Nº de personas	Leche	Carne	Verduras	Frutas
1	**480 cl**	**180 g**	**400 g**	**750 g**
2	960 cl	360 g	800 g	1.500 g
3	1.440 cl	540 g	1.200 g	2.250 g
4	1.920 cl	720 g	1.600 g	3.000 g
5	2.400 cl	900 g	2.000 g	3.750 g

a) El criterio que nos parece más apropiado es el de “Reducción a la unidad”.
b) Siempre que se eligen 4 números que estén en los “vértices de uno de los rectángulos de la tabla”, se observa que el producto de vértices opuestos nos da el mismo resultado.

22.4. Más personas, ¿más tiempo?

Con esta actividad y la siguiente pretendemos dar una estrategia basada en un procedimiento gráfico, aunque sean dos situaciones sencillas.
Situación de proporcionalidad directa.
Parece claro que tardarán 5 veces más; es decir, 10 horas.

Pág. 137

22.5. Buscando ayuda

Por si hay dudas sobre las estrategias a seguir ante una situación de proporcionalidad inversa, con esta actividad pretendemos hacer un enfoque gráfico. Aunque la respuesta es bastante sencilla, debemos considerar esta actividad como un modelo, que nos permita generalizar a otras situaciones.

- Mat en 6 horas habría pintado 1/4 del total de la pared.
- Mat en una hora habría pintado 1/24 del total de la pared.
- Entre 12 personas, habrían pintado 1/2 de la pared en una hora; por tanto, tardarían dos horas en pintar la pared completa.

22.6. Más rápido, ¿se tarda más?

En esta actividad sobre proporcionalidad inversa, en algún caso tal vez haya dificultades para contestar mediante la reducción la unidad; por eso, quizás merezca la pena un enfoque prealgebraico:
Como las magnitudes velocidad y tiempo son inversamente proporcionales, tenemos, por ejemplo:

$$\frac{6}{18} = \frac{t}{20} \Rightarrow 18 \cdot t = 120 \Rightarrow t = 6'66666\ldots \text{ minutos} = 6 \text{ minutos } 40 \text{ segundos}$$

Andar	Bicicleta	Patines	Coche	Tractor	Ciclomotor
6 km/h	18 km/h	12 km/h	60 km/h	24 km/h	36 km/h
20 minutos	**6m 40s**	10 minutos	2 minutos	5 minutos	**3m 20s**

A partir de este momento, se propone una serie de situaciones de proporcionalidad par analizar la comprensión o no del concepto.

22.7. El refresco

Nos encontramos con proporcionalidad directa.
Una botella de 20 cl cuesta: 0’32 euros
Una botella de 2 l debería costar: 3’2 euros

Pág. 138

22.8. El ratón gigante

Una persona necesitará: 70 ÷ 50 = 1’4 kg.
Un ratón necesitará: 225 gramos.

22.9. El frutero

Actividad interesante para detectar posibles estrategias de resolución. Lo más habitual es que se propongan estrategias basadas en la regla de tres, pero consideramos que podría ser más apropiada la siguiente:

- Con distinto precio, un melón cuesta 1’50 euros y una sandía 2’25 euros. En total conseguiría 225 euros.
- Con el mismo precio, cada pieza cuesta 1’80 euros. Conseguiría 216 euros.

22.10. Completa las tablas

Actividad propuesta para formalizar, en cierta medida, el concepto de proporcionalidad.

Magnitudes directamente proporcionales					
Magnitud A	1	2	4	6	12
Magnitud B	3	6	12	18	36

Magnitudes inversamente proporcionales					
Magnitud A	1	2	4	6	12
Magnitud B	60	30	15	10	5

Pág. 139

23. PROPORCIONALIDAD, PERO DISTINTA

Actividad que podríamos considerar casi teórica, porque contamos en gran medida el procedimiento que queremos utilizar. No obstante, **pretendemos potenciar el concepto de proporción como igualdad entre dos razones**.

a) Respuesta abierta.
b) Por 20 entradas pagaremos 6’20 × 20 = 124€. Cada una de las 20 personas pagaremos 120 ÷ 20 = 6€.
c) Sería conveniente utilizar todos los pasos.

$$\frac{a}{40} = \frac{15}{10} \quad \Rightarrow \quad 10 \cdot a = 600 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{600}{10} = 60$$

$$\frac{60}{b} = \frac{15}{10} \quad \Rightarrow \quad 600 = 15 \cdot b \quad \Rightarrow \quad b = \frac{600}{15} = 40$$

$$\frac{60}{40} = \frac{c}{10} \quad \Rightarrow \quad 600 = 40 \cdot c \quad \Rightarrow \quad c = \frac{600}{40} = 15$$

$$\frac{60}{40} = \frac{15}{d} \quad \Rightarrow \quad 60 \cdot d = 600 \quad \Rightarrow \quad d = \frac{600}{60} = 10$$

Pág. 140

24. EMPLEAMOS LAS PROPORCIONES

Al igual que en la actividad anterior, es una actividad fundamentalmente de comprensión. Es importante que los alumnos vean cual de los dos procedimientos les resulta más cómodo.

24.1. Horchatas

a) Por cada granizado nos cobran 2 €; por tanto, por 12 nos cobrarán 24 €.
b) Por cada hamburguesa pagamos 1’50 €; por tanto, 3 hamburguesas nos costarán 4’50 €.

Pág. 141

24.2. ¿Cuánto tardan?

a) En total se necesitan 100 horas. Si hay 50 personas, se necesitarán sólo 2 horas.
b) Tenemos que pagar un total de 60 €. Si sólo han de pagar 20 personas, cada una pagará 3 €.

