DESDE AHORA... INTRODUCCIÓN

Dos actividades iniciales, que pueden servir como diagnóstico y para introducir a nuestros alumnos en la realización de investigaciones a través de actividades abiertas.

Pág. 137

1. DIAGONALES

Puede ser una buena idea plantear esta situación inicial dibujando en la pizarra un rectángulo de 5×3, realizando un dibujo deliberadamente poco preciso, y pedir a un alumno o alumna que dibuje una diagonal, y planteando la pregunta "¿cuántos cuadrados atraviesa?" en gran grupo para comprobar si se ha entendido bien. Una vez obtenida una respuesta, se puede pedir investigar la situación en general. A continuación, observar la dinámica de la clase.

- ¿Comienzan a colaborar, trabajando en grupo para discutir posibilidades?
- ¿Se quedan quietos porque "no entienden nada"?
- ¿Consideran sólo cuadrados? ¿Siguen algún orden al explorar rectángulos? ¿Llegan a identificar en qué condiciones la diagonal pasa por un vértice de un cuadrado interno o sólo se fían de la bondad de su dibujo?

Se trata de una actividad abierta en que valorar los procesos y razonamientos seguidos, las discusiones surgidas y valorar positivamente cualquier iniciativa, y no el llegar a UNA solución.

Algunos contenidos que esperamos surjan:

- Decidir si la diagonal atraviesa o no un cuadrado interior (ello ocurre si las longitudes enteras de los lados del rectángulo tienen algún factor en común).
- Tabla para recoger resultados. Si se ha realizado una exploración sistemática y se han recogido los resultados en una tabla, es posible que lleguen a darse cuenta de cuál es la respuesta al apartado anterior. A partir de ella, se pueden reorganizar los resultados encontrados, no contando el total, sino los cuadrados que atraviesa fila por fila; veremos que es determinante en los grupos el hecho de que una longitud sea múltiplo de la otra.
- Un cuadrado es un rectángulo: primera idea de clasificación de cuadriláteros.

Algunas indicaciones para encontrar regularidades:

- Enumerando correlativamente los resultados observados al variar los dos lados al azar, seguramente no se llegará a ninguna parte. El primer paso debe consistir en mantener fijo el valor de un lado y hacer variar el otro.
- Aún en este caso, no se observará nada. Se debe distinguir los casos en que la diagonal pasa por algún vértice de la trama de cuando no lo hace. Ello ocurre, en un rectángulo $n \times p$, respectivamente, cuando n y p tienen factores comunes y cuando son primos entre sí.
- Si se tabulan por separado estos dos casos, es posible que lleguemos a ver que:
  - ✓ Si n y p son primos entre sí, el número 'c' de cuadrados que atraviesa la diagonal es
    $$c = n + p - 1$$
  - ✓ Si $n = k \times r$ y $p = k \times s$, siendo $k = \text{mcd}(n,p)$, es $c = k \times (r+s-1)$. Esta segunda parte es evidente a partir de la anterior si se observa el significado geométrico.

Insistimos en que se trata de observar a qué son capaces de llegar los alumnos y no a demostrar ningún teorema, y mucho menos en primer curso. Estas indicaciones pueden hacer que la actividad sea utilizable en cualquier curso.

2. SOPA DE LETRAS

Con esta actividad trataremos de:

- Diagnosticar conocimientos previos de terminología.

- Dibujar figuras.
- Idear criterios de clasificación.
- Situar las palabras en el cuadro (coordenadas).

Las palabras son: Arista, Cara, Cilindro, Círculo, Circunferencia, Cono, Cuadrado, Cuadrilátero, Cubo, Diagonal, Lado, Paralelogramo, Pirámide, Polígono, Prisma, Rombo, Trapecio, Triangulo, Vértice.

G	I	B	P	L	**A**	**R**	**A**	**C**	P	N	B	O	W	N	I	W	S	Y	K	L
C	**U**	**A**	**D**	**R**	**A**	**D**	**O**	D	O	D	R	K	R	D	U	C	P	Q	P	V
E	T	**A**	**R**	**I**	**S**	**T**	**A**	C	C	K	P	R	I	S	M	A	V	O	P	D
C	**O**	**R**	**D**	**N**	**I**	**L**	**I**	**C**	R	Y	K	X	V	X	L	Q	L	G	R	N
I	O	I	P	Q	D	F	B	E	C	D	E	M	N	X	A	O	P	R	U	B
T	L	L	S	E	**C**	**I**	**R**	**C**	**U**	**N**	**F**	**E**	**R**	**E**	**N**	**C**	**I**	**A**	D	Q
R	U	K	P	A	R	A	L	E	L	O	G	R	A	M	O	I	R	G	B	N
E	G	O	U	O	D	A	L	H	T	L	L	W	C	F	G	K	A	C	N	Q
V	N	E	C	I	V	B	W	Y	Y	T	Q	B	Y	E	A	D	M	O	C	I
R	A	L	G	H	C	P	E	M	F	R	H	M	E	B	I	O	I	N	O	K
Q	I	J	M	H	V	F	**O**	**N**	**O**	**G**	**I**	**L**	**O**	**P**	D	B	D	O	B	K
I	R	W	**C**	**U**	**B**	**O**	T	P	O	B	M	O	R	J	S	M	E	M	W	Q
L	T	T	W	G	H	E	M	**C**	**I**	**R**	**C**	**U**	**L**	**O**	S	O	R	W	E	P
O	J	J	D	R	Z	W	W	Y	S	F	T	R	A	P	E	C	I	O	T	M
C	**U**	**A**	**D**	**R**	**I**	**L**	**A**	**T**	**E**	**R**	**O**	H	R	F	Q	P	K	C	G	K

La solución de la versión en valenciano sería: Aresta, cara, cilindre, cercle, circumferència, con, quadrat, quadrilàter, cub, diagonal, costat, paral·lelogram, piràmide, polígon, prisma, rombe, trapezi, trapezoide, triangle, vèrtex.

