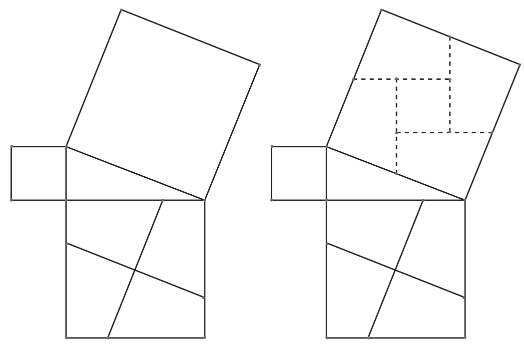
Pág. 206

25.3. Un rompecabezas

Otra ejemplificación del teorema de Pitágoras, con el añadido de varias dificultades:

- ¿Saben utilizar los instrumentos de dibujo para construir un triángulo rectángulo y un cuadrado?
- ¿Cómo se determina el centro del cuadrado?

Aquí está el rompecabezas y su solución.



Pág. 212

26. ¿PRACTICAMOS UN POCO?

Es aquí donde aplicamos el teorema de Pitágoras a casos que no son áreas, aunque podemos razonar como si lo fuesen.

26.1.

No estaría de más hacer una pequeña exposición con los mecanismos diseñados a lo largo del tema.

26.2.

Un tema interesante: ¿cuáles son las unidades?

$m = \sqrt{5} \approx 2'24$ $m = \sqrt{20} \approx 4'47$ $p = 4$ $m = \sqrt{200} \approx 14'14$

Puede (y debería) llamar la atención que el segundo resultado sea doble que el primero, lo que permitiría plantear discusiones interesantes sobre la relación entre los radicales.

26.3.

a) Se trata de comprobar cuándo se cumple que la suma de dos áreas da la tercera o no: sólo en el segundo.
b) Si es acutángulo da mayor y si es obtusángulo, menor

26.4.

Sí se cumple; a la vez, recordamos cómo calcular el área de un círculo. Es difícil comprobar con valores literales, luego podemos pedir un caso concreto, como aquél en que los lados son 3, 4 y 5 cm.

26.5.

Esto se complica; ahora es la diagonal de un ortoedro, que mide 3'354 m. No cabe el listón.

26.6.

Cuadrado: $d^2 = 5^2 + 5^2$; $d^2 = 50$; $d = \sqrt{50} \approx 7'07$ u

Hexágono: $3^2 = a^2 + 1'5^2$; $9 = a^2 + 2'25$; $a^2 = 6'75$; $a= \sqrt{6'75} \approx 2'6$ u

Trapecio isósceles: $5^2 = a^2 + 1^2$; $25 = a^2 + 1$; $a^2 = 24$; $a = \sqrt{24} \approx 4'9$ u

7_ LA TERCERA DIMENSIÓN

Un aprendizaje es más significativo cuanto más próximo a nosotros esté el objeto de estudio y por ello la filosofía de todo el proyecto editorial es el trabajo a partir de la resolución de problemas. En el caso de la geometría todavía es más evidente este principio, y ya en primer curso el primer tema de geometría era **Aprende manipulando**; del mismo modo, entraremos en la tercera dimensión manipulando objetos.
Material manipulable aconsejable para ello:

- Policubos. Cubos engarzables de plástico.
- Para crear estructuras: palillos y bolitas de plastilina para unirlos, o bien pajitas de refresco y limpiapipas para unirlas, o material específico similar.
- Constructor o polydron (piezas poligonales engarzables para construir poliedros), o bien troquelados de cartulina con polígonos regulares, para poder engarzar con gomas elásticas.
- Cuerpos de plástico transparente que poder rellenar con arena.

También recomendamos un programa gratuito que puede ayudar en el trabajo con poliedros y sus distintas representaciones: se llama Poly, es de Pedagoguery Software, y se puede descargar de www.peda.com

La estructura del tema es la siguiente:

- Policubos, prismas y pirámides. Actividades encaminadas a utilizar la terminología adecuada y a deducir cómo calcular el área de las caras y el volumen de dichos sólidos.
- Más poliedros. Cuerpos de revolución. Aquí comenzaremos por estudiar los cuerpos cuyas caras están formadas por polígonos regulares (deltaedros, poliedros regulares y semirregulares) y veremos cómo describirlos mediante el símbolo de Schläffi, así como la fórmula de Euler.
- Del espacio al plano: distintas representaciones planas de objetos.

No creemos de utilidad hacer memorizar muchas fórmulas que en realidad son iguales. Así, el volumen de cualquier cuerpo con secciones paralelas a las bases iguales se calcula multiplicando el **área de la base por la altura**, y es en lo que insistiremos, reemplazando dicha expresión única a las conocidas:

$$a \cdot b \cdot c \qquad a^2 \cdot h \qquad a^3 \qquad \pi \cdot r^2 \cdot h$$

Comenzamos proponiendo una actividad inicial cuyo objetivo fundamental es desarrollar la capacidad de observar las formas de los seres y objetos existentes en la naturaleza, así como la capacidad de describirlos utilizando una terminología correcta. No nos debemos ceñir a las fotografías proporcionadas, sino que debemos ir un poco más lejos y pedir que observen por sí mismos aquello que les rodea.
No sólo se debe tratar de dar nombres, sino también de realizar descripciones relacionadas con propiedades geométricas, como la existencia de planos de simetría.

DESDE AHORA...

POLICUBOS. PRISMAS. PIRÁMIDES. ÁREA Y VOLUMEN

Estas actividades conducen de la observación de formas en la naturaleza a las figuras construidas con cubos, y de ellas a prismas y pirámides. En todos estos cuerpos, se estudia la terminología y las longitudes de aristas, área de caras y volumen, así como algunas relaciones entre estos términos.

Pág. 215

1. TODO CON CUBOS

Se pretende un desarrollo similar al de primer curso, pero en el espacio. Algunas indicaciones globales:

- Es muy recomendable disponer de cubos engarzables, fáciles de conseguir en cualquier tienda de material didáctico.
- Los dibujos se ven facilitados con el uso de tramas isométricas, que se pueden fotocopiar del material manipulable.

