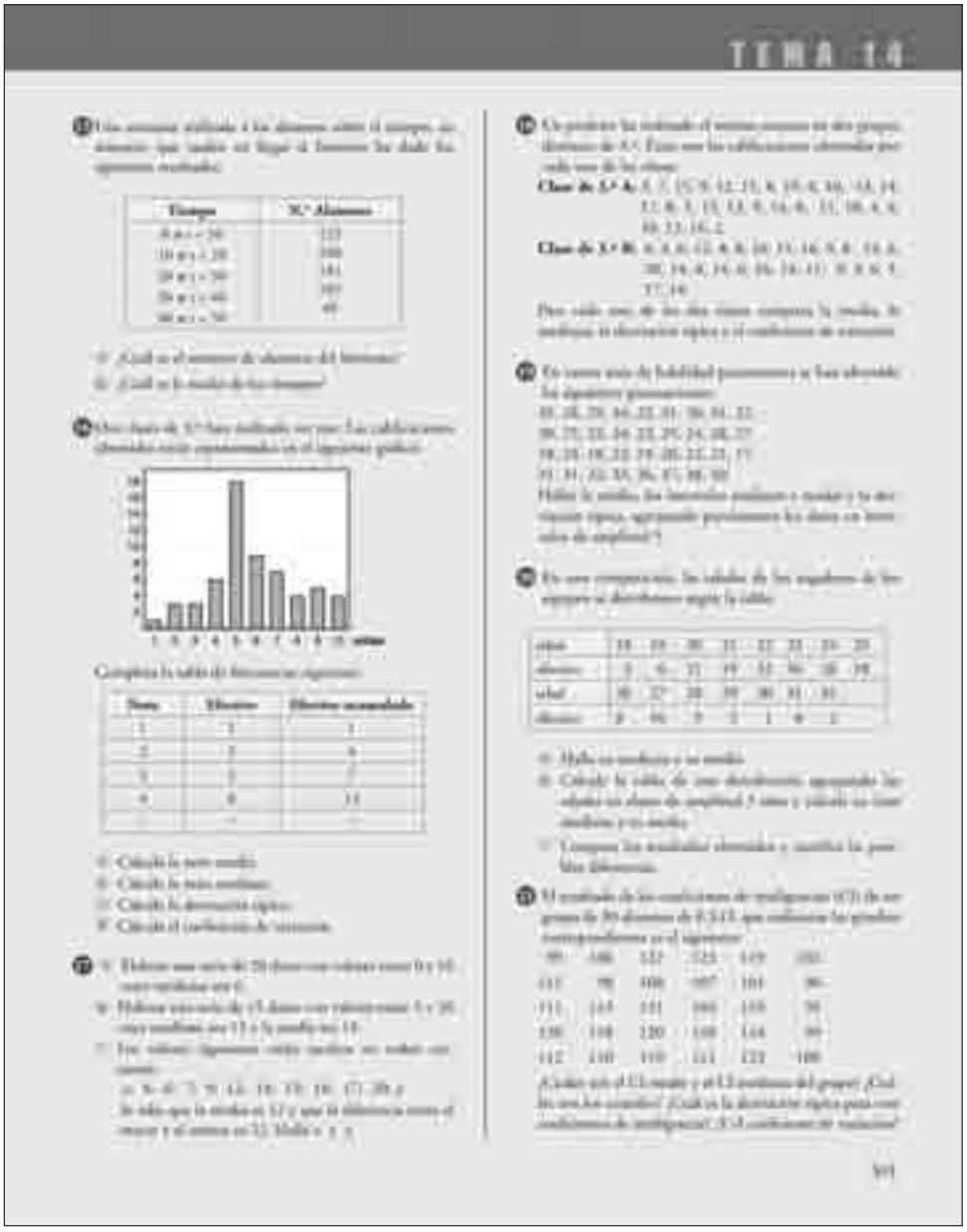
e) Calcula, en la tabla de datos agrupados, la desviación típica.

$$S = \sqrt{\frac{\sum x^2 \cdot n}{N} - \bar{x}^2} = \sqrt{\frac{62050}{40} - 37,75^2} = 11,23$$

f) Comenta las diferencias entre los resultados obtenidos.

La agrupación de datos simplifica los cálculos, si bien introduce cierta arbitrariedad en la formación de los intervalos, que se concreta en la no coincidencia entre sus resultados y los obtenidos sin agrupar.

▶ Pág. 301. Ejercicios



SOLUCIONARIO

15. Una encuesta realizada a los alumnos sobre el tiempo, en minutos, que tardan en llegar al Instituto ha dado los siguientes resultados:

Tiempo	N.° Alumnos
$0 \le t < 10$	125
$10 \le t < 20$	240
$20 \le t < 30$	181
$30 \le t < 40$	105
$40 \le t < 50$	49

x = tiempo	frecuencia absuluta (n)	marca de clase (x)	$x \cdot n$
$0 \le t < 10$	125	5	625
$10 \le t < 20$	240	15	3600
20 £ t < 30	181	25	4525
30 £ t < 40	105	35	3675
40 £ t < 50	49	45	2205
	N = 700		

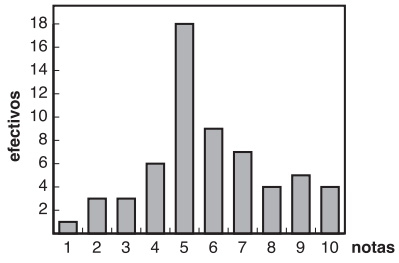
a) ¿Cuál es el número de alumnos del Instituto?

N = 700

b) ¿Cuál es la media de los tiempos?

$$\bar{x} = \frac{\sum x \cdot n}{N} = \frac{14630}{700} = 20{,}9 \text{ minutos}$$

16. Dos clases de 3.º han realizado un test. Las calificaciones obtenidas están representadas en el siguiente gráfico:



Completa la tabla de frecuencias siguiente:

Nota	Efectivo	Efectivo acumulado
1	1	1
2	3	4
3	3	7
4	6	13
...	...	...

a) Calcula la nota media.

x = nota	frecuencia absoluta (n)	$x \cdot n$	x^2	$x^2 \cdot n$	frecuencia absoluta acumulada
1	1	1	1	1	1
2	3	6	4	12	4
3	3	9	9	27	7
4	6	24	16	96	13
5	18	90	25	450	(31)
6	9	54	36	324	40
7	7	49	49	343	47
8	4	32	64	256	51
9	5	45	81	405	56
10	4	40	100	400	60
Total	60	$\sum x \cdot n = 350$		$\sum x^2 \cdot n = 2314$	

aquí estan las observaciones que ocupan los lugares nº 30 y 31

$$\bar{x} = \frac{\sum x \cdot n}{N} = \frac{350}{60} = 5,83$$

b) Calcula la nota mediana.

Me = 5

c) Calcula la desviación típica.

$$S = \sqrt{\frac{\sum x^2 \cdot n}{N} - \bar{x}^2} = \sqrt{\frac{2314}{60} - 5,83^2} = 2,14$$

d) Calcula el coeficiente de variación.

$$CV_y = \frac{S}{\bar{y}} = \frac{2,14}{5,83} = 0,37$$

17. a) Elabora una serie de 20 datos con valores entre 0 y 10 cuya mediana sea 6.

No hay una única solución. Una posible serie es la siguiente:

0 0 0 3 3 3 5 5 5 6 6 7 7 7 8 8 8 8 9 9

La tabla de frecuencias asociadas es:

x = nota	frecuencia absoluta (n)	frecuencia absoluta acumulada
0	3	3
3	3	6
5	3	9
6	2	(11)
7	3	14
8	4	18
9	2	20
Total	20	

aquí estan las observaciones que ocupan los lugares nº 10 y 11

b) Elabora una serie de 15 datos con valores entre 5 y 20 cuya mediana sea 13 y la media sea 15.

x	frecuencia absoluta (n)	frecuencia absoluta acumulada	$x \cdot n$
10	6	6	60
12	1	7	12
13	1	(8)	13
20	7	15	140
Total	N = 15	aquí está la observación que ocupa la posición nº 8	225

Me = 13 $\qquad \bar{x} = \frac{\sum x \cdot n}{N} = \frac{225}{15} = 15$

c) Los valores siguientes están escritos en orden creciente:

x*; 4; 6; 7; 9; 12; 14; 15; 16; 17; 20; *y

Se sabe que la media es 12 y que la diferencia entre el mayor y el menor es 22. Halla *x* e *y*.

$$\begin{cases} \frac{x+4+6+7+9+12+14+15+16+17+20+y}{12} = \frac{x+y+120}{12} = 12 \\ y - x = 22 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 24 \\ y - x = 22 \end{cases} \rightarrow x = 1 \; ; \qquad y = 23$$

18. Un profesor ha realizado el mismo examen en dos grupos distintos de 3.º. Éstas son las calificaciones obtenidas por cada una de las clases:

Clase de 3.º A: 3, 7, 15, 9, 12, 11, 8, 19, 6, 10, 13, 14, 17, 8, 5, 15, 13, 9, 14, 8, 11, 18, 4, 6, 10, 12, 16, 2.

Clase de 3.º B: 4, 4, 6, 12, 4, 8, 16, 11, 16, 9, 8, 14, 6, 20, 14, 8, 14, 6, 16, 14, 11, 9, 3, 6, 5, 17, 14.

Para cada una de las dos clases compara la media, la mediana, la desviación típica y el coeficiente de variación.

Clase 3 º A

x = nota	frecuencia absoluta (n)	$x \cdot n$	x^2	$x^2 \cdot n$	frecuencia absoluta acumulada
2	1	2	4	4	1
3	1	3	9	9	2
4	1	4	16	16	3
5	1	5	25	25	4
6	2	12	36	72	6
7	1	7	49	49	7
8	3	24	64	192	10
9	2	18	81	162	12
10	2	20	100	200	(14)
11	2	22	121	242	(16)
12	2	24	144	288	18
13	2	26	169	338	20
14	2	28	196	392	22
15	2	30	225	450	24
16	1	16	256	256	25
17	1	17	289	289	26
18	1	18	324	324	27
19	1	19	361	361	28
Total	N = 28	$\sum x \cdot n = 295$		$\sum x^2 \cdot n = 3669$	

aquí está la observación nº 14

aquí está la observación nº 15

$$\bar{x} = \frac{\sum x \cdot n}{N} = \frac{295}{28} = 10,5$$

$$Me = \frac{10+11}{2} = 10,5$$

$$S = \sqrt{\frac{\sum x^2 \cdot n}{N} - \bar{x}^2} = \sqrt{\frac{3669}{28} - 10,5^2} = 4,56$$

$$CV_x = \frac{S}{\bar{x}} = \frac{4,56}{10,5} = 0,43$$

Clase 3º B

y = nota	frecuencia absuluta (n)	$y \cdot n$	y^2	$y^2 \cdot n$	frecuencia absoluta acumulada
3	1	3	9	9	1
4	3	12	16	48	4
5	1	5	25	25	5
6	4	24	36	144	9
8	3	24	64	192	12
9	2	18	81	162	(14) aquí está la observación nº 18
11	2	22	121	242	16
12	1	12	144	144	17
14	5	70	196	980	22
16	3	48	256	768	25
17	1	17	289	289	26
20	1	20	400	400	27
Total	N = 27	$\sum x \cdot n = 275$		$\sum x^2 \cdot n = 3403$	

$$\bar{y} = \frac{\sum x \cdot n}{N} = \frac{275}{27} = 10,2$$

Me = 9

$$S = \sqrt{\frac{\sum y^2 \cdot n}{N} - \bar{y}^2} = \sqrt{\frac{3403}{27} - 10,2^2} = 4,69$$

$$CV_y = \frac{S}{\bar{y}} = \frac{4,69}{10,2} = 0,46$$

19. En varios tests de habilidad psicomotora se han obtenido las siguientes puntuaciones:

35, 28, 29, 34, 22, 31, 30, 31, 32.

30, 25, 23, 24, 23, 29, 24, 28, 27.

18, 24, 18, 23, 19, 20, 22, 21, 17.

31, 31, 32, 33, 36, 37, 38, 40.

Hallar la media, los intervalos mediano y modal y la desviación típica, agrupando previamente los datos en intervalos de amplitud 5.

habilidad	frecuencia absuluta (n)	marca de clase x	$x \cdot n$	x^2	$x^2 \cdot n$	frecuencia absoluta acumulada
[16, 21[	5	18,5	92,5	342,25	1711,25	5
[21, 26[	(10) esta es la mayor frecuencia	23,5	235	552,25	5522,5	15
[26, 31[	7	28,5	199,5	812,25	5685,75	(22)
[31, 36[	9	33,5	301,5	1122,25	10100,25	31
[36, 41[	4	38,5	154	1482,25	5929	35
	N = 35		$\sum x \cdot n = 982,5$		$\sum x^2 \cdot n = 982,5$	aquí está la observación nº 18

$$\bar{x} = \frac{\sum x \cdot n}{N} = \frac{982,5}{35} = 28,07$$

Intervalo mediano = [26, 31 [

Intervalo modal = [21, 36 [

$$S = \sqrt{\frac{\sum x^2 \cdot n}{N} - \bar{x}^2} = \sqrt{\frac{28948,75}{35} - 28,07^2} = 6,26$$

20. En una competición, las edades de los jugadores de los equipos se distribuyen según la tabla:

edad	18	19	20	21	22	23	24	25
efectivo	3	6	11	19	32	36	26	18
edad	26	27	28	29	30	31	32	
efectivo	8	10	3	5	1	0	2	

a) Halla su mediana y su media.

x	frecuencia absuluta (n)	$x \cdot n$	frecuencia absoluta acumulada
18	3	54	3
19	6	114	9
20	11	220	20
21	19	399	39
22	32	704	71
23	36	828	[107] aquí están las observaciones que ocupan las posición 90 y 91.
24	26	624	133
25	18	450	151
26	8	208	159
27	10	270	169
28	3	84	172
29	5	145	177
30	1	30	178
31	0	0	178
32	2	64	180
	N = 180	$\sum x \cdot n = 4194$	

$$\bar{x} = \frac{\sum x \cdot n}{N} = \frac{4194}{180} = 23,3 \text{ años}$$

Me = 23 años.

b) Calcula la tabla de esta distribución agrupando las edades en clases de amplitud 3 años y calcula su clase mediana y su media.

habilidad	frecuencia absoluta (n)	marca de clase x	$x \cdot n$	frecuencia absoluta acumulada
[18, 21[	20	19,5	390	20
[21, 24[	87	22,5	1957,5	107
[24, 27[	52	25,5	1326	159
[27, 30[	18	28,5	513	177
[30, 33[	3	31,5	94,5	180
	180		$\sum x \cdot n = 4281$	

aquí están las observaciones que ocupan las posiciones 90 y 91.

$$\bar{x} = \frac{\sum x \cdot n}{N} = \frac{4281}{180} = 23,8 \text{ años}$$

Intervalos mediano = [21, 24[

c) Compara los resultados obtenidos y justifica las posibles diferencias.

No hay diferencias significativas.

21. El resultado de los coeficientes de inteligencias (CI) de un grupo de 30 alumnos de E.S.O. que realizaron las pruebas correspondientes es el siguiente:

99	**100**	**122**	**123**	**119**	**102**
112	**98**	**100**	**107**	**101**	**96**
111	**113**	**121**	**104**	**118**	**95**
120	**118**	**120**	**110**	**114**	**99**
112	**110**	**119**	**111**	**123**	**100**

¿Cuáles son el CI medio y el CI mediana del grupo? ¿Cuáles son los cuartiles? ¿Cuál es la desviación típica para esos coeficientes de inteligencia? ¿Y el coeficiente de variación?

x = CI	frecuencia absoluta (n)	$x \cdot n$	x^2	$x^2 \cdot n$	frecuencia absoluta acumulada
95	1	95	9025	9025	1
96	1	96	9216	9216	2
98	1	98	9604	9604	3
99	2	198	9801	19602	5
100	3	300	10000	30000	(8) aquí estan las observaciones nº 7 y 8
101	1	101	10201	10201	9
102	1	102	10404	10404	10
104	1	104	10816	10816	11
107	1	107	11449	11449	12
110	2	220	12100	24200	(14) aquí estan las observaciones nº 15 y 16
111	2	222	12321	24642	16
112	2	224	12544	25088	18
113	1	113	12769	12769	19
114	1	114	12996	12996	20 aquí está la observación nº 22
118	2	236	13924	27848	(22)
119	2	238	14161	28322	(24) aquí está la observación nº 23
120	2	240	14400	28800	26
121	1	121	14641	14641	27
122	1	122	14884	14884	28
123	2	246	15129	30258	30
	N = 30	$\sum x \cdot n = 3297$		$\sum x^2 \cdot n = 364765$	

$$\bar{x} = \frac{3297}{30} = 109,9$$

Me = 2º cuartil = 111

1º cuartil = 100

$$3^{er} \text{ cuartil} = \frac{118 + 119}{2} = 118,5$$

$$S = \sqrt{\frac{\sum x^2 \cdot n}{N} - \bar{x}^2} = \sqrt{\frac{364765}{30} - 109,9^2} = 8,99$$

$$CV_x = \frac{S}{\bar{x}} = \frac{8,99}{109,9} = 0,08$$

▶ Pág. 302. Ejercicios


PARÁMETROS DE CENTRALIZACIÓN Y DISPERSIÓN

SOLUCIONARIO

22. Un grupo de alumnos de bachillerato obtuvo, según un test de habilidad mental, las puntuaciones siguientes:

72 75 38 40 50 60 65 69
70 58 59 41 63 65 71 68
64 52 51 50 59 43 68 53
50 56 47 68 55 72 60 62
71 49 67 62 56 55 62 60

Halla la media, intervalos mediano y modal, y desviación típica, agrupando los datos en intervalos de amplitud 10.

