DESDE AHORA...

UN CASO ESPECIAL DE GRÁFICAS: LAS RECTAS

En el apartado anterior, ya ha tenido que surgir la idea de recta asociada a unas determinadas fórmulas. Nuestros objetivos en este nuevo apartado deben ser:

- Pendiente de la recta.
- Fórmula (ecuación) de la recta.
- Gráfica de la recta asociada a la funciones de fórmulas: $y = a \cdot x$, $y = a \cdot x + b$.

Pág. 274

10. LLENAMOS

10.1. Botellas

El llenado de las botellas y su relación con gráficas tiempo altura (para velocidad de llenado fija) genera diferencias según la forma de las botellas que permiten discusiones muy interesantes sobre si la gráfica es un segmento único, o segmentos de diferentes inclinaciones, o una curva y porqué es así. En caso de que les resulte atractiva la actividad se les puede pedir que dibujen botellas diferentes y sus respectivas gráficas. O más difícil dada una gráfica diseñar una botella cuyas variaciones de altura sean las representadas.

10.2. Una piscina

El volumen de la piscina es: $10 \cdot 5 \cdot 1'6 = 80\ m^3$ = 80.000 litros.

- En 3 horas, han entrado 18.000 litros; es decir, 6.000 litros / hora.
- A las 3 horas de empezar, debería haber 18.000 litros, pero había 20.000 litros, por lo que antes de empezar a llenarla había ya 2.000 litros.
- A las 10 horas habrá $2.000 + 6.000 \cdot 10 = 68.000$ litros.
- Si el volumen es de 80.000 litros y había 2.000, deberán entrar 78.000 litros, lo que supone que a un ritmo de 6.000 litros / hora, se tardarán 13 horas.

Pág. 275

11. ¡VAMOS DE EXCURSIÓN!

En la misma actividad diferenciamos función de proporcionalidad directa, función lineal y función de proporcionalidad inversa (aunque no las llamemos así en clase). Este hecho debe remarcarse con las tablas y las gráficas. Puede ser una buena actividad para utilizar con los alumnos programas de ordenador. Por ejemplo, en este libro de recursos, hemos utilizado para dibujar las gráficas el programa Graphmath.

11.1. El autobús no paga

Si llamamos C a la cantidad recogida y n al número de personas, la fórmula será:

$$C = 8 \cdot n$$

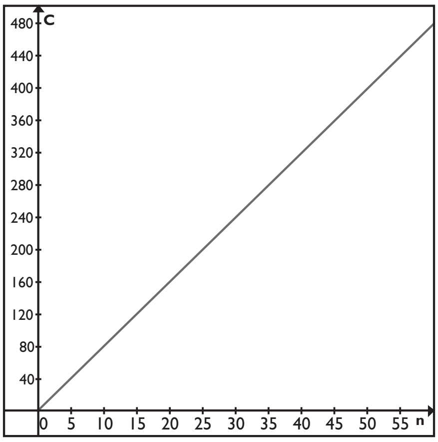
Con esta fórmula correspondiente a una proporcionalidad directa, tendríamos estas respuestas:

a) Si van 25 personas, $C = 8 \cdot 25 = 200$ €. Si van 50 personas, $C = 400$ € (el doble)

b) Tendríamos esta tabla:

Nº personas	1	5	10	30	50	100
Cantidad recogida	8	40	80	240	400	800

c) Hay que hacer notar que al dibujar la gráfica, escoger una escala adecuada es importante.



e) Se aprovecha esta actividad para diferenciar qué ocurre si conocemos:
- El valor de n: simple sustitución
- El valor de C: ecuación muy básica. Si C = 640 ⇒ 640 = 8 · n ⇒ n = 80 personas

11.2. El autobús paga

En este caso no hay proporcionalidad directa. La fórmula correspondiente será:

$$C = 8 \cdot n + 40$$

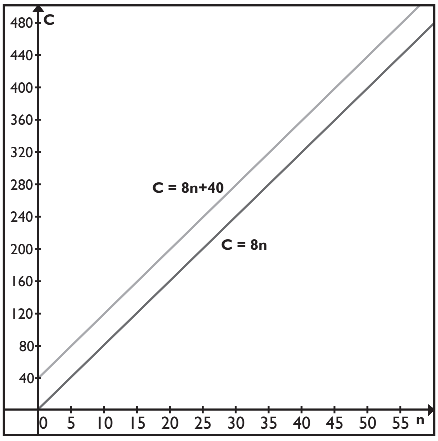
En este caso, tendríamos estas respuestas:

a) Si van 25 personas, C = 8 · 25 + 40 = 240 €. Si van 50 personas, C = 8 · 50 + 440 € (no es el doble).

b) Tendríamos esta tabla:

Nº personas	1	5	10	30	50	100
Cantidad recogida	48	80	120	280	440	840

c) Hay que hacer notar que al dibujar la gráfica, es importante escoger la misma escala que en la actividad anterior y que las rectas son paralelas.



e) En este ejemplo, la ecuación ya no es tan básica.
Si C = 640 ⇒ 640 = 8 · n + 40 ⇒ 600 = 8 · n ⇒ n = 75 personas

11.3. ¿A cuánto tocamos?