1.1. Policubos

En esta actividad se pretende distinguir figuras cóncavas y convexas, y decidir cuándo dos policubos son o no iguales: el identificar en el espacio figuras congruentes mediante una rotación axial no es tarea sencilla para los alumnos de esta edad, pero es una de las habilidades que pretendemos desarrollar: la visión espacial.

En el último apartado se pretende llegar a la conclusión de que igual volumen no implica igual área, y la existencia de figuras "económicas".

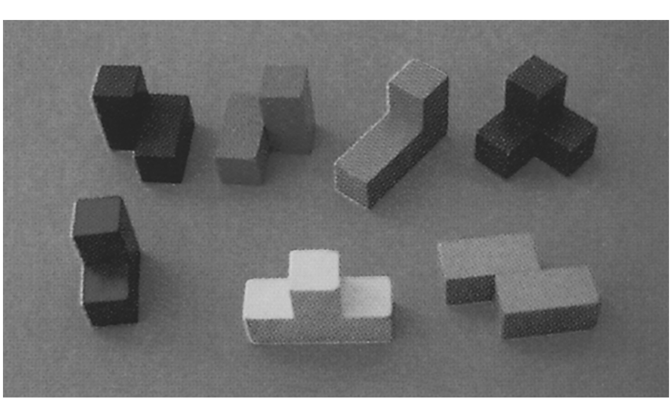
Hay 2 tricubos y 8 tetracubos.

Pág. 216

1.2. Cubo Soma

El total de cubitos entre tricubos y tetracubos distintos es 38, pero como hay un tricubo y dos tetracubos convexos, el total de cubitos es de 27. Ello sugiere la posibilidad de construir un cubo de arista 3 unidades. El cubo Soma fue diseñado por el danés Piet Hein, y admite 240 soluciones distintas, con lo que no es muy difícil encontrar varias de ellas, además de poderse construir otras muchas figuras.

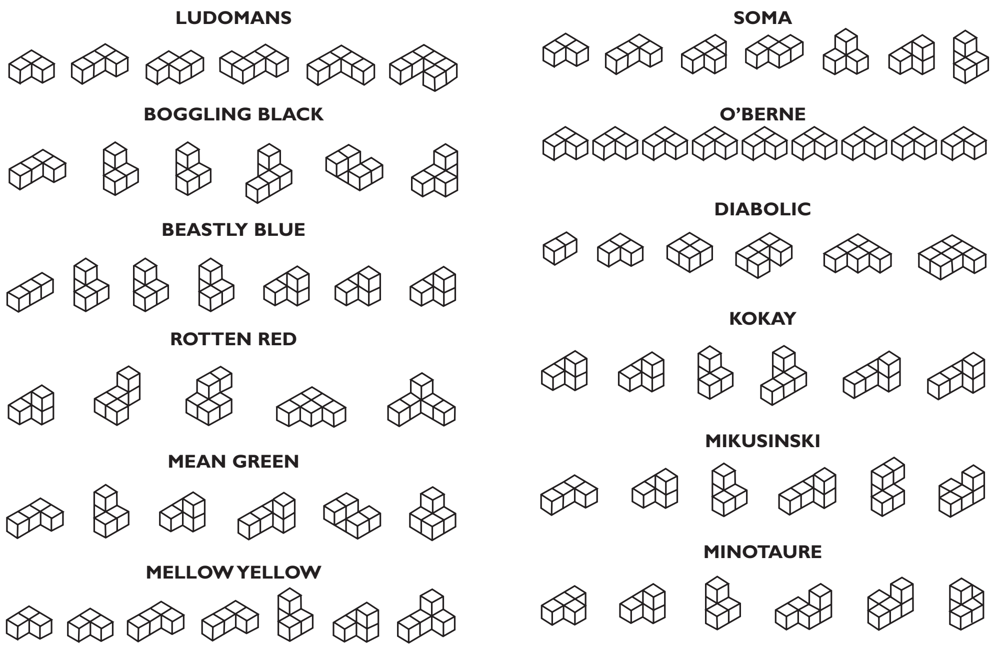
Además de dar con una solución, debemos intentar comparar y verbalizar las distintas soluciones obtenidas.



1.3. Más rompecabezas

El comienzo debe ser saber cuántos cubitos necesitamos para construir el rompecabezas, aunque aquí vamos a ver descomposiciones del cubo 3 x 3 x 3.

De las descomposiciones que se muestra (del artículo de Bartolomé Sintes “Descomposicions del cub”, publicado en la revista L’Aula de Matemàtiques, setembre 1997), el Minotauro tiene una sola solución.

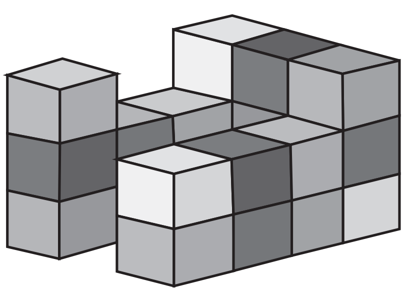


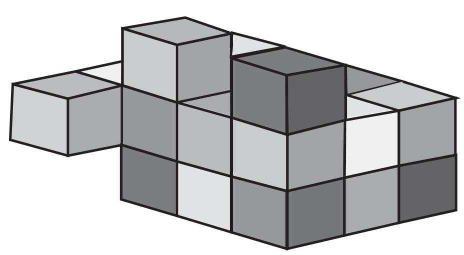
1.4. Cuenta cubos

Puede haber alguna discusión, ya que hay algunas posiciones totalmente escondidas en que no se sabe si hay o no cubos.

- La primera figura puede tener de 17 a 24 cubos, sin contar los que pueden haber por detrás.
- La segunda, de 16 a 26.

Se podría pedir que cada alumna o alumno dibuje en un papel cuadriculado las vistas necesarias para describir totalmente su figura.