Puntu.	frec. absoluta (n)	marca de clase (x)	$x \cdot n$	x^2	$x^2 \cdot n$	frecuencia absoluta acumulada
[36, 46[	4	41	164	1681	6724	4
[46, 56[	10	51	510	2601	26010	14
[56, 66[	(15)	61	915	3721	55815	(29)
[66, 76[	11	71	781	5041	55451	40
Total	40		$\sum x \cdot n = 2370$		$\sum x^2 \cdot n = 144000$	

esta es la mayor frecuencia

aquí estan las observaciones nº 20 y 21

a) $\bar{x} = \dfrac{\sum x \cdot n}{N} = \dfrac{982,5}{35} = 28,07$

b) Intervalo mediano = [26, 31 [

Intervalo modal = [21, 36 [

c) $S = \sqrt{\dfrac{\sum x^2 \cdot n}{N} - \bar{x}^2} = \sqrt{\dfrac{144000}{40} - 59,25^2} = 9,46$

23. La nota media de las calificaciones de los 30 alumnos en el último examen de matemáticas es 5, entonces:

a) ¿Se puede asegurar que hay 15 alumnos aprobados y 15 suspensos?

No, distintas tablas de frecuencias pueden tener la misma media.

b) ¿Se puede asegurar que todas las calificaciones son simétricas respecto de la media?

No.

c) ¿Puede suceder que todos los alumnos estén aprobados?

Sí, siempre que todos los alumnos hayan obtenido un 5.

d) ¿Sabrías calcular el máximo número de aprobados que puede haber?

En el caso de que se de la situación del apartado anterior, habría 30 aprobados. Este es el número máximo de aprobados posible.

f) ¿Sabrías calcular el mínimo número de aprobados que puede haber?

En el caso de que las calificaciones sean enteras, el mínimo de aprobados sería 5 (5 con nota diez, y 25 alumnos con nota 4).

24. La distribución del porcentaje de niños que ven la televisión según el número de horas semanales es:

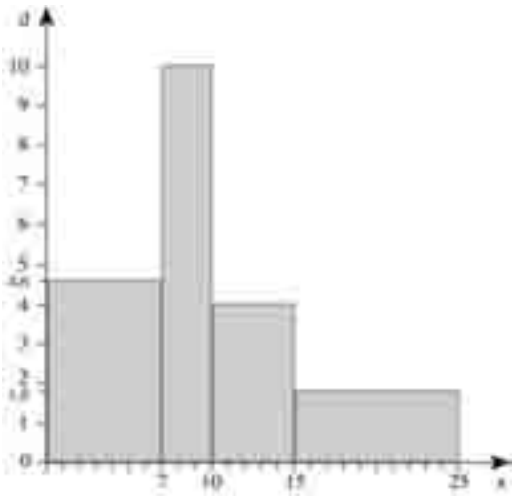
Horas semanales	%
Menos de 7	32
De 7 a 10	30
De 10 a 15	20
Más de 15	18

a) ¿Qué dificultad encuentras al hacer un histograma? Elige como último intervalo el [15, 25].

Horas	frec. absoluta (n)	densidad de frec. (d)	marca de clase (x)	$x \cdot n$	frecuencia absoluta acumulada
0 a 7	32	32/7 = 4,6	3,5	112	32
7 a 10	30	30/3 = 10	8,5	255	62
10 a 15	20	20/5 = 4	12,5	250	82
15 a 25	80	18/10 = 1,8	20	360	100
Total	N = 100			$\sum x \cdot n = 977$	

aquí estan las observaciones nº 50 y 51

Como los intervalos tienen distinta amplitud hay que calcular las densidades de frecuencia. Con ellas se dibuja el histograma.



b) ¿Puedes calcular la media, la moda y el intervalo mediano del número de horas que ve un niño la TV?

b) $\bar{x} = \dfrac{\sum x \cdot n}{N} = \dfrac{977}{100} = 9,77$

Intervalo mediano = [7, 10 [

25. El número de libros que han leído, en un semestre, las 100 personas entrevistadas está reflejado en la siguiente tabla:

x	%
2	10
3	15
5	30
8	25
10	20
Totales	

Calcula la media aritmética del número de libros leídos por esas personas.

x	frecuencia absoluta (n)	$x \cdot n$
2	10	20
3	15	45
5	30	150
8	25	200
10	20	200
Total	N = 100	615

$$\bar{x} = \frac{\sum x \cdot n}{N} = \frac{615}{100} = 6,15$$

26. Preguntadas 25 familias por el número de hijos que tienen, las respuestas fueron:

1, 0, 3, 2, 1, 0, 0, 2, 1, 1, 2, 0, 0, 1, 0, 4, 2, 3, 1, 0, 3, 1, 2, 3, 1

Construye la tabla estadística correspondiente y calcula:

x = nº hijos	frec. absoluta (n)	$x \cdot n$	x^2	$x^2 \cdot n$	frecuencia absoluta acumulada
0	7	0	0	0	7
1	8	8	1	8	(15)
2	5	10	4	20	20
3	4	12	9	36	24
4	1	4	16	16	25
Total	N = 25	$\sum x \cdot n = 34$		$\sum x^2 \cdot n = 80$	

aquí estan la observación nº 13

a) La moda.

Mo = 1 hijo

b) La media aritmética.

$$\bar{x} = \frac{\sum x \cdot n}{N} = \frac{34}{25} = 1,36 \text{ hijos}$$

c) La mediana.

Me = 1 hijo

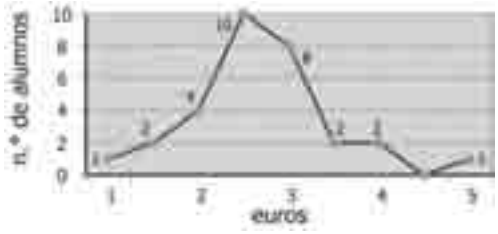
d) La desviación típica.

$$S = \sqrt{\frac{\sum x^2 \cdot n}{N} - \bar{x}^2} = \sqrt{\frac{80}{25} - 1,36^2} = 1,16$$

e) Calcula el coeficiente de variación.

$$CV_x = \frac{S}{\bar{x}} = \frac{1,16}{1,36} = 0,85$$

27. El gráfico adjunto representa las cantidades que disponen semanalmente los alumnos de una clase para sus gastos:



Calcula la moda y la media aritmética de esta distribución.

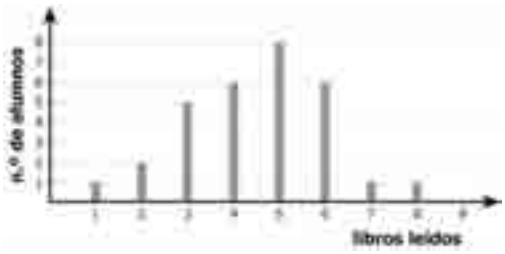
habilidad	frecuencia absoluta (n)	$x \cdot n$
1	1	1
1,5	2	3
2	4	8
2,5	(10)	25
3	8	24
3,5	2	7
4	2	8
4,5	0	0
5	1	5
Total	N = 30	$\sum x \cdot n = 81$

aquí está la mayor frecuencia.

Mo = 2,5

$$\bar{x} = \frac{\sum x \cdot n}{N} = \frac{81}{30} = 2,7$$

28. El gráfico adjunto representa el número de libros que han leído durante el último año los alumnos de una clase.



a) Construye la correspondiente tabla estadística.

x = libros	frec. absoluta (n)	$x \cdot n$	x^2	$x^2 \cdot n$	frecuencia absoluta acumulada
1	1	1	1	1	1
2	2	4	4	8	3
3	5	15	9	45	8
4	6	24	16	96	14
5	8	40	25	200	(22)
6	6	36	36	216	28
7	1	7	49	49	29
8	1	8	64	64	30
Total	N = 30	$\sum x \cdot n = 135$		$\sum x^2 \cdot n = 679$	

aquí estan las observaciones nº 15 y 16

b) Calcula la media, moda y mediana de los libros leídos durante el último año.

$$\bar{x} = \frac{\sum x \cdot n}{N} = \frac{135}{30} = 4,5$$

Mo = 5; Me = 5

c) Calcula la desviación típica de los libros leídos durante el último año.

$$S = \sqrt{\frac{\sum x^2 \cdot n}{N} - \bar{x}^2} = \sqrt{\frac{679}{30} - 4,5^2} = 1,54$$

29. La media aritmética de la siguiente serie estadística 2, 5, 7, 3, 9, a, 7, a, 6 es 5. Calcula el valor de a.

$$\bar{x} = \frac{2+5+7+3+9+a+7+a+6}{9} = 5$$

$39 + 2a = 45 \rightarrow a = 3$

Tema 15

Experimentos aleatorios. Probabilidad

▸ Programación de aula

Objetivos

- Modelizar el azar.
- Distinguir entre fenómenos deterministas y aleatorios.
- Caracterizar el espacio muestral asociado a un fenómeno aleatorio.
- Operar con sucesos.
- Considerar la probabilidad a partir de la frecuencia relativa.
- Conocer la Ley de Laplace.
- Utilizar los diagramas de árbol para efectuar recuentos de casos.

Criterios de evaluación

- Distinguir entre los fenómenos deterministas y los aleatorios.
- Construir el espacio muestral asociado a un experimento aleatorio.
- Especificar sucesos.
- Obtener la probabilidad como límite de la frecuencia relativa.
- Distinguir entre casos favorables y posibles.
- Recontar casos.
- Construir diagramas de árboles.
- Aplicar la Ley de Laplace.

Contenidos

- **Conceptos** ("saber")
  - Fenómenos y experimentos aleatorios.
  - Espacio muestral y sucesos.
  - Frecuencia y probabilidad de un suceso.
  - Ley de Laplace.
  - Técnicas de recuento: diagrama de árbol.
- **Procedimientos** ("Saber hacer")
  - Utilización del vocabulario adecuado para describir y cuantificar situaciones relacionadas con el azar.
  - Reconocimiento de fenómenos aleatorios en la vida cotidiana.
  - Planificación y realización de experimentos sencillos para estudiar el comportamiento de fenómenos de azar.
  - Confección de tablas de frecuencias y gráficas para representar el comportamiento de fenómenos aleatorios.
  - Utilización de diversas técnicas de recuento para la asignación de probabilidades.
  - Utilización de informaciones diversas (frecuencias, simetrías, creencias, observaciones previas, etc.) para asignar probabilidades a sucesos.
  - Asignación de probabilidades en casos sencillos con la ley de Laplace.
  - Detección de los errores habituales en la interpretación del azar.
  - Adquisición de la soltura necesaria para la construcción de los diagramas de árbol.
- **Actitudes** ("Saber ser")
  - Reconocimiento y valoración de las matemáticas para interpretar, describir y predecir situaciones inciertas.
  - Disposición favorable a tener en cuenta las informaciones probabilísticas en la toma de decisiones sobre situaciones aleatorias.
  - Curiosidad e interés por la investigación de hechos relacionados con el azar.
  - Cautela y sentido crítico ante ideas preconcebidas sobre fenómenos aleatorios.
  - Sensibilidad, gusto y precisión en la observación y diseño de experiencias aleatorias.

▸ Programación por competencias

COMPETENCIA MATEMÁTICA

PENSAMIENTO Y RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

Descriptores

1. Proponer la necesidad de modelizar el azar y conocer la respuesta que proporciona el Cálculo de Probabilidades.
2. Entender el alcance del concepto de probabilidad y saber utilizarlo.
3. Distinguir entre la modelización de los fenómenos aleatorios versus los deterministas.

Desempeño

1. Pone de manifiesto la existencia del azar en muchas facetas de la vida ordinaria.	- Asocia el azar a la vida cotidiana. - Determina el alcance del azar y su influencia.	- **"Introducción"** (pág. 304) - **Ejemplos 1 y 2 y ejercicio 1** (pág. 306 y 307) - **"Una vieja polémica"** (pág. 322)
2. Plantea la necesidad de cuantificar el azar.	- Calcula la probabilidad de un suceso.	- **Ejemplos 8 a 15 y ejercicios 6 a 12** (pág. 311 a 317) - **Ejercicios 13 a 36** (pág. 320 a 322)
3. Opone la existencia del azar frente a los fenómenos deterministas.	- Distingue entre fenómenos aleatorios y fenómenos naturales o deterministas. - Entiende la necesidad de plantear tratamientos diferentes según el tipo de fenómeno.	- **Ejemplos 1 y 2 y ejercicio 1** (pág. 306 y 307)

CONSTRUCCIÓN DE MODELOS

Descriptores

1. Traducir e interpretar el concepto de probabilidad, y analizar sus fundamentos y propiedades, como modelo que explica el comportamiento del azar en el mundo real.
2. Validar el modelo mediante su aplicación práctica, contrastando sus resultados con la observación de la realidad.

Desempeño

1. Modeliza la incertidumbre a través de la probabilidad.	- Advierte las propiedades de la probabilidad. - Aplica el concepto de probabilidad en una situación concreta. - Valida el resultado obtenido tras calcular una probabilidad. - Contrasta dicho resultado con sus expectativas iniciales.	- **Ejemplos 8 a 15 y ejercicio 6 a 12** (pág. 311 a 317) - **Ejercicios 6 y 13 a 36** (pág. 312 y 320 a 322)

ARGUMENTAR MATEMÁTICAMENTE	**Descriptores**		
	1. Relacionar los conceptos de probabilidad como límite de la frecuencia relativa y a través de la Ley de Laplace, y escoger uno de ellos de acuerdo con la situación y el propósito de una situación concreta.		
	Desempeño		
	1. Opta por una formulación del concepto de probabilidad en una situación concreta.	- En una situación concreta elige el concepto de probabilidad más adecuado. - Es capaz de fundamentar la elección tomada. - Calcula los casos posibles y favorables. - Constata la equiprobabilidad de los casos posibles. - Calcula la probabilidad de un suceso a través de su frecuencia relativa. - Constata la utilidad y aplicabilidad del concepto frecuencialista de la probabilidad.	- **Ejemplos 8 a 15 y ejercicios 6 a 36** (pág. 311 a 322)
PLANTEAR Y RESOLVER PROBLEMAS MATEMÁTICOS	**Descriptores**		
	1. Identificar, definir, plantear y resolver problemas en los que interviene la probabilidad de sucesos.		
	Desempeño		
	1. Plantea una situación concreta en la que interviene el azar.	- Constata la existencia de incertidumbre en un problema de azar. - Distingue la existencia de distintos sucesos. - Cuantifica la incertidumbre a través de la probabilidad.	- **Ejemplos y ejercicios del tema** (pág. 306 a 322)
	2. Resuelve la cuestión planteada.	- Obtiene la solución numérica. - Analiza la solución y obtiene conclusiones.	
UTILIZAR EL LENGUAJE TÉCNICO FORMAL	**Descriptores**		
	1. Trabajar con expresiones simbólicas y fórmulas.		
	Desempeño		
	1. Trabaja con la expresión formal de la Ley de Laplace y de la frecuencia relativa.	- Calcula la probabilidad de un suceso a través de la Ley de Laplace o de la frecuencia relativa. - Interpreta las expresiones anteriores.	- **Ejemplos 8 a 12 y ejercicios 6 a 10** (pág. 311 a 315) - **Ejercicios 30, 32 y 35** (pág. 321 y 322)
COMUNICACIÓN MATEMÁTCIA	**Descriptores**		
	1. Entender textos sobre el azar y su concreción. 2. Expresarse sobre temas relacionados con el azar, con diferentes niveles de precisión teórica y técnica.		
	Desempeño		
	1. Es capaz de entender un argumento que habla de azar e incertidumbre, y de expresarse con precisión en la descripción del mismo.	- Entiende el alcance de una situación típica de azar expresada en lenguaje escrito, oral o simbólico. - Se expresa con claridad para describir oralmente, por escrito o con lenguaje formal, el alcance de una situación típica de azar.	- **Ejemplos y ejercicios del tema** (pág. 306 a 322)

UTILIZAR AYUDAS Y HERRAMIENTAS

Descriptores

1. Usar la calculadora estadística para los cálculos estadísticos y combinatorios.

Desempeño

1. Advierte la utilidad de la calculadora científica para el cálculo de probabilidades.	- Es capaz de utilizar la calculadora científica.	- **Ejercicio 32** (pág. 322)

COMPETENCIA LINGÜÍSTICA

COMPETENCIA LINGÜÍSTICA

Descriptores

1. Comprender el enunciado de un problema en el que interviene el azar.
2. Describir con un texto o con una explicación oral breve el proceso de cálculo de una probabilidad.
3. Indicar con un texto o una explicación oral breve los aspectos relevantes del problema de incertidumbre planteado.