Nos encontramos con una situación de proporcionalidad inversa, en la que la fórmula asociada si C representa la cantidad que debe aportar cada persona es:

$$C = \frac{600}{n}$$

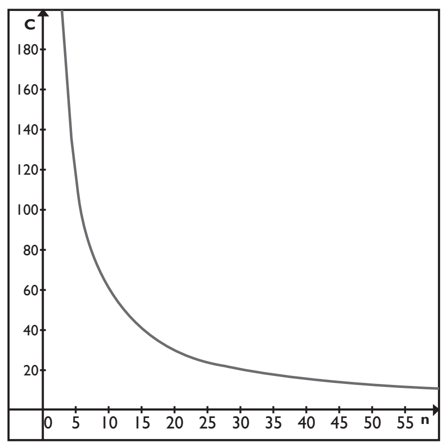
Para esta última situación, tendríamos estas respuestas:

a) Si van 25 personas, C = 600 ¸ 25 = 24 ¤. Si van 50 personas, C = 600 ¸ 50 = 12 ¤ (la mitad).

b) Tendríamos esta tabla:

Nº personas	1	5	10	30	50	100
Cantidad que debe de pagar cada una	600	120	60	20	12	6

c) En este caso, la escala cambia y la gráfica obtenida si se unen los puntos, es una rama de hipérbola. ¡No es necesario mencionar el nombre!

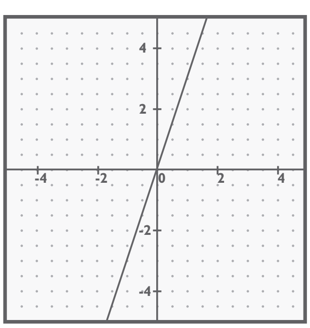


Pág. 278

12. ¿PRACTICAMOS UN POCO?

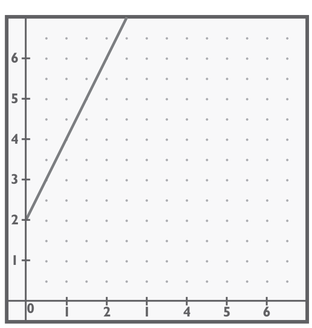
El ajuste de pendientes a las gráficas apropiadas no es trivial y exigirá el desplegar procedimientos explicativos, de cada tabla y de cada gráfica hasta hacerlos identificables.

y = 3x



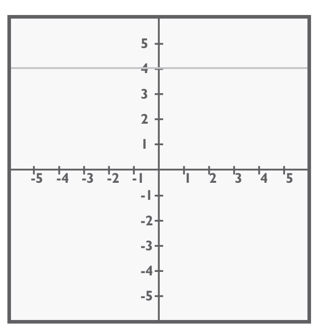
Pendiente 3

y = 2x + 2



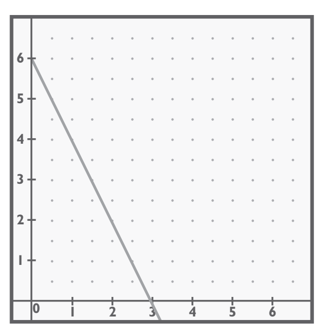
Pendiente 2

y = 4



Pendiente 0

y = −2x + 6



Pendiente −2

9_ LETRAS EN EQUILIBRIO

Aunque el título puede hacer pensar en un desarrollo algebraico, queremos dejar claro desde el primer momento que en todo el tema consideramos como un contenido transversal y prioritario la "Resolución de problemas" y a conseguir dicho objetivo dedicamos gran parte de las actividades. Pero, sin olvidar la riqueza que supone promover distintos métodos de resolución y no solamente el algebraico.

Igualmente **corremos el riesgo de que asociemos el desarrollo del tema a resolución de ecuaciones sin más, y nada más lejos de nuestro objetivo**. Pretendemos trabajar diferentes aspectos del Álgebra: **determinación de términos en una igualdad**, **traducción de lenguaje a letras**, **incógnitas**,....En este tema vamos a profundizar en estos aspectos, ya que el Álgebra es hoy por hoy, un lenguaje de las Matemáticas y de las Ciencias en general.

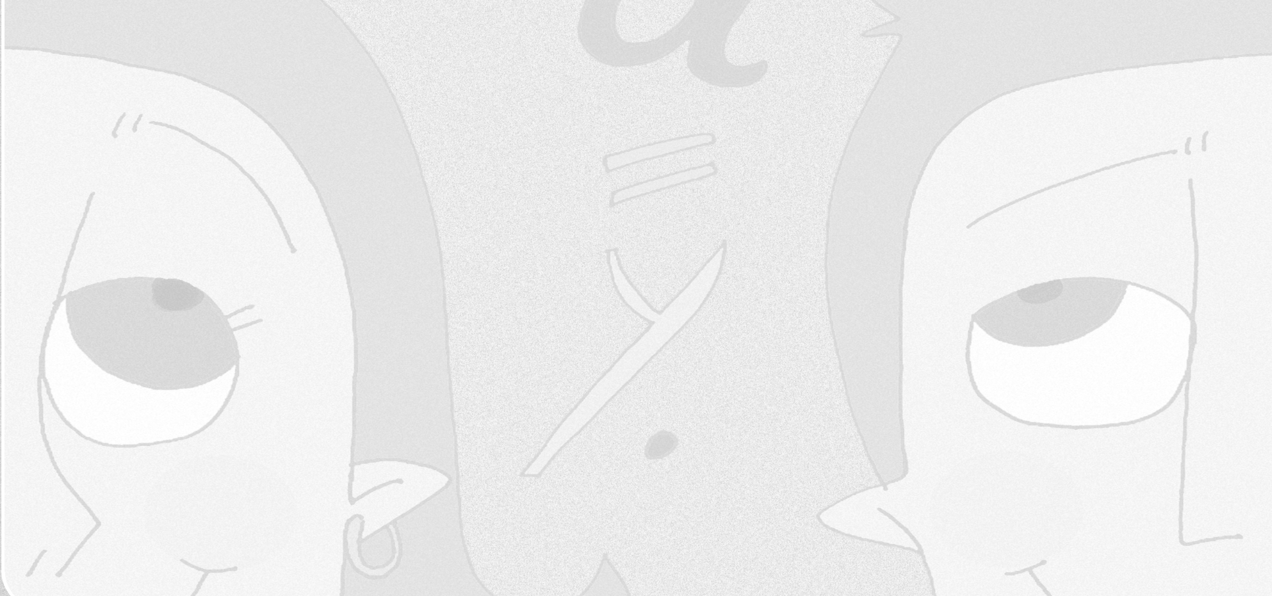
Igualmente pretendemos que los alumnos manejen un poco más el lenguaje técnico:

- Lenguaje algebraico.
- Expresión algebraica.
- Valor numérico de una expresión algebraica.
- Ecuación y solución.

Pero todos esos objetivos pretendemos que se logren por diferentes caminos, no sólo mediante el lenguaje algebraico clásico: x, y,..; sino que nos sigue pareciendo muy útil estimular los diferentes procedimientos de resolución que puedan surgir en la clase: ensayo y error, lógica deductiva,...

Es posible que haya alumnos que ya hayan visto preálgebra y, por tanto, sepan manejar un poco las letras, las ecuaciones,... Por eso, ofrecemos una variedad de situaciones que permiten un tratamiento de la diversidad, tanto a un nivel elemental como a un nivel más alto. Un procedimiento que proponemos y que nos parece bastante útil es la utilización de balanzas.

Es interesante hacer notar que se proponen algunas actividades en las que se relacionan Álgebra y Gráficas con el objetivo de que se vean ambos bloques relacionados y no parezca que son bloques aislados.



DESDE AHORA... DIAGNÓSTICO INICIAL

Como en otras ocasiones, dentro de nuestra propuesta didáctica, proponemos una serie de actividades con el objetivo de detectar habilidades o defectos en el trabajo algebraico.

Pág. 281

1. UN NUEVO LENGUAJE: EL ALGEBRAICO

Aunque en nuestra propuesta didáctica está previsto que en 1º de ESO se trabaje de forma intuitiva con las letras y se introduzca el lenguaje algebraico, es muy probable que los alumnos no hayan visto nada de Álgebra; por lo tanto, estas primeras actividades nos deben servir tanto para una tarea de introducción como de diagnóstico.

1.1. ¿Cuánto pesa?

En la última pesada tendríamos: 2 paquetes pesan 300 g $\Rightarrow$ 1 paquete pesa 150 g.
Si 3 naranjas pesan lo mismo que 1 paquete $\Rightarrow$ 1 naranja pesa 50 g.
Si entre 1 pelota y 1 naranja pesan lo mismo que 1 paquete $\Rightarrow$ 1 pelota pesa 100 g.

1.2. ¿Adivino o astuto?

• Piensa un número cualquiera.	x
• Multiplica el número pensado por 5.	$5x$
• Suma 15 al resultado.	$5x + 15$
• Divide el resultado entre 5.	$x + 3$
• Resta al resultado el número que habías pensado,	3

El resultado final siempre es 3.

1.3. ¡Siempre la misma suma!

Actividad dura, pero curiosa para observar la forma de trabajar. Las posibilidades serían:

1 + 4 + 9 = 14	1 + 5 + 8 = 14	1 + 6 + 7 = 14
2 + 4 + 8 = 14	2 + 5 + 7 = 14	
3 + 4 + 7 = 14	3 + 5 + 6 = 14	
1 + 5 + 9 = 15	1 + 6 + 8 = 15	
2 + 5 + 8 = 15	2 + 6 + 7 = 15	
3 + 5 + 7 = 15		
4 + 5 + 6 = 15		
1 + 6 + 9 = 16	1 + 7 + 8 = 16	
2 + 6 + 8 = 16		
3 + 6 + 7 = 16		
4 + 5 + 7 = 16		

2	8	4	14
9	1	5	15
3	6	7	16
14	15	16	

1.4. Carne y pescado

Una buena oportunidad para detectar distintas estrategias de resolución. De forma “semisimbólica”:

carne + pescado = 18 euros
pescado = 2 · carne
3 carne = 18 ⇒ Carne = 6, Pescado = 12

Pág. 282

1.5. Marchando una paella

Actividad nada sencilla propuesta en la sección de pasatiempos de una revista. Un primer enfoque suele ser plantear esta codificación:

$L + M + X + J + V = 852 \quad (1)$
$L + M = 442 \quad (2)$
$M + X = 528 \quad (3)$
$X + J = 284 \quad (4)$
$J + V = 203 \quad (5)$

Entre L, M, J y V se han dado: 645 comidas; por tanto, el miércoles se han dado 207 comidas. De este dato, obtenemos:

M = 321, L = 121 comidas.