P	U	M	U	B	T	**M**	**A**	**R**	**G**	**O**	**L**	**E**	**L**	**L**	**A**	**R**	**A**	**P**	R	L
Q	**T**	N	M	A	E	**C**	M	L	**R**	**E**	**T**	**A**	**L**	**I**	**R**	**D**	**A**	**U**	**Q**	O
K	**R**	O	P	L	I	**A**	O	**V**	**E**	**R**	**T**	**E**	**X**	J	O	I	R	E	R	**P**
K	**A**	Y	C	**P**	**I**	**R**	**A**	**M**	**I**	**D**	**E**	W	T	U	O	P	L	H	A	**O**
B	**P**	N	D	S	A	**A**	A	B	**C**	**E**	**R**	**C**	**L**	**E**	N	B	V	C	P	**L**
U	**E**	P	L	I	B	H	U	U	N	B	V	F	J	O	I	R	E	**L**	E	**I**
I	**Z**	**E**	**P**	**A**	**R**	**T**	X	S	W	Z	V	B	Y	U	J	M	O	**A**	Z	**G**
Y	**O**	G	T	V	F	D	E	X	**Q**	**U**	**A**	**D**	**R**	**A**	**T**	O	L	**N**	N	**O**
G	**I**	F	C	D	**T**	**R**	**I**	**A**	**N**	**G**	**L**	**E**	K	I	U	Y	T	**O**	E	**N**
O	**D**	M	N	U	T	U	B	Y	T	V	**P**	**R**	**I**	**S**	**M**	**A**	Q	**G**	Z	K
J	**E**	T	**C**	**I**	**R**	**C**	**U**	**M**	**F**	**E**	**R**	**E**	**N**	**C**	**I**	**A**	V	**A**	C	J
O	I	N	Y	V	T	R	E	S	X	**C**	**O**	**S**	**T**	**A**	**T**	I	O	**I**	P	M
J	U	Y	T	**C**	**I**	**L**	**I**	**N**	**D**	**R**	**E**	O	S	M	I	B	H	**D**	G	V
B	**N**	**O**	**C**	Y	C	E	L	J	B	C	E	**R**	**O**	**M**	**B**	**E**	O	Y	Y	U
H	G	T	U	G	**A**	**R**	**E**	**S**	**T**	**A**	C	E	S	K	L	U	**C**	**U**	**B**	S

DESDE AHORA...

GEOPLANO

CLASIFICACIÓN DE POLÍGONOS. ÁREA Y PERÍMETRO

Debemos trabajar con instrumentos. En cualquier establecimiento especializado encontraremos geoplanos de plástico que merece la pena comprar para el departamento; los alumnos pueden construir el suyo, además de utilizar las fotocopias de las hojas de material (la que corresponde a una trama cuadrada), en que se deberán copiar las figuras del geoplano para que conserven con su cuaderno.
En las actividades surgirá:

- Clasificación de figuras: tipos de triángulos y de cuadriláteros.
- Área, perímetro, relación entre ambas.
- Unidad de medida.

Pág. 138

3. EL GEOPLANO

3.1. Construye figuras

Trabajaremos la idea de clasificación según un determinado criterio, que puede ser.

- Nº de lados o vértices.
- Regulares o no.
- Cuadros que ocupa.
- Figuras cóncavas y convexas.

Pág. 139

3.2. Triángulos y cuadrados

Trabajaremos:

- Clasificación de triángulos.
- ¿Qué quiere decir "distinto"?: movimientos planos que conservan distancias (isometrías).
- Recoger resultados en una tabla que relacione el tamaño de la trama (n) con el número de triángulos y de cuadrados distintos.

3.3. Tamaño

¿Qué significa "el más pequeño"? Hacer que surja el debate.
Se deberá elegir una unidad de medida, tanto para longitud como para área; deben ser coherentes una con la otra, y lo lógico es que sean la distancia entre dos clavos del geoplano y un cuadrado.
También se obtendrán diagonales ¿cómo reaccionarán?: medir, a ojo...
Con ello, habremos trabajado:

- Área y perímetro.
- Unidad de medida.

3.4. Área y perímetro

- Figuras con lados no paralelos a las tramas. Intentar llegar a generalizar el cálculo de áreas.
- ¿Qué requisitos debe cumplir una figura para ser más "económica"?
- Provocar que surja la raíz cuadrada como lado de un cuadrado con área cuadrado perfecto.
- Unidades de medida.
- Igual área y distinto perímetro.

Pág. 140

3.5. Lados paralelos

- Área de un paralelogramo.

3.6. Triángulos

- Área de un triángulo. Cómo varía al variar la base y al variar la altura.

Pág. 141

4. CLASIFICACIONES

- Clasificación de triángulos según sus lados y sus ángulos.
- Clasificación de cuadriláteros según que los lados sean o no paralelos y los ángulos sean o no rectos.