Desempeño

1. Comprende lo que lee.	- Identifica la pregunta que se le hace. - Identifica los elementos de cálculo probabilístico que intervienen.	- **Ejemplos y ejercicios del tema** (pág. 306 a 322)
2. Discrimina e interpreta la información que le da el enunciado de un problema en el que está presente el azar.	- Diferencia los distintos elementos que intervienen en una situación bajo incertidumbre.	
3. Se expresa por escrito de manera adecuada y correcta, con claridad y coherencia, utilizando un lenguaje preciso, para la descripción de los criterios utilizados en la solución de un problema bajo incertidumbre.	- Presenta el texto de la solución del problema de forma adecuada y correcta. - Selecciona los aspectos relevantes de la solución. - Es capaz de traducir al lenguaje natural el lenguaje formal del Cálculo de Probabilidades.	

COMPETENCIA SOCIAL Y CIUDADANA

COMPETENCIA SOCIAL Y CIUDADANA

Descriptores

1. Utilizar el Cálculo de Probabilidades para cuantificar la posible aparición en una sociedad de ciertos hechos o circunstancias económicas, demográficas y culturales.

Desempeño

1. Constata, a través de información estadística de carácter social, la existencia de azar en el comportamiento cívico de las sociedades.	- Utiliza información de características demográficas y sociales, a partir de la cual calcula la probabilidad de aparición de ciertos hechos. - Analiza información de características sociales y obtiene conclusiones, y valora las posibilidades de ocurrencia de ciertos hechos.	- **Introducción** (pág. 304) - **Ejemplo 7** (pág. 310) - **Ejercicios 5, 22 y 34 del tema** (pág. 311, 320 y 321)
2. Plantea las posibilidades de la Estadística Descriptiva para el conocimiento del comportamiento social.	- Utiliza los parámetros estadísticos para acercarse al conocimiento social y ciudadano. - Plantea las necesidades que exige el conocimiento de la sociedad y valora cuáles pueden resolverse por la estadística.	

COMPETENCIA EN CONOCIMIENTO E INTERACCION CON EL MEDIO FISICO

COMPETENCIA EN CONOCIMIENTO E INTERACCION CON EL MEDIO FÍSICO

Descriptores

1.Interpretar la información del mundo real -físico, económico, social o cultural- y advertir la presencia del azar en él.
2. Fomentar la reflexión para decidir bajo incertidumbre, basándose en el cálculo de probabilidades, en el entorno físico y natural.

Desempeño

1. Interpreta el entorno cuando en él aparece el azar.	- Sintetiza la información. - Relaciona la información recibida con su incertidumbre asociada.	- **Introducción** (pág.304) - **Ejemplos y ejercicios del tema** (pág.306 a 322)
2. Obtiene conclusiones del entorno cuantificando la probabilidad de distintas alternativas.	- Relaciona las conclusiones con la realidad observada. - Decide opciones de actuación en función de las conclusiones obtenidas.	

COMPETENCIA APRENDER A APRENDER

COMPETENCIA APRENDER A APRENDER

Descriptores

1. Adquirir conciencia y hacer uso de las propias capacidades y conocimientos para iniciarse en el estudio del azar y de la incertidumbre.
2. Desarrollar la curiosidad en el planteamiento de situaciones que requieren la formalización del azar y utilizar estrategias de aprendizaje para afrontar la toma de decisiones en ambiente incierto.

Desempeño

1. Desarrolla habilidades para la comprensión de situaciones inciertas.	- Lee los enunciados de los ejercicios con la intención de comprender, relacionar y sintetizar contenidos. - Maneja adecuadamente recursos y técnicas de aprendizaje individual. - Aplica técnicas de estudio y de trabajo con el fin de comprender, sintetizar y relacionar los conceptos probabilísticos.	- **Ejemplos y ejercicios del tema** (pág. 306 a 322)
2. Desarrolla la curiosidad por la metodología probabilística.	- Plantea sugerencias de ampliación a los resultados obtenidos tras el análisis de un conjunto de datos. - Constata la diferencia entre certeza y posibilidad.	- **"Probabilidad de Laplace"** (pág. 313) - **"Una vieja polémica"** (pág. 322) - **Ejercicios 30, 32 y 35** (pág. 321 y 322)
3. Desarrolla la curiosidad por la metodología estadística.	- Plantea sugerencias de ampliación a los resultados obtenidos tras el análisis de un conjunto de datos.	- **Ejemplos 6, 7, 12 y 15** (pág. 288, 294 y 296 - **Ejercicios 10, 14 20 y 23** (pág. 300 a 302)

COMPETENCIA CULTURAL Y ARTISTICA

COMPETENCIA CULTURAL Y ARTISTICA

Descriptores

1. Conocer el origen histórico del concepto de probabilidad y los relaciona con la figura matemática autora de los mismos.
2. Representar gráficamente sucesos y expresar gráficamente las alternativas de una decisión.

Desempeño

1. Asocia la historia en el Cálculo de Probabilidades.	- Considera el origen histórico del concepto de probabilidad.	- **"Probabilidad de Laplace"** (pág.313) - **"Una vieja polémica"** (pág.322)
2. Representa gráficamente sucesos y alternativas.	- Representa gráficamente sucesos. - Diseña gráficamente las alternativas posibles en una decisión.	- **Ejemplos 3 a 5 y 15** (pág.308 a 311 y 317) - **Ejercicios 11 a 36** (pág.317 y 320 a 322)) - **"Una vieja polémica"** (pág.322)

COMPETENCIA AUTONOMÍA E INICIATIVA PERSONAL

COMPETENCIA AUTONOMÍA E INICIATIVA PERSONAL

Descriptores

1. Utilizar la probabilidad como instrumento que orienta la propia actividad con autonomía y que sirve para organizar el pensamiento, para elaborar planes y para tomar decisiones en convivencia con el azar.

Desempeño

1. Idea y planifica el desarrollo de una situación concreta en la que está presente la incertidumbre.	- Valora la certeza frente al azar. - Elige la opción adecuada para la resolución de los ejercicios. - Mantiene la opción hasta llegar a la conclusión final.	- **Ejemplos y ejercicios del tema** (pág. 306 a 322).)
2. Evalúa la solución obtenida.	- Valora el resultado y lo pone en relación con el enunciado del problema resuelto. - Reflexiona sobre si el trabajo efectuado ha sido suficiente para el objetivo propuesto.	
3. Toma decisiones en función del resultado más probable.	- Decide en función del resultado. - Acepta el posible error de una decisión cuando en el entorno está presente el azar.	- **Ejemplo 7** (pág. 310) - **Ejercicios 6, 30, 32 y 35** (pág. 312, 321 y 322)

▶ Pág. 304 - 305. Experimentos aleatorios. Probabilidad



DE 2º A 3º

Los **fenómenos deterministas** son propios de las Ciencias Naturales. Se caracterizan porque siempre que se realiza un **experimento** relacionado con ellos, en las mismas condiciones, el **resultado** obtenido es idéntico.

Frente a ellos, en los **fenómenos aleatorios** o de **azar** no es posible predecir qué **resultado** concreto se va a obtener tras la realización de un **experimento aleatorio** relacionado con ellos.

EJEMPLO

Calentar el agua de un cazo hasta los 100º C es un experimento asociado a fenómenos deterministas relacionado con su punto de ebullición. El resultado siempre es el mismo: al llegar a esa temperatura el agua del cazo se evaporará.



Tirar un dado para anotar el resultado de la cara obtenida es un experimento aleatorio asociado a este físico juego de azar. Hay seis resultados posibles, y somos incapaces de determinar qué cara concreta resultará.

PRÁCTICA

Considera un dado de parchís, de color rojo. Considera los dos experimentos siguientes. 1º Tirar el dado y anotar el color de la cara resultante. 2º Tirar el dado y anotar la puntuación de la cara resultante. ¿Ves alguna diferencia entre ambos? ¿Cuál? ¿A qué tipo de fenómeno –determinista o aleatorio– responden?

Para un fenómeno aleatorio, el **espacio muestral** es el conjunto de posibles resultados de un experimento aleatorio relacionado con aquél.

Si repetimos muchas veces un experimento de azar podemos ir anotando el número de veces que aparece cada uno de los posibles resultados. La **probabilidad** de uno de esos posibles resultados es el valor al que se aproxima su frecuencia relativa cuando el número de repeticiones del experimento es muy elevado.

PRÁCTICA

Considera el siguiente experimento aleatorio: lanzar una moneda al aire 150 veces. Anota el número de caras que van apareciendo, concretamente tras llevar 25, 50, 75, 100, 125 y 150 veces. Cumplimenta la siguiente tabla:

25		
50		
75		
100		
125		
150		

Observa cómo evolucionan las frecuencias relativas. Vistos el resultado obtenido, ¿podrías afirmar que la moneda está trucada? ¿Por qué? ¿Qué probabilidad asignarías a que salga cara al lanzar al aire esa moneda?

▶ Pág. 306. 1 Fenómenos y experimentos aleatorios



EXPERIMENTOS ALEATORIOS. PROBABILIDAD

1 Fenómenos y experimentos aleatorios

Los hechos o fenómenos naturales que observamos a nuestro alrededor, en la naturaleza o en nuestra vida cotidiana, pertenecen a dos grandes categorías: aquellos que siempre se producen o manifiestan de idéntica manera, y aquellos en los que somos incapaces de predecir de antemano qué resultado concreto va a producirse, aun conociendo los posibles resultados. Los primeros son los **fenómenos deterministas**, y son propios de las ciencias de la naturaleza, física, química, etc. Los segundos son los **fenómenos aleatorios o de azar**, y constituyen el objeto de estudio de la parte de la Estadística conocida como **Cálculo de Probabilidades**.

SEPÁRA QUE...

El **Cálculo de Probabilidades** es la parte de la Estadística que estudia y modela los fenómenos aleatorios.

Un experimento aleatorio o de azar es cualquier experimento relacionado con los fenómenos aleatorios.

EJEMPLO

1 Escoger la radio esperando conocer el resultado de un partido de fútbol, anotar el tiempo que estamos esperando en una parada de autobús, contar el número de pacientes que hay delante de nosotros en la consulta de un médico, etc., son ejemplos de experimentos aleatorios.

Ya.

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS

Constatar, mediante ejemplos, cómo el azar está permanentemente presente en nuestra vida.

Distinguir claramente entre fenómenos deterministas y fenómenos aleatorios. ¿Cómo clasificar los fenómenos relacionados con los comportamientos sociales, en qué medida participan de uno u otro de aquéllos?

▶ Pág. 307.



TEMA 15

Los fenómenos aleatorios presentan las siguientes tres características que los definen:

1.ª No puede predecirse el resultado concreto que va a obtenerse en la realización de un experimento asociado al fenómeno aleatorio.

2.ª Sin embargo, sí se conoce el conjunto de posibles resultados.

3.ª Cuando aumenta el número de repeticiones de un experimento, la frecuencia relativa con la que aparece cada resultado concreto parece estabilizarse hacia un valor fijo. Este hecho –muy importante en el Cálculo de Probabilidades– se llama **ley de regularidad o de estabilidad de las frecuencias estadísticas**, o **ley de los grandes números**.

EJEMPLO

1 Tiras una moneda al aire en un experimento aleatorio, pues:

1.º Somos incapaces de asegurar qué resultado concreto aparecerá (primera característica).

2.º Sí sabemos que son dos los resultados posibles: cara o cruz (segunda característica).

3.º Si lanzas, por ejemplo, 100 veces una moneda es lógico esperar que el número de caras esté alrededor de cincuenta. Si lanzas 1 000 veces la moneda, el número de caras estará alrededor de 500, pero dentro de un margen relativamente más pequeño que antes, y así sucesivamente.

EJERCICIO

1 Clasifica justificadamente los siguientes fenómenos en aleatorios o deterministas:

a) Tiempo que tarda en caer una pelota de tenis al soltarla a dos metros del suelo.

b) Porcentaje de votos obtenido por un determinado partido en unas elecciones.

c) Beneficios mensuales obtenidos por una empresa.

d) Temperatura a la que empieza a hervir el agua.

e) Juntar, en una probeta, ácido clorhídrico y sosa cáustica, para observar el resultado.

f) Número de accidentes de circulación que se producen los fines de semana en un tramo de carretera.

g) Resultado de un partido de fútbol.

347

SOLUCIONARIO

1. Clasifica justificadamente los siguientes fenómenos en aleatorios o deterministas:

a) Tiempo que tarda en caer una pelota de tenis al soltarla a dos metros del suelo.
Determinista

b) Porcentaje de votos obtenido por un determinado partido en unas elecciones.
Aleatorio

c) Beneficios mensuales obtenidos por una empresa. Aleatorio

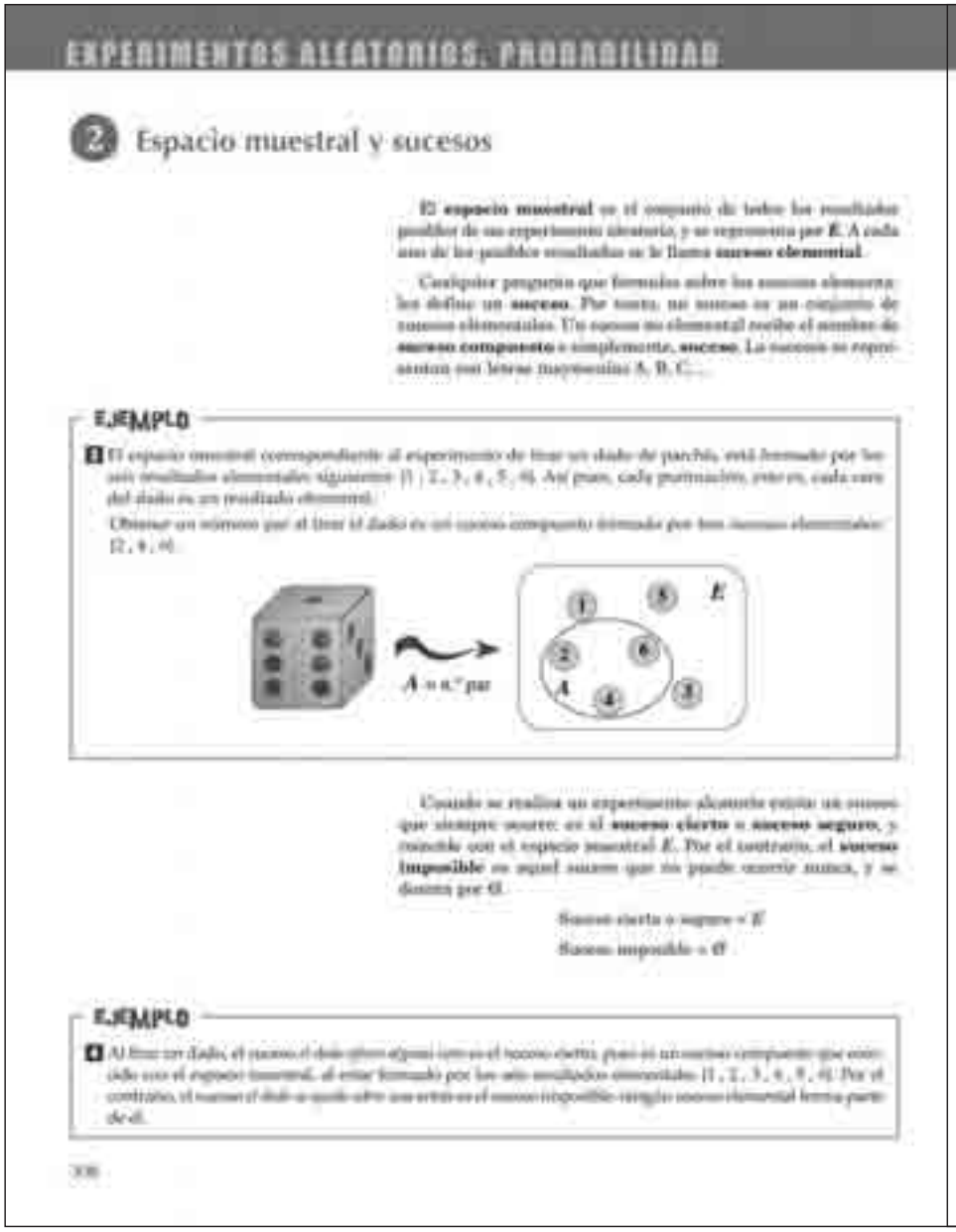
d) Temperatura a la que empieza a hervir el agua. Determinista

e) Juntar, en una probeta, ácido clorhídrico y sosa cáustica, para observar el resultado. Dterminista.

f) Número de accidentes de circulación que se producen los fines de semana en un tramo de carretera. Aleatorio

g) Resultado de un partido de fútbol.
Aleatorio

▶ Pág. 308. 2 Espacio muestral y sucesos



EXPERIMENTOS ALEATORIOS. PROBABILIDAD

2. Espacio muestral y sucesos

El **espacio muestral** es el conjunto de todos los resultados posibles de un experimento aleatorio, y se representa por *E*. A cada uno de los posibles resultados se le llama **suceso elemental**.