24.3. El ganado

En este caso, ya no tenemos una situación en la que sólo surge la proporcionalidad directa o inversa, sino que se mezclan ambas.

a) Cada vaca consume a la semana $4200 \div 50 = 84$ kg. Luego, consume al día 7 kg.
b) Para una vaca necesitamos $7 \times 15 = 105$ kg. Para 20 vacas, $105 \times 20 = 2100$ kg.
c) Sólo nos quedan 10 vacas y 1400 kg de pienso. Si necesitamos cada día 70 kg de pienso, tendremos para $1400 \div 70 = 20$ días.

Pág. 144

25. ¿PRACTICAMOS UN POCO?

Cuestiones de destrezas sobre proporcionalidad para proponer como tratamiento de la diversidad.

25.1.

Hay un premio por cada 20 latas.
Si hay 5 veces más latas, deberá comprar 750 premios.

25.2.

El consumo por habitante es 3 m^3.
Entre los meses de julio y agosto se consumirán: $2 \cdot 3.000 \cdot 3 = 18.000$ m^3.

25.3.

Si hay 100 personas, tardarán 3 días.
Si hay 75 personas, tardarán 4'5 días.
Para la 2ª pregunta, puede ser conveniente emplear el procedimiento de las proporciones:

Si 50 personas tardan 6 días
75 personas tardan x días

Como el nº de personas y el tiempo son magnitudes inversamente proporcionales:

$$\frac{50}{75} = \frac{x}{6} \Rightarrow x = 4'5 \text{ días}$$

25.4.

El ritmo de embotellado es de 9 botellas / minuto.

a) En una hora (60 minutos) llenará $9 \times 60 = 540$.
b) En llenar 180 botellas tardará: $180 \div 9 = 20$ minutos.

25.5.

El granjero necesita diariamente 1'5 l de agua y 3'5 kg de forraje por vaca.
Si le quedan 20 vacas, la semana que viene necesitará: 30 litros de agua y 70 kg de forraje.

25.6.

Si sólo quedan 12 días, necesitará fabricar diariamente unos 167 pares de zapatos.

25.7.

Busca el término que falta en las siguientes proporciones:

a) $\frac{3}{5} = \frac{9}{a} \Rightarrow a = 15$ b) $\frac{4}{7} = \frac{b}{21} \Rightarrow b = 12$ c) $\frac{c}{15} = \frac{20}{75} \Rightarrow c = 4$ d) $\frac{13}{y} = \frac{39}{57} \Rightarrow y = 19$

e) $\frac{17}{x} = \frac{68}{372} \Rightarrow x = 93$ f) $\frac{24}{a} = \frac{a}{54} \Rightarrow 9 = 36$ g) $\frac{15}{20} = \frac{21}{x} \Rightarrow x = 28$ h) $\frac{9}{y} = \frac{y}{25} \Rightarrow y = 15$

5_ CACHIVACHES

Como ya hemos indicado con anterioridad, este tema supone **una propuesta alternativa para el estudio de los contenidos numéricos**. **No se trata de actividades estructuradas según el tipo de número a utilizar,** sino que están agrupadas por hacer referencia a un mismo cachivache que necesita de nuestros números para existir, o que nos proporciona por sí mismo esos números, como puede ser el cuerpo humano, el más importante de los cachivaches a considerar.
Aquí presentamos una visión global no exhaustiva de los temas tratados en cada apartado.

1) Nuestro cuerpo
   - Unidades de medida
   - Fracciones, decimales
   - Proporciones
2) El ábaco. Sistemas de numeración
   - Numeración posicional
   - Técnicas de recuento
3) La calculadora
   - Múltiplos y divisores
   - Fracciones, decimales
   - Potencias, raíces.
   - Introducción sucesiones
4) Juegos
   - Divisibilidad
   - Números enteros
   - Fracciones

Aconsejamos una serie de técnicas para el desarrollo de las actividades:

- Trabajar en grupos: la mayoría de las actividades son abiertas, con lo que el trabajo discutiendo posibles modos de afrontar las actividades es más enriquecedor.
- No siempre existe LA solución, sino que ésta depende de cómo se haya abordado la actividad; intentemos valorar positivamente como más interesante discutir los intentos realizados que dar la respuesta ante todos los esfuerzos realizados.
- Si no se encuentra ninguna solución no hay por qué darla.

DESDE AHORA...

NUESTRO CUERPO, UNIDADES DE MEDIDA

Empezamos el trabajo con las unidades de medida, las fracciones, los decimales y las proporciones. Para ello vamos a utilizar un cachivache importantísimo: nuestro propio cuerpo. Además, cabe decir que ha sido nuestro cuerpo el primer patrón de unidades de medidas desde la antigüedad. Si hacemos alguna clase práctica de medida de alguna longitud, por ejemplo, a palmos es un buen ejercicio que hace que los alumnos y alumnas lleguen rápidamente a la conclusión de la necesidad de definir un sistema "universal"... lo que nos da pie a introducir el sistema internacional de manera "natural".

Pág. 147

1. UN CACHIVACHE IMPORTANTE: NUESTRO CUERPO

Es fundamental que nuestros alumnos y alumnas entiendan el significado de medir como resultado de comparar una magnitud con una unidad. Quizá una de las mejores formas de conseguir que lo interioricen es una escenificación corporal, para lo que comenzamos con las unidades antropométricas que, por otra parte, son las primeras históricamente.