1.5. Volumen y área en policubos

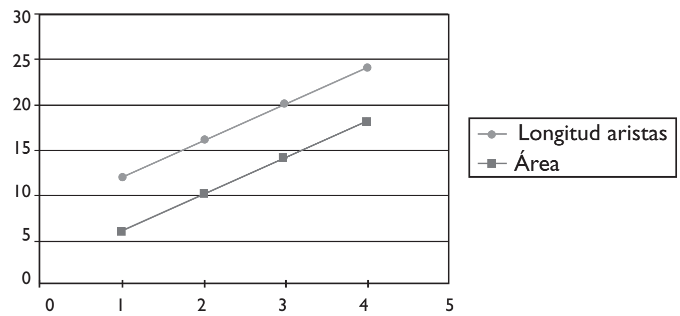
Aquí intentamos que asimilen los conceptos de área y volumen contando cubos y cuadrados unidad en figuras, así como que se pueden presentar figuras con distintas áreas para el mismo volumen, y la existencia de **figuras energéticas**. Recordar el proceso seguido en primer curso al estudiar áreas y perímetros.

Tetracubos: 18 o 16 unidades cuadradas. Para 8 cubos de 34 a 24

1.6. Una columna de cubos

Seguimos con el mismo tipo de estrategia descrito en la actividad anterior. Además, incidimos en procedimientos como la utilización de tablas para recoger información y gráficas para visualizarla. Si, además, tenemos alumnado con unas posibilidades mayores que la media, se puede intentar expresar las relaciones mediante expresiones algebraicas, lo que supone un nivel de abstracción mucho más elevado.

Número de cubos	1	2	3	4	...	n
Longitud aristas	12	16	20	24	...	$4 \cdot n + 8$
Área	6	10	14	18	...	$4 \cdot n + 2$



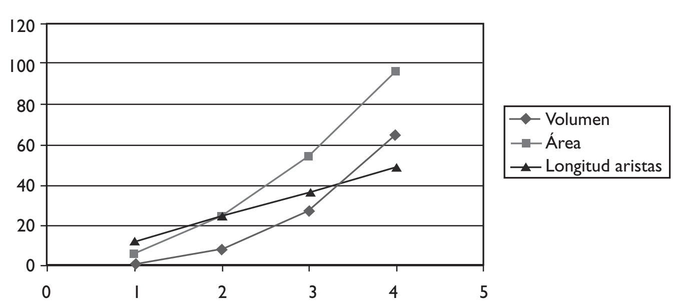
Pág. 217

1.7. Policubos cúbicos

Utilizar cubitos engarzables de plástico suele ser necesario para gran parte de nuestros alumnos y alumnas. Es un material didáctico que no es caro y resulta de gran utilidad para todos aquellos que tienen dificultades para imaginar estructuras tridimensionales.

- ¿Será siempre mayor el área? Posible estudio de las diferencias.
- Comparación de crecimientos.
- Para los más avanzados, relación con la fórmula obtenida.
- Respuestas en series: 2, 3, 7 a; 4, 9, 49, a, b; 4a, 12, a, b, c.

Arista	1	2	3	4	...	n
Volumen	1	8	27	64	...	n^3
Área	6	24	54	96	...	$6 \cdot n^2$
Longitud aristas	12	24	36	48	...	$12 \cdot n$



2. YA NO SON SÓLO CUBOS

2.1. Prismas I

- Cálculo del volumen de un ortoedro como generalización de “contar cubitos”. Debemos determinar en qué unidades expresamos los resultados: si no conocemos las unidades de las aristas, recomendamos utilizar u^3 o u. de v.
- Las respuestas, agrupadas en series, son: 2, 3, 7, a; 4, 9, 21, $a \cdot b$; 8, 84, $a \cdot b \cdot c$.

Pág. 218

2.2. Prismas II

Segundo paso en la generalización: cualquier base y figuras oblicuas. No se debe pretender una acumulación de fórmulas, sino reducirlas todas a “área de la base por altura”, y ver la similitud con el cálculo de áreas de paralelogramos.

2.3. Pirámides y prismas I

Estudio de regularidades sencillo. Tabla y gráfica asociadas a expresión algebraica.
Aquí es importante HACER, no imaginar. Para los prismas no hay dificultad, pero la “pirámide” de base hexagonal es un hexágono con sus radios, y a partir de ahí la figura no se cierra. ¿Por qué?

Lados base	3	4	5	6	...	n
Palillos prisma	9	12	15	18	...	$3 \cdot n$
Palillos pirámide	6	8	10	12		$2 \cdot n$

2.4. Pirámides y Prismas II

Pueden ser dos cuerpos transparentes (situación ideal) con un orificio que permita llenarlos de agua o arena, o bien se pueden construir con cartulina a partir del desarrollo plano, lo que pone en juego otra serie de habilidades; en este caso, se propone realizar esta actividad tras las dedicadas a los desarrollos planos.

Pág. 222

3. ¿PRACTICAMOS UN POCO?

3.1. ¿cuál es el volumen? ¿Y el área?

Áreas: 29, 24, 22, 26, 22, 30, 20, 24, 28 u^2
Volúmenes: 8, 7, 5, 7, 6, 9, 5, 6, 8 u^3

Pág. 223

3.2. Calcula el volumen

Volúmenes: 40, 40, 20, 16, 16, 15 cm^3

3.3.

210’748 cm^3 que equivale a 210’748 ml.

3.4.

a) El área de la base es 3 cm^2, luego el volumen es 45 cm^3.
b) El prisma oblicuo tiene el mismo volumen.
c) Mientras la base y altura sean iguales, el área de la base no cambia, y tampoco el volumen.

3.5.

El volumen de la pirámide es un tercio del volumen del prisma de iguales características, luego la respuesta es 15 cm^3 en todos los casos.

3.6.

Se puede considerar la figura como un prisma de base un trapecio, o bien como un ortoedro y un prisma de base triangular, conceptualmente más sencillo; incluso ésta última figura es medio ortoedro. Es interesante trabajar la descomposición de figuras en otras más sencillas.
El volumen es 100 m^3 y caben 100.000 litros de agua.