Cualquier pregunta que formulés sobre los sucesos elementales define un **suceso**. Por tanto, un suceso es un conjunto de sucesos elementales. Un suceso no elemental recibe el nombre de **suceso compuesto** o simplemente, **suceso**. Los sucesos se representan con letras mayúsculas A, B, C...

EJEMPLO

1 El espacio muestral correspondiente al experimento de tirar un dado de parchís, está formado por los seis resultados elementales siguientes: {1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6}. Así pues, cada posibilidad, esto es, cada cara del dado es un resultado elemental.

Obtener un número par al tirar el dado es un suceso compuesto formado por los sucesos elementales: {2 , 4 , 6}

Cuando se realiza un experimento aleatorio existe un suceso que siempre ocurre: es el **suceso cierto** o **suceso seguro**, y coincide con el espacio muestral *E*. Por el contrario, el **suceso imposible** es aquel suceso que no puede ocurrir nunca, y se denota por ∅.

Suceso cierto o seguro = *E*

Suceso imposible = ∅

EJEMPLO

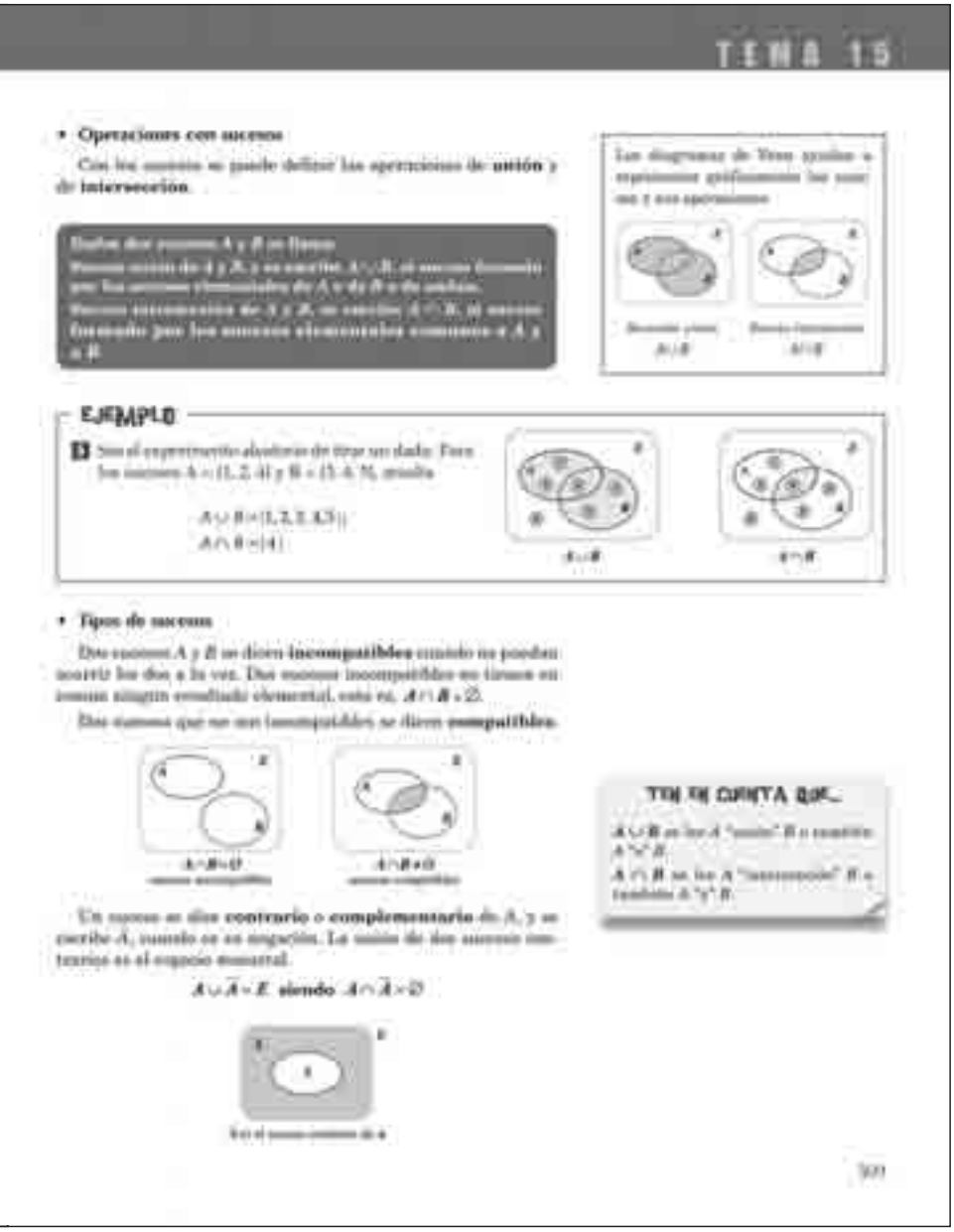
1 Al tirar un dado, el suceso «el dado sobre alguna cara es el número cinco» es el suceso cierto, pues es un suceso compuesto que coincide con el espacio muestral, al estar formado por los seis resultados elementales {1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6}. Por el contrario, el suceso «el dado se queda sobre una arista» es el suceso imposible porque ningún suceso elemental forma parte de él.

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS

Observar la similitud entre el "álgebra de conjuntos" y el "álgebra de sucesos" recogida implícitamente en el epígrafe.

Insistir en la idea de dependencia/independencia. En una relación funcional la variable dependiente está totalmente "ligada" con la independiente a través de la relación. Sin embargo, en probabilidad, la dependencia admite grados: dos variables o dos sucesos pueden ser poco, bastante o muy dependientes. Poner ejemplos.

▶ Pág. 309.



TEMA 15

• **Operaciones con sucesos**

Con los sucesos se puede definir las operaciones de **unión** y de **intersección**.

Dados dos sucesos A y B en Ω:

Suceso unión de A y B, y se escribe $A \cup B$, el suceso formado por los sucesos elementales de A o de B o de ambos.

Suceso intersección de A y B, se escribe $A \cap B$, el suceso formado por los sucesos elementales comunes a A y a B.

Los diagramas de Venn ayudan a representar gráficamente los sucesos y sus operaciones.

$A \cup B$ $A \cap B$

EJEMPLO

Sea el experimento aleatorio de tirar un dado. Para los sucesos $A = \{1, 2, 4\}$ y $B = \{3, 4, 5\}$, resulta

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$A \cap B = \{4\}$

$A \cup B$ $A \cap B$

• **Tipos de sucesos**

Dos sucesos A y B se dicen **incompatibles** cuando no pueden ocurrir los dos a la vez. Dos sucesos incompatibles no tienen en común ningún resultado elemental, esto es, $A \cap B = \emptyset$.

Dos sucesos que no son incompatibles se dicen **compatibles**.

$A \cap B = \emptyset$ $A \cap B \neq \emptyset$

Un suceso se dice **contrario** o **complementario** de A, y se escribe $\bar{A}$, cuando es su negación. La unión de dos sucesos contrarios es el espacio muestral.

$A \cup \bar{A} = E$ **siendo** $A \cap \bar{A} = \emptyset$

$\bar{A}$ es el suceso contrario de A

TEN EN CUENTA QUE...

$A \cup B$ se lee A "unión" B o también A "o" B.

$A \cap B$ se lee A "intersección" B o también A "y" B.

321

▶ Pág. 310.



EXPERIMENTOS ALEATORIOS. PROBABILIDAD

suceso A incluido en B

Un suceso A se dice que está **incluido** en otro suceso B, y se expresa $A \subset B$, cuando siempre que ocurre A ocurre B.

Observa que el suceso complementario del suceso cierto es el suceso imposible, y viceversa. $\bar{E} = \emptyset$ y $\bar{\emptyset} = E$. Cualquier suceso A está incluido en el suceso cierto: $A \subset E$. La unión de dos sucesos complementarios es todo el espacio muestral. La intersección de dos sucesos incompatibles es el suceso imposible.

EJEMPLO

1 Al tirar un dado:

a) Los sucesos «salir un número par» = {2, 4, 6} y «salir un número impar» = {1, 3, 5} son complementarios. La negación de salir un número par es que salga un número impar.

b) Los sucesos «salir menos de tres» = {1, 2} y «salir más de cuatro» = {5, 6} son incompatibles, pues si ocurre el primero no puede ocurrir el segundo, y viceversa.

c) El suceso «salir un número par» = {2, 4, 6} está incluido en el suceso {2, 4, 5, 6}.

Existen sucesos cuya ocurrencia no influye sobre la posible aparición o no de otro suceso. En este caso se dice que los sucesos son **independientes**. En otras ocasiones la ocurrencia de un suceso sí que afecta la posible ocurrencia de un segundo suceso. En este caso se dice que los sucesos son **dependientes**.

EJEMPLO

1 El suceso «el primer premio de la lotería termina en 5» y el suceso «el primer premio de la lotería termina en 7» son dependientes. Imagínate que juegas un décimo del número 26 547. Si en la radio oyes que la terminación del décimo premiado es 5, sabes con cierta que no te ha tocado el primer premio de la lotería. Esto es, la ocurrencia del primer suceso condiciona la no ocurrencia del segundo: ambos sucesos son dependientes.

EJERCICIOS

2 Considera el experimento lanzar dos dados de parchís. Indica qué resultados del lanzamiento forman parte de los siguientes sucesos: a) suceso cierto; b) suceso imposible; c) suceso obtener algún par; d) suceso no obtener ningún impar; e) suceso obtener siete puntos en total.

3 Se tiene una bolsa con tres bolas blancas y dos azules y realizamos el siguiente experimento: saco dos bolas de la bolsa, una tras otra.

Sea A el suceso "la primera bola es blanca" y B el suceso "la segunda bola es azul".

Indica si los sucesos A y B son dependientes o independientes según que la primera bola extraída se devuelva o no se devuelva a la bolsa.

310

SOLUCIONARIO

2. Considera el experimento lanzar dos dados de parchís. Indica qué resultados del lanzamiento forman parte de los siguientes sucesos: a) suceso cierto; b) suceso imposible; c) suceso obtener algún par; d) suceso no obtener ningún impar; e) suceso obtener siete puntos en total.

a) E = {(1,1) (1,2) (1,3) (1,4) (1,5) (1,6) (2,1) (2,2) (2,3) (2,4) (2,5) (2,6) (3,1) (3,2) (3,3) (3,4) (3,5) (3,6) (4,1) (4,2) (4,3) (4,4) (4,5) (4,6) (5,1) (5,2) (5,3) (5,4) (5,5) (5,6) (6,1) (6,2) (6,3) (6,4) (6,5) (6,6)}

b) Ø (que uno o los dos dados queden sobre una de sus aristas o uno de sus vértices).

c) {(1,2) (1,4) (1,6) (2,1) (2,2) (2,3) (2,4) (2,5) (2,6) (3,2) (3,4) (3,6) (4,1) (4,2) (4,3) (4,4) (4,5) (4,6) (5,2) (5,4) (5,6) (6,1) (6,2) (6,3) (6,4) (6,5) (6,6)}

d) {(2,2) (2,4) (2,6) (4,2) (4,4) (4,6) (6,2) (6,4) (6,6)}

e) {(1,6) (6,1) (2,5) (5,2) (3,4) (4,3)}

3. Se tiene una bolsa con tres bolas blancas y dos azules y realizamos el siguiente experimento: saco dos bolas de la bolsa, una tras otra.

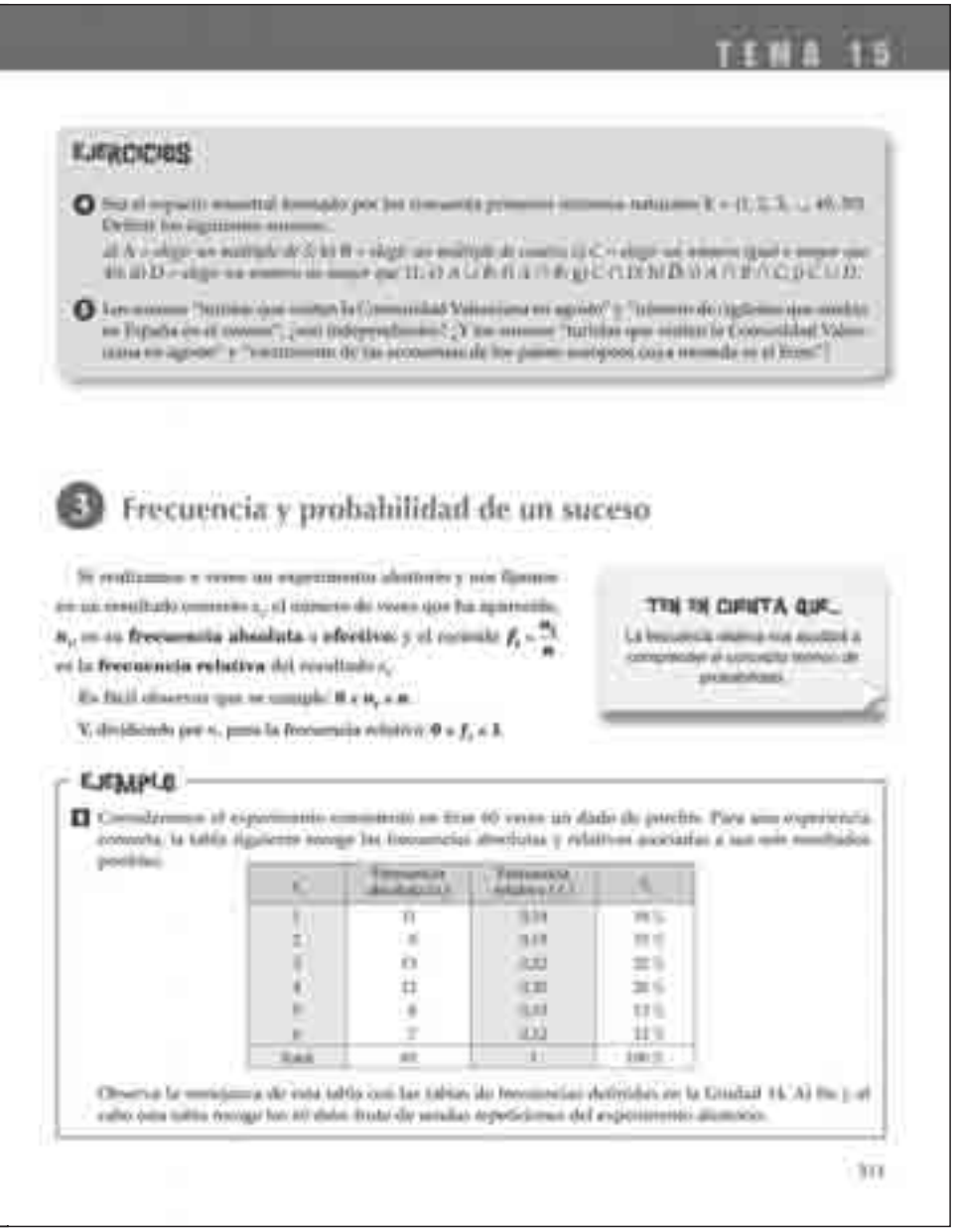
Sea A el suceso "la primera bola es blanca" y B el suceso "la segunda bola es azul".

Indica si los sucesos A y B son dependientes o independientes según que la primera bola extraída se devuelva o no se devuelva a la bolsa.

Si la bola extraída en primer lugar se devuelve antes de extraer la segunda, la composición de la bolsa es la misma al extraer la segunda bola. Por ello, el resultado obtenido en la primera extracción no influye en nada el posible resultado de la segunda. En este caso, pues, los sucesos A y B son independientes, y el tipo de extracción de bolas realizado se dice con reemplazamiento.

Sin embargo, cuando no se devuelve la primera bola a la bolsa, la probabilidad del suceso B está condicionado al resultado obtenido en la primera extracción. En efecto, si la bola extraída en primer lugar es blanca, entonces en la bolsa quedarán dos bolas blancas y dos azules; y si la primera bola es azul, en la bolsa quedarán tres blancas y una azul. Por ello los sucesos son ahora dependientes, y el tipo de extracción de bolas se dice sin reemplazamiento.

▶ Pág. 311. 3 Frecuencia y probabilidad de un suceso



TEMA 15

EJERCICIOS

3 Frecuencia y probabilidad de un suceso

TEN EN CUENTA QUE...

EJEMPLO

311

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS

Plantearse la siguiente pregunta: ¿es posible modelizar el azar?