1.1. Las unidades

A partir del dibujo, deben definir qué significa cada una de estas unidades, y discutir qué ventajas e inconvenientes tiene este tipo de unidades:

- Siempre tenemos a mano estas unidades.
- No son las mismas para todas las personas: exactitud escasa.

Una vez definidas, se deben utilizar para dar las medidas de varias longitudes en la clase, el pasillo, etc., para reforzar la comprensión del significado de medir.

1.2. ¿Nos entendemos?

Seguimos insistiendo en el mismo tema, pero desde el punto de vista de uniformar criterios: ¿cómo calcular el tamaño medio del pie, pero midiendo en pies, dedos, etc.?

Se trata, pues, de definir un patrón estándar y relacionarlo con el resto de las unidades, según una relación múltiplo–divisor, y no de comparar con unidades de medida que aún no se conocen. Esto lo haremos en una actividad posterior.

Quedamos a la espera de las iniciativas de los chavales: ¿quizá se dibujan en un papel a partir de un origen común y se "promedia a ojo"?

La tabla que sigue, publicada en el folleto "Medidas tradicionales y de oficios", de A. Hernández y otros, MEC, 1995, pretende reforzar la idea de fracciones como partes de un todo. Cada vez el "todo" es diferente, y la parte es aproximada.

	Braza	Vara	Codo	Pie	Palmo	Mano	Pulgada
Braza	**1**	**2**	4	6	8	24	72
Vara	**1/2**	**1**	2	3	4	12	36
Codo	1/4	1/2	1	3/2	2	6	18
Pie	1/6	1/3	2/3	1	4/3	4	12
Palmo	1/8	1/4	1/2	3/4	1	3	9
Mano	1/24	1/12	1/6	1/4	1/3	1	3
Pulgada	1/72	1/36	1/18	1/12	1/9	1/3	1

El trabajo se debe plantear como abierto: dejar que se vayan poniendo de acuerdo en distintos criterios: medir, calcular medias, comparar. Lo interesante es el proceso y las discusiones y no el resultado: ¿alguien sabe que una pulgada es 1/72 de braza?
Una vez escrita la tabla, sea la que sea, es curioso observar sus propiedades, por ejemplo:
- En posiciones simétricas hay números inversos.
- Si un palmo es 1/2 de codo y un codo es 1/4 de braza, un palmo es 1/8 de braza: producto de fracciones. ¿Cómo se localiza estos productos en la tabla?

Pág. 148

1.3. Las medidas del cuerpo
Introducción al número de oro. Se puede intentar escribir la relación en la forma

$$\frac{T}{n} = \frac{n}{T-n} \Leftrightarrow T \cdot (T-n) = n^2 \Leftrightarrow n^2 + T \cdot n - T^2 = 0$$

(sólo para tratar la diversidad "por arriba", claro), dar valores concretos a T e intentar resolver la ecuación por tanteo con la calculadora. Como se sabe, la solución no negativa es $T = n \cdot \Phi$, donde Φ es el número de oro, del que se habrán obtenido buenas aproximaciones en la actividad tal y como estaba enunciada, pues se pedía calcular cocientes T/n para distintos valores de T y n.

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1'618033989... \approx 1'62$$

Pág. 149

1.4. Cálculos con medidas corporales
O bien investigan los valores estándar actuales o bien utilizan sus propias medidas; una comparación entre ambas estaría bien.
2. 124'2 m para el romano y 146'72 para el egipcio; se obtiene 475'9 pies babilonios.
4. El pie inglés equivale a 1/3 de yarda y 12 pulgadas (aproximadamente, 30'5 cm). Luego 10.000 pies son unos 3.050 m de altura. La diagonal es $28 \cdot 2'54 \approx 71$ cm. Una milla marina son 1.852 m, y el nudo es una milla por hora; 10 nudos son 18'52 km/h.

1.5. Investiga
Pequeña investigación documental.
Equivalencia con nuestro sistema métrico:

Pulgada, 2'54 cm.
Punto: hay diversas definiciones basadas en tamaños de letras fabricadas por cada fundidor para las imprentas; a pesar de intentar una unificación, tenemos los sistemas Fournier (0'350 mm), Didot (0'376 mm), Inglés (0'352 mm), Italiano (0'398 mm). Berthold, en 1.879, dio la equivalencia de 1 m con 2.660 puntos. En términos informáticos, un punto es 1/72 de pulgada (0'0353 cm).
Pie: 12 pulgadas (30'46 cm) el inglés; el castellano, 28 cm.
Yarda: 3 pies.
Milla: romana equivalía a 1.000 pasos (1.482 m). La inglesa o terrestre, 1.609 m, y la marina, 1.852 m.
Nudo: (velocidad) una milla marina por hora.
Galón: unidad de capacidad; el inglés son 4'54596 l, y el americano, 3'78542 l.

Pág. 153

2. ¿PRACTICAMOS UN POCO?
2.1. Inversos
Queremos distinguir claramente entre inverso y opuesto de un número, y que el inverso del inverso es el inicial:
a) 1/2, 1/5, 1/7
b) −1/2, −1/5, −1/7
c) 2, 5, 7 y 3/2, 3/4, 7/5
d) El producto de un número por su inverso es 1.

2.2. Razonamientos inversos

a) 3 edificios, $3 \times 10 = 30$ pisos, $3 \times 10 \times 2 = 60$ apartamentos.
b) Corresponde pagar 1/3 a cada edificio, 1/30 a cada piso y 1/60 a cada apartamento.
c) 1/60 de 1200 € = 1200 ÷ 60 = 20 €.