3.7. Dos brics más

3.7.1. Averigua una medida

$8 \cdot 8 \cdot a$ cm^3 tiene que ser 1 dm^3 = 1000 cm^3, luego $a = 1000 \div 64 = 15'625$ cm

3.7.2. Investiva

Se trata de una investigación a proponer a los más aventajados.

Si llamamos 'a' a la altura y 'b' al lado desconocido de la base, como el volumen debe ser de 1000 cm^3, se cumplirá que:

$$8 \cdot a \cdot b = 1000 \quad a = 1000 \div (8 \cdot b)$$

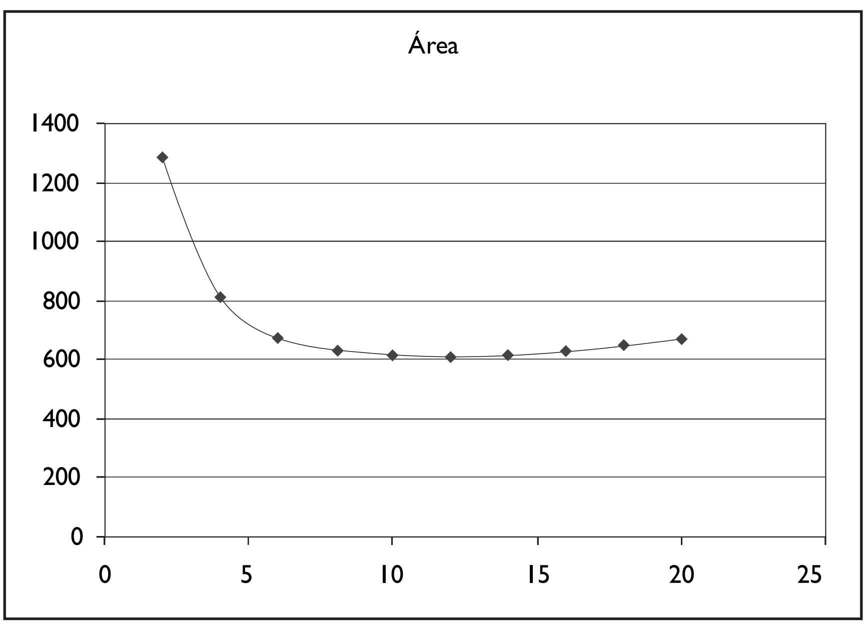
Por otra parte, el área del cartón (considerando el recipiente como un prisma recto) es:

$$A = 2 \cdot 8 \cdot b + 2 \cdot 8 \cdot a + 2 \cdot a \cdot b$$

Una tabla de valores es:

b	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
a	62,5	31,25	20,83333	15,625	12,5	10,41667	8,928571	7,8125	6,944444	6,25
Área	1282	814	679,3333	628	610	608,6667	616,8571	631	649,1111	670

Y podemos sugerir hacer una gráfica base – área; introduciremos de esta manera la potencia de las matemáticas para la optimización



DESDE AHORA...

MÁS POLIEDROS. CUERPOS DE REVOLUCIÓN

Segunda fase de trabajo. Material a utilizar: polígonos engarzables, bien de plástico como el Constructor o Polydron o bien troquelados y gomas elásticas, para trabajar los siguientes contenidos:

- Poliedro. Poliedros regulares y semirregulares.
- Elementos de un poliedro: caras, aristas y vértices. Fórmula de Euler.
- El volumen de los poliedros.
- El volumen del cilindro y el cono.
- El volumen de la esfera y la superficie esférica.

Pág. 224

4. POLIEDROS

Un excelente material auxiliar, **además** (no en vez) del material manipulable es el programa de ordenador Poly Pro, de Pedagoguery Software, del que se puede descargar la versión actualizada en la dirección www.peda.com

Se trata de un programa shareware, con traducción al castellano, que permite visualizar, en la versión 1.09, un total de 184 poliedros convexos bajo formatos como el tridimensional, desarrollo plano o diagrama de Schlegel, y permitiendo alternar entre ellos y efectuar rotaciones; también permite imprimir el desarrollo plano para luego recortar y construir el poliedro.

En la ayuda de dicho programa aparece la siguiente clasificación de los poliedros convexos:

Sólidos Platónicos

Los Poliedros Platónicos se construyen utilizando (múltiples copias de) un único polígono regular; todos los vértices tienen el mismo número de caras alrededor. Un polígono es regular cuando todos sus lados tienen la misma longitud y todos sus ángulos interiores son iguales. Tanto el triángulo equilátero como el cuadrado son polígonos regulares.

Sólidos de Arquímedes

Los sólidos Arquimedianos fueron históricamente definidos por Arquímedes, aunque hemos perdido sus escritos. Todos los sólidos de Arquímedes son poliedros uniformes con caras regulares. Un poliedro con caras poligonales regulares es uniforme cuando existen operaciones de simetría que colocan cualquier vértice sobre cualquier otro vértice y no sobre otro punto del espacio. Por ejemplo el cubo tiene las operaciones de simetría que consisten en la rotación de 90º alrededor de un eje y la reflexión en un plano perpendicular ese eje.

La heurística común para los sólidos Arquimedianos es que la sucesión de caras que rodean cada vértice es siempre la misma. Aunque todos los sólidos Arquimedianos tienen esta propiedad también la cumple la girobicupola cuadrangular elongada (sólido de Johnson 37) que no es de Arquímedes.

Prismas y Antiprismas

Después de los de Arquímedes, los únicos poliedros uniformes convexos y de caras regulares que quedan son los prismas y los Antiprismas. Fue analizado por Johannes Kepler quien también nos dio los nombres que suelen utilizarse para los sólidos Arquimedianos.

Sólidos de Johnson

Después de considerar las tres categorías precedentes nos queda sólo un número limitado de poliedros convexos con caras regulares. La enumeración de esos poliedros fue realizada por Norman W Jonson.

Deltaedros
Los deltaedros son poliedros cuyas caras son todas triángulos equiláteros.

Sólidos de Catalan
Los sólidos de Catalan son duales de los de Arquímedes. El dual de un poliedro se construye reemplazando cada cara por un vértice y cada vértice por una cara. Por ejemplo el dual de un icosaedro es el dodecaedro y el dual del dodecaedro es el icosaedro.