Criticar las tres propiedades fundamentales de la probabilidad, que en cursos posteriores consideraremos como axiomas. Plantearse si son creíbles sin necesidad de demostración.

Criticar la ley de estabilidad de las frecuencias relativas. A pesar de ser muy intuitiva –de ahí su valor-, ¿quién puede asegurar que sea cierta? ¿Quién ha llegado hasta el infinito?

4. Sea el espacio muestral formado por los cincuenta primeros números naturales E = {1, 2, 3, ..., 49, 50}. Definir los siguientes sucesos:

a) A = elegir un múltiplo de 5;

A = {5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50}

b) B = elegir un múltiplo de cuatro;

B = {4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, 48}

c) C = elegir un número igual o mayor que 40;

C = {40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50}

d) D = elegir un número no mayor que 11;

D = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11}

e) $A \cup B$;

A ∪ B = {4, 5, 8, 10, 12, 15, 16, 20, 24, 25, 28, 30, 32, 35, 36, 40, 44, 45, 48, 50}

f) $A \cap B$;

A ∩ B = {20, 40}

g) $C \cap D$; $C \cap D = \emptyset$

h) $\overline{D}$ = Un número mayor o igual que 12 y menor o igual que 50;

i) A ∩ B ∩ C;

A ∩ B ∩ C = {40}

j) C ∪ D.

C ∪ D = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50}

5. Los sucesos "turistas que visitan la Comunidad Valenciana en agosto" y "número de cigüeñas que anidan en España en el verano", ¿son independientes? ¿Y los sucesos "turistas que visitan la Comunidad Valenciana en agosto" y "crecimiento de las economías de los países europeos cuya moneda es el Euro"?

Los sucesos "turistas que visitan la Comunidad Valenciana en agosto" y "número de cigüeñas que añidan en España en el verano" son *independientes*, pues el conocimiento de algunos de ellos no aporta nada al conocimiento del otro. En cambio, el primero de los sucesos anteriores y el suceso "crecimiento de las economías de los países europeos cuya moneda es el euro", si son *dependientes*, pues saber, por ejemplo, que las economías de esos países están en una buena situación da pie a pensar que serán sus habitantes que son los principales clientes turísticos de la Comunidad Valenciána, los que la visitarán en agosto, al disponer de una mejor situación económica.

▶ Pág. 312.



EXPERIMENTOS ALEATORIOS. PROBABILIDAD

Fíjate que en el ejemplo todas las frecuencias están cercanas a 10, que es la frecuencia que cabría esperar; mientras que las frecuencias relativas rondan el valor esperado de $\frac{1}{6} = 0,\overline{16}$.

Si seguimos tirando el dado, por ejemplo, hasta 600 veces, seguiremos observando que la frecuencia absoluta de cada resultado se acerca a 100 y las respectivas frecuencias relativas se aproximan, cada vez más, a $0,\overline{16}$, como se indica en la siguiente figura:

Este hecho, lógico si el dado está bien construido, se conoce como **ley de estabilidad de las frecuencias relativas**, y permite definir la **probabilidad de un suceso** A, $P(A)$, como el *valor de la frecuencia relativa del suceso cuando el número de repeticiones del experimento es muy grande*.

Este valor verifica tres propiedades fundamentales:

1.ª La probabilidad de un suceso A es un número comprendido entre 0 y 1, esto es, $0 \leq P(A) \leq 1$.

2.ª La probabilidad del suceso cierto, E, es 1, mientras que la probabilidad del suceso imposible, $\emptyset$, es 0: $P(E) = 1$ y $P(\emptyset) = 0$.

3.ª Siendo A y B dos sucesos incompatibles, $A \cap B = \emptyset$, la probabilidad de que ocurra uno u otro es la suma de sus probabilidades: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

ADVIERTE QUE...

Una consecuencia de la tercera propiedad es que la suma de las probabilidades de todos los sucesos elementales asociados a un experimento es 1.

EJEMPLO

Consideremos una baraja española y el experimento de extraer una carta al azar.

1.º La probabilidad del suceso obtener una carta del palo de oros es $\frac{1}{4}$, esto es, un valor dentro del intervalo $(0, 1)$.

2.º La probabilidad del suceso obtener un número 1, pues se trata del suceso seguro. Por el contrario, la probabilidad del suceso obtener el 4 de bastos es 0, pues se trata del suceso imposible al ser una baraja de cartas española.

3.º La probabilidad del suceso obtener una carta del palo de oros o del palo de copas es $\frac{1}{2}$, suma de $\frac{1}{4}$ más $\frac{1}{4}$, que son las probabilidades de los sucesos incompatibles obtener una carta del palo de oros y obtener una carta del palo de copas.

EJERCICIO

Las caras de un dado están marcadas con ceros y unos, pero desconocemos la proporción. Indica cómo podríamos saber el número de ceros y unos que tienen las caras si nos dicen que al realizar 120 lanzamientos se han obtenido 80 unos y 40 ceros.

312

SOLUCIONARIO

6. Las caras de un dado están marcadas con ceros y unos, pero desconocemos la proporción. Indica cómo podríamos saber el número de ceros y unos que tienen las caras si nos dicen que al realizar 120 lanzamientos se han obtenido 80 unos y 40 ceros.

Utilizaríamos las frecuencias relativas. El dado tiene 6 caras, y como la frecuencia relativa del uno es $\frac{80}{120} = \frac{2}{3}$ y del cero es $\frac{40}{120} = \frac{1}{3}$, podemos pensar que el número de caras en el dado que tienen el uno es $6 \times \frac{2}{3} = 4$; y el número de caras en el dado que tienen el cero es $6 \times \frac{1}{3} = 2$

▶ Pág.



TEMA 15

1 Probabilidad de Laplace

La **Ley de Laplace** establece una forma práctica para calcular probabilidades, definiendo una regla para su cálculo. Dice así:

Si los sucesos elementales que componen un suceso A son equiprobables, para así hallar ellos tienen la misma probabilidad, la probabilidad de A puede obtenerse a través del cociente siguiente:

$$P(A) = \frac{\text{número de casos favorables}}{\text{número de casos posibles}}$$

Observa que, para poder aplicarla correctamente, es necesario que los sucesos elementales que definen al suceso A sean equiprobables.

Distingue entre *posible* y *probable*. Existen hechos o circunstancias que, siendo posibles, son muy poco probables. Por ejemplo, si juego un décimo de lotería de Navidad es posible que me toque el primer premio; pero, sin embargo, es poco probable que así ocurra. Nadie, sensatamente, destinará sus gastos cotidianos como ingresos los derivados de la lotería. Aplicando la Ley de Laplace, y sabiendo que son 85 000 los números que entran en dicho sorteo, la probabilidad de acertar el primer premio es:

$$P(A) = \frac{1}{85\,000} \approx 0,000011\overline{7}$$

Pierre-Simon Laplace (1749-1827). Matemático francés que contribuyó con sus estudios y publicaciones al desarrollo de la Teoría de la Probabilidad.

EJEMPLO

Al lanzar un dado bien equilibrado, uno solo cada tiene la misma probabilidad de aparecer (son equiprobables). También son equiprobables los sucesos salir par y salir impar, pues aplicando la Ley de Laplace ambos tienen la misma probabilidad:

$$P(\text{salir par}) = P(\text{salir impar}) = \frac{\text{número casos favorables}}{\text{número casos posibles}} = \frac{3}{6} = 0,5$$

En cambio, los sucesos salir un resultado menor que 2 y salir un resultado mayor que tres no son equiprobables, ya que:

$P(\text{salir un resultado menor que } 2) = \frac{2}{6} \approx 0,3$ $\qquad$ $P(\text{salir un resultado mayor que } 3) = \frac{3}{6} = 0,5$

La Ley de Laplace no a permitirnos demostrar, de forma intuitiva y para sucesos elementales equiprobables, dos resultados de gran aplicación en situaciones reales. Para ello, vamos a utilizar la representación de sucesos mediante diagramas de Venn:

103

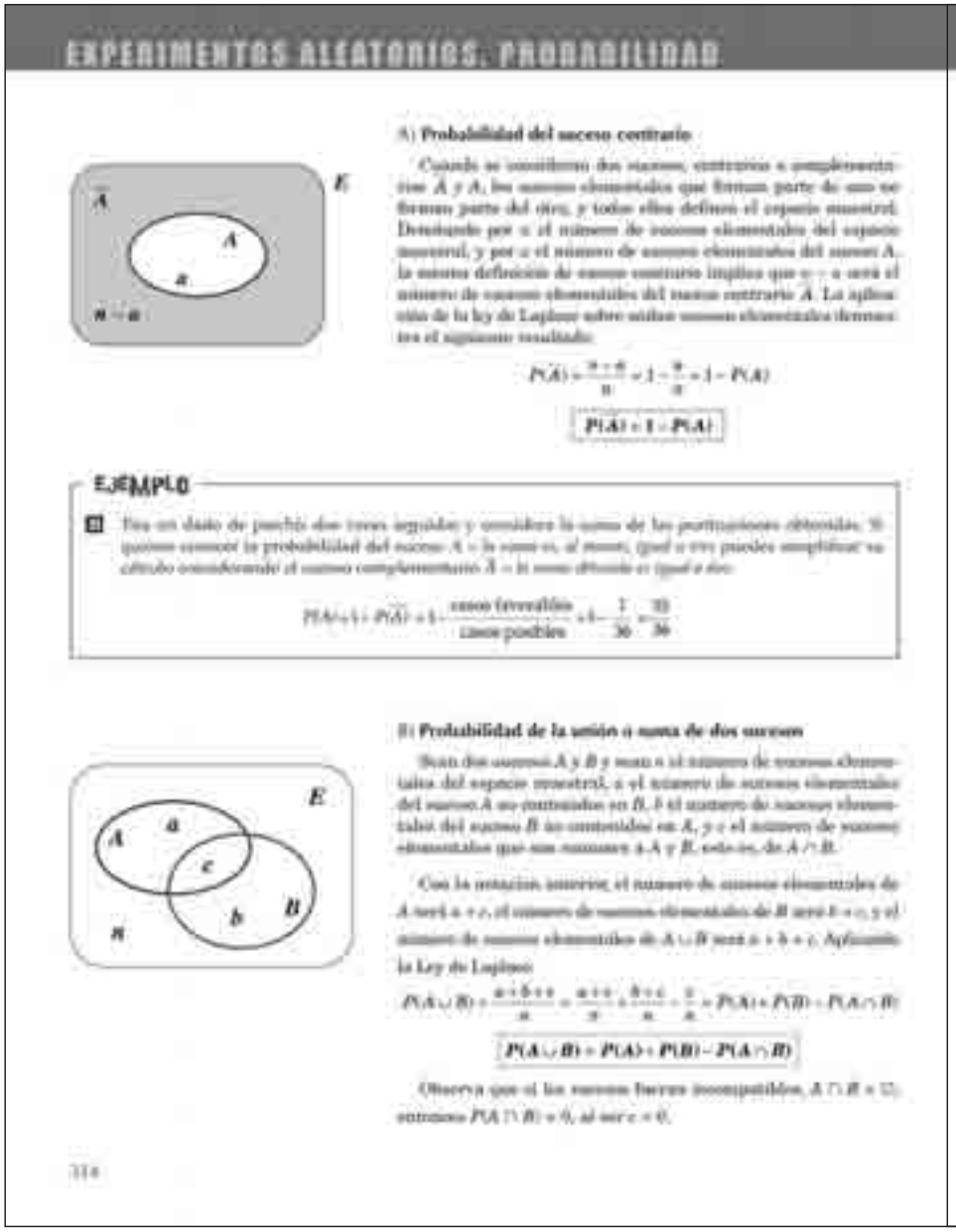
ORIENTACIONES DIDÁCTICAS

Poner ejemplos que ilustren la diferencia entre *posible* y *probable*. La probabilidad como medición de lo posible.

Crítica a la Ley de Laplace: al exigir equiprobabilidad, lo definido queda dentro de la definición.

La Ley de Laplace es muy útil como regla de cálculo de probabilidades.

▶ Pág. 314.



EXPERIMENTOS ALEATORIOS. PROBABILIDAD

A) Probabilidad del suceso contrario

Cuando se consideran dos sucesos, contrario o complementario $\bar{A}$ y A, los sucesos elementales que forman parte de uno no forman parte del otro, y todos ellos definen el espacio muestral. Denotando por n el número de sucesos elementales del espacio muestral, y por a el número de sucesos elementales del suceso A, la misma definición de suceso contrario implica que $n - a$ será el número de sucesos elementales del suceso contrario $\bar{A}$. La aplicación de la ley de Laplace sobre estos sucesos elementales determina el siguiente resultado:

$$P(\bar{A}) = \frac{n-a}{n} = 1 - \frac{a}{n} = 1 - P(A)$$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

EJEMPLO

Tira un dado de parchís dos veces seguidas y considera la suma de las puntuaciones obtenidas. Si quieres conocer la probabilidad del suceso A = la suma es, al menos, igual a tres puedes simplificar su cálculo considerando el suceso complementario $\bar{A}$ = la suma obtenida es igual a dos.

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} = 1 - \frac{1}{36} = \frac{35}{36}$$

B) Probabilidad de la unión o suma de dos sucesos

Sean dos sucesos A y B y sean n el número de sucesos elementales del espacio muestral, a el número de sucesos elementales del suceso A no contenidos en B, b el número de sucesos elementales del suceso B no contenidos en A, y c el número de sucesos elementales que son sucesos a A y B, esto es, de $A \cap B$.

Con la notación anterior, el número de sucesos elementales de A será $a + c$, el número de sucesos elementales de B será $b + c$, y el número de sucesos elementales de $A \cup B$ será $a + b + c$. Aplicando la Ley de Laplace:

$$P(A \cup B) = \frac{a+b+c}{n} = \frac{a+c}{n} + \frac{b+c}{n} - \frac{c}{n} = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Observa que si los sucesos fueran incompatibles, $A \cap B = \emptyset$, entonces $P(A \cap B) = 0$, al ser $c = 0$.

314

SOLUCIONARIO

7. Al tirar un dado de parchís, calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:

a) obtener un resultado comprendido entre 2 y 5, ambos incluidos;

Aplicamos la probabilidad de Laplace:

$$P = \frac{\text{n.º casos favorables}}{\text{n.º casos posibles}}$$

Casos favorables {2, 3, 4, 5} y casos posibles {1, 2, 3, 4, 5, 6}

En consecuencia: $P = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

b) obtener un resultado múltiplo de 2;

Casos favorables {2, 4, 6} y casos posibles {1, 2, 3, 4, 5, 6}

En consecuencia: $P = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

c) obtener un resultado múltiplo de 3.

Casos favorables {3, 6} y casos posibles {1, 2, 3, 4, 5, 6}

En consecuencia: $P = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

8. En el experimento de extraer una carta de una baraja de 40 naipes, determina la probabilidad de los siguientes sucesos:

a) sacar un as;

Aplicaremos la probabilidad de Laplace, teniendo en cuenta que son 40 el número de casos posibles.

Casos favorables: {As de oros, As de Copas, As de Espadas, As de Bastos}

En consecuencia: $P = \frac{4}{40} = \frac{1}{10}$

b) sacar un basto;

Cada palo está formado por 10 cartas. En consecuencia $P = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$

c) sacar una figura de copas;

Cada palo tiene tres figuras: sota, dama y rey.