Pág. 283

1.6. ¿Te suena la palabra Álgebra?

Es posible que ya hayan visto algunas cuestiones relacionadas con el álgebra; si no es así, tal vez merezca la pena prescindir de esta actividad.

a) $9 - 3 \cdot (12 - 10) + \square \cdot 2 - 7 = 4 \Rightarrow 9 - 6 + \square \cdot 2 - 7 = 4 \Rightarrow -4 + \square \cdot 2 = 4 \Rightarrow \square = 4$

b) Si n = 20, número de partidos = 20 · 19 = 380
c) x = 40/6 = 20/3
d) C = 150 · n

1.7. Las propiedades de las operaciones y el lenguaje algebraico

Como el propio título dice, el objetivo es aplicar las propiedades de las operaciones.

a) Completa:

Número	2	–3	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{3}{4}$	1	b
Opuesto	–2	3	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	–1	–b
Inverso	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	NO	2	$\frac{3}{2}$	$-\frac{4}{3}$	1	$\frac{1}{b}$

b) Intenta dar el resultado de cada operación por más de un camino:

$$2 \times \frac{5}{6} \times 3 = 6 \times \frac{5}{6} = \frac{10}{6} \times 3 = 5$$

$$8 \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{24}{4} \times \frac{2}{3} = 8 \times \frac{6}{12} = 4$$

$$\frac{7}{2} \times \frac{5}{4} \times \frac{2}{7} = \frac{35}{8} \times \frac{2}{7} = \frac{7}{2} \times \frac{10}{28} = \frac{5}{4}$$

c) Aplica en todos los casos la propiedad distributiva:

$2 \cdot (x + y) = 2x + 2y$ $\qquad$ $3 \cdot (a - b) = 3a - 3b$
$-2 \cdot (a + b) = -2a - 2b$ $\qquad$ $-3 \cdot (x - y) = -3x + 3y$

DESDE AHORA... CODIFICACIÓN. ECUACIONES

En el caso de que se desconozca el lenguaje apropiado, en este apartado deberíamos ver:

- Concepto de igualdad algebraica.
- Valor numérico de una expresión algebraica.
- Operaciones inversas a efectos de las igualdades algebraicas.

También se plantea un primer contacto con las ecuaciones. Deberían surgir estos contenidos:

- Ecuaciones.
- Incógnita de una ecuación.
- Miembros de una ecuación.
- Términos de una ecuación.
- Expresiones algebraicas.

Pág. 284

2. FÓRMULAS. LETRAS. CODIFICACIÓN.

Con esta actividad deberíamos trabajar el suficiente tiempo hasta que la codificación y descodificación estuviera bastante asimilada.

2.1. Fórmulas

Actividad propuesta con el fin de relacionar el lenguaje algebraico con el lenguaje simbólico que ya conocen.

Magnitudes relacionadas	Fórmula utilizada	Dato conocido	Dato desconocido
Área y lado de un cuadrado	$A = l^2$	l = 3 cm	$A = 3^2 = 9\ cm^2$
Longitud y diámetro de una circunferencia	$L = d \cdot \pi$	d = 5 cm	L = 5 · 3'14 = 15'7 cm
Espacio, velocidad y tiempo	$e = v \cdot t$	v = 40 km/h t = 3 h	e = 40 · 3 = 120 km

2.2. Construye tus fórmulas

En esta actividad queremos detectar si se sabe relacionar una fórmula conocida con una información dada.

1. $A = 7 \cdot a$
2. $P = 2 \cdot 6 + 2 \cdot x = 12 + 2x$
3. Has recorrido $100 \cdot 3 = 300$ km
4. Has recorrido $90 \cdot x$
5. $2 \cdot x + 3 \cdot y$

2.3. Área fuelle

Completamos la situación propuesta en la actividad anterior.

$A = 15 \cdot 5 = 75$

$A = 75 + 5 \cdot x = (15 + x) \cdot 5$

Pág. 285

2.4. El mago

Una forma muy clásica de plantear este problema es la siguiente:

Si s representa el nº de habitaciones sencillas y d el nº de habitaciones dobles, tenemos:

$s + d = 50$

$s + 2d = 80$

Pero no debemos olvidar que en 2º de ESO, todavía las herramientas algebraicas son muy endebles, por lo que curiosamente una forma habitual de desarrollo suele ser:
Como hay 80 camas y 50 habitaciones, la diferencia, 30, nos da el número de camas extras que han de corresponder a las habitaciones dobles. Hay 30 habitaciones dobles y 20 sencillas.

2.5. Averigua

¿Qué podrías decirnos sobre la a, u, m y r si te facilitamos la siguiente información?

1. a+5 = 8		a = 3
2. u = v+3	v=1	u = 4
3. m = 3 · n+1	n=4	m = 13
4. r = s+t	r+s+t = 30	r = 15
5. a+b = 43		a+b+2 = 45
6. e+f = 8		e+f+g no se puede saber sin conocer el valor de g; sería 8 +g

2.6. Información condensada

Primera situación específica en la que se debe asociar un lenguaje simbólico a un lenguaje habitual.

a) La edad de Mat es cinco años menos que la de Alfonso.	M = A – 5
b) Tica supera a Concha en 3 años.	T = 3 + C
c) Laura tiene 20 euros más que Luis.	L = 20 + L’
d) Virgilio tiene triple dinero que Eva.	V = 3 · E
e) El peso de n cajas si cada una pesa p kilos:	n · p
f) El peso de cada caja si n cajas pesan p kilos:	p / n
g) La suma de tres números consecutivos es 33	x + (x+1) + (x+2) = 33 (10)
h) El beneficio al comprar por c euros y venderlo por v euros:	v – c

2.7. El lenguaje algebraico

a) Completamos la propuesta planteada en la actividad anterior.