2.3. Opera

a) José tiene $3 \times 1/2$ los de Pablo; Mariola 4 veces los de José; luego Mariola tiene $4 \times 3 \times 1/2 = 6$ veces los de Pablo.
b) Siempre 6.
c) 2/9 , 48 , 1
d) El ecuador mide unos 40.000 km, y lo recorremos en 24 h, luego nos movemos a 40000 ÷ 24 = 1.667 km/h.... ¡quién lo diría!
25 nudos son 1'8519 × 25 = 46,2975 km/h, menor que 60 km/h

2.4. Investigamos: definiciones

Actividad de investigación.

Adjuntamos como ejemplo, algunos datos curiosos sobre las definiciones pedidas.

Evolución de la historia de la definición del metro

Año	Definición
1790	Distancia recorrida por un péndulo determinado que tiene un hemiperíodo de un segundo.
1791	Diez millonésima parte de un meridiano dentro de un cuadrante (un cuarto de la circunferencia polar de la tierra).
1795	Distancia entre las dos marcas existentes en un patrón de latón.
1799	Distancia entre las dos marcas existentes en un patrón de plata.
1889	Distancia entre las dos marcas del patrón de platino-iridio a 0 °C.
1927	Distancia entre las dos marcas del patrón de platino con 10% de iridio a 0 °C y 1 atmósfera de presión.
1960	1.650.763,73 oscilaciones en el vacío de onda de la radiación emitida por el salto cuántico entre $2p^{10}$ y $5d^{5}$ de un átomo de ^{86}kriptón.
1983	Distancia recorrida por la luz en el vacío durante 1/299 792 458 segundo.

Evolución de la historia de la definición del segundo

Año	Definición
Hasta 1967	86.400 ava parte de la duración que tuvo el día solar medio entre los años 1750 y 1890
1967	9.192.631.770 períodos de radiación correspondiente a la transición entre los dos niveles hiperfinos del estado fundamental del isótopo 133 del átomo de cesio (^{133}Cs), medidos a 0 K.

Evolución de la historia de la definición del kilogramo

Año	Definición
1790	Masa de un decímetro cúbico (un litro) de agua destilada a una atmósfera de presión y 3,98 °C
1889	Masa del prototipo internacional del kilogramo, formado por una aleación de platino e iridio (en proporción de 90% y 10%, respectivamente, medida por el peso) con forma de cilindro derecho-circular (altura = diámetro) de 39 milímetros.
2011	Se espera que se cambie la definición por otra más exacta y que no tenga que ver con un prototipo patrón.

DESDE AHORA...

EL ÁBACO. SISTEMAS DE NUMERACIÓN

Este instrumento utilizado en muchas culturas como elemento de cálculo y que aparece ahora “arrinconado” en nuestra cultura tecnológica, va a ser la “excusa” perfecta para introducir conceptos tan potentes como los sistemas de numeración y las técnicas de recuento. De los primeros, queremos destacar el sistema binario ya que es el que se utiliza en la informática. Aquí seguramente, el trabajo es más nuestro como docentes en ponernos al día en el mundo tecnológico, que de nuestros alumnos ya que debemos reconocer que en esta temática la mayoría... ¡nos superan!

Pág. 154

3. EL ÁBACO

Si no se dispone de un ábaco, es interesante que fabriquen uno. Todo aquello que se puede manipular, debe hacerse para favorecer la retención y asimilación.

3.1. Caben diez

a) Enumeración de casos. Quizá se pueda introducir el diagrama en árbol.
b) ¿Es necesario situar diez bolas en un alambre? ¿Se puede simplificar?
c) Lógicamente, además de investigar qué debe ocurrir para que se dé la condición pedida, se persigue que propongan la más sencilla manera de codificar: la numeración posicional decimal.

3.2. Juego: ¿dónde están las bolas?

Dos posibles enfoques: numérico y geométrico. Si es numérico se puede intentar que encuentren una estrategia binaria.
Será interesante observar qué ocurre si alguien llega a situar las diez bolas en un mismo alambre.

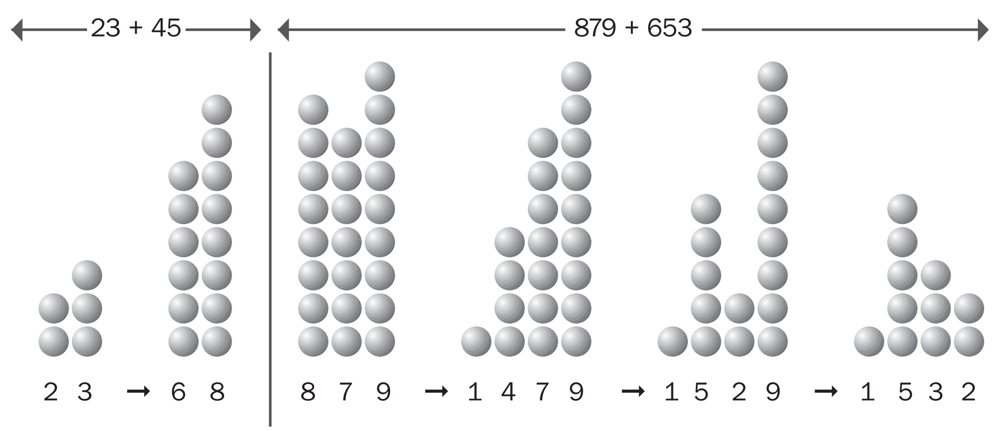
Pág. 155

3.3. Caben cuatro

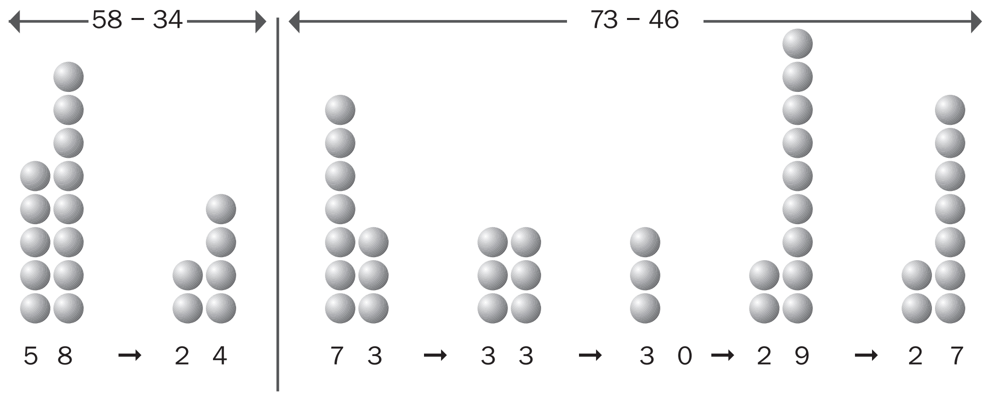
¿Llegarán a inventar en clase la numeración en base 5? Merece la pena intentarlo. En realidad no es tan complicado, pues es como contar con los dedos de la mano. El número más grande es el 4.444, o sea 624.

3.4. Sumar y restar

No debemos insistir en sumar de derecha a izquierda. De hecho, es más lógico hacerlo al contrario, añadiendo cuentas por la izquierda, que es como se suele hacer en el cálculo mental. Si en un alambre llegamos a 10, se quitan todas y se pone una en el de la izquierda.



La resta sin llevar es sencilla. La resta llevando requiere convertir una bola de un orden (decenas en este caso) en 10 bolas del tipo inferior (unidades), o bien contando hacia delante, desde 46 hasta llegar a 73. Se recomienda, una vez descubierto (son ellos quienes deben descubrir ambos algoritmos, es de una perfecta inutilidad explicar cómo se hace), practicar el algoritmo en más casos.



3.5. Y más

Se insiste en los mismos contenidos, especialmente la numeración posicional y la importancia de seguir un orden a la hora de efectuar un recuento.

a) 400, 310, 301, 220, 211, 202, 130, 121, 112, 103, 040, 031, 022, 013, 004.
b) y c) En el ábaco chino, con cinco bolas en una parte y dos en la otra, en realidad sobran dos bolas en cada alambre, una en cada zona.

4. ¿CÓMO CONTAMOS?

4.1. Símbolos para contar

Ventajas (pocas) de los distintos sistemas de numeración anteriores al actual, e inconvenientes.
Se debe destacar la importancia histórica de la introducción del cero.

a) Para escribir el 99 haría falta: Si se dispone de un símbolo para el 1 y uno para el 5, 23 símbolos ($19 \times 5 + 4 \times 1$). Egipcios, 18 ($9 \times 10 + 9 \times 1$). El número representado es el 4622.
b) Los babilonios necesitaban 40 símbolos para el 99 ($1 \times 60 + 39 \times 1$). Los números son 755 ($12 \times 60 + 35$) y 116503 ($32 \times 3600 + 21 \times 60 + 43$).
c) Con numeración romana, 99 es IC. Graves problemas para operar.

Pág. 157

4.2. ¿Siempre es así?

Seguimos trabajando la numeración posicional, ahora en base 60, y el algoritmo de conversión de unidades de tiempo, sistema sexagesimal. Veamos cómo utilizar la calculadora para ello:

2 h 10 min 15 s → 2 x 60 + 10 + 15 ÷ 60 = → 130’25 min
→ 2 x 60 + 10 = x 60 + 15 = → 7.815 s

Para convertir segundos en minutos, al dividir entre 60 obtenemos una parte entera (minutos) y una parte decimal que, si se multiplica por 60, nos da el resto de la división, o sea, los segundos.
Por ejemplo, 367 segundos son 6 min 7 s.

367 ÷ 60 = → 6’116666667 (6 minutos)
− 6 = → 0’116666667
x 60 = → 7 segundos

1.000.000 s son 11 días 13 h 46 min 40 s.

4.3. Un código

Ampliación del código binario en etapas sucesivas. Aquí vamos por dos posiciones, siendo las posibles codificaciones 00, 01, 10, 11.
Se debe introducir la utilización del diagrama de árbol en cuanto sea posible, pero siempre dejando a los alumnos y alumnas la iniciativa.

Pág. 158

4.4. Mejorando el código

Generalización a n posiciones. Intentaremos sugerir la utilización de un diagrama en árbol.

1. a) Con cuatro posiciones se pueden codificar $2^4 = 16$ informaciones.
b) 655417982
c) 0110100110010101001000110111010001111

2. a) Cada cual puede confeccionar la libreta de códigos que desee, aunque recomendaremos seguir un cierto orden, dado por el diagrama de árbol.
b) UN DIA GENIAL. El espacio es CCC.
c) $4^3 = 64$, $3^4 = 81$ son los caracteres que se pueden codificar en cada caso.

4.5. Bit y byte

Con n bits se pueden codificar 2^n caracteres. Por tanteo obtendremos que con 7 bits basta para codificar los caracteres de un teclado ($2^7 = 128$). Con un octeto se pueden representar 256 caracteres.
Tratamos con:

- Diagramas de árbol.
- Potencias.
- Crecimiento exponencial.
- Introducción a la idea de logaritmo.