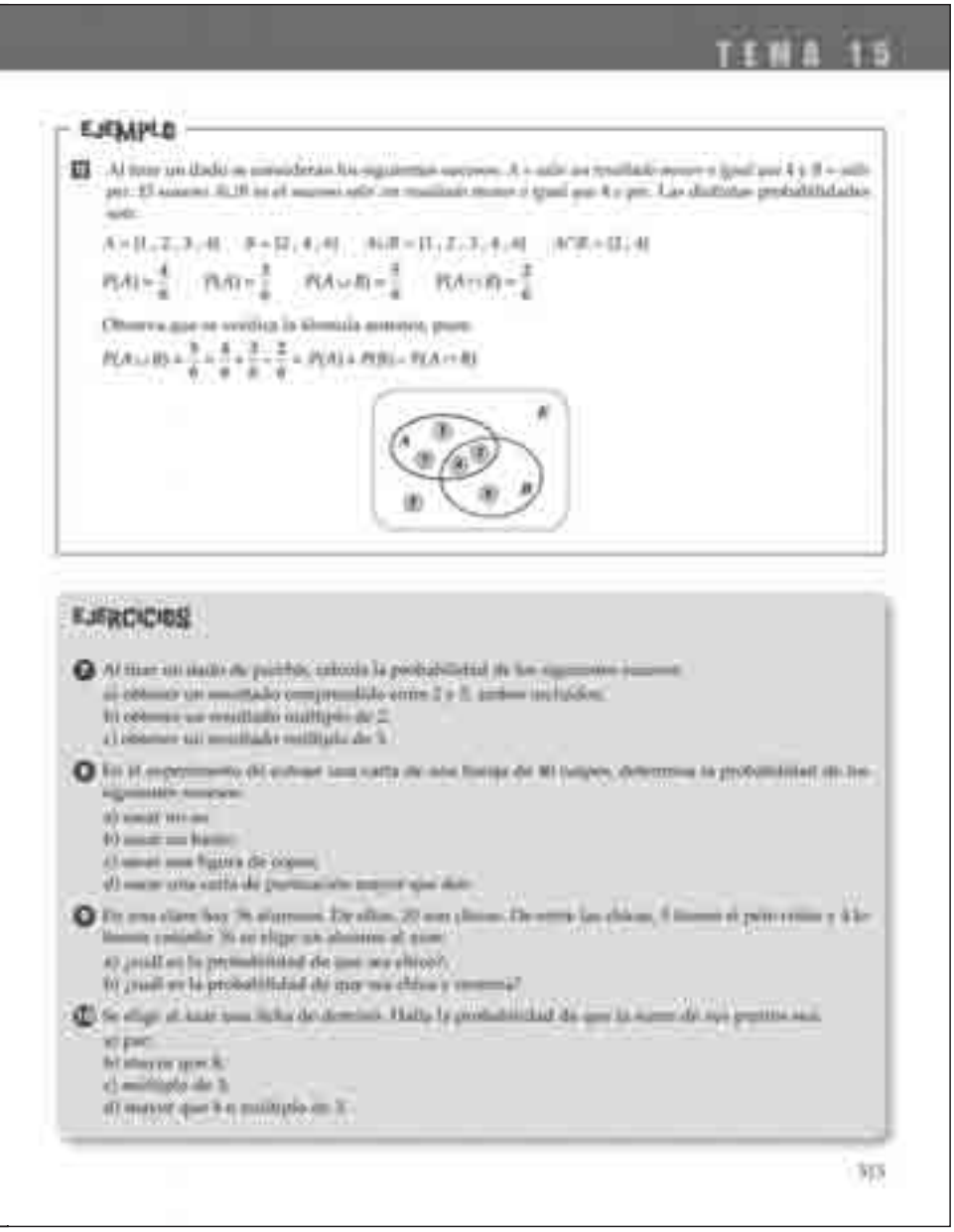
En consecuencia: $P = \frac{3}{40}$

d) sacar una carta de puntuación mayor que dos.

En cada palo hay ocho cartgas mayores que 2.

En consecuencia: $P = 8 \times \frac{4}{40} = \frac{4}{5}$

▶ Pág. 315.



TEMA 15

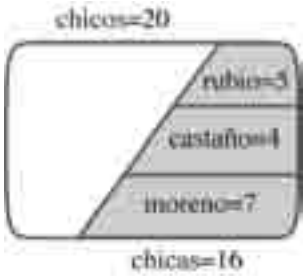
EJEMPLO

EJERCICIOS

9. En una clase hay 36 alumnos. De ellos, 20 son chicos. De entre las chicas, 5 tienen el pelo rubio y 4 lo tienen castaño. Si se elige un alumno al azar:

a) ¿cuál es la probabilidad de que sea chico?;

b) ¿cuál es la probabilidad de que sea chica y morena?



$$P(\text{chico}) = \frac{\text{n.º casos favorables}}{\text{n.º casos posibles}} = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$$

$$P(\text{chica y morena}) = P(\text{chica} \cap \text{morena}) = \frac{\text{n.º casos favorables}}{\text{n.º casos posibles}} = \frac{7}{36}$$

10. Se elige al azar una ficha de dominó. Halla la probabilidad de que la suma de sus puntos sea:

a) par;

El dominó tiene 28 fichas posibles.

Casos favorables: {(0,2), (0,4), (0,6), (1,1), (1,3), (1,5), (2,2), (2,4), (2,6), (3,3), (3,5), (4,4), (4,6), (5,5), (6,6)} = 15 fichas. (no se tiene en cuenta la ficha "blanca doble").

$$P(\text{suma de puntos par}) = \frac{15}{28}$$

b) mayor que 8;

Casos favorables: {3,6), (4,5), (4,6), (5,5), (5,6), (6,6)} = 6 fichas

$$P(\text{suma de puntos mayor que 8}) = \frac{6}{28} = \frac{3}{14}$$

c) múltiplo de 3;

Casos favorables {(0,3), (0,6), (1,2), (1,5), (2,4), (3,3), (3,6), (4,5), (6,6)} = 9 fichas

$$P(\text{suma sea múltiplo de 3}) = \frac{9}{28}$$

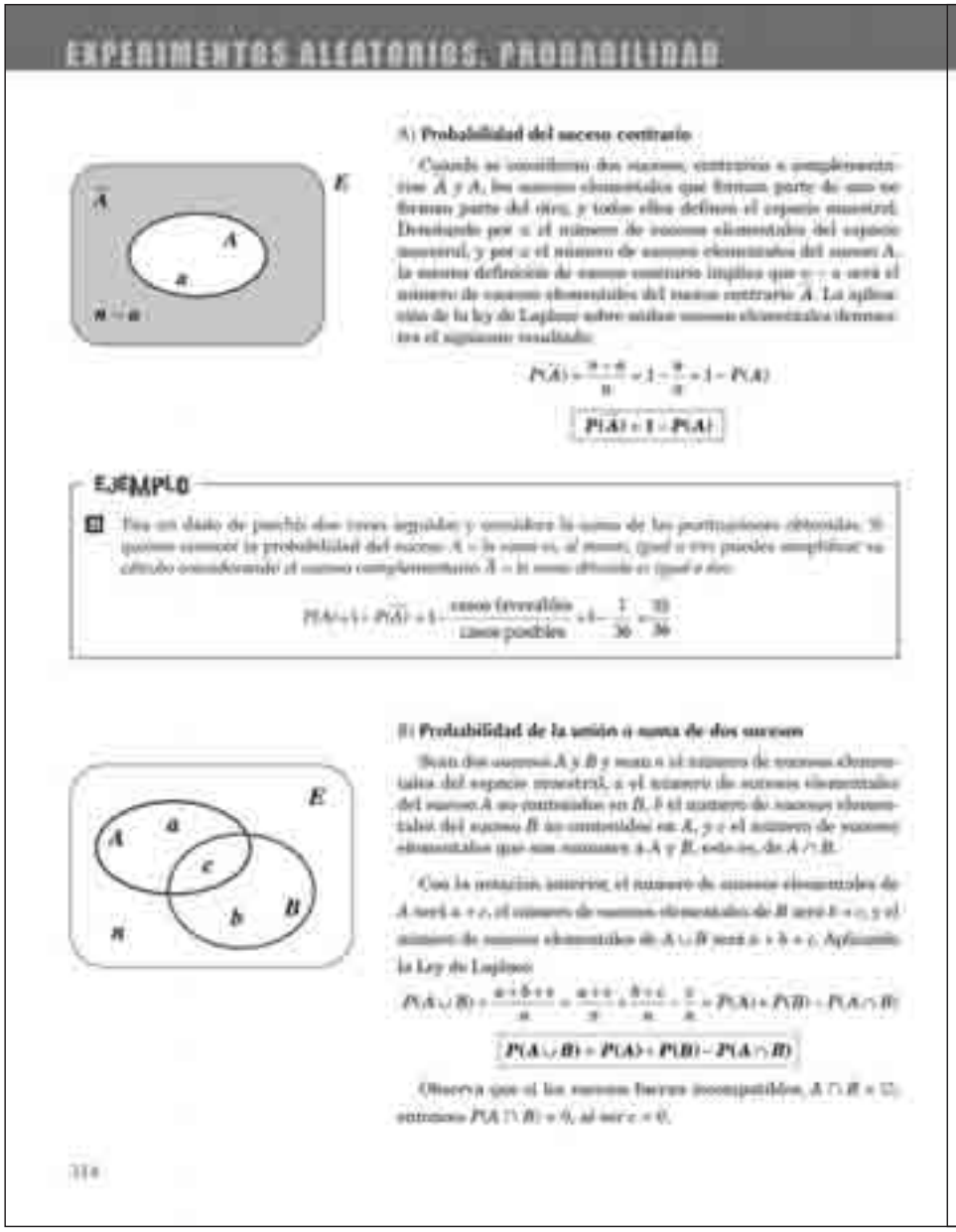
d) mayor que 8 o múltiplo de 3.

Sea el suceso A = {suma de los puntos mayor que 8 y suma de los puntos múltiplo de 3} = {(3,6), (4,5), (6,6)} = 3 fichas.

P(suma de puntos mayor que 8 ó suma de puntos múltiplo de 3) = P(suma de puntos mayor que 8) + P(suma de puntos múltiplo de 3) – P(A) =

$$= \frac{3}{14} + \frac{9}{28} - \frac{3}{28} = \frac{12}{28} = \frac{3}{7}$$

▶ Pág. 316. 5 Experimentos compuestos. Diagramas en árbol


EXPERIMENTOS ALEATORIOS. PROBABILIDAD

A) Probabilidad del suceso contrario

Cuando se consideran dos sucesos, contrario o complementario $\bar{A}$ y A, los sucesos elementales que forman parte de uno no forman parte del otro, y todos ellos definen el espacio muestral. Denotando por n el número de sucesos elementales del espacio muestral, y por a el número de sucesos elementales del suceso A, la misma definición de suceso contrario implica que $n - a$ será el número de sucesos elementales del suceso contrario $\bar{A}$. La aplicación de la ley de Laplace sobre estos sucesos elementales determina el siguiente resultado:

$$P(\bar{A}) = \frac{n-a}{n} = 1 - \frac{a}{n} = 1 - P(A)$$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

EJEMPLO

Se da un dado de parchís dos veces seguidas y se considera la suma de las puntuaciones obtenidas. Si queremos conocer la probabilidad del suceso A = la suma es, al menos, igual a diez puedes simplificar su cálculo considerando el suceso complementario $\bar{A}$ = la suma obtenida es igual a diez.

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} = 1 - \frac{3}{36} = \frac{33}{36}$$

B) Probabilidad de la unión o suma de dos sucesos

Sean dos sucesos A y B y sean n el número de sucesos elementales del espacio muestral, a el número de sucesos elementales del suceso A no contenidos en B, b el número de sucesos elementales del suceso B no contenidos en A, y c el número de sucesos elementales que son sucesos a A y B, esto es, de $A \cap B$.

Con la notación anterior, el número de sucesos elementales de A será $a + c$, el número de sucesos elementales de B será $b + c$, y el número de sucesos elementales de $A \cup B$ será $a + b + c$. Aplicando la Ley de Laplace:

$$P(A \cup B) = \frac{a+b+c}{n} = \frac{a+c}{n} + \frac{b+c}{n} - \frac{c}{n} = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Observa que si los sucesos fueran incompatibles, $A \cap B = \emptyset$, entonces $P(A \cap B) = 0$, al ser $c = 0$.

316

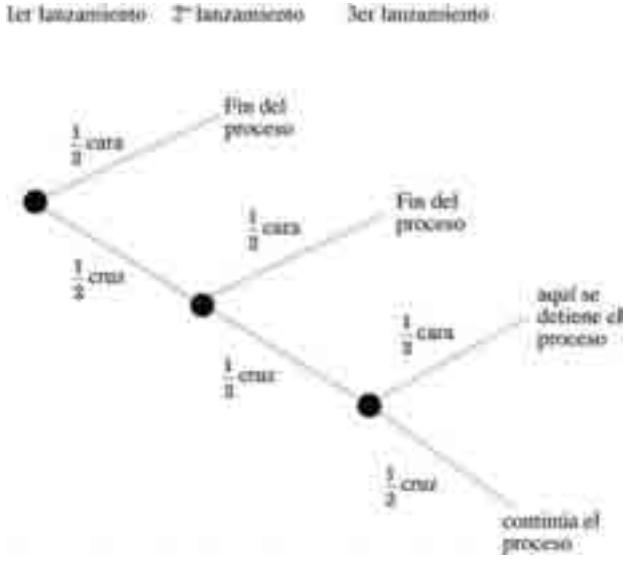
ORIENTACIONES DIDÁCTICAS

Constatar mediante ejemplos la utilidad de los diagramas de árbol en el cálculo de probabilidades compuestas.

SOLUCIONARIO

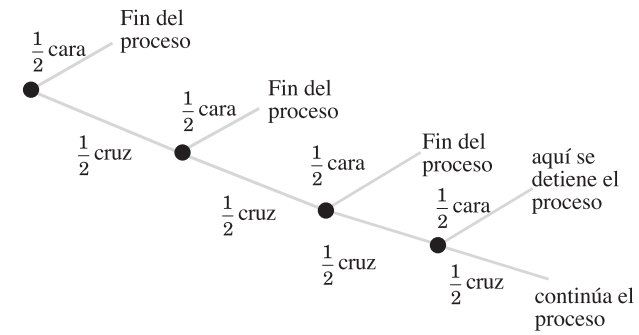
11. Se considera el experimento de lanzar una moneda hasta que salga cara. ¿Cuál es la probabilidad de que el experimento termine en la tercera tirada?, ¿y en la cuarta?

Si el experimento finaliza en la 3.ª tirada, en los dos primeros lanzamientos debe salir cruz, y en el tercer lanzamiento cara.

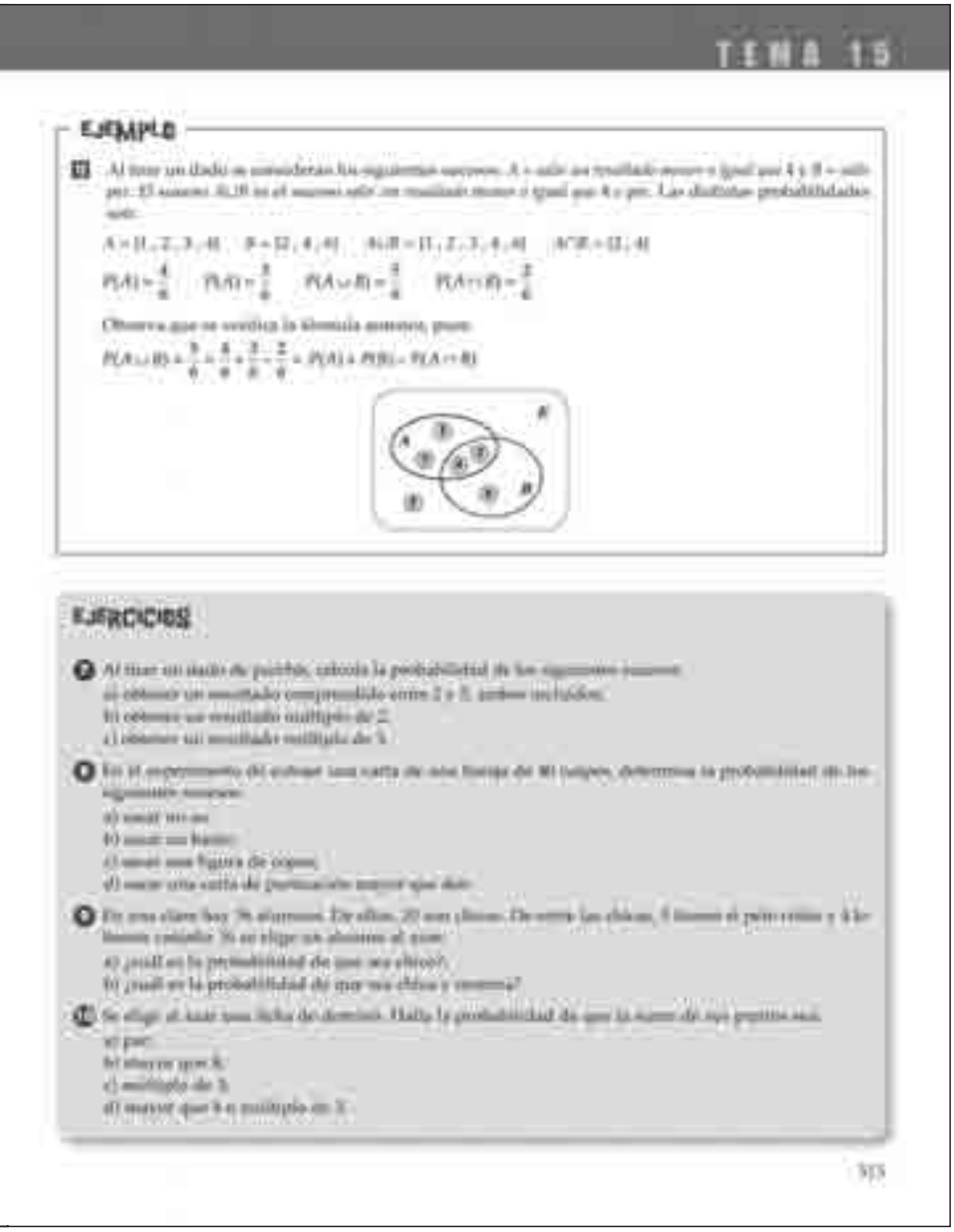


La probabilidad pedida es: $P = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

Si el experimento finaliza en la cuarta tirada, en los tres primeros lanzamientos debe salir cruz, y en el cuarto lanzamiento cara.