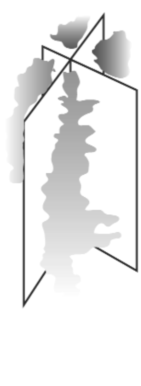
Dipirámides y Deltoedros
Las dipirámides son duales de los prismas y los deltoedros son duales de los antiprismas.

Esferas y domos geodésicos
El primer domo geodésico fue diseñado por Walter Bauersfeld y construido en 1922. Varias décadas después Duckminster Fuller popularizó y extendió las ideas subyacentes en las construcciones geodésicas.
Para construir una esfera geodésica primero se debe elegir un poliedro convexo que servirá de marco para la construcción. El paso siguiente es asegurarse de que todas las caras del poliedro sean triangulares: cada cara no triangular se triangula conectando sus vértices a un nuevo vértice puesto en el centro de la cara. De aquí puede obtener una esfera geodésica de frecuencia 1 si hace que todos los vértices sean equidistantes del centro del poliedro alejándolos o acercándolos al centro.
Pueden construirse esferas geodésicas de mayor frecuencia reemplazando cada cara con una malla regular de triángulos y asegurándose de que todos los vértices nuevos sean equidistantes del centro. Las geodésicas de frecuencia 2 bisecan cada arista de la geodésica asociada de frecuencia 1 usando 4 triángulos por cada malla; las geodésicas de frecuencia 3 trisecan cada arista de la geodésica asociada de frecuencia 1 usando 9 triángulos por cada malla.

4.1. Ángulos poliedros

Por medio de la utilización de material manipulable estudiamos los ángulos diedros, donde podemos incidir en la medida, y los ángulos poliedros.
Siempre es posible crear un ángulo diedro con polígonos unidos por una arista, pero para formar un ángulo poliedro convexo, los tres ángulos planos que concurren en un vértice han sumar menos de 360°. No hay restricciones para ángulos cóncavos. Pero estas ideas son para nosotros; los alumnos y alumnas de segundo curso difícilmente llegarán a ello, al menos antes de manipular las figuras.
Veamos algunas consideraciones sobre ángulos convexos. Podemos considerar distintos casos: utilizar polígonos regulares iguales, polígonos regulares distintos, polígonos no regulares. En cualquier caso, el mínimo número de polígonos es tres.

- Con polígonos regulares iguales, se puede formar un ángulo poliedro con triángulos (3, 4 o 5), cuadrados (3) o pentágonos (3).
- Con distintos polígonos regulares: triángulos y cuadrados (1+2, 1+3, 2+1, 2+2, 3+1, 4+1), triángulos y pentágonos (1+2, 2+2), triángulos y hexágonos (1+2), cuadrados y pentágonos (1+2, 2+1), cuadrados y hexágonos (1+2, 2+1), pentágonos y hexágonos (1+2, 2+1).

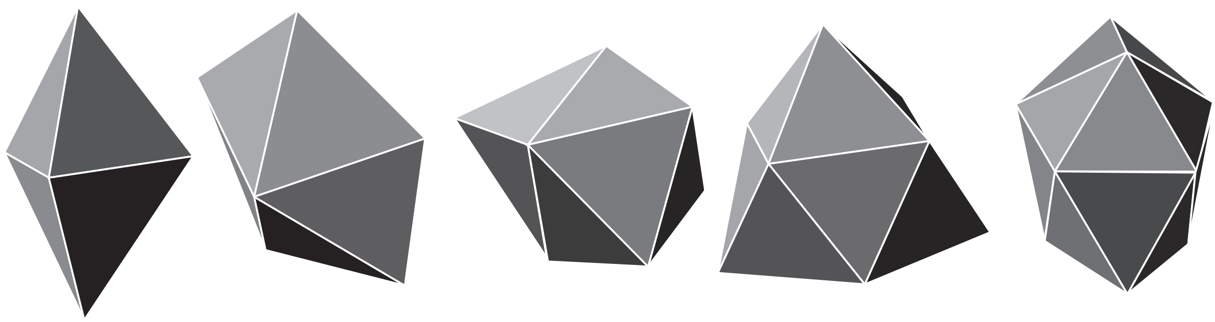


Estudiar otros casos será realmente difícil si no se dispone del material adecuado; aún en el supuesto de haber llegado a las consideraciones sobre la suma de ángulos, ¿cuánto mide el ángulo interior de un octógono? Puede ser una línea de investigación para los más avanzados, y puede servir de orientación estudiar los ángulos centrales y fijarse en la descomposición de un polígono regular de ‘n’ lados en ‘n’ triángulos isósceles. Cada ángulo interior mide 180 − 360/n = (180n − 360)/n grados.

Pág. 225

4.2. Deltaedros

a) y b) No se puede con tres piezas, el menor número posible de caras es 4 (tetraedro).
c) No hay límite al número de caras si el poliedro es estrellado.
d) Una posible clasificación es cóncavos y convexos, otra es regulares y no regulares, otra estrellados y no estrellados.
g) y f) Se puede obtener tres poliedros regulares convexos: el tetraedro, octaedro e icosaedro, además de 5 deltaedros convexos.



Caras	Vértices	Aristas	Vértices orden 3	Vértices orden 4	Vértices orden 3
4	4	6	4	0	0
6	5	9	2	3	0
8	6	12	0	6	0
10	7	15	0	5	2
12	8	18	0	4	4
14	9	21	0	3	6
16	10	24	0	2	8
20	12	30	0	0	12

Una lectura atenta de la tabla resulta de lo más instructiva: los poliedros regulares tienen vértices de igual configuración, además de otras regularidades. Por cierto, se diría que falta una figura… ¿por qué no está?