Pág. 159

4.6. Código binario

Se incide en el mismo tema desde otro punto de vista que puede resultar atractivo. Además, se debería tratar la equivalencia entre número binario y decimal. La A, en decimal, queda expresada como $2^6 + 1 = 65$.
Con la excusa de estudiar el código ASCII de las letras, podremos practicar las conversiones binario – decimal – hexadecimal.

Letra	Código ASCII	Decimal	Hexadecimal
A	01000001	65	41
B	01000010	66	42
C	01000011	67	43
D	01000100	68	44
E	01000101	69	45
F	01000110	70	46
G	01000111	71	47
H	01001000	72	48
I	01001001	73	49
J	01001010	74	4A
K	01001011	75	4B
L	01001100	76	4C
M	01001101	77	4D
N	01001110	78	4E
O	01001111	79	4F
P	01010000	80	50
Q	01010001	81	51
R	01010010	82	52
S	01010011	83	53
T	01010100	84	54
U	01010101	85	55
V	01010110	86	56
W	01010111	87	57
X	01011000	88	58
Y	01011001	89	59
Z	01011010	90	5A

Respuestas adicionales:

a) 7, 12, 75
d) El 10 estaba escrito en binario, y por tanto significaba 2.

4.7. Binario y hexadecimal

a) F0, 0F, 2D
b) 01111011, 11111111, 00110010, 00001111, 11110000.
c) En decimal son: 240, 15, 45 y 123, 255, 50, 15, 240

Pág. 160

5. JUEGOS BINARIOS

5.1. Juego: Adivina mi número

Se debe forzar el juego intentando buscar el mínimo número de preguntas necesarias, forzando una búsqueda binaria. Con "n" preguntas se acertaría un número entre un total de 2^n, luego con 17 preguntas se encuentra con toda seguridad el número pensado (2^{17} = 131.072, y hay 100.000 posibles números de 5 cifras, de 00000 a 99999).

5.2. El número de teléfono

Búsqueda binaria. La pregunta deberían ser siempre si el número es o no mayor que el central de las posibilidades restantes. Así, con n preguntas se puede encontrar un número entre 2^n.
Con 20 preguntas, 2^{20} = 1.048.576, no basta para cualquier número de 9 cifras, aunque sí basta si se tiene alguna información que restrinja las posibilidades, como el antiguo código de provincia. Se acierta seguro con 24 preguntas.

5.3. Juego: Adivina la carta

Con tres veces, haciendo tres montones, se separa una carta entre 27; con dos veces en tres montones, debe haber 9 cartas. Se generaliza así:

$$M^n = C$$

Siendo M = n° de montones, n = n° de veces que se repite, C = n° de cartas a utilizar.

5.4. ¿Siempre binarios?: Las bolas

Con una balanza se pueden comparar 3 cantidades: las dos de los platillos y una tercera que queda fuera de ellos. Así, si hay tres bolas, ponemos una en cada platillo y la tercera se queda fuera; si la balanza queda equilibrada, la que pesa menos es la que está fuera.
Siguiendo estrategias análogas a ésta, con "n" pesadas se puede descubrir la bola defectuosa entre un conjunto de, como máximo, 3^n bolas.

5.5. ¿Qué número es?

Siguiendo con el ejemplo del 25, como 25 = 11001, está en las tarjetas A, D y E, puesto que los números de cada tarjeta son:
Como 9 = $1001_{(2}$, hacen falta cuatro tarjetas, aunque con ellas podríamos acertar hasta el 1111, o sea, el 15. Del mismo modo, 128 = 2^7 = $10000000_{(2}$ y necesitamos 8 tarjetas, con las que podríamos acertar hasta el 255. Para optimizar nuestros esfuerzos, el número máximo a acertar debería ser 2^n-1, para lo que necesitaríamos 'n' tarjetas.

Pág. 163

6. ¿PRACTICAMOS UN POCO?

a) b) y c) representan la misma situación y tienen las mismas respuestas: $b^5 - 1$, donde b es la base de numeración.
El resto son preguntas rutinarias.

DESDE AHORA... LA CALCULADORA

Existen, simplificando mucho, dos corrientes de opinión respecto al uso de la calculadora. La primera se opone al mismo argumentando que “atrofia” las capacidades de cálculo mental de los alumnos. Por el contrario, existe otra que ve en ella un instrumento para agilizar el trabajo en el aula. Nuestra opinión está más en sintonía con esta última pero con matizaciones. La calculadora debe ser lo que realmente es: un instrumento; y como tal debe ser tratado: hay que combinarlo con otros (léase cálculo mental, cálculo escrito, hojas de cálculo por ordenador, etc.). Limitarnos a un uso es eso: una limitación. Creemos que un estudiante de Secundaria debe de saber extraer el máximo rendimiento de los recursos tecnológicos a su alcance y la calculadora (entre otros) no debe ser una excepción.

Pág. 164

7. INTRODUCCIÓN

La filosofía de la serie de actividades encabezadas con este nombre viene descrita en el libro del alumno: las actividades están pensadas para investigar utilizando la calculadora, pero escribiendo todo el proceso con detalle para obligarles a reflexionar sobre el trasfondo matemático de cada situación. Y para aprender a no utilizar la calculadora en aquellas situaciones que no lo requieren.
De entrada, se trata de realizar un sencillo cálculo mental y discutir la prioridad de las operaciones en caso de existir opiniones discrepantes. Dicho cálculo evidenciará que hay calculadoras que no respetan esa prioridad, con lo que cada uno ha de conocer bien su calculadora para evitar problemas.
En una calculadora no científica no habrá más remedio que pulsar

$$4\ \boxed{\times}\ 5\ \boxed{+}\ 3\ \boxed{=}$$

si no queremos aún utilizar las teclas de memoria. Pero, ¿y si la operación fuese 3 − 4 x 5? Más complicado

$$4\ \boxed{\times}\ 5\ \boxed{+/-}\ \boxed{+}\ 3\ \boxed{=}$$

7.1 ¿Vale la pena?