TABLA 1

CLASIFICACIÓN SEGÚN LOS ÁNGULOS

CLASIFICACIÓN SEGÚN LOS LADOS

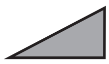
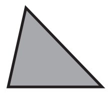
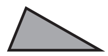
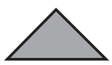
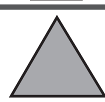
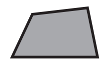
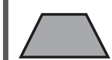
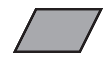
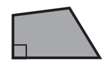
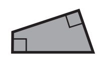
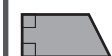
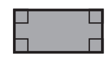
TRIÁNGULOS	RECTÁNGULO	ACUTÁNGULO	OBTUSÁNGULO
ESCALENO			
ISÓSCELES			
EQUILATERO	IMPOSIBLE		IMPOSIBLE

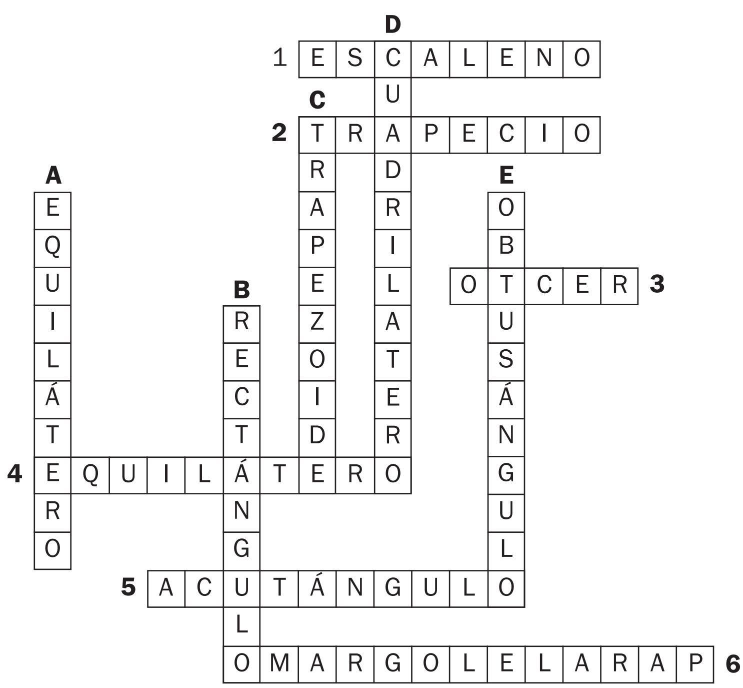
TABLA 2

PARES DE LADOS PARALELOS

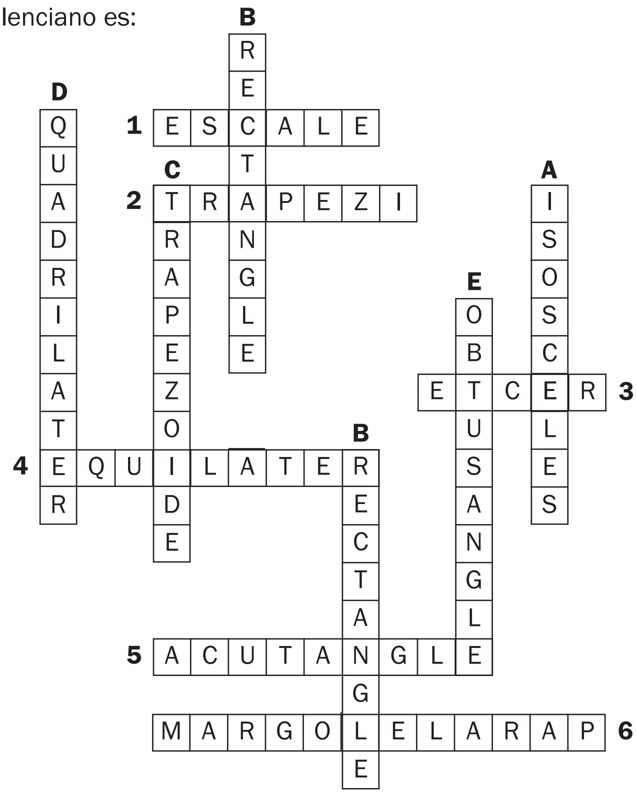
NÚMERO DE ÁNGULOS RECTOS

Todos los polígonos de esta tabla son CUADRILÁTEROS	0 TRAPEZOIDES	1 TRAPECIOS	2 PARALELOGRAMOS
0			
1		NO HAY	NO HAY
2 (o más)			

La solución al crucigrama en la versión en castellano es:



La solución al crucigrama en la versión en valenciano es:



Pág. 144

5. ¿PRACTICAMOS UN POCO?

5.1.
Actividad para afianzar conceptos mediante la visualización.

5.2.
Actividad para afianzar conceptos mediante la visualización.

5.3.
De izquierda a derecha y de arriba abajo, las áreas son:

0’5, 1’5, 2, 1, 2’5, 1’5, 2, 2 (la unidad es un cuadrito de la trama)

Los perímetros se habrán de medir con una regla construida para la figura, con lo que los resultados serán siempre aproximados. Los valores reales con un decimal son:
3’4, 5’9, 8’5, 5’2, 7’6, 8’5, 7’4, 7’8 (la unidad es un segmento horizontal o vertical entre dos puntos).

5.4.
Actividad para afianzar conceptos.

5.5.
Se insiste en que reconozcan las figuras más compactas y que todo cuadrado es un rectángulo. El rectángulo 4×4 es el de menor perímetro, pero... ¿llegará alguien a decir que el de mayor área tiene lado 7’5? Porque no se puede construir sobre un geoplano... claro, que nadie dice que se haya de construir.

Pág. 145

5.6.
Áreas: 1, 2, 5, 4, 3, 10, 3, 6, 8.
Perímetros: 4, 5’7, 8’9, 8, 8’8, 12’6, 7’2, 10’5, 11’3.

5.7.
Actividad para afianzar conceptos mediante información escrita.

DESDE AHORA... POLIMINÓ Y TANGRAM

Con estos utensilios de fácil construcción, además de seguir trabajando con la medida de áreas y perímetros, se trabaja la posibilidad de rellenar el plano, el mejor o peor aprovechamiento del espacio, y la posibilidad de construir figuras espaciales a partir de dibujos planos (desarrollos), así como técnicas de recuento estructurado y volver a trabajar con fracciones. Se puede introducir la idea de isometría a la hora de decidir si dos figuras son o no iguales.