1. El número par que sigue a n	e) n + 2
2. La diferencia de dos números dividida entre 3	a) $\frac{x-y}{3}$
3. La tercera parte de un número, menos otro	d) $\frac{x}{3} - y$
4. El área de un rectángulo es 10 unidades cuadradas	b) a · b = 10
5. Hay tres hombres por cada dos mujeres	c) 3 · m = 2 · h

b) Respuesta abierta, pero interesante para reconocer la creatividad ante el lenguaje simbólico.

Pág. 286

3. MÁQUINAS O ECUACIONES

Primer contacto con la idea de ecuación de una forma un tanto lúdica.

a) Los números desconocidos son: 5 − 3 = 2, 6 : 3 = 2
b) El número desconocido es: 24: 4 − 3 = 3
c) El número desconocido es: [(18 − 10) : 0’5] : 8 = 2

4. BALANZAS O ECUACIONES

Basándonos en el hecho de que si dos sacos pesan 22 kg, uno solo pesará 11 kg, lo cual nos permite simbolizar: $2 \cdot s = 22 \Rightarrow s = 11$

Igualmente los otros dos apartados pueden simbolizarse:

$2 \cdot b = 13 + 15 \Rightarrow 2b = 28 \Rightarrow b = 14$

$3 \cdot a = 8 + 10 \Rightarrow 3a = 18 \Rightarrow a = 6$

Pág. 289

5. ¿PRACTICAMOS UN POCO?

Actividad propuesta para fomentar destrezas.

5.1.

Mat propone a Tica esta adivinanza:

• Piensa un número cualquiera.	x
• Súmale al número pensado 3.	$x + 3$
• Multiplica el resultado por 10.	$10x + 30$
• Resta al resultado 30.	$10x$
• Divide el resultado por 10.	x

El resultado final siempre es el número pensado.

5.2.

a) $a = 10 + b$

b) $3 \cdot x = 16$

c) $(x + 4) + (x + 2) - 2x = 6$ (Muy duro)

d) $C \cdot 1'20$

e) $C \cdot 0'20$

5.3.

a) $2 \cdot x = 25 \quad \Rightarrow \quad x = 12'5$

b) $0'20 \cdot x = 15 \quad \Rightarrow \quad x = 75$

5.4.

$b/2 = 25 \Rightarrow b = 50$

$x/3 = 12 + 10 \Rightarrow x/3 = 22 \Rightarrow x = 66$

$z/4 = 20 \Rightarrow z = 80$

DESDE AHORA... EMPLEAMOS ECUACIONES (Y LAS RESOLVEMOS)

En nuestra propuesta no se plantea la necesidad de un excesivo rigor al resolver una ecuación, pero mediante las actividades propuestas en este apartado, es evidente que el nivel de formalización depende de cada profesor/a. **Hay que tener en cuenta, no obstante, que las destrezas algebraicas son casi nulas por ahora y, por tanto, los procesos de resolución más complejos deberán posponerse hasta haber manipulado expresiones algebraicas**.

Par dichos procesos necesitamos conocer algo sobre polinomios. No creemos que se deba caer en el error de formalizar demasiado, pero sí que se pueden trabajar los siguientes contenidos:

- Concepto de polinomio.
- Suma y resta de polinomios.
- Producto de polinomios.
- Valor numérico de un polinomio.

Pág. 290

6. RESUELVE A TU AIRE

6.1. Vino

Si el envase cuesta e, el vino cuesta 1 + e.

El total: $e + (1 + e) = 1'20 \Rightarrow e = 0'10$, $v = 1'10$

6.2. ¿Qué número es?

$4 \cdot x = x + 9 \Rightarrow x = 3$

6.3. Repartamos

$300 = x + (x + 12) + (x + 27) \Rightarrow x = 261 : 3 = 87 \Rightarrow x + 12 = 99 \Rightarrow x + 27 = 114$

6.4. El bocadillo

Si x son las calorías del pan, 3x son las calorías del jamón.

En total: $x + 3x = 680 \Rightarrow x = 170$ calorías

7. ¿CÓMO RESOLVER ECUACIONES?