▶ Pág. 317.



TEMA 15

EJEMPLO

EJERCICIOS

315

La probabilidad pedida es: $P = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$

12. Se extraen sucesivamente y sin devolución tres cartas de una baraja española de 40 naipes. ¿Cuál es la probabilidad de que las tres sean oros?, ¿y de obtener oro, copa y espada por este orden?

La primera carta es oro con probabilidad $\frac{10}{40}$.

Si se extrae una carta que es oro, en la baraja quedan 9 oros de 39 cartas.

La segunda carta extraída será oro con probabilidad de $\frac{9}{39}$.

Por la misma razón, si se han extraído dos oros nos quedará una baraja con 38 cartas de las cuales 8 serán oros.

La tercera carta extraída será un oro con probabilidad de $\frac{8}{38}$.

El suceso de "las tres son oros" tendrán probabilidad $P = \frac{10}{40} \times \frac{9}{39} \times \frac{8}{38} = \frac{720}{59280} = \frac{15}{1235}$

En el segundo caso al ser cartas de diferentes palos la probabilidad es: $P = \frac{10}{40} \times \frac{10}{39} \times \frac{10}{38} = \frac{1000}{59280} = \frac{25}{1482}$

pues aunque se extraiga un oro, quedarían 10 copas y 10 espadas.

▶ Pág. 320. Ejercicios



EXPERIMENTOS ALEATORIOS. PROBABILIDAD

EJERCICIOS

SOLUCIONARIO

13. En una bolsa hay 20 bolas numeradas del 1 al 20. Se extrae una bola al azar. Calcula la probabilidad de que la bola extraída sea:

a) Múltiplo de 5; b) Mayor de 15; c) No sea múltiplo de 4.

Casos posibles = 20

a) Casos favorables: {5, 10, 15, 20} = 4 bolas

P (múltiplo de 5) = $\frac{4}{20} = \frac{1}{5}$

b) Casos favorables: {16, 17, 18, 19, 20} = 5 bolas

P (mayor de 15) = $\frac{5}{20} = \frac{1}{4}$

c) B: {múltiplo de 4} = {4, 8, 12, 16, 20} = 5 casos

P (múltiplo de 4) = 1 – P(B) = $1 - \frac{5}{20} = \frac{3}{4}$

14. De una baraja española de 40 cartas se extrae una al azar. Halla la probabilidad de que la carta extraída sea:

a) Un oro.

b) Una espada o un basto.

c) No sea una sota.

d) Sea el as de bastos.

Casos posibles = 40

a) Casos favorables: 10

P (oro) = $\frac{10}{40} = \frac{1}{4}$

b) Casos favorables: 10 espadas y 10 bastos = 20 casos

P (espada o basto) = $\frac{20}{40} = \frac{1}{2}$

c) Sotas en una baraja hay 4 → P(sota) = $\frac{4}{40} = \frac{1}{10}$

P (no sota) = 1 – P(sota) = $1-\frac{1}{10}=\frac{9}{10}$

d) Casos favorables = 1

P (as de bastos) = $\frac{1}{40}$

15. De una baraja española de 40 cartas extraemos dos cartas, una tras otra, con devolución de la carta extraída.

Los sucesos "la primera es una espada" y "la segunda es un oro" son dependientes o independientes.

¿Y si en el proceso no se devuelve a la baraja la primera carta extraída?

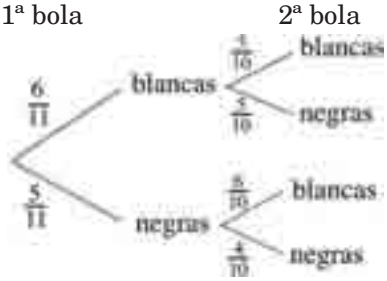
Si hay devolución de la primera carta extraída, la composición de la baraja antes de la extracción de la segunda carta no ha variado, por lo que los sucesos son independientes.

Sin embargo, si no hay reemplazamiento o devolución de la primera carta extraída, la composición de la baraja antes de la extracción de la segunda carta sí ha variado, pues sólo quedan 39 cartas de las que 10 siguen siendo oros. En este caso los sucesos son dependientes, pues la probabilidad de sacar un oro en la segunda carta depende del palo al que pertenece la primera carta extraída.

16. En una bolsa hay 6 bolas blancas y 5 negras. Se saca una bola de la bolsa y, sin devolverla, se saca de la bolsa una segunda bola. Calcula:

a) Probabilidad de que la primera sea blanca y la segunda negra.

b) Probabilidad de que las dos sean negras.



a) P (1ª bola blanca ∩ 2ª bola negra) =

$$\frac{6}{11}\times\frac{5}{10}=\frac{30}{110}=\frac{3}{11}$$

b) P (Las dos bolas negras) = $\frac{5}{11}\times\frac{4}{10}=\frac{20}{110}=\frac{2}{11}$

17. ¿Cuál es la probabilidad de que al levantar una ficha de dominó la suma de puntos sea par o mayor que 8?

Casos posibles: 28 fichas

Casos favorables: { (0, 2), (0, 4), (0, 6), (1, 1), (1, 3), (1, 5), (2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 3), (3, 5), (3, 6), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 5), (5, 6), (6, 6)} = 18 fichas.

$P=\frac{18}{28}=\frac{9}{14}$

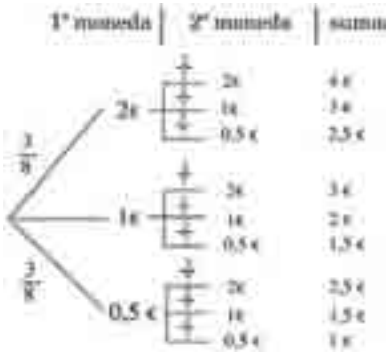
18. Anabel lleva en el bolsillo 3 monedas de dos euros, 2 de un euro y 3 monedas de 50 céntimos. Saca al azar dos monedas del bolsillo. Halla la probabilidad de que las monedas sumen:

a) Más de 2 euros.

b) 4 euros.

c) Menos de 2 euros.

Anabel lleva un total de 8 monedas.



La suma de las probabilidades de cada una de las ramas del árbol permiten obtener:

a) P (más de 2 €) =

$$=\frac{3}{8}\times\frac{2}{7}+\frac{3}{8}\times\frac{2}{7}+\frac{3}{8}\times\frac{3}{7}+\frac{2}{8}\times\frac{3}{7}+\frac{3}{8}\times\frac{3}{7}=\frac{36}{56}=\frac{9}{14}$$

b) P (4 €) = $\frac{3}{8}\times\frac{2}{7}=\frac{6}{56}=\frac{3}{28}$

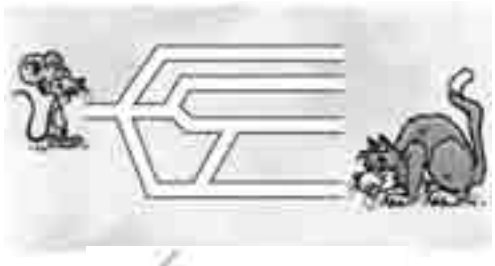
c) P (menos de 2 €) = $\frac{2}{8}\times\frac{3}{7}+\frac{3}{8}\times\frac{2}{7}+\frac{3}{8}\times\frac{2}{7}=\frac{18}{56}=\frac{9}{28}$

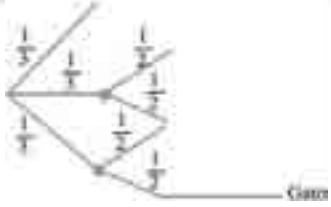
19. Se lanza un dado y me dicen que ha salido un número menor que 4. ¿Cuál es la probabiliad de que haya salido el uno?

Casos posibles = { 1, 2, 3 }

Casos favorables = { 1} $\Rightarrow P=\frac{1}{3}$

20. ¿Cuál es la probabilidad de que el ratón se encuentre con el gato, si toma los caminos al azar y no puede retroceder?





P (encontrar al gato) = $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$

21. Un estudio reciente efectuado sobre los alumnos de ESO estima que la probabilidad de no aprobar las Matemáticas es de 0,5, de no aprobar el Inglés es de 0,2 y la probabilidad de no aprobar ambas asignaturas es de 0,1. Calcula:

a) Probabilidad de no aprobar al menos una asignatura.

b) Probabilidad de aprobar las dos asignaturas.

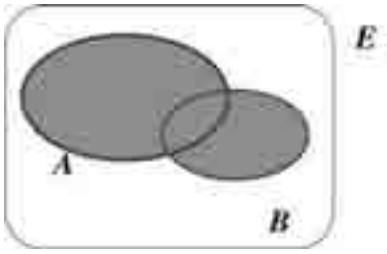
c) Probabilidad de aprobar sólo una de las dos asignaturas.

A = {no aprobar Matemáticas} → P (A) = 0,5

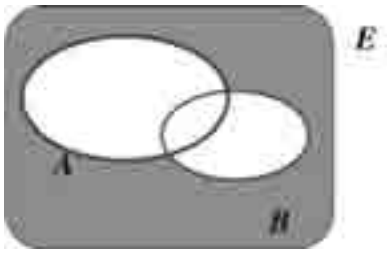
B = {no aprobar Inglés} → P (B) = 0,2

C = {no aprobar Matemáticas ∩ no aprobar Inglés} = = P (A∩B) = 0,1

a) P (no aprobar al menos una asignatura) = = P (A∪B) = P (A) + P (B) – P (A∩B) = = 0,5 + 0,2 – 0,1 = 0,6



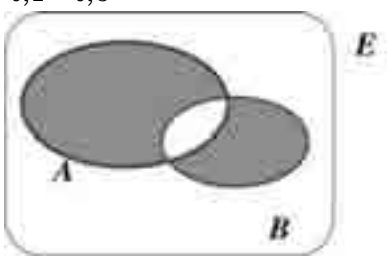
b) P (no aprobar las dos asignaturas) = 1 – P (no aprobar al menos una asignatura) = 1 – P (A∩B) = = 1 – 0,6 = 0,4.



c) P (aprobar sólo una asignatura) =

$= P(\overline{A} \cap B) + P(A \cap \overline{B}) = P(A \cup B) - P(A \cap B) =$

$= 0,6 - 0,1 = 0,5$



22. La probabilidad de comprar el periódico es 0,4, la de una revista de divulgación general 0,1, y la de comprar ambas 0,05. Ayudándote de los correspondientes diagramas de Venn, calcula las probabilidades de los siguientes sucesos:

a) Comprar un periódico o una revista;

b) Comprar un periódico y no una revista;

c) Comprar una revista y no un periódico;

d) No comprar un periódico y comprar una revista.

e) No comprar un periódico o no comprar una revista.

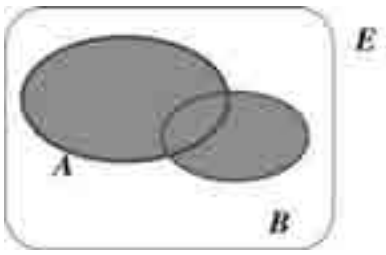
f) No comprar un periódico y no comprar una revista.

A = {comprar periódico} → P (A) = 0,4

B = {comprar revista} → P (B) = 0,1

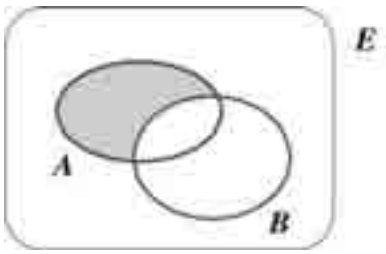
C = {comprar revista « comprar periódico} = = P (A ∩ B) = 0,05

a) P (comprar un periódico o comprar una revista) = P (A ∪ B) = P (A) + P (B) – P(A ∩ B) = = 0,4 + 0,1 – 0,05 = 0,45



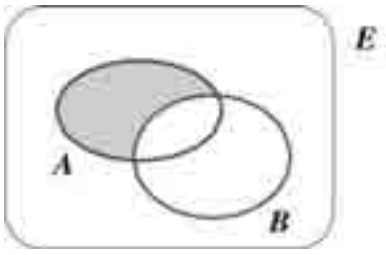
b) P (comprar un periódico y no una revista) =

$= P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) = 0,4 - 0,05 = 0,35$



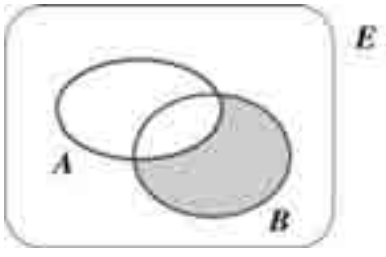
c) P (comprar una revista y no un periódico) =

$= P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = 0,1 - 0,05 = 0,05$



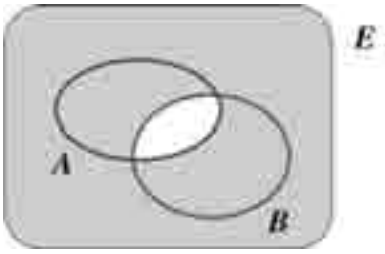
d) P (no comprar un periódico y comprar una revista) = $P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) =$

$= 0,1 - 0,05 = 0,05$



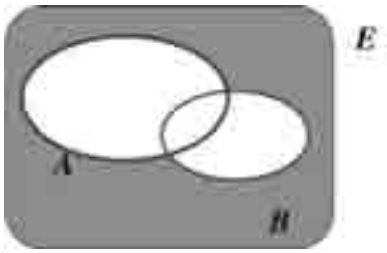
e) P (no comprar un periódico o no comprar una revista) = $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 1 - P(A \cap B) =$

$= 1 - 0,05 = 0,95$



f) P (no comprar un periódico y no comprar una revista) = $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0,45 =$

$= 0,55$



▶ Pág. 321. Ejercicios



23. Calcula la probabilidad de que al lanzar 10 veces dos dados se obtenga al menos un seis doble.

En el lanzamiento de dos dados hay 36 casos posibles.

La probabilidad de obtener un 6 doble es $\frac{1}{36}$ y la de no obtenerlo $\frac{35}{36}$.

La probabilidad de "no obtener un 6 doble en 10 lanzamientos" es:

$$P = \frac{35}{36} \times \frac{35}{36} \times \overset{(10 \text{ veces})}{\cdots} \times \frac{35}{36} = \left(\frac{35}{36}\right)^{10}$$

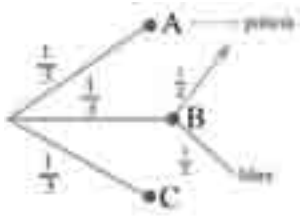
Luego "obtener al menos un 6 doble en 10 lanzamientos" es el suceso contrario al anterior, por tanto:

P(obtener al menos un 6 doble en 10 lanzamientos) =

$$= 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{10} \simeq 0,2455$$

24. Un ladrón es perseguido por un coche de la policía y al llegar a un cruce se encuentra con tres posibles calles por las que huir (A, B y C). Si huye por la calle A le atrapan seguro, pues hay un control de la policía al final de la misma. Si huye por la calle C se escapa seguro pues no está vigilada. La calle B está cortada y se bifurca en dos callejuelas, una que conduce a la calle A y otra que conduce a la calle C. Si el ladrón desconoce la situación a la que le conduce cada una de esas

tres calles y ayudándote de un diagrama de árbol, calcula la probabilidad de que sea atrapado.



$$P\text{ (atrapado)} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

25. Sea el experimento de lanzar un dado y una moneda y observar sus caras superiores. Se pregunta:

a) ¿Es un experimento aleatorio o determinista?

b) ¿Cuál es su espacio muestral?