Pág. 146

6. POLIMINÓS

Trabajamos técnicas de recuento, al deber obligarnos a seguir algún orden para construir poliminós: es relativamente sencillo saber el número de posibles tetraminós, pero no el de pentaminós; la técnica consiste en partir de los anteriores, situando un cuadrado más en todas las posiciones posibles.
Surgirá el debate sobre qué figura es igual y cuál distinta a las demás, con lo que deberemos llegar a un acuerdo, y se pondrá en evidencia la necesidad de la existencia de convenios.
Nosotros consideraremos iguales las figuras isométricas (obtenidas mediante giro, traslación o simetría axial de una ya existente). Con este convenio, hay 5 tetraminós y 12 pentaminós

- Idea de isometría.
- Área y perímetro.
- Perímetro máximo y mínimo.

6.1. Hacer cajas usando pentaminós

Además de la investigación que se pide, también se puede estudiar dónde poner pestañas para pegar la figura y cómo hacer que el número de pestañas sea mínimo.
Con estas construcciones, que se deben realizar, se estudia:

- Paso del plano al espacio.
- Desarrollar la visión espacial.

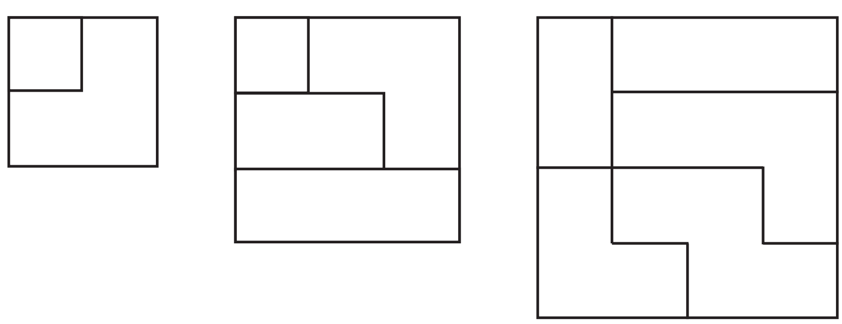
Pág. 147

6.2. Hacer cubos usando hexaminós

Se vuelve a incidir en los mismos aspectos.

6.3. Rompecabezas

La construcción del rompecabezas se complica al aumentar el tamaño del cuadrado. Con la condición de emplear piezas distintas y con número mínimo de cuadrados en cada pieza, el problema queda acotado, y se puede pedir explicar por qué la solución propuesta es o no única, es o no la mejor.



7. EL TANGRAM CHINO

- Escribir un algoritmo detallado
- Terminología y dibujo: punto medio, diagonal, paralela, perpendicular.
- Utilización de utensilios de dibujo.

Pág. 148

7.1. Figuras

- Condiciones para que el perímetro sea lo mayor posible.

7.2. Más figuras

- Construcción de polígonos.

7.3. ¿Qué área tiene cada pieza?

En b) surgen fracciones, pero también pueden surgir números decimales como equivalentes a cada fracción y porcentajes del total.
Se puede construir una tabla poniendo nombre a cada pieza y dando la expresión como fracción, decimal y porcentaje.

- Comparación de figuras.
- Decimales y fracciones.
- Fracciones equivalentes.

7.4. Una pieza + una pieza = Otra pieza

- Suma de fracciones al comparar áreas.
- Producto de número por fracción.
- Operaciones con fracciones.

7.5. Completa la tabla

Se pretende llegar a completar la siguiente tabla, en que se ve la equivalencia de fracciones.

	A	B	C	D	E	F	G	Todo el tangram
Si la unidad es la pieza sombreada	1	2	4	2	1	2	4	16
	1/2	1	2	1	1/2	1	2	8
	1/4	1/2	1	1/2	1/4	1/2	1	4
Si la unidad es todo el tangram y partimos de la pieza sombreada	1/16	2/16	4/16	2/16	1/16	2/16	4/16	16/16
	1/16	1/8	2/8	1/8	1/16	1/8	2/8	8/8
	1/16	1/8	1/4	1/8	1/16	1/8	1/4	4/4
Área real (cm^2)	9	18	36	18	9	18	36	144

Dependiendo de las igualdades que hayan surgido en el apartado anterior, podremos "visualizar" algunas operaciones con fracciones; en la tabla anterior podremos leer en cada fila o bien mezclar las filas que corresponden al tangram como unidad (pues en este caso las fracciones son equivalentes). Por ejemplo, veamos la igualdad numérica obtenida en cada una de las siete filas de la tabla para una de las relaciones obtenida entre las piezas:

$2\,A + B = G \rightarrow \quad 2 \times 1 + 2 = 4$
$2 \times (1/2) + 1 = 2$
$2 \times (1/4) + (1/2) = 1$
$2 \times (1/16) + (2/16) = 4/16$
$2 \times (1/16) + (1/8) = 2/8$
$2 \times (1/16) + (1/8) = 1/4$
$2 \times 9 + 18 = 36$

Pág. 149

8. ¿PRACTICAMOS UN POCO?

8.1.
Son un tetraedro, un prisma de base triangular y... ¿cómo describirán el antiprisma cuadrangular?

Pág. 150

8.2.
6/12 = 1/2 4/4 = 1 4/16 = 2/8 = 1/4 11/12

8.3.
Las caras opuestas suman 7, y alrededor de un vértice están 1, 2 y 3 en sentido directo, y por tanto, alrededor del diagonalmente opuesto están 4, 5 y 6.