4.3. Con piezas iguales

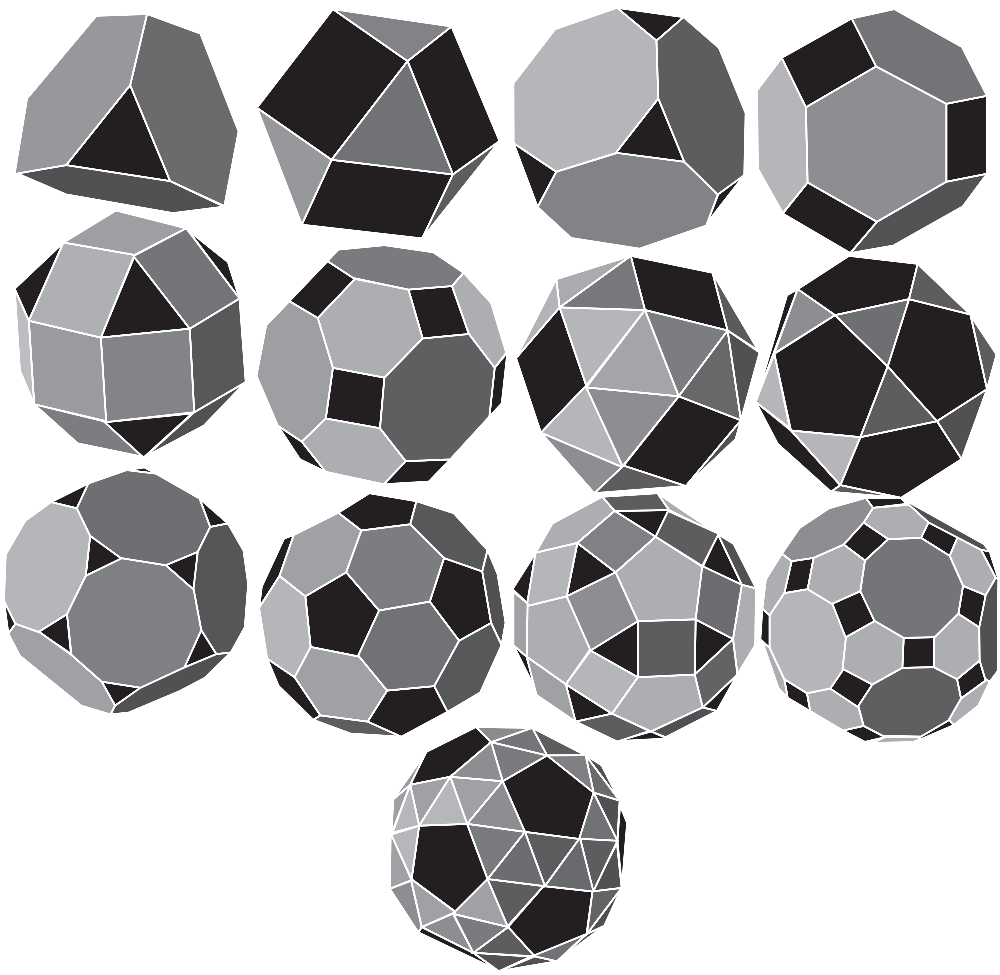
Tratamos de llegar a la idea de poliedro regular convexo, a través de una serie de cuestiones que se plantean progresivamente:

- ¿Qué es poliedro regular? Normalmente, se comenzará con la idea de “caras regulares iguales”; observar cómo es la figura que se construye con 6 triángulos equiláteros (la dipirámide triangular) para que se llegue a enunciar la condición de igualdad entre ángulos diedros.
- ¿Con qué piezas se pueden construir? ¿Por qué razón? Trabajando con cada polígono regular, se puede investigar con cuántos polígonos se puede construir un poliedro; es importante realizar un estudio sistemático que permita barrer todas las posibilidades.
- ¿Cuántos hay y por qué? No se tardará mucho en observar que a cada vértice deben concurrir los mismos polígonos, luego basta con estudiar qué puede ocurrir en cada vértice, cuántos polígonos pueden confluir en un vértice para que se pueda formar un ángulo poliedro.
- Sólidos platónicos.

4.4. Con dos tipos de piezas

- Poliedros semirregulares.

Es de esperar que, al manipular objetos, haya surgido la idea de montar sobre el plano y luego cerrar la figura, con lo que tenemos la idea de desarrollo plano de figuras espaciales. Si no surge de modo espontáneo, podemos intervenir para provocarlo.
Aquí tenemos los 13 poliedros semirregulares.



Pág. 226

5. RELACIONES NUMÉRICAS

5.1. Fórmula de Euler

Relación que se verifica en los cinco sólidos platónicos: caras más vértices da el mismo resultado que aristas más 2. Se verifica en todos los poliedros convexos, por tanto también se verifica en los poliedros semirregulares, y en muchos otros poliedros; en concreto, es válida en todos los poliedros topológicamente equivalentes a una esfera, es decir en los "poliedros sin agujeros".
Por cierto, que como resulta farragoso contar cada vez caras, aristas y vértices, podemos incitar a nuestras alumnas y alumnos a que busquen alguna manera de abreviar el trabajo: si contamos las caras, por ejemplo 8 para el octaedro, como cada una es un triángulo, hay 24 lados, y como una arista se obtiene de juntar dos lados, hay 12 aristas. Si tenemos poliedros regulares o semirregulares, la configuración de cada vértice es la misma; en un octaedro llegan 4 aristas a cada vértice, pero una arista sirve para 2 vértices, o sea, 12 (aristas) x 2 ÷ 4 = 6 vértices.
Aquí tenemos un poliedro que no verifica la fórmula de Euler y que se puede construir fácilmente con el material de que se dispone; tiene 15 caras (por abajo es igual que por arriba), 11 vértices (el del centro es común por arriba y por abajo) y 25 aristas.

En la dirección de Internet http://www.ual.es/~jlrodri/Topgen2/introduccion.html encontramos la siguiente información:

La fórmula de Euler para poliedros: v – a + c = 2

Esta famosa fórmula descubierta por Euler en 1750, relaciona el número de vértices, aristas y caras de un poliedro convexo (en particular, homeomorfo a una esfera). Es curioso que verdaderos expertos en poliedros como Arquímedes o Descartes no cayeran en la cuenta de esta relación, quizás fue porque se trataba de una fórmula en la que no intervenía ninguna magnitud de medida.