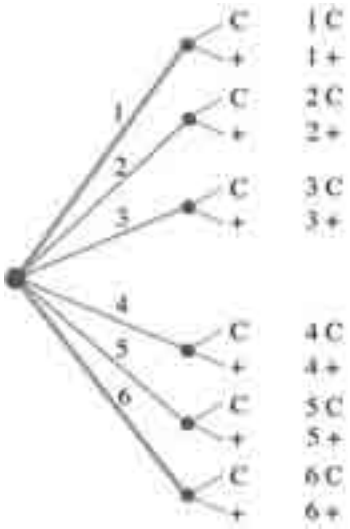
c) ¿Cuál es su suceso seguro?

d) ¿Cuál es el suceso contrario de «salir par y cara»?

e) ¿Cuál es el suceso contrario de «salir mayor que 2 y cruz»?

a) Es aleatorio, pues nunca sabemos qué resultado concreto va a obtenerse.

b)



E = {(1, C), (1, +), (2, C), (2, +), (3, C), (3, +), (4, C), (4, +), (5, C), (5, +), (6, C), (6, +)}

c) El espacio muestral E es el suceso seguro.

d) A = {salir par y cara} = {(2, C), (4, C), (6, C)}

$\overline{A}$ = {salir impar o salir cruz} = {(1, C), (1, +), (2, +), (3, C), (3, +), (4, +), (5, C), (5, +), (6, +)}

e) B = {salir impar o salir cruz} = {(3, +), (4, +), (5, +), (6, +)}

$\overline{B}$ = {salir menor igual que 2 ó cara} = {(1, C), (1, +), (2, C), (2, +), (3, C), (4, C), (5, C), (6, C)}

26. Sea M = {1, 2, 3, ..., 30}. Se llama A al suceso elegir múltiplo de 3 y B al suceso elegir múltiplo de 7. Determina los sucesos:

a) $A \cup B$;

b) $A \cap B$;

c) $A \cup \overline{B}$;

d) $\overline{A} \cap B$;

A = {3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30}

B = {7, 14, 21, 28}

a) $A \cup B$ = {3, 6, 7, 9, 12, 14, 15, 18, 21, 24, 27, 28, 30}

b) $A \cap B$ = {21}

c) $A \cup \overline{B}$ = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 29, 30}

d) $\overline{A} \cap B$ = {7, 14, 28}

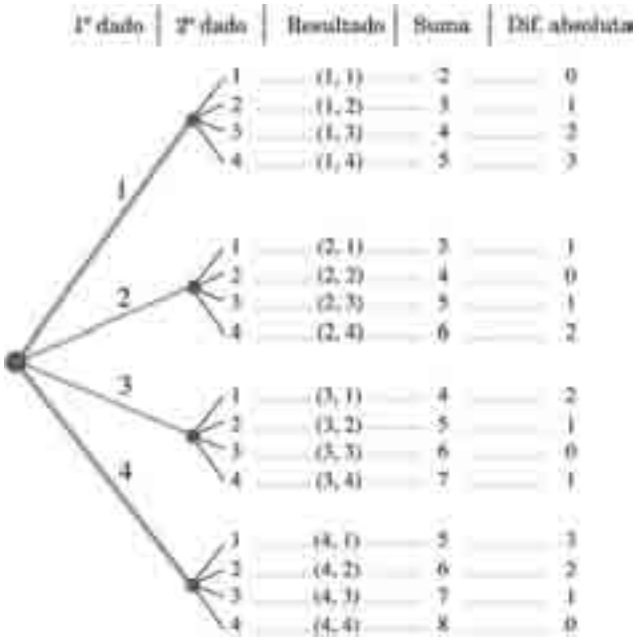
27. Se lanzan dos dados tetraédicos de distinto color y se observan los números de sus caras superiores. Si se llama A al suceso su suma es menor que 5 y B al suceso su diferencia absoluta es menor que 2, escribir en forma de conjunto los siguientes sucesos:

a) A;

b) B;

c) $A \cup B$;

d) $A \cap B$;



a) A = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (3, 1)}

b) B = {(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3), (3, 4). (4, 3), (4, 4)}

c) $A \cup B$ = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 3), (4, 4)}

d) $A \cap B$ = {(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)}

28. En el experimento de lanzar 4 monedas al aire, calcula:

a) El espacio muestral.

b) El conjunto que representa al suceso obtener al menos una cara.

c) La probabilidad de obtener al menos una cara.

a) E = {(c, c, c, c), (c, c, c, +), (c, c, +, c), (c, +, c, c), (c, c, +, +), (c, +, c, +), (c, +, +, c), (+, c, c, +), (+, c, +, c), (+, +, c, c), (c, +, +, +), (+, c, +, +), (+, +, +, c), (+, +, +, +)} = 16 resultados.

b) A = {obtener al menos una cara} = {(c, c, c, c), (c, c, c, +), (c, c, +, c), (c, +, c, c), (+, c, c, c), (c, c, +, +), (c, +, c, +), (c, +, +, c), (+, c, c, +), (+, c, +, c), (+, +, c, c), (c, +, +, +), (+, c, +, +), (+, +, c, +), (+, +, +, c)} = = 15 resultados.

c) $P(A) = \frac{15}{16}$

29. El juego de la lotería consta de 100 000 números distintos.

a) Si un jugador posee todos los números terminados en 3, ¿qué probabilidad tiene de obtener el primer premio?;

b) y si posee toda una centena, ¿cuál es entonces su probabilidad?

Casos posibles 100 000.

a) Si el jugador posee todos los números terminados en 3 tendrá 10 000 números.

P (obtener primer premio) $= \frac{10\,000}{100\,000} = \frac{1}{10}$

b) Si el jugador posee toda una centena, tendrá 100 números.

P (obtener primer premio) $= \frac{100}{100\,000} = \frac{1}{1\,000}$

30. El equipo de fútbol «Patadón C.F.» ha realizado un recuento de sus últimos resultados. Estos son:

	Gana	Empata	Pierde
Juega en casa	20	12	8
Juega fuera	6	10	24

Se supone que las condiciones del equipo no han cambiado desde que se realizó el estudio.

a) Si el próximo partido se juega en casa, determina la probabilidad de cada uno de los tres resultados posibles.

b) Misma cuestión para un partido jugado fuera de casa.

a) Ganar en casa $\rightarrow P = \frac{20}{40} = \frac{1}{2}$

Empata en casa $\rightarrow P = \frac{12}{40} = \frac{3}{10}$

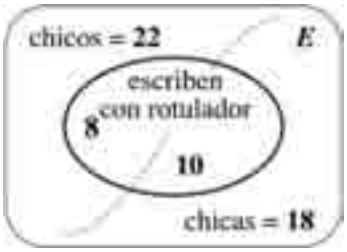
Pierde en casa $\rightarrow P = \frac{8}{40} = \frac{1}{5}$

b) Ganar fuera de casa $\rightarrow P = \frac{6}{40} = \frac{3}{20}$

Empata fuera de casa $\rightarrow P = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$

Pierde fuera de casa $\rightarrow P = \frac{24}{40} = \frac{3}{5}$

31. En una clase de 40 estudiantes hay 22 chicos. De ellos, 8 escriben con rotulador. De las chicas, 10 escriben también con rotulador. Se elige un alumno al azar y se definen los siguientes sucesos: *A = el estudiante elegido escribe con rotulador; B = el estudiante elegido es una alumna que no escriba con rotulador* y *C = el estudiante elegido es un alumno*. Calcula las probabilidades siguientes: *P(A); P(B); P(C); P(A ∩ C); P(B ∩ C); P(A ∪ B); P(A ∪ C); P(B ∪ C)*.

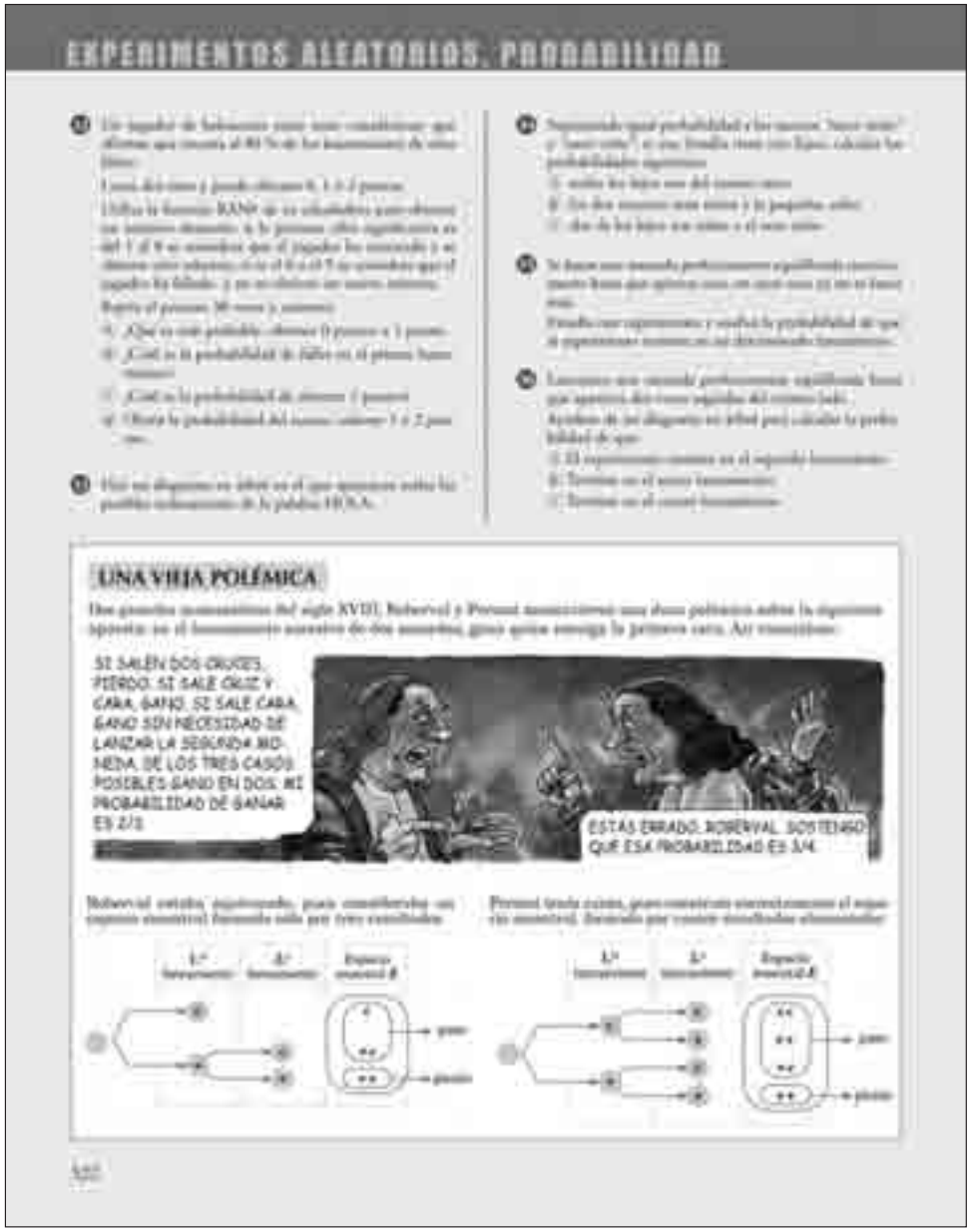


$P(A) = \frac{9}{20}$; $P(B) = \frac{1}{5}$; $P(C) = \frac{11}{20}$

$P(A \cap B) = 0$; $P(A \cap C) = \frac{1}{5}$; $P(B \cap C) = 0$

$P(A \cup B) = \frac{13}{20}$; $P(A \cup C) = \frac{4}{5}$; $P(B \cup C) = \frac{3}{4}$

▶ Pág. 322. Ejercicios



EXPERIMENTOS ALEATORIOS. PROBABILIDAD

UNA VIEJA POLÉMICA

SI SALEN DOS CRUCES, PIERDO. SI SALE CRUZ Y CARA, GANO. SI SALE CARA, GANO SIN NECESIDAD DE LANZAR LA SEGUNDA MONEDA. DE LOS TRES CASOS POSIBLES GANO EN DOS. MI PROBABILIDAD DE GANAR ES 2/3.

ESTÁS ERRADO, ROBERVAL. SOSTENGO QUE ESA PROBABILIDAD ES 3/4.

SOLUCIONARIO

32. ¿Un jugador de baloncesto tiene unas «estadísticas» que afirman que encesta el 80 % de los lanzamientos de tiros libres.

Lanza dos tiros y puede obtener 0, 1 ó 2 puntos

Utiliza la función RAN# de tu calculadora para obtener un número aleatorio: si la primera cifra significativa es del 1 al 8 se considera que el jugador ha encestado y se obtiene otro número; si es el 0 o el 9 se considera que el jugador ha fallado y no se obtiene un nuevo número.

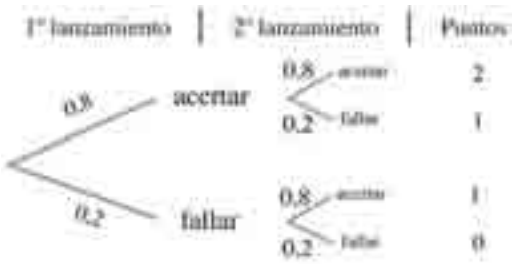
Repite el proceso 30 veces y contesta:

a) ¿Qué es más probable, obtener 0 puntos o 1 punto.

b) ¿Cuál es la probabilidad de fallar en el primer lanzamiento?

c) ¿Cuál es la probabilidad de obtener 2 puntos?

d) Obtén la probabilidad del suceso «obtener 1 ó 2 puntos».



a) P (0 puntos) = 0,2 × 0,2 = 0,04

P (1 punto) = 0,8 × 0,2 + 0,2 × 0,8 = 0,32

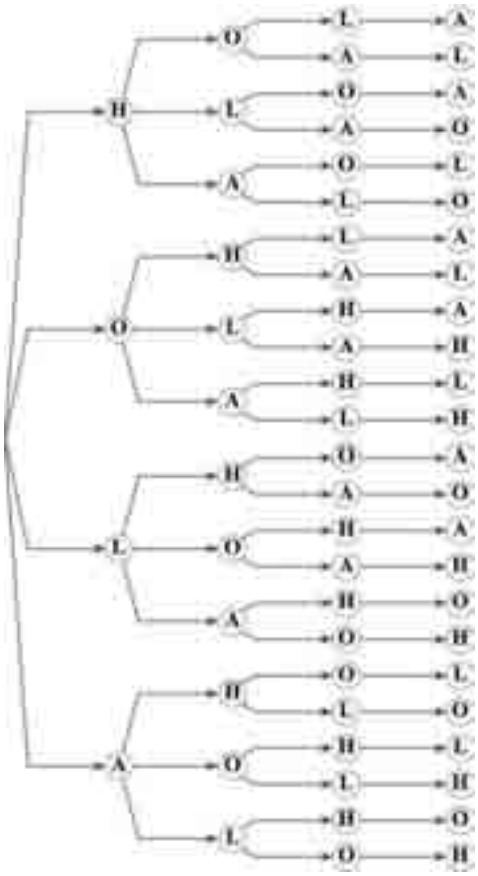
Es más probable obtener 1 punto.

b) P (fallar 1er lanzamiento) = 0,2

c) P (2 puntos) = 0,8 × 0,8 = 0,64

d) P (1 ó 2 puntos) = P (1 punto) + P (2 puntos) = 0,32 + 0,64 = 0,96

33. Haz un diagrama en árbol en el que aparezcan todas las posibles ordenaciones de la palabra HOLA.

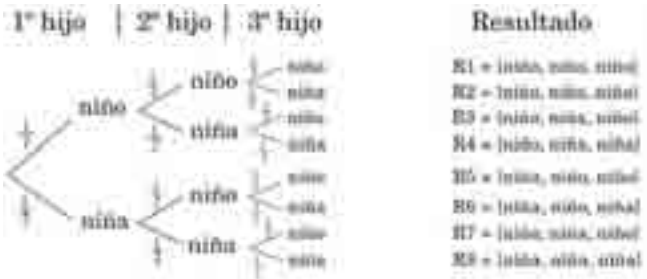


34. Suponiendo igual probabilidad a los sucesos "nacer niño" y "nacer niña", si una familia tiene tres hijos, calcular las probabilidades siguientes:

a) todos los hijos son del mismo sexo;

b) los dos mayores sean niños y la pequeña, niña;

c) dos de los hijos son niñas y el otro niño.



a) P (todos los hijos del mismo sexo) =

$$= P(R1 \cup R8) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

b) P (los dos mayores niños y la pequeña niña) =

$$= P(R2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

c) P (2 hijos niñas y 1 hijo niño)

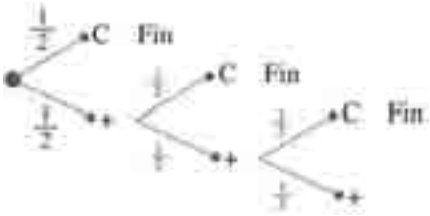
$$= P(R4 \cup R6 \cup R7) =$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

35. Se lanza una moneda perfectamente equilibrada sucesivamente hasta que aparece cara, en cuyo caso ya no se lanza más.

Estudia este experimento y analiza la probabilidad de que el experimento termine en un determinado lanzamiento.

c = salir cara, + = salir cruz



P (terminar 1º lanzamiento) = P (c) = $\frac{1}{2}$

P (terminar 2º lanzamiento) = P (+, c) =

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

P (terminar 3º lanzamiento) = P (+, +, c) =

$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$ y así sucesivamente ...

P (terminar en el n – ésimo lanzamiento) =

$$= P(+, +, \overset{(n-1 \text{ veces})}{\ldots\ldots\ldots\ldots}, c) = \frac{1}{2^n}$$

36. Lanzamos una moneda perfectamente equilibrada hasta que aparezca dos veces seguidas del mismo lado.

Ayúdate de un diagrama en árbol para calcular la probabilidad de que:

a) El experimento termine en el segundo lanzamiento.

b) Termine en el tercer lanzamiento.

c) Termine en el cuarto lanzamiento.

a) P (cc, ++) = $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

b) P (c++, +cc) = $\frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$

c) P (c+cc, +c++) = $\frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{8}$