8.4.
5/35 = 1/7 de amarillo, 20/35 = 4/7 de rosa, 10/35 = 2/7 de verde.
$7 \times 5 = 35$ cuadros es el área, y 5, 20 y 10 la de cada uno de los colores.
Si cada lado es doble, comprobarán que cada área no es doble, sino cuádruple.

8.5.
Seguimos insistiendo en la relación de las zonas coloreadas con las fracciones.

DESDE AHORA... LIBRO DE ESPEJOS
POLÍGONOS REGULARES. ÁNGULO CENTRAL E INTERIOR

También se puede encontrar libros de espejos en tiendas especializadas en material didáctico, y es un instrumento que aconsejamos vivamente utilizar y no imaginar. Resulta sorprendente y espectacular tanto lo que ahí se ve como la sorpresa de chavales de esta edad al descubrirlo. No es complicada su construcción en clase: con dos espejos de desecho de cualquier cristalería de unos 10 × 10 cm, con los cantos lijados, es suficiente.
Además de simetrías y composición de simetrías, con este calidoscopio tridimensional podemos cuantificar mediante la medida de ángulos el efecto producido; trabajamos así con el semicírculo graduado los ángulos centrales de polígonos.
También se trabaja la recogida de datos en una tabla y la generalización de situaciones a partir de casos concretos, aunque expresar resultados mediante expresiones algebraicas sólo estará al alcance de unos pocos.
Por último, diagonales, mediatriz, bisectriz y triangulación de figuras.

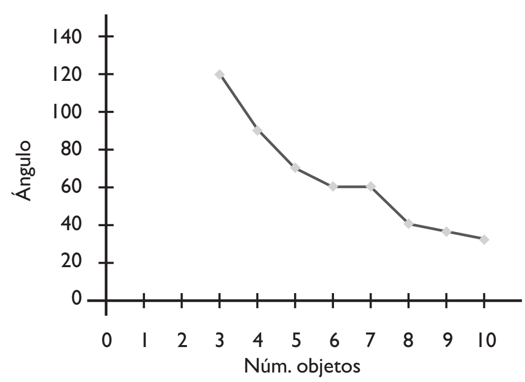
Pág. 151

9. LIBRO DE ESPEJOS

Sería recomendable una sesión inicial de experimentación libre y exploración.

9.1. ¿Qué ves?

Imprescindible la utilización de un transportador de ángulos.
Puede ser una buena idea sugerir que se vayan recogiendo los valores de los ángulos en una tabla, junto con el número de lados del polígono obtenido, y representar en una gráfica los pares de valores obtenidos; aquí podemos ver la utilidad de una gráfica para detectar errores de medida, en el momento que encontremos algún punto que nosiga la misma “norma” que los demás.



Es probable encontrar situaciones como ésta dada la escasa precisión de los instrumentos utilizados.
En lo que respecta a obtener una circunferencia, es interesante escuchar todas las iniciativas:

- No, porque saldrá un polígono de muchos lados.
- Sí, si se puede cerrar del todo.

Pág. 152

9.2. Figuras geométricas

El apartado a) es de observación y descripción. En el b), los espejos actúan de diagonales, que deben ser perpendiculares entre sí; el c), servirá para localizar el centro de un arco de circunferencia. Los dos espejos perpendiculares entre sí y con el segmento perpendicular a uno de ellos nos dará la figura d), y si el segmento pasa por el punto en que se unen los espejos tendremos los cuatro ángulos con sus dos bisectrices.

Pero lo importante es escuchar las descripciones de los chavales y ayudarlos a utilizar un lenguaje correcto.

9.3. Polígonos regulares

Aquí insistiremos en una descripción precisa, haciendo de abogado del diablo y poniendo todas las trabas posibles (mediante contraejemplos) hasta conseguir que se diga que la bisectriz del ángulo que formen los espejos ha de ser perpendicular al segmento dado. La condición que debe cumplir el ángulo se estudia en los dos apartados siguientes.

9.4. Ángulo central e interior

Si no se ha hecho en 9.1, es el momento de confeccionar una tabla y hacer la gráfica. Y, sobre todo, ver que la situación es análoga a la anterior, que el número de figuras observadas es igual al número de lados del polígono regular.
Encontrar la fórmula A = 360/n no estará al alcance de todos los alumnos.

- Fórmula, tabla y gráfica para expresar una relación.
- Búsqueda de regularidades.

Pág. 153

10. ÁNGULOS

10.1. En un triángulo

Llegar a un resultado mediante la experiencia de muchos alumnos, y convencerse de que el valor de la suma de los ángulos es 180° por sí mismos es importante. Ello nos va a permitir generalizar en el siguiente apartado.

10.2. En los demás polígonos

- Descomposición de un polígono de n lados en triángulos:
  a) Uniendo vértices se obtienen n−2.
  b) Con vértice el centro del polígono (si es regular) obtenemos n triángulos.
- Clasificación de polígonos.
- Suma de los ángulos interiores.
- Generalización.
- Recoger resultados en una tabla.
- Representar gráficamente.
- Intentar llegar a una fórmula.

La obtención de la fórmula 180·(n−2) no está todavía al alcance de todos los alumnos y alumnas, pero con las debidas indicaciones, sí de los más avanzados o avanzadas.

Pág. 154

10.3. Ángulos por todas partes

Aquí se trata de pensar un poco en ángulos que vemos a menudo, y una estimación o cálculo de sus medidas. Así, con los dedos índice y pulgar podemos formar ángulos que difícilmente serán obtusos, mientras que con pulgar y meñique lo fácil es conseguir un ángulo entre 90 y 180 grados.
En cuanto al reloj, la primera pregunta se puede entender como leer la esfera (ángulos horarios, de 30°; o de minutos, de 6°), o como buscar divisores de 360°. La aguja horaria avanza medio grado por minuto; a las 14 horas el ángulo es de 60°; a las 3 y a las 9 las agujas forman un ángulo recto... Pero para saber cuántas veces al día lo hacen, recomendaríamos que se piense de forma sistemática y luego se haga una simulación, no conformarse con una simple respuesta numérica (44 veces, no olvidemos que las manecillas dan dos vueltas al día).