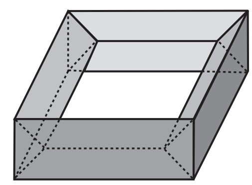
Ejercicio: Demostrar que los únicos poliedros regulares son los cuerpos platónicos: tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro. Un poliedro regular es aquél en el que cada cara tiene el mismo número de aristas, y en cada vértice concurren el mismo número de aristas.

En la fórmula anterior Euler supone que los poliedros son convexos. En general, para poliedros no convexos se tiene que

$$v - a + c = 2 - 2g,$$

donde g denota el número de agujeros del poliedro. Descubierta en 1813 por Anoine-Jean Lhuilier (1750-1840), es el primer invariante topológico que se conoce. Se suele denotar por $\chi = v - a + c$, se le llama característica de Euler (ver superficies orientables).

Aquí tenemos un poliedro cóncavo "con un agujero":



5.2. Símbolo de Schläfi

Además de estudio de regularidades, en estas actividades se trabaja con la terminología: caras, aristas (no lados), vértices.

Es un modo sencillo de describir por completo los poliedros regulares y semirregulares, que son los que tienen vértices congruentes, pues nos dice qué polígonos confluyen en cada vértice y en qué orden.

La siguiente tabla muestra todos los datos sobre poliedros regulares y semirregulares. La segunda columna expresa cuántos polígonos y de qué tipo (entre paréntesis) lo forman. Por ejemplo, 4(3) 4(6) significa 4 triángulos y 4 hexágonos.

Poliedro	Formado por	C	A	V	Símbolo Schläfi
Tetraedro	4(3)	4	6	4	3^3
Cubo	6(4)	6	12	8	4^3
Octaedro	8(3)	8	12	6	3^4
Dodecaedro	12(5)	12	30	20	5^3
Icosaedro	20(3)	20	30	12	3^5
Tetraedro truncado	4(3) 4(6)	8	18	12	$3 \cdot 6^2$
Cuboctaedro	8(3) 6(4)	14	24	12	$3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4$
Cubo truncado	8(3) 6(8)	14	36	24	$3 \cdot 8^2$
Dodecaedro truncado	20(3) 12(10)	32	90	60	$3 \cdot 10^2$
Icosaedro truncado	12(5) 20(6)	32	90	60	$5 \cdot 6^2$

Poliedro	Formado por	C	A	V	Símbolo Schläfi
Rombicuboctaedro	8(3) 18(4)	26	48	24	$3 \cdot 4^3$
Octaedro truncado	6(4) 8(6)	14	36	24	$4 \cdot 6^2$
Icosidodecaedro	20(3) 12(5)	32	60	30	$3 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 5$
Cuboctaedro rombitruncado	12(4) 8(6) 6(8)	26	72	48	$4 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 8$
Cuboctaedro achatado	32(3) 6(4)	38	60	24	$3^4 \cdot 4$
Rombicosidodecaedro	20(3) 30(4) 12(5)	62	120	60	$4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$
Icosidodecaedro rombitruncado	30(4) 20(6) 12(10)	62	180	120	$4 \cdot 6 \cdot 10$
Icosidodecaedro achatado	80(3) 12(5)	92	150	60	$3^4 \cdot 5$

Pág. 227

6. ROMPECABEZAS DEL CUBO

Numeramos de izquierda a derecha y de arriba abajo.

a) Se emparejan así: 1-4; 2-5; 3-10; 7-8; 9-11. De las tres piezas restantes, habrá discusión sobre la posibilidad de emparejar o no 6 y 12; sobra la 13.
b) La pieza de la derecha es la 13. Le emparejan 1-9; 2-4; 3-5; 7-10; 6-13; 11-12 y sobra la 8.
c) Sobra la penúltima pieza.

Pág. 227

7. CUERPOS REDONDOS

7.1. Haciendo girar

Aparecen un cilindro, un tubo, un cono, un tronco de cono con agujero cónico invertido, troncos de cono y más figuras que conviene hacer que describan con la mayor precisión posible.
Falta la esfera, que se genera cuando una circunferencia gira alrededor de su diámetro.

7.2. Haciendo rodar un papel

Aquí no se trata de realizar cálculos, sino razonar con los conocimientos disponibles y comprobar de forma práctica. Como en toda investigación, debemos pedir la redacción de hipótesis previas, comprobación experimental y confrontación de resultados con hipótesis iniciales.
Si tenemos un papel rectangular de dimensiones a b, con a<b, comprobamos fácilmente que los volúmenes son:

$$V_1 = b^2 \times a/(4\pi) \text{ y } V_2 = a^2 \times b/(4\pi)$$

Luego es mayor V_1. El razonamiento análogo para los prismas lleva a las expresiones:

$$V_1 = a^2 \times b/16 \text{ y } V_2 = a \times b^2/16$$

Pág. 232

8. ¿PRACTICAMOS UN POCO?

8.1. Calculamos volúmenes

502’4, 502’4, 401’92, 167’47, 167’47 y 133’97, todo ello en cm^3

8.2.

Es un ejercicio complicado, ya que deben calcular tanto la altura de una cara como la del octaedro, aplicando el teorema de Pitágoras. Puede servir para discutir planteamientos diversos, pero no como simple ejercicio rutinario.

Se descompone el octaedro en dos pirámides de base cuadrada.
Base: cuadrado de lado 4 cm; área 16 cm^2.
Altura: cae sobre el centro de la base, en que la diagonal es $\sqrt{32}$; se forma un triángulo rectángulo en que un cateto es media diagonal, y mide $\sqrt{32}/2$ cm, otro cateto es la altura de la pirámide y la hipotenusa es una arista. Luego la altura mide $\sqrt{8}$ cm.
El volumen es $(1/3) \cdot 16 \sqrt{8} \approx 15'08$ cm^3. Luego el octaedro tiene un volumen de 30'2 cm^3.
El caso del tetraedro es todavía mucho más difícil conceptualmente, por la consideración sobre el baricentro. Veamos.
Base: triángulo de base 4 cm y altura $\sqrt{12}$ cm; área $(1/2) \cdot 4 \sqrt{12} \approx 6'93$ cm^2.
La altura cae sobre el baricentro de la base, por lo que está a 2/3 del vértice del triángulo de la base; se forma así un triángulo rectángulo de hipotenusa la arista (4 cm) y un cateto $(2/3) \cdot \sqrt{12}$, siendo el otro cateto la altura del tetraedro ($\sqrt{32/3} \approx 3'3$ cm).
El volumen es, aproximadamente, $(1/3)\ 13'9 \cdot 3'3 \approx 7'6$ cm^3.