7.1. De lógica

Situación muy semejante a la planteada al comienzo del tema, pero en estos momentos puede ser interesante observar si se plantean y resuelven ecuaciones o sistemas de ecuaciones. Se puede resolver perfectamente, como dice el título, empleando la lógica sin emplear la codificación:

$C = P + 5E$

$2P = C + 2E \Rightarrow 2P = (P + 5E) + 2E \Rightarrow P = 7E$

Pág. 291

7.2. Con balanzas simples

Tendríamos estas ecuaciones:

a) $x/2 + 3 = 80 \Rightarrow x = 154$

b) $x - 5 = 85 \Rightarrow x = 90$

7.3. De cabeza

a) $c + 8 = 10$	$c = 2$	b) $a + 3 = 2$	$a = -1$
c) $b - 4 = 5$	$b = 9$	d) $2 \cdot z = 20$	$z = 10$
e) $5a + 2 = 17$	$a = 3$	f) $40 = 2 \cdot d + 20$	$d = 10$
g) $25 = 10 - x$	$x = 15$	h) $10 - 2y = 6$	$y = 2$

7.4. Con calculadora

Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $15a - 4 = 1000$ $a = 1004/15$ b) $4 \cdot (b + 10) = 100$ $b = 15$

c) $x^2 + 5 = 10005$ $x = \pm 100$ d) $2 \cdot (y - 2) = 9$ $y = 6'5$

Pág. 292

7.5. Utilizamos propiedades

Planteamiento de actividades nuevas.

En el apartado 3, tendríamos:

$$\left.\begin{array}{l} 2M = 2N + P \\ 3P = 2N \\ 4P = 300 + P \end{array}\right\} \begin{array}{l} M = 200 \\ N = 150 \\ P = 100 \end{array}$$

Pág. 293

7.6. Aplicamos las propiedades en las balanzas

Resuelve ahora:

a) $3x + 15 = 20$ $x = 5/3$ b) $x + 3 = x + 2$ Sin solución

c) $y - 5 = 10 + 8$ $y = 23$ d) $30 - a = 2a$ $a = 10$

e) $(c - 2) - 8 = 5$ $c = 15$ f) $3a - 10 = a + 3 - 2a$ $a = 13/4$

8. NECESITAMOS ALGO MÁS: POLINOMIOS

En esta actividad debemos ir con cuidado al proponer las actividades, ya que puede ser una situación en la que la diversidad de la clase se preste para ver diferentes niveles de dificultad.

8.1. Según lo que valga

Juego de sustitución, en el que el valor de las tarjetas es:

	$\frac{a}{2} + 3$	$3a$	$\frac{a}{3}$	a^2	$24 - a$	$2a + 5$	$4a + 2$	$a^2 - 1$
1	3'5	3	1/3	1	23	7	6	0
2	4	6	2/3	4	22	9	10	3
3	4'5	9	1	9	21	11	14	8
4	5	12	4/3	16	20	13	18	15
5	5'5	15	5/3	25	19	15	22	24
6	6	18	2	36	18	17	26	35

Pág. 294

8.2. Valor numérico

Es importante ver el valor numérico de una misma expresión, pero con diferentes valores y tipos de números.

Expresión algebraica	Valor de la/s letra/s	Resultado (valor numérico)
a + 1	2	3
a + 1	–2	–1
a + 1	1/2	3/2
2 · a (2a)	2	4
2a	–2	–4
2a	1/2	1
a – b	a = 5, b = 2	3
a – b	a = 5, b = –2	7
a – b	a = 1/2 , b = 1/3	1/6
a – b	a = 0'5 , b = 0'3	0'2
πr^2	r = 2	12'56
πr^2	r = 1/2	0'78
2x + 3y	x = –1, y = 2	4
2x + 3y	x = –1, y = –2	–8
2x + 3y	x = 2/3, y = 3/2	35/6

Pág. 295

8.3. Cuadrado algebraico

Continuamos con los cuadrados mágicos vistos en 1º.

x + 5	x	x + 1	3x + 6
x – 2	x + 2	x + 6	3x + 6
x + 3	x + 4	x – 1	3x + 6
3x + 6	3x + 6	3x + 6	3x + 6

8.4. Efectuamos sumas

Las sumas que se proponen, se limitan a dos sumandos para cada polinomio. Creemos que es suficiente.

1er sumando	2º sumando	Resultado
x	$2x$	$3x$
$x + 1$	$2x - 1$	$3x$
$3x + 4$	$2x - 3$	$5x + 1$
$-2x + 1$	$2x - 1$	0
$2x + x^2$	$5x + 3x^2$	$7x + 4x^2$

8.5. Y ahora multiplicaciones

Los comentarios de la actividad anterior son igualmente válidos.

1er factor	2º factor	Resultado
x	$2x$	$2x^2$
$x + 1$	$2x - 1$	$2x^2 + x - 1$
$3x + 4$	$2x - 3$	$6x^2 - x - 12$
$-2x + 1$	$2x - 1$	$-4x^2 + 4x - 1$
$2x + x^2$	$5x + 3x^2$	$3x^4 + 11x^3 + 10x^2$

Pág. 296

8.6. Sacar factor común

Si en este curso llegamos a conseguir un dominio en las destrezas sobre la propiedad distributiva con polinomios, podemos darnos con satisfechos.

a) Aplica la propiedad distributiva:
   $2 \cdot (b + 3) = 2 \cdot b + 6 = 2b + 6$
   $(a + 2) \cdot 3 = a \cdot 3 + 6 = 3a + 6$
   $(a + 2) \cdot (a + 2) = a^2 + 2 \cdot a + a \cdot 2 + 4 = a^2 + 4a + 4$
   $(a - 2) \cdot (a - 2) = a^2 - 2 \cdot a - a \cdot 2 + 4 = a^2 - 4a + 4$
   $(a + 2) \cdot (a - 2) = a^2 + 2 \cdot a - a \cdot 2 - 4 = a^2 - 4$
b) ¿Sabrías sacar factor común en estas expresiones algebraicas?
   $2x + 4x = (2 + 4) \cdot x$
   $5b + 10a + 15c = 5 \cdot (b + 2a + 3c)$
   $x^2 + 5x = x \cdot (x + 5)$

9. MÁQUINAS ALGEBRAICAS

Seguimos considerando que el aprendizaje mediante actividades de tipo lúdico ayuda a comprender mejor el lenguaje de las ecuaciones. Con esta actividad buscamos conseguir la formalización en la escritura de las ecuaciones.

9.1. Descripción

En el circuito planteado, tendríamos: $(4 + 3) \times (2 \times 3) = 42$

9.2. Diseña circuitos

- En los circuitos a) y b) tenemos la propiedad asociativa.
- Los circuitos c) y e) tienen la misma función, son equivalentes; se trata de la propiedad distributiva. No es de esperar que todo el alumnado se dé cuenta.

Pág. 297

9.3. Reconoce circuitos

Esta actividad no es sencilla ya que nos encontramos con la relación entre los circuitos y el álgebra. Tendríamos este proceso en el que se podría aprovechar para trabajar las transformaciones a que da lugar a propiedad distributiva:

$$4 \cdot a + [(4 + a) + 3] \cdot 3 = 35 \Rightarrow 4a + (7 + a) \cdot 3 = 35 \Rightarrow 4a + 21 + 3a = 35 \Rightarrow 7a = 14 \Rightarrow a = 2$$

Si resulta demasiado dura, pueden plantearse circuitos asociados a:

- $3 \cdot (x + 4) = 18$, $x = 2$
- $3 + 2 \cdot x = 17$, $x = 7$

10. ¡A RESOLVER ECUACIONES!

Aunque en los contenidos oficiales se habla de coeficientes enteros, creemos que no está de más aprovechar el trabajo con fracciones visto anteriormente para aplicarlo a ecuaciones de un nivel más alto (En ¡Socorro!)

10.1. Para empezar

a) $x = 7'5$ b) $x = -2$ c) $x = 2$
d) $x = 1$ e) $x = -6$ f) $x = 9$

10.2. Se complica un poco

a) $x = 30$ b) $x = 1/2$ c) $x = 26$
d) $x = -24$ e) $x = 6$ f) No hay solución

10.3. Esto se pone feo

a) $x = 6$ b) $x = 4$ c) $x = 0$
d) $x = -10$ e) $x = 7$ f) $x = -2/7$

10.4. ¡Socorro!

a) $x = 6$ b) $x = 63$ c) $x = 36$
d) $x = 36$ e) $x = -20/9$ f) $x = 3/7$

¡Atención! En el “Párate, piensa y escribe” de la página 299, se ha detectado un error antes del “Ahora te toca a ti”. Debería poner “Resto a los dos miembros 5”.

Pág. 300

11. ¿PRACTICAMOS UN POCO?

Actividades propuestas para consolidar el trabajo inicial con ecuaciones.

11.1.

a) $3 \cdot x - 4 = 8 \Rightarrow x = 4$
b) $6 \cdot x + 15 = 3 \cdot x - 9 \Rightarrow x = -8$
c) $3 \cdot (x - 5) = 57 \Rightarrow x = 24$
d) $8x + x = 243 \Rightarrow 9x = 243 \Rightarrow x = 27$
e) $x + (x + 1) + (x + 2) + (x + 3) + (x + 4) = 60 \Rightarrow 5x + 10 = 60 \Rightarrow 5x = 50 \Rightarrow x = 10$
f) $2x - 5 = x \Rightarrow 3x = 5 \Rightarrow x = 5/3$
g) $x - 50 = -4x \Rightarrow 5x = 50 \Rightarrow x = 10$
h) $3 \cdot (x + 5) = 21 \Rightarrow x + 5 = 7 \Rightarrow x = 2$
i) $6x + 15 = 3x - 9 \Rightarrow 3x = -24 \Rightarrow x = -8$
j) $\frac{x}{3} + \frac{1}{3} = 6 \Rightarrow x + 1 = 18 \Rightarrow x = 17$
k) $2x + 3 \cdot (5 + x) = 2x - 2 \Rightarrow 2x + 15 + 3x = 2x - 2 \Rightarrow 3x = -17 \Rightarrow x = -17/3$

11.2.

Alguna de las ecuaciones asociadas es bastante dura a estas alturas del proceso de aprendizaje.

a) $3 \cdot x = x + 212 \Rightarrow x = 106$
b) $x = \frac{x}{9} + \frac{x}{7} + \frac{x}{6} + 73 \Rightarrow 126x = 14x + 18x + 21x + 9198 \Rightarrow 73x = 9198 \Rightarrow x = 126$
c) $3 \cdot L + 1'2 = 5'7 \Rightarrow L = 1'5$

DESDE AHORA... RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MEDIANTE ECUACIONES

Hemos preferido integrar en el mismo apartado el trabajo con ecuaciones y problemas, ya que anteriormente ya hubo ocasión de resolver problemas "a su aire" y de resolver ecuaciones siguiendo diferentes procedimientos. Por tanto, en este apartado nuestros objetivos deberían ser:

- Resolución algebraica de una ecuación de primer grado con una incógnita y coeficientes enteros.
- Utilización de las ecuaciones de primer grado en la resolución de problemas.

Pág. 301

12. ¡A RESOLVER PROBLEMAS!

Aunque es previsible que todavía se resuelva algún problema mediante métodos alternativos, es recomendable considerar esta actividad como banco de pruebas para una resolución algebraica. Habrá que tener en cuenta, no obstante tres factores:

- La diversidad del alumnado.
- Alguno de los problemas es más fácil de resolver mediante planteamientos lógicos.
- Es posible que surjan sistemas de ecuaciones en vez de una ecuación.

Es muy importante la codificación correcta del tipo:
x: nº de asientos del autobús pequeño, en vez de x: autobús pequeño.

12.1. Agua

Si llamamos x: nº de gramos de hidrógeno.
$8x + x = 243 \Rightarrow 9x = 243 \Rightarrow x = 27$ gramos hay de hidrógeno y 216 gramos de oxígeno.

12.2. Los enteros

Si llamamos x: número menor:

$$x + (x + 1) + (x + 2) + (x + 3) + (x + 4) = 60 \Rightarrow 5x + 10 = 60 \Rightarrow 5x = 50 \Rightarrow x = 10 \Rightarrow$$

Los números son 10, 11, 12, 13 y 14.

12.3. Las consumiciones

Si llamamos x: precio de un bocadillo.

$$3x + 2 \cdot 1'65 + 2 \cdot 1'20 = 12 \Rightarrow 3x + 3'30 + 2'40 = 12 \Rightarrow 3x + 5'70 = 12 \Rightarrow 3x = 6'30 \Rightarrow x = 2'10.$$

12.4. El robo al banco

En este caso, no merece la pena el proceso algebraico.
Los ladrones tardarán 20 minutos en llegar a la frontera. En 16 minutos la policía recorre 32 km, con lo cual lograrán alcanzarlos.

12.5. Autobuses

Si llamamos x: nº de asientos del autobús pequeño.

$$10 \cdot (x + 22) + 5x = 700 \Rightarrow 10x + 220 + 5x = 700 \Rightarrow 15x + 220 = 700 \Rightarrow 15x = 480 \Rightarrow$$

x = 32 asientos tiene cada autobús pequeño y 54 cada uno de los grandes.

13.6. ¡Viaje en tren!

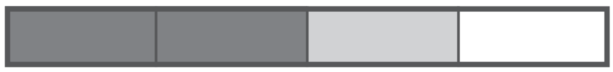
Si llamamos x: precio del billete de niño.
$3 \cdot 2x + 4x = 72 \Rightarrow 6x + 4x = 72 \Rightarrow 10x = 72 \Rightarrow x = 7'2$ paga cada niño y 14'4 cada adulto.

12.7. Vehículos
Otra vez es preferible el empleo de la lógica.
Si todos los vehículos fueran motos habría 164 ruedas. Por tanto, las 286 ruedas restantes han de corresponder a 143 coches. ¡Imposible!

A partir de este momento se proponen una serie de problemas de un mayor nivel de dificultad.

Pág. 302

12.8. Pasteles
En este caso, es mejor utilizar un soporte gráfico:



Si una parte de cuatro son 12 pasteles, el total serán cuatro partes; es decir, 48 pasteles.

12.9. Una de edades
Edad antigua del hijo: x, edad antigua del padre: $4x$
Edad actual del hijo: $x + 6$, edad actual del padre: $4x + 6$
Como el padre tiene 50 años: $4x + 6 = 50 \Rightarrow 4x = 44 \Rightarrow x = 11$ años
Edad actual del hijo: 17 años

12.10. La torre
Altura de la torre: x, longitud bajo tierra: $x/8$, longitud sumergida: $3x/16$, parte emergente: 88
Ecuación: $x/8 + 3x/16 + 88 = x$
Multiplicamos por 16: $2x + 3x + 1408 = 16x$
Trasponemos términos: $1408 = 11x \quad x = 128$ metros

12.11. Dos partes
Parte menor: x, parte mayor: $133 - x$
Como $D = d \cdot c + r \Rightarrow 133 - x = 4x + 8 \Rightarrow 125 = 5x \Rightarrow x = 25$
Las dos partes son: 25 y 108

13. GRÁFICAS Y ÁLGEBRA
Si tenemos clara la interrelación entre ambos núcleos, ¿qué mejor forma de aplicarlo que plantear situaciones en las que resolver situaciones gráficas mediante el Álgebra?

13.1. La piscina
Si al llenar la piscina hay 80.000 litros, tendremos:

$$100n + 2.000 = 80.000 \Rightarrow 100n = 78.000 \Rightarrow n = 780 \text{ minutos} = 13 \text{ horas}$$

13.2. La excursión
a) $640 = 8n \Rightarrow n = 80$ personas
b) $640 = 8n + 40 \Rightarrow 600 = 8n \Rightarrow n = 75$ personas

13.3. El dinero de Mat y Tica
a) Tica tiene 255 euros a los 17 meses aproximadamente. Mat tendrá 100 a los 10 meses.
b) Tica nunca se queda sin dinero. Mat a los 20 meses.
Tica nunca llega a deber. Mat a los 21 meses.
c) Tienen el mismo dinero cuando:
$15n = 200 - 10n \Rightarrow 25n = 200 \Rightarrow n = 8$ meses. Tendrán ambos 120 euros.