10.4. Suplementarios y complementarios

Se trata de una primera aproximación a estos conceptos.

10.5. Dibuja

Un ejercicio geométrico desde el dibujo.

Pág. 157

11. ¿PRACTICAMOS UN POCO?

En las actividades 11.1 a 11.3 hemos de estar atentos a cómo utilizan el transportador para medir més que al resultado que nos digan, al igual que en 11.4 a). Los otros apartados de 11.4 son de cálculo: b) 75°, c) 88°, d) 90°, 45°, 45°, e) 360÷7 = 51° 25’ 44.8”, f) 10 lados.

DESDE AHORA... MOSAICOS Y POLÍGONOS ESTRELLADOS

Mediante los mosaicos y la división en partes iguales de una circunferencia, se va a trabajar:

- Ángulos interiores y exteriores de polígonos.
- Ángulo central de polígonos regulares.
- Polígonos regulares convexos y estrellados.
- Simplificación de fracciones ligada a un significado geométrico.
- Números primos, divisores y m.c.d.

Pág. 158

Pág. 159

12. MOSAICOS

12.1. Mosaicos regulares

- Polígonos que rellenan el plano.
- Suma de los ángulos que concurren en un mismo vértice del mosaico.

Debe intentarse que lleguen a darse cuenta de que la suma de ángulos que van al mismo vértice debe ser 360°, con lo que es evidente la respuesta: sólo con triángulos, cuadrados y hexágonos se puede construir mosaicos regulares, luego sólo hay tres.

12.2. Deformaciones

Consolidación lúdica de lo aprendido en el apartado anterior.

Pág. 160

12.3. Mosaicos semirregulares

Se propone profundizar un poco más en el estudio de los mosaicos, siempre desde un punto de vista relativamente sencillo y manipulativo (dibuja, colorea, construye) aunque buscando razones. Para los mosaicos semirregulares, el profesor debe fotocopiar varias veces las hojas de polígonos regulares del final del libro, a poder ser en cartulina, para poder realizar ensayos; no será difícil llegar a obtener los seis mosaicos con dos polígonos regulares, aunque sí con tres (uno se da en la ilustración al margen).

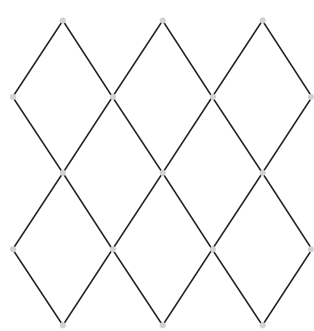
Es interesante poder describir los mosaicos, lo que se consigue nombrando los lados que tiene cada polígono que concurre en un mismo vértice, ya que todos han de ser congruentes.

Así, los mosaicos regulares son 3–3–3–3–3–3 (3^6), 4–4–4–4 (4^4) y 6–6–6 (6^3).

Los semirregulares, $3^2\ 4^2$, $3\ 4\ 3^2\ 4$, $3\ 6\ 3\ 6$, $3^4\ 6$, $4\ 8^2$, $3\ 12^2$, $3\ 4\ 6\ 4$, $4\ 6\ 12$

12.4. Polígonos no regulares

Aquí tenemos un mosaico formado con rombos, cada uno de los cuales está también formado por rombos. ¿Qué condición deben cumplir los rombos para teselar el plano siguiendo este esquema? En general, nos sirve cualquier rombo para vértices con cuatro ángulos:



Pero aquí tenemos dos tipos de vértices: en unos confluyen seis ángulos y en otros, tres. Luego esos ángulos son de 60° y 120° respectivamente. También podemos considerar el mosaico realizado sobre una trama hexagonal, estando cada hexágono dividido en tres rombos; un caso para dar cabida a todas las opiniones.
¿Cómo propondrán nuestros alumnos y alumnas calcular las áreas? Quizá mediante dibujos a escala para tomar medidas,...

Pág. 161

13. POLÍGONOS EN UNA CIRCUNFERENCIA

Puntos que se trata en la actividad:

- Polígonos inscritos en una circunferencia.
- Ángulos centrales.
- Medida de ángulos.
- Polígonos regulares y regulares estrellados.
- Múltiplos y divisores. Resto de la división.
- Método para dibujar un polígono regular cualquiera.
- Equivalencia con la división en partes iguales de una circunferencia.
- Simetrías.

13.1. Polígonos regulares en una circunferencia

- Definición de polígono regular.
- Centro, radio.
- Cómo inscribir en una circunferencia un polígono regular: caso del hexágono.
- Cómo dividir una circunferencia en partes iguales.

Pág. 162

13.2. Uniendo puntos

- Polígonos regulares convexos y regulares estrellados.
- Notación para describirlos: similitud con las fracciones.
- Conclusiones:
  - Por simetría, (n/p) = (n/n−p)
  - Si n y p tienen factores comunes se pueden “simplificar”; así, (10/4) = (5/2)

13.3. Ahora con 12

- Afianzar las conclusiones del caso anterior.

Pág. 163

13.4. Recoge los resultados e investiga

Recopilación de resultados de apartados anteriores:

- (n/p) es un polígono regular convexo si p es un divisor de n; en caso contrario, es estrellado.
- Si n es primo, sólo es convexo el (n/1).