8.3.
$16 \cdot \pi \approx 50'3$ cm^3 es el volumen, luego la capacidad es de 50'3 ml.

8.4.
Suponemos que el depósito es esférico ante la ausencia de otros datos.
El volumen obtenido es:
3'55 → 187'4 m^3
3'56 → 189 m^3
La diferencia, 1'6 m^3 supone 1.600 litros, o sea 114 bombonas de butano.
El ejercicio ilustra los problemas con el redondeo cuando las cantidades son muy grandes. También encontraremos diferencias dependiendo del número de decimales que se coja para π.

8.5.
Tomando un promedio de las medidas, la superficie a pintar es de 159 m^2, a 20€ el metro cuadrado cuesta 3.180€.

8.6.
Tenemos un cilindro y un cono. El volumen es $8\pi + 2\pi = 10\pi \approx 31'4$ m^3.

8.7. Haciendo conos (investigación)
La longitud de la circunferencia de la base será $20\pi\ (360 - a) \div 360$, donde a es el ángulo de papel recortado, luego:

a	$r = 10 \times (360-a) \div 360$	$a = \sqrt{100 - r^2}$	$V = \pi r^2 a \div 3$
90°	7'5	6,614378	1168,265
180°	5	8,660254	679,8299
270°	2'5	9,682458	190,0182
315°	1'25	9,921567	48,67769

DESDE AHORA... DEL ESPACIO AL PLANO

Es así como podríamos llamar este último subapartado dentro del tema. En él abordaremos el estudio de distintos métodos que nos permiten **representar en el plano figuras espaciales**. Se proponen actividades en los dos sentidos: reconocer la figura tridimensional a partir de alguna representación plana o viceversa.
Los contenidos son:

- Dibujos en perspectiva.
- Proyecciones, como planta, alzado y perfil.
- Desarrollos planos.
- Diagramas de Schlegel.
- Secciones planas. Curvas de nivel.
- Posiciones relativas de rectas y planos.

Como trabajo final en grupos se propone una serie de pequeñas investigaciones, que relacionan entre sí los conceptos estudiados: así, tendremos ocasión de trabajar con grafos, el mapa de los cuatro colores, la construcción de una maqueta o la confección de un itinerario matemático por las formas geométricas de la ciudad.

Pág. 233

9. MIRAR

Conjunto de actividades destinadas a desarrollar la visión espacial.

9.1. Líneas escondidas

Se debe dibujar cada figura en una trama isométrica. Ello añade, en un principio, una nueva dificultad, ya que los cuerpos cambian de posición.

Pág. 234

9.2. ¿Cuál es?

Como las figuras no están numeradas ni tienen ninguna referencia, insistiremos en que se lea en voz alta la respuesta, para ver cómo son capaces de describirlas.
También es importante discutir por qué proponen cada solución, con el fin de verbalizar los criterios de orientación espacial.
En cada caso, la figura que corresponde es la 1, 5, 5, 1 y 5 (considerando numeradas las figuras de izquierda a derecha).

9.3. Vistas de jarras

Ahora la situación de las figuras es bidimensional. Con nuestro empeño en que describan la posición de las figuras estaremos introduciendo la idea de coordenadas.
Hay seis modelos de jarra en los dibujos; numeradas del 1 al 6, las imágenes de los dibujos, corresponden a los modelos:

1 2 3 3 4 5 6
4 4 6 5 6 1 5 3

Pág. 235

9.4. ¿Es posible?

Trabajamos aquí las deformaciones causadas en las figuras por las representaciones planas en perspectiva. Para saber más sobre el tema, aconsejamos leer “L’aventure des figures impossibles”, de Bruno Ernst.

9.4.1. El triángulo de Penrose

Las fotos no están trucadas, sólo tomadas desde el lugar adecuado.

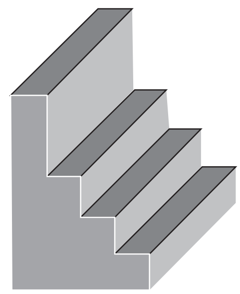
9.4.2. Escher

Este gran artista holandés utilizó diversas técnicas visuales para crear los efectos de los que podemos disfrutar en sus obras, como escaleras infinitas, agua que siempre cae o figuras cóncavas y convexas. Más sobre el tema en “Le miroir magique” de M. C. Escher, por Bruno Ernst, o en L’oeuvre graphique de M. C. Escher.

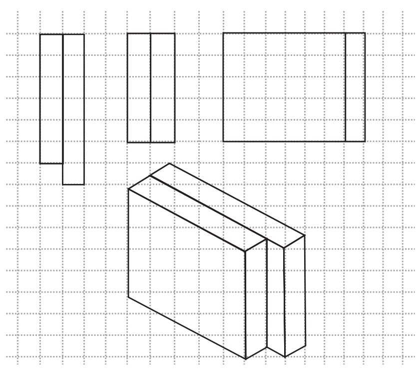
Es interesante que intenten crear sus propias figuras imposibles, pues deberán analizar en profundidad las propiedades de los dibujos en perspectiva. Puede ayudar el utilizar una trama isométrica.

Pág. 236

9.5. ¿Cómo es?



9.6. Proyecciones



9.7. Tertulia

No nos debemos limitar a asociar cada persona con la vista que corresponda, sino que debemos pedir que cada alumna y alumno escriba la razón por la que ha efectuado esa asociación, con lo que obligaremos a la realización de una descripción más detallada.

9.8. Edificios

Es posible una construcción con 6 cubos: