BLOQUE III HACIA LA TERCERA DIMENSIÓN

Introducción

Nuestras alumnas y alumnos tuvieron ocasión, durante el estudio de la geometría de primer curso, de familiarizarse con el aprendizaje mediante la manipulación de materiales diversos y la observación de las propiedades de los objetos. En este segundo curso, viajaremos hacia la tercera dimensión, y lo haremos a través de dos temas:

- **En dos dimensiones**. Servirá de nexo de unión con el estudio del primer curso, con un mayor nivel conceptual; nuestro alumnado habrá adquirido ya una mayor capacidad de abstracción y será capaz de afrontar situaciones más complicadas, siempre con la ayuda de material manipulable y, de ser posible, el ordenador y el programa Cabri o GeoGebra.
- **La tercera dimensión**. Tras la observación de las formas en la naturaleza, la manipulación de distintos objetos nos permitirá ir descubriendo propiedades de los poliedros o cuerpos de revolución y cómo medir el espacio que ocupan; volveremos a mirar a nuestro alrededor, ahora con el objetivo de encontrar dichos cuerpos, perfeccionados e idealizados por la mente humana, en la arquitectura y escultura urbana. Terminaremos con el estudio de las representaciones planas de objetos tridimensionales.

Con ello, conseguiremos que nuestras alumnas y alumnos adquieran los siguientes conocimientos conceptuales, marcados en la legislación vigente:

- Figuras con la misma forma y distinto tamaño. La semejanza. Proporcionalidad de segmentos. Identificación de la semejanza entre figuras y cuerpos geométricos.
- Ampliación y reducción de figuras. Obtención, cuando sea posible, del factor de escala utilizado. Razón entre las superficies de figuras semejantes.
- Utilización de los teoremas de Tales y Pitágoras para obtener medidas y comprobar relaciones entre figuras.
- Poliedros y cuerpos de revolución.
- Elementos de los poliedros. Clasificación atendiendo a distintos criterios. Utilización de propiedades, regularidades y relaciones para resolver problemas del mundo físico.
- Volumen de un prisma. Resolución de problemas que impliquen la estimación y el cálculo de longitudes, superficies y volúmenes.
- Utilización de la composición, descomposición, intersección, truncamiento, dualidad, movimiento, deformación y desarrollo de poliedros para analizarlos u obtener otros.
- Desarrollos planos de algunos poliedros.

Nuestra propuesta didáctica adapta los contenidos oficiales del siguiente modo:

6. En dos dimensiones

6.1. Entramos en materia: longitud, distancia, área; simetrías. Lugares geométricos. Dibujos con regla y compás. Supuesto implícito.
6.2. ¿Se parecen?: Semejanza. Razón de semejanza. Teorema de Tales.
Reducciones y ampliaciones, relación entre longitudes, áreas y volúmenes.
6.3. Polígonos: deformabilidad, características de los paralelogramos. Estudio de triángulos: elementos notables, teorema de Pitágoras.

7. La tercera dimensión

7.1. Policubos, prismas y pirámides: volúmenes y áreas.
7.2. Más poliedros: regulares y semirregulares, deltaedros, símbolo de Schläffi y fórmula de Euler. Cuerpos de revolución.
7.3. Del espacio al plano: perspectivas, proyecciones, desarrollos planos, diagrama de Schlegel, cortes planos, curvas de nivel. Rectas y planos: posiciones relativas.

6_ EN DOS DIMENSIONES

Puesto que durante el primer curso se estudió la geometría plana, parece lógico comenzar el estudio del segundo curso de un modo que enlace con los conocimientos anteriores. De este modo, se empieza con algunas actividades de tipo recreativo en geometría plana, que nos permitan recordar destrezas para el cálculo de longitudes y superficies, para pasar después al estudio de lugares geométricos y de la semejanza y llegar, tras el estudio de algunas propiedades a menudo ignoradas de los polígonos, pero que tan útiles los hacen en nuestra vida diaria, al estudio detallado de triángulos y propiedades de los mismos.

Insistimos en el aspecto manipulativo que pensamos debe tener el estudio inicial de la geometría. Las actividades están diseñadas, prácticamente siempre, para manipular objetos, no para imaginarlos.

Comenzamos así con algunas actividades sobre temas variados, en que se tratan ideas como los supuestos implícitos, que deben ser identificados y obviados en la resolución de problemas; la idea de distancia, como la más corta entre todas las posibles y que no siempre se mide sobre un segmento rectilíneo; distintas formas de partir una figura; introducción a los lugares geométricos, simetrías y dibujos con compás.

Seguimos con la semejanza, comenzando por la idea intuitiva de figuras parecidas y llegando a concretar con la consideración de igualdad de ángulos y proporcionalidad de longitudes, que no de áreas ni de volúmenes. Y con todo ello, el teorema de Tales.

El estudio de polígonos no se limita a los regulares, trapecios y paralelogramos como tantas veces hemos visto en libros de texto. Un polígono es dinámico, y el hecho de moverse tiene muchas aplicaciones en mecanismos habituales, y también problemas que deben ser subsanados mediante la triangulación. Ésa es la idea, apreciar el dinamismo de los polígonos, y la necesidad del estatismo de los triángulos. Comenzamos el tema analizando la visibilidad desde los vértices dependiendo de la concavidad o convexidad de una figura; a continuación, trabajamos los mecanismos con polígonos, y las características que hacen de los paralelogramos figuras especialmente útiles.

Por último, trabajamos con los triángulos y las características de los puntos notables de los mismos. Por último, el triángulo rectángulo nos muestra su utilidad ancestral en arquitectura para el alzado de paredes verticales y para realizar cálculos que, en este nivel, podemos considerar complejos.

DESDE AHORA...

ENTRAMOS EN MATERIA

Empezamos con una serie de actividades lúdicas, basadas en longitudes y áreas, en los que además trabajaremos la idea de "**supuesto implícito**", es decir, cosas que la gente supone al leer un enunciado sin que se diga que hay que hacer tal suposición. En esos casos intentaremos que nuestros alumnos y alumnas sean en cada momento conscientes de qué dificultad añadida ha supuesto el creer algo que no debían, así como que describan alguna de las estrategias que hayan utilizado para resolver los problemas.
A continuación, se plantean una serie de actividades en las que se trabaja el concepto de **lugar geométrico**, así como la distancia entre distintos objetos, ampliando así las ideas iniciales trabajadas en primer curso.

Pág. 179

1. CON PALILLOS Y CERILLAS

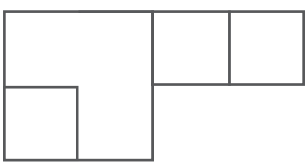
Dos actividades divertidas con las que entrar en materia y captar su atención frente a la materia que vamos a tratar.

1.3. Si no sales, no sale

Del plano al espacio. Se trabaja con el supuesto implícito (incitado por los ejemplos) de que se trata de una figura plana. No lo es, puesto que la solución es un tetraedro.
El título del problema se refiere a que no sale si no salimos del plano.

1.2. Juegos geométricos

Una solución. ¿Hay más?



La respuesta a la segunda pregunta es un cubo. Otra vez hay que salir del plano al espacio.

2. DISTANCIAS

Debemos tomar nota de las definiciones iniciales propuestas y comprobar si conseguimos un cambio significativo a lo largo del tema.

Pág. 180

2.1. Sobre una cuadrícula

a) Se trata aquí de la llamada distancia del taxista: 13 unidades (la menor posible, pero con distintos trayectos posibles).
b) A diferencia de la distancia euclídea, que produciría una circunferencia, aquí se obtiene un cuadrado.
c) Obtenemos un bonito dibujo de cuadrados concéntricos.
d) Una versión del triángulo de Pascal. Cada número es la suma del situado a su izquierda y arriba (y tres cuadrantes más simétricos, claro).

Pág. 181

2.2. Sobre un cilindro

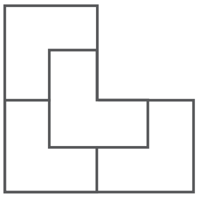
En general será un segmento de helicoide, aunque se puede obtener un arco de circunferencia (segmento horizontal) o un segmento rectilíneo (si es vertical).

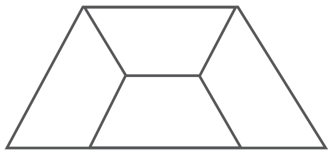
2.3. Sobre una esfera
Ahora se trata de un arco de circunferencia máxima (con centro el centro de la Tierra).

Pág. 182

3. ÁREAS
3.1. Medio cuadrado
Son infinitas las maneras de hacerlo. Es muy interesante el artículo al respecto de José Antonio Mora publicado en la revista SUMA, número 8, páginas 11 a 29. También se puede leer en www.jmora7.com

3.2. Cuatro partes iguales





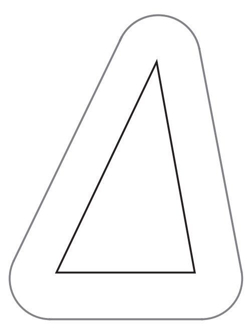
- Divertimento sobre figuras congruentes.
  Es muy posible que surjan más soluciones; de hecho, puede ser conveniente trabajar desde el concepto de área el procedimiento de calcular la cuarta parte y dibujarla, aunque en un principio no se consiga que las cuatro partes sean iguales en forma sino sólo en área.

4. UNA, DOS, TRES... ¡Y CUATRO!
¿Qué ocurre al viajar siempre en línea recta? En la recta, es un camino sin retorno, en la circunferencia, se vuelve al mismo lugar, y se podría detectar poniendo una señal. Sin embargo, el ser que vive sobre una esfera difícilmente sabrá que su mundo está acotado en una dimensión mayor.
¿Qué es una línea recta sobre una superficie esférica? Una circunferencia (paralelo o meridiano) o una loxodrómica. Ello enlaza con la cuestión ¿qué es ir en línea recta en la Tierra? O bien, ¿qué significa que un barco mantenga un rumbo fijo? Se tratará con más detalle en tercer curso.
La última pregunta pretende incitar a una discusión en que no habrá unanimidad sobre la respuesta.

5. PUNTOS A LA MISMA DISTANCIA
5.1. De una circunferencia
Las respuestas son el centro, un círculo de radio 4 cm y una corona circular de radios 1 y 3 cm.

Pág. 183

5.2. De un triángulo
Mientras en el interior aparece un triángulo semejante, por fuera es un “triángulo” con vértices redondeados. Se trabajan los temas de:
- Distancia entre dos rectas.
- De un punto a una recta.
- Entre dos puntos.



5.3. Fronteras
Otra vez se trabaja con los mismos principios. Tanto en esta actividad como en la anterior, no nos deberíamos conformar con un esquema de la solución, sino manejar los instrumentos de dibujo apropiados: regla, escuadra y cartabón, compás, y reflexionar sobre la relación que tienen los algoritmos de dibujo con las propiedades geométricas.

5.4. El camino

Introducción a lugares geométricos, comenzando por la mediatriz.
Un posible desarrollo de la actividad puede ser éste:

- ¿Cuál es la mínima distancia a que pasearán de cada casa? (La mitad de la distancia que las separa).
- ¿Cómo dibujarás puntos que estén a la misma distancia de otro? (Utilización del compás para dibujar una circunferencia).
- ¿Y de dos a la vez? (Dos circunferencias, y la respuesta nos la dan los puntos en que se cortan).
- Dibuja más, y más puntos que cumplan la condición. ¿Qué figura forman todos ellos?
- ¿Cómo es esa figura con respecto al camino que une las casas? (Asegurarse utilizando la escuadra o el transportador).

5.5. Carreteras

Mediante un desarrollo similar al anterior, se pueden introducir las bisectrices de dos rectas que se cortan y la paralela media de dos rectas paralelas.

6. MIRA EL ESPEJO

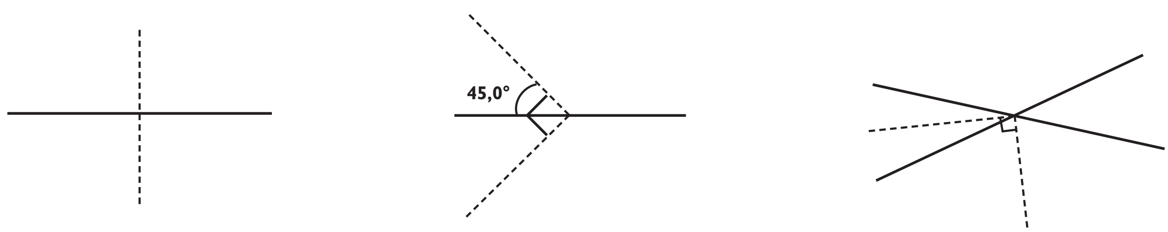
6.1. Figuras

Se trata de que nuestras alumnas y alumnos observen con detenimiento las simetrías y sepan analizarlas con detalle.

Pág. 184

6.2. Segmentos

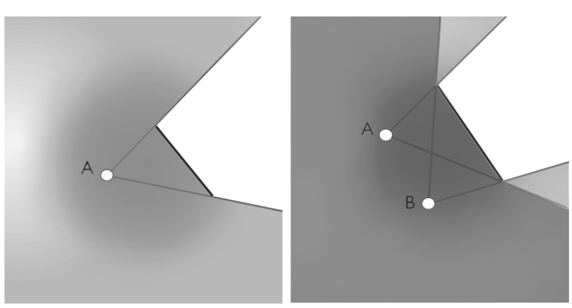
Se pide aquí una reflexión (nunca más apropiado el término) con el libro de espejos sobre las propiedades que cumplen los ángulos de las figuras anteriores, en caso de no haberlo hecho todavía. Las figuras en el margen muestran las posibles soluciones (Las líneas discontinuas representan espejos).



Pág. 185

7. DIBUJOS CON REGLA Y COMPÁS

Aquí tratamos de estudiar los algoritmos para algunas construcciones con regla y compás (mediatriz de un segmento, bisectriz de un ángulo, paralela a una recta por un punto exterior y perpendicular a una recta por un punto de la misma). Se presenta como una actividad de identificación y ordenación, aunque sería interesante tanto proponer que realicen la construcción en sus cuadernos como que la describan verbalmente y por escrito empleando un lenguaje apropiado.
Por último, se puede pedir que intenten justificar cada paso de cada algoritmo. Tenemos así distintos niveles de desarrollo de la actividad adecuados a distintas capacidades de los alumnos o alumnas.
En el apartado 7.5 pretendemos que deduzcan cómo se hace para determinar el centro de una circunferencia.



8. VISIÓN

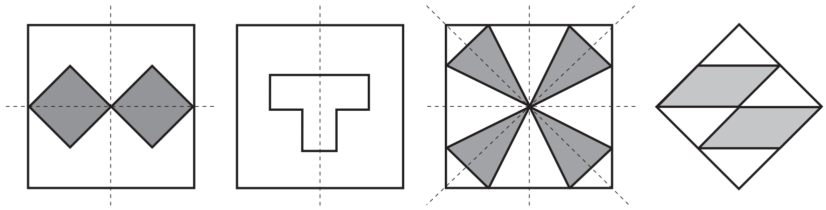
Ahora el lugar geométrico es una región del plano o la intersección de dos regiones planas, que da otra región plana. Nos puede servir como excusa para introducir la idea de "ángulo bajo el que se ve una figura"
En el primer caso, la zona de visión de A es la sombreada. Para el segundo caso, es la intersección de dos regiones planas, lo que da la zona más oscura.

Pág. 188

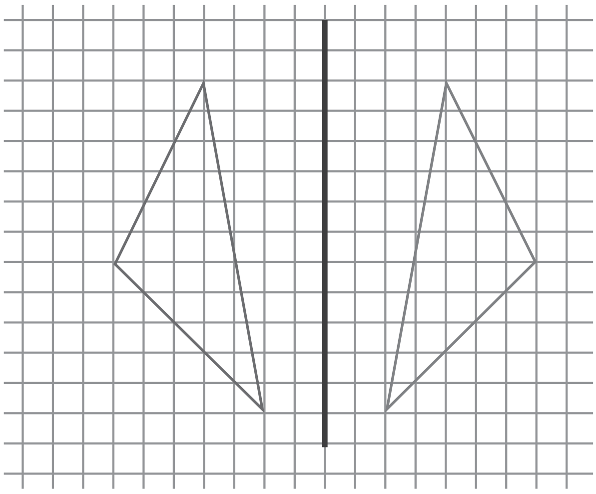
9. PRACTICAMOS UN POCO?

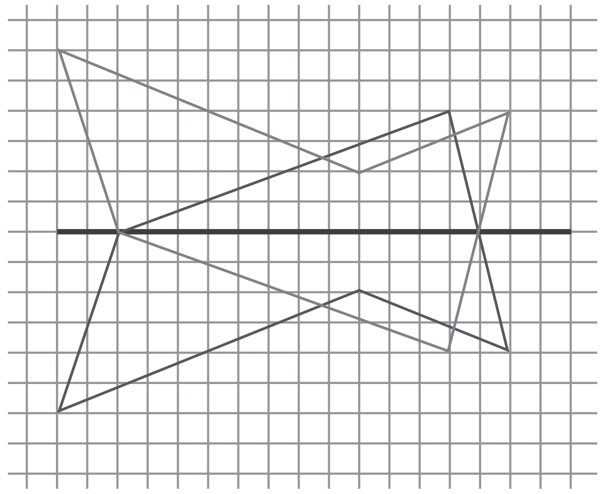
9.1. Ejes de simetría

Las figuras tienen 2, 1, 4 y ningún eje de simetría.



9.2. Dibuja el simétrico





Recordamos también la idea de distancia como la mínima posible, en este caso el segmento de perpendicular al eje, y que el eje es la mediatriz del segmento que une dos puntos simétricos.

9.3. Calcula áreas

Las áreas son 22'5 u^2 y 71 u^2. Atención a la mala utilización de fórmulas, es más conveniente la descomposición en figuras con área conocida, triángulos y rectángulos de base y altura claramente situados sobre la cuadrícula.

Las figuras simétricas tienen la misma área.

Con respecto a los perímetros, como todavía no conocen el teorema de Pitágoras, se propone confeccionar una regla con un trozo de papel, graduada en "lados de cuadritos", y medir con ella.

9.4. Recorta

a) Diámetro.

b) Se cortan en el centro.

c) Infinitos ejes de simetría: las rectas que pasan por el centro.

DESDE AHORA... ¿SE PARECEN?

Comenzamos con unas actividades como introducción a la **semejanza** desde un punto de vista intuitivo para, poco a poco, llegar a caracterizarla mediante la igualdad de ángulos y proporcionalidad entre longitudes. De aquí se pasa a la **razón de semejanza** y **teorema de Tales**, y a la no proporcionalidad entre áreas, aunque sí exista una relación con el cuadrado de la razón de semejanza.

Pág. 189

10. SEMEJANTES

10.1. Ampliar y reducir

Noción intuitiva de "figuras con la misma forma": ¿cuál es la condición para considerar que una copia está bien hecha? Se debe discutir hasta que quede suficientemente claro para todos.

10.2. Papel DIN

Mantener la forma... algo que hay que concretar. En este caso, además de lo anterior, ya pretendemos una toma de decisiones cuando preguntamos si lo es la hoja de papel que tienen delante. Debemos estar atentos a los distintos razonamientos utilizados, discutiendo cuáles son o no válidos: ¿cómo hacer para saber si la hoja en que trabajan es o no un A4? Buena ocasión para intentar llegar a que los cocientes se mantienen y a la idea de proporcionalidad directa.

Pág. 190

10.3. Figuras

Reconocer semejanza como "misma forma".

10.4. Pinta

Aunque de manera intuitiva, se pretende que nuestros alumnos y alumnas presten atención al hecho de que los ángulos deben ser iguales para que exista proporcionalidad.

Pág. 191

10.5. Triángulos

Se da un paso más con la localización de lados correspondientes en distintas figuras. La posición varía, para que quede claro que ésta no tiene nada que ver con la semejanza.

10.6. Busca

Aquí se trata otra vez de identificar figuras semejantes, pero además, identificar los casos con ángulos iguales; evidentemente, sólo en caso de polígonos podemos dar esta caracterización.

11. COMPLETA

Ahora se ha de calcular, aunque con resultados sencillos, y de una forma bastante intuitiva. Todavía no pretendemos profundizar en destrezas sino ejercitar la lógica.

12. RELACIÓN, O SEA RAZÓN

- Razón significa cociente, y es la relación que existe entre las figuras.
- Sin embargo, al contar cuadraditos verán que no hay el doble, sino el cuádruple.

Pág. 192

13. TALES Y LOS ECLIPSES

Dos actividades sobre el teorema de Tales.

13.1. El eclipse

Para nuestras alumnos y alumnos es probable que este problema presente serias dificultades, y debemos prestar mucha atención a todas las iniciativas que se propongan.
Un esquema simplificado evidenciará dos triángulos semejantes; el proceso lógico es determinar la razón de semejanza (149.000.000 ÷ 384.000 ≈ 388) y aplicarla al diámetro de la Luna (3.480 x 388 = 1.350.240 km).
Si no se proponen ideas para resolver el problema, podemos sugerir la estrategia de ponerse un caso más sencillo y analizar qué hacemos para resolverlo, por ejemplo si las distancias fuesen 10 y 20 km.

Pág. 193

13.2. Tales

Generalizamos la situación anterior a conjuntos cualesquiera de rectas paralelas cortadas por dos rectas secantes; aunque se parte de casos muy sencillos, hay algunos en que habrá que recurrir a escribir las operaciones efectuadas.

14. MIDIENDO UN ÁRBOL

Actividad manipulativa. No se trata de explicar cómo lo harían, sino de hacerlo realmente en la calle (una clase en el patio suele ser muy instructiva). En ambos casos tendremos dos triángulos rectángulos semejantes (¿por qué son semejantes?).

Pág. 194

15. REDUCCIÓN Y AMPLIACIÓN

Se intentará provocar la discusión sobre el significado de “según la fracción...”. Nos referimos a relaciones lineales, pero ¿qué ocurre con las áreas? ¿Qué impresión general da el dibujo aumentado o reducido? Para una reducción de 1/2, parece mucho menor que la mitad del dibujo original. La explicación la deducirán con una pequeña ayuda por nuestra parte: ¿qué vemos al mirar el dibujo, longitudes o superficies?
Para arreglar del todo el asunto, podríamos utilizar la fotocopiadora para, dados estos dibujos, fotocopiarlos al 50% o al 200% para comparar con los dibujos de clase: ¿a qué se refiere una fotocopiadora cuando se amplía al 150%?
La respuesta es que los porcentajes con que trabajan las fotocopiadoras se refieren a áreas y no a longitudes. Y podríamos lanzar la pregunta al vacío: si queremos que las longitudes sean el doble, ¿a qué porcentaje debemos fotocopiar?

16. PANTÓGRAFO

Semejanza manipulativa, y por tanto fácil de asimilar.

Pág. 195

17. CÁLCULOS SOBRE EL PAPEL DIN

Además de la semejanza, se trata una progresión geométrica; si advertimos interés es el momento de extenderse un poco en algunos comentarios o situaciones en que intervengan crecimientos de tipo exponencial.

a) Un A0 contiene 16 A4.
b) Un A4 ocupa 1/16 m^2, o sea 625 cm^2 (equivalencia entre unidades de superficie).
c) Una ampliación A4 → A3 dobla la superficie, siendo las figuras semejantes. Se puede responder a esta pregunta uniendo dos A4, tomando medidas y calculando la razón de semejanza entre las figuras obtenidas.
   Un cálculo aproximado sería el siguiente: si el A4 es 21x29’7 cm, y el A3 es 29’7x42 cm, la razón es 29’7 ÷ 21 = 1’414 (o sea $\sqrt{2}$).
d) Se trata del cociente inverso del anterior, 0’71 aproximadamente.

f) De A3 → A4 la superficie es la mitad, y la longitud es el 71%.
g) Un 50% (área).
h) Un 200% (área).

18. BANDERAS Y OTROS (INVESTIGACIÓN)

Se puede asociar un número a cada rectángulo dividiendo el lado mayor entre el menor. Este número nos describirá su forma. Así, 1 será un cuadrado, $\sqrt{2}$ será un DIN-A, 2 es una ficha de dominó y Φ será un rectángulo áureo, siendo

$$\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Pág. 199

19. ¿PRACTICAMOS UN POCO?

19.1.

a) El primero es 7 ÷ 4 = 1’75, y el segundo es 13 ÷ 7 = 1’86, con lo que no son semejantes.
b) 1’75 × 7 = 12’25 cm debería ser la longitud del lado.

19.2.

24 ÷ 5 = 4’8 es la razón de semejanza; 2 × 4’8 = 9’6 m de ancho. La razón entre las áreas es 23’04.

19.3.

8’362 m de altura.

19.4.

1. Sí lo son, razón 5.
2. La razón es 7 ÷ 4 = 1’75, luego a = 7 × 1’75 = 12’25 cm, y b = 10 ÷ 1’75 = 5’71 cm.

19.5.

¡Atención! Es un problema difícil para la mayoría de los alumnos o alumnas.
El peso está relacionado con el volumen al ser del mismo material, con lo que la razón entre pesos es el cubo de la razón entre longitudes; la razón entre pesos es 46.000.000.000, luego entre longitudes es aproximadamente 3.583, y la nueva altura será 150 ÷ 3.583 = 0’042 m = 4’2 cm.

DESDE AHORA... POLÍGONOS

Antes de entrar en el estudio de triángulos y sus propiedades, proponemos una serie de **actividades manipulativas con polígonos** con un material muy sencillo de construir, con tiras de cartón, taladradora y pasadores. Con ellas pretendemos varios objetivos:

- Estudiar alguna propiedad de polígonos.
- Poner en evidencia su utilización para crear mecanismos usuales.
- Mostrar que, a diferencia del resto de polígonos, el triángulo es indeformable.

Pasaremos seguidamente a estudiar **elementos notables de los triángulos** y, por último, el **teorema de Pitágoras**.

Pág. 200

20. EL MUSEO

20.1. Salas 1 y 2

Actividad de introducción que haga reflexionar sobre los distintos tipos de polígonos, obviando la idea de que un polígono es siempre casi regular. ¿Propondrán algún hexágono cóncavo? ¿Y estrellado? ¿Dónde situar las cámaras?

20.2. Salas convexas

Se pretende llegar a la conclusión de que en espacios convexos sólo se necesita una cámara, y que la mejor situación es un vértice, porque requiere un menor ángulo de visión.

20.3. Salas no convexas

Si utilizamos el algoritmo del apartado c) vemos que sólo se necesitan dos cámaras para el primer caso y cuatro para el segundo. El algoritmo se completa añadiendo:
... se eligen los vértices de un mismo color menos numerosos (dos cámaras en vértices rojos o azules).

En general, basta con una cantidad de cámaras igual a la parte entera de $n \div 3$ (n, número de lados), aunque hay veces que este número se puede mejorar (por ejemplo, en los polígonos convexos).

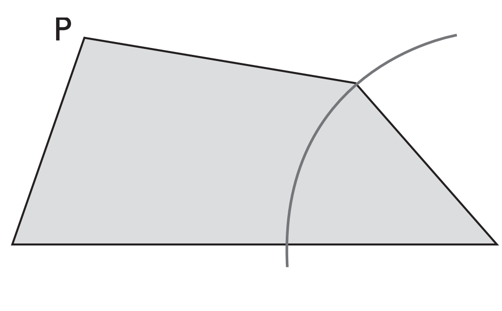
Pág. 201

21. MECANISMOS CON POLÍGONOS

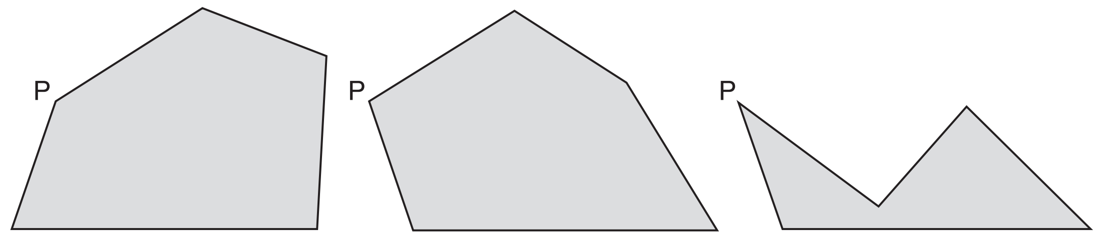
Estas actividades son para manipular, no para imaginar.

21.1. Polígonos articulados

Si fijamos los dos vértices inferiores, al mover el punto P el siguiente vértice puede recorrer el arco señalado. Hay un grado de libertad:



Si hay más lados, aumentan los grados de libertad; en un pentágono son dos:



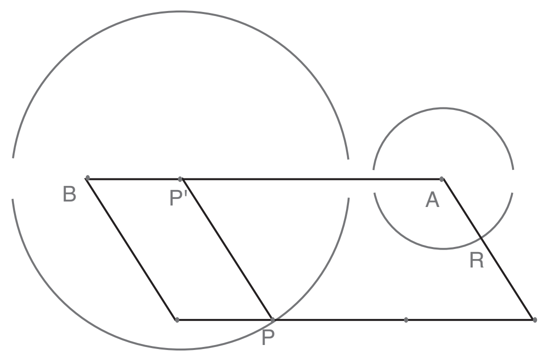
En un triángulo, hay 0 grados de libertad. Es indeformable.

El balancín sigue el esquema del cuadrilátero, con lo que puede resultar muy divertido, y algo peligroso.

Pág. 202

21.2. Paralelogramos articulados

Los paralelogramos tienen la propiedad de mantener el paralelismo al mover los vértices, lo que se utiliza para mecanismos como las barquetas de las grúas, que no se pueden inclinar (de lo contrario, la persona que se encuentra allí, caería).
Cada punto describe una circunferencia, P y Q del mismo radio igual a la altura del columpio, y R menor. Ver esquema para la determinación del centro de giro.
(P y Q están en las rodillas de dos niños, y R sobre la barra de sujección).



21.3. Tarjetas 3D

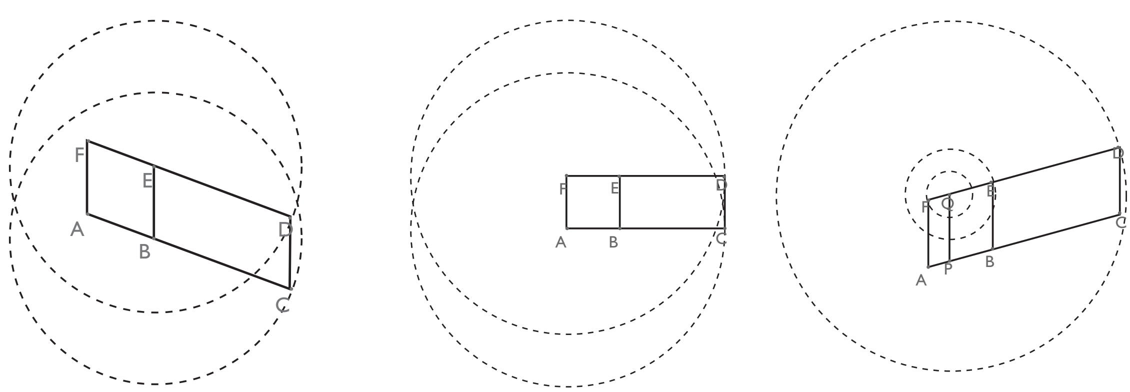
21.4. Tarjeta animada

Ambas están basadas en paralelogramos articulados.

Pág. 203

21.5. Una investigación

a) D describe una circunferencia de centro E y C una con centro B, mientras DC se mantiene paralelo a AF.
b) Al fijar AF, D describe una circunferencia de centro F y C una con centro A, mientras DC se mantiene paralelo a EB. Si fijamos, por ejemplo P y Q, éstos son los centros de circunferencias concéntricas descritas por D, E, F y por C, B, A, manteniéndose paralelos los segmentos AF, BE, CD.
c) Al fijar F y B, estamos triangulando la figura y haciéndola indeformable.



21.6. Mira a tu alrededor

Es una actividad orientada a desarrollar la capacidad de observar y analizar lo que nos rodea. ¿Dónde encontrar paralelogramos articulados? En multitud de artilugios, como limpiaparabrisas, herramientas, lámparas de escritorio, excavadoras, tijeras de podar, gatos de coche, bombas infladoras, botelleros, toldos, juguetes.
Un libro muy recomendable para saber más sobre el tema es Bolt, Brian, *Matemáquinas*, Ed. Labor, Barcelona, 1992.

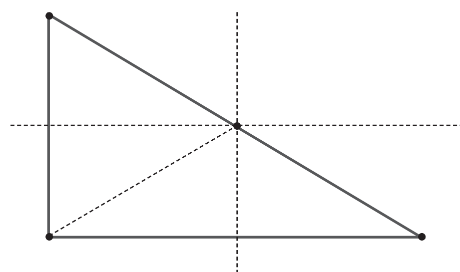
22. EL POZO

Es prácticamente imposible que se relacione, de entrada, el punto buscado con los puntos notables de un triángulo. De hecho, el problema está planteado como introducción a tales conceptos y con objeto de desarrollar estrategias de resolución como dibujos a escala y toma de medidas.
Tanto en esta actividad como en bastantes otras, sería de gran ayuda el tener acceso a un aula con ordenadores para utilizar el programa Cabri o Geogebra.
Si se considera oportuno, se puede volver sobre esta actividad después de trabajar las que siguen para aplicar lo aprendido.
Las observaciones sobre las tres actividades siguientes son meramente orientativas para comprobar la validez de los cálculos realizados por alumnas y alumnos a partir de sus dibujos. Más valor que decirles “está mal, el resultado es muy distinto” tendría una valoración del tipo “¿crees que tu resultado es lógico?”.

22.1. A la misma distancia de los pueblos