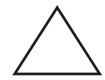
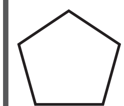
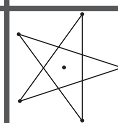
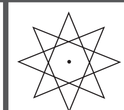
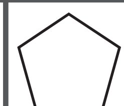
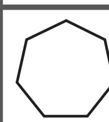
Algunas ampliaciones que se podría proponer:

- ¿Qué ocurre si unimos cada punto con el que tiene número doble del suyo?
  Trabajaríamos con el resto de la división del doble del número de un punto entre el número de puntos de la circunferencia.
- ¿Cuántos polígonos regulares convexos se puede construir con una circunferencia dividida en n partes? ¿Cuántos estrellados?
  Tiene que ver con calcular el número de divisores de un número dado; se escribe la descomposición factorial, y el número de divisores es el producto de todos los exponentes que aparecen en ella incrementados en una unidad. Evidentemente, no está al alcance de alumnos de primero.

Pág. 165

14. ¿PRACTICAMOS UN POCO?

14.1.

		Número de puntos en la circunferencia	Los puntos se unen de:	Nombre o descripción	Dibujo
(15/5)	(3/1)	15	5	Triángulo equilátero	
(15/3)	(5/1)	15	3	Pentágono regular	
(15/6)	(5/2)	15	6	Pentágono estrellado	
(48/18)	(8/3)	48	18	Octógono estrellado	
(20/4)	(5/1)	20	4	Péntagono regular	
(24/6)	(4/1)	24	6	Cuadrado	
(21/3)	(7/1)	**21**	3	Heptágono regular	

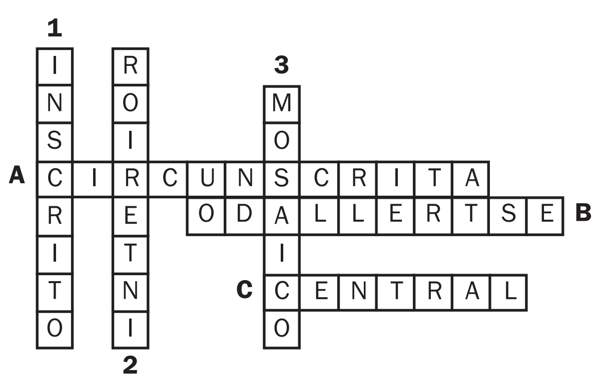
14.2.

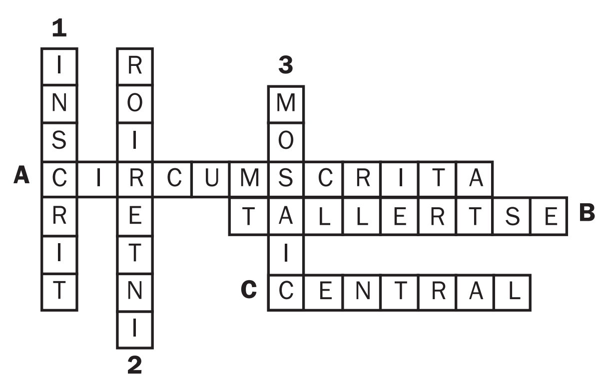
360 ÷ 8 = 45

14.3.

mcm (1,3,5) = 15 partes. Podría ser cualquier múltiplo común si no se dijese “sólo se obtiene...”
Se obtendrán polígonos estrellados uniendo los puntos en saltos de 2, 4, 6 y 7. Hay por tanto cuatro.

14.4.





DESDE AHORA... DIBUJA, RECORTA Y PEGA

Bajo este epígrafe reunimos unas actividades conducentes a consolidar algunas técnicas para calcular áreas, visualizar simetrías, realizar construcciones con regla y compás y tratar la circunferencia y el círculo, insistiendo en que no se confunda ambas, y descubriendo la longitud de la circunferencia y el área del círculo.

Pág. 166

15. PROCESOS

La idea es tener una imagen gráfica que permita interiorizar que el área de cualquier paralelogramo se calcula multiplicando la base por la altura, y que el triángulo es la mitad.
Después de haber realizado el proceso del triángulo, seguramente bastará un empujoncito para realizar el proceso con un trapecio, aunque no será tan fácil "ver" cómo se calcula el área; es más evidente la descomposición en un rectángulo y dos triángulos.

Pág. 167

16. LA LÍNEA PERDIDA

Tienen mayor longitud. La suma de longitudes es, lógicamente, la misma.

17. EL CUADRADO PERDIDO

Observando las pendientes de las rectas oblicuas, vemos que en el rectángulo de la derecha la diagonal tiene pendiente 5/13 y está formada por dos tramos de pendientes 3/8 y 2/5. En definitiva, las piezas no pueden ajustar de esa manera, y dejan entre ellas, repartido, un hueco que equivale al cuadrito de más.

18. PLIEGOS DE PAPEL

Se trata en la primera parte de estudiar figuras con dos o más ejes de simetría (dependiendo del número de plegados). Con dos pliegues, dos ejes. ¿Qué tipo de figuras se puede obtener? Seguramente nuestros alumnos y alumnas tendrán más imaginación que nosotros. Para la segunda parte, obtendremos ejes de simetría verticales, que dan lugar a un bonito friso.

Pág. 168

19. CIRCUNFERENCIA

En esta actividad queremos tratar:

- Propiedad que tienen los puntos de una circunferencia (equidistancia al centro).
- Terminología.
- Cómo localizar el centro.

Pág. 169

20. CON REGLA Y COMPÁS

Las construcciones propuestas son:

a) mediatriz,
b) división de un segmento en partes iguales,
c) bisectriz,
d) construcción de un triángulo conociendo los lados,
e) determinación del centro de una circunferencia.

Pág. 170

21. DOS CIRCUNFERENCIAS

- Posiciones relativas de dos circunferencias.
- Relación con la distancia entre los centros.
- Cómo dibujar dos circunferencias tangentes.

Se hará en varios días; es probable que el primer día no tengan compás, lo que vendrá muy bien, ya que se puede aprovechar para buscar medios alternativos (monedas, fichas,...), pero lo más interesante es ver cómo localizan el centro de las circunferencias.
Se puede sugerir que utilicen el libro de espejos para localizar el centro de una circunferencia. Y si es posible la utilización del programa Cabri, tanto mejor.

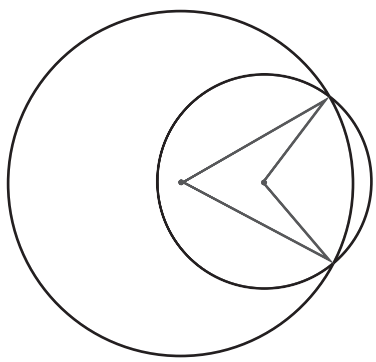
21.1. ¿Y si son iguales?

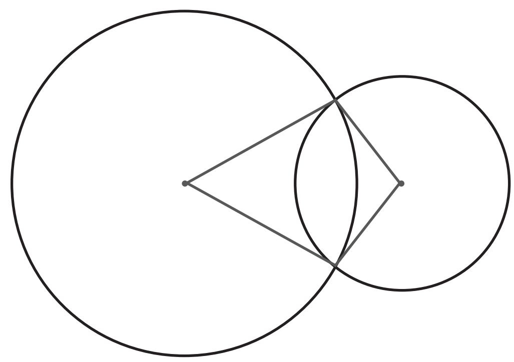
- Se trata de justificar que siempre se obtiene un rombo
- ¿Cuándo se obtendrá un cuadrado?

No se ha estudiado aún el teorema de Pitágoras, luego habrán de recurrir a otro tipo de recursos, que debemos alentar.

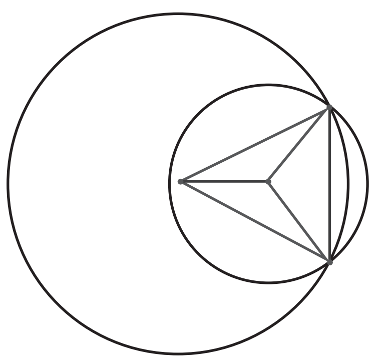
21.2. ¿Y si no?

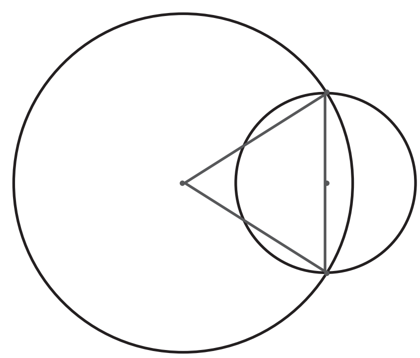
- Ahora es un cuadrilátero, que puede ser convexo o cóncavo, ¿cuándo?





¿En qué condiciones se formará un triángulo equilátero contando con el segmento que une los dos puntos de corte? ¿Y sin ese segmento?





Se trata de una actividad de ampliación para los más avanzados. Es importante dejar que lleven sus propias discusiones y ritmo.

22. CÍRCULOS EN UNA TRAMA

Aproximadamente se cumple que el área es igual al número de puntos (N) salvo para radio 1, lo que permite calcular distintos cocientes $N \div r^2$, que nos darán aproximaciones de p, y justificaremos que $A = \pi \times r^2$.

Veamos:

Número de puntos (N)	r	r^2	$N \div r^2$
1	5	1	5
2	13	4	3'25
3	29	9	3'22
4	49	16	3'06
5	77	25	3'08
6	113	36	3'14
7	149	49	3'04

Pág. 171

23. CIRCUNFERENCIAS

23.1. Una moneda

Como el resultado no es exacto, tendremos que comparar las respuestas que vayan dando todos nuestros alumnos; en caso de disparidad, podemos sugerir calcular la media de todas las respuestas, a ver si tenemos suerte y nos acercamos bastante al valor de π.

23.2. Otros cachivaches redondos

Actividad complementaria de la anterior, en que perseguimos el mismo objetivo: identificar un resultado constante, que también coincide con el de la actividad 22, y al que llamamos π.
Los apartados b) y c) pretenden que los chavales deduzcan por sí mismos las fórmulas para calcular el área del círculo y la longitud de la circunferencia.

El que aparezca r^2 en el cálculo del área y d o 2r en la longitud se debe justificar considerando lo que significan ambas (largo $\times$ ancho o el doble de un largo), o en qué unidades se expresarán; se trata de evitar la confusión posterior entre ambas expresiones.

Pág. 175

24. ¿PRACTICAMOS UN POCO?

24.1.

Longitudes con dos decimales: 3'14, 12'56, 18'84, 25'12 cm.
Para el área, puede ser interesante observar las estrategias seguidas para realizar los cálculos. La respuesta es $p \times 4^2 - p \times 3^2 + p \times 2^2 + p = p \times 10 = 31'42$ cm^2.

24.2.

Aquí tenemos una buena ocasión para trabajar con los errores. Como:

$$r = 0'564189583...$$

- si tomamos dos decimales, r = 0'56 m, y se obtiene una longitud de 3'52 m.
- si tomamos tres decimales, r = 0'564 m, y se obtiene una longitud de 3'544 m.

¿Es importante el error? Tema para discutir en clase.

24.3.

En una pedalada avanza 223'43 cm ≈ 2'23 m y con algo más de 895 pedaladas se recorren 2 km. (Trabajar con distintas precisiones).

24.4.

26.387'25 € si trabajamos con 2 decimales; 26.740 € si trabajamos sin decimales.