Doble finalidad: demostrar que hay veces en que es más sencillo realizar las operaciones mentalmente y practicar cada uno con su propia calculadora hasta conseguir el resultado que se sabe es correcto.

7.2. ¿Cómo se hace?

No todas las calculadoras tienen el mismo comportamiento, lo que hace necesario verificar que sean correctas las siguientes operaciones. Por ejemplo, en algunas calculadoras 4 x 5 Min guardará 5 en memoria, mientras que otras almacenarán 20; en el primer caso, será necesario pulsar = antes de efectuar el almacenamiento en memoria.

Pág. 165

Operación	Mentalmente	Teclas en cualquier calculadora	Si es científica se puede hacer así
3+4x5	23	4 x 5 = + 3 = 4 x 5 Min = 3 + MR	3 + 4 × 5 =
(3+4)x5	35	3 + 4 = × 5 =	(3 + 4) × 5 =
3+4x(5+2)	31	5 + 2 = × 4 + 3 =	3 + 4 × (5 + 2) =
(4–2)x(7–3)	8	7 – 3 = Min 4 – 2 = × MR =	(4 – 2) × (7 – 3) =
6+(2+3)x(7–4)	21	7 – 4 = Min 2 + 3 = × MR = + 6 =	6 + (2 + 3) × 3) (7 – 4) =
[(2+3)x4–2]÷3	6	2 + 3 = × 4 – 2 = ÷ 3 =	((2 + 3) × 4 – 2) ÷ 3 =

7.3, Múltiplos y divisores

Con la excusa del modo constante de la calculadora, de lo que trata es de estudiar la existencia de múltiplos y divisores comunes, y de un mínimo entre los primeros y un máximo entre los segundos, así como el caso especial en que los números son primos entre sí. Cuidado, pues el modo constante no funciona igual en todas las calculadoras.
El apartado c) desvela que mcm(p,q) × mcd(p,q) = p × q

Pág. 166

8. DESCUBRE PROPIEDADES

Aquí tenemos un conjunto de situaciones problemáticas para explorar con la calculadora relacionadas con la equivalencia entre fracción y decimal. Como procedimiento general, en este tipo de actividades,

- Es importante que los alumnos y alumnas escriban los resultados obtenidos tras cada intento realizado, con el fin de poder observar regularidades.
- Respetar el triple modo de trabajo en clase: individual (se puede hacer en casa), pequeño grupo y gran grupo, para tener gran cantidad de observaciones y propuestas que discutir y comparar.

8.1. Dividiendo

Es de esperar que lleguen a la conclusión de que una parte decimal del tipo ‘xxxxxxxx… se obtiene de dividir entre 9.
Por cierto, ¿qué ocurre con ‘99999999…? Puede ser un buen momento para introducir la idea de fracción generatriz y comprobar que 0’9999999999999… = 1 (no aproximadamente, sino igual; no es lo mismo tres millones de 9’s que infinitos).

8.2. Fracciones que crecen

Si se propone como fracción una división de decimales, intentaremos dejar claro que:

- Fracción es cociente de números enteros.
- Un cociente de decimales periódicos o finitos se puede escribir como fracción, pero no es una fracción. Así, 4’14/2 = 414/200; esta última es una fracción, pero no la primera.

8.3. Potencias diferentes

a) Lo más lógico es que den a ‘a’ un valor mayor que 1, con lo que se obtendrán valores crecientes, que tendrán su reflejo en el tipo de gráfica.

b) Pretendemos que se estudien potencias de base entre 0 y 1, que dan lugar a una sucesión decreciente, y que vean oscilar los resultados con las bases negativas. Distinguir el hecho de que el exponente sea par o impar.
c) No podemos dar reglas fijas sobre qué se obtendrá; debemos estar atentos a las distintas opiniones, con el fin de puntualizarlas (pero no formalizarlas en 2º curso)

8.4. La tecla $\boxed{\sqrt{\ }}$

Lo más sorprendente es obtener el mismo resultado tanto si el argumento es mayor, menor o igual a 1. Evidentemente, obtendrán error si ensayan con un número negativo. Nos debemos detener en las interpretaciones que den al hecho de la existencia de un punto fijo, aunque obviamente no podrán dar ninguna explicación "técnica" al hecho.

8.5. Parte decimal

Condición para que sea finito el número de decimales: que el denominador (si la fracción es irreducible) no tenga más factores que 2 ó 5.

Pág. 167

8.6. Períodos

No es nada fácil encontrar una regularidad en las expresiones pedidas. Transcribimos la respuesta de un alumno:

> 1 ÷ 7 = 0'142857142
> 2 ÷ 7 = 0'285714285
> 3 ÷ 7 = 0'428571428
>
> Si te fijas, los decimales de este número están cada vez más cerca de 1, pero al mismo tiempo las cifras no cambian: la primera cifra es cada vez más grande pero utilizando las cifras por orden. Los siguientes resultados serán
>
> 0'5714...
> 0'71428...
> 0'8571...
>
> Lo compruebo y sale. No sé si se entiende. (Jordi Quesada)

Condición para obtener un decimal periódico: que el denominador contenga otros factores aparte de 2 y 5. No es evidente que sea periódico el resultado de una división como 1 ÷ 17 (depende de la cantidad de decimales que tenga en pantalla la calculadora), y suele ser muy instructivo el realizar la división "a mano".

Proceso razonable:

- *¿Qué se ha de cumplir en la división para que el resultado sea periódico?*
- Que se repita el resto.
- *¿Siempre se repetirá el resto al dividir entre 17?*
- Sí, porque sólo puede variar de 0 a 16; si no es cero (en ese caso, la división es exacta y la cantidad de decimales es finita), como máximo pueden salir 16 restos distintos.
- *¿Qué puede ocurrir al dividir dos números enteros?*
- Como el resto siempre es menor que el divisor...

8.7. Dígitos

Fomentamos aquí la estimación de un resultado y el análisis por ensayo y error.

8.8. Cuadrado perfecto

Como $14^{15} = (2 \cdot 7)^{15}$, no puede serlo al no haber una cantidad par de factores iguales. Se puede intentar guiar a los chavales para ver si llegan a descubrir que $\sqrt{a^p} = a^{p/2}$.

8.9. ¿Ahí en medio?

Quedamos a la expectativa de todas las propuestas razonadas, e intentaremos ver si llegan a encontrar algún procedimiento general que sea válido para un par cualquiera de fracciones.

Sabemos que si $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$. ¿Lo llegarán a descubrir?

Si no lo hacen, no consideramos en absoluto útil decírselo.

9. INVESTIGA

9.1. Números seguidos

Además de como introducción a las sucesiones, este problema introduce el cociente de número negativo entre natural, y evidencia cuál debe ser el signo del resultado. Es posible que obtengan el número a sumar por ensayo y error, pero intentaremos explicitar tanto la división como la suma a efectuar. Sería estupendo que llegase a generalizar una mayoría, en el sentido de que el número a sumar entre 'a' y 'b' con 'n' casillas vacías es:

$$\frac{b-a}{n+1}$$

−2	3	1	−1	−3

−7	−2	+3	+8	+13	+5

−0'5	−1	−1'5	−2

−2	−1'5	−1	−0'5	0	+0'5	+0'5

+3	−11	−8	−5	−2	+1

−27	−47/3	−13/3	+7	+34/3

Es probable que se presente algún problema con los redondeos. Un buen momento para aprender el manejo de la tecla de fracción en las calculadoras científicas, así como evidenciar los problemas de las calculadoras no científicas.

9.2. Más y más números

En situaciones como la que aquí se plantea, debemos insistir en que se dé una descripción lo más detallada posible del criterio seguido en cada caso, bien de modo verbal (al alcance de la mayoría), bien algebraico (al alcance de sólo unos pocos).

La descripción aquí propuesta no tiene por qué ser única. Lo importante es la coherencia de la descripción con la continuación de la misma.

$a_{n+1} = a_n \times (-2) \rightarrow 1, -2, 4, -8, 16, -32...$

$a_3 = -(a_1 + a_2)$, $a_4 = a_3 + 1 \rightarrow 5, 6, -11, -10, 21, 22, -43, -42, 85, 86...$

$a_{n+1} = -(|a_n| - 1) \rightarrow 10, -9, 8, -7, 6, -5, 4, -3, 2, -1, 0, +1...$ (más fácil de rellenar que de explicar)

0 , 1 , −2 , 4 , (para provocar una discusión entre diversas propuestas que puedan surgir)

9.3. A cazar el negatrón

Para practicar producto y cociente de enteros, y prestar atención al signo del resultado.

Pág. 168

9.4. La tecla $\boxed{a^b/c}$

Se trabaja con la tecla de fracción de la calculadora, así como con los números fraccionarios, mixtos y equivalencia con la expresión decimal. Algunas indicaciones a tener en cuenta:

- Si pulsamos dos veces la tecla obtenemos la expresión decimal.
- Al pulsar el signo =, se simplifica la fracción que hemos escrito.

9.5. La segunda función

La segunda función de esta tecla convierte un número mixto en fracción.

Pág. 170

10. ¿PRACTICAMOS UN POCO?

10.1. Operaciones

La calculadora permite operar con fracciones. Utilizaremos esta posibilidad para que comprueben por sí mismos sus habilidades operando con fracciones, al comparar operaciones a mano y con la calculadora.

10.2. Investiga un poco más

Potencias de base o exponente negativo.
En el caso de la base negativa, es probable que todos lleguen a estudiar la relación del signo del resultado con que el exponente sea par o impar. Para el exponente negativo, quedamos a la expectativa del trabajo de los más aventajados.

10.3. Sobre potencias

Quedamos a la expectativa de posibles conclusiones.

10.4. Busca la fracción

Se trata de tantear con la calculadora para buscar la fracción generatriz, y no de aprender ningún algoritmo esotérico que no sean capaces de recordar:

$$\frac{123}{100}, \frac{122}{99}, \frac{111}{90}$$

Y para la segunda parte, los modelos son:

$$\frac{9n + 4}{9}, \frac{300n + 133}{300}, \frac{999n + 456}{999}, \frac{1000n + 333}{1000}$$

de los que los ejemplos más sencillos se obtienen para n = 0. No confundir el último caso con un decimal periódico.

10.5. Escribe en la calculadora

Se trata de practicar con el uso de la calculadora (cada cual con la suya, es fundamental) y la prioridad de operaciones al escribir operaciones en una línea:

a) 3 ÷ 4 − (2^3 + 5^0) ÷ 3 × 2 ÷ 7
b) (3^5 + 2^4) ÷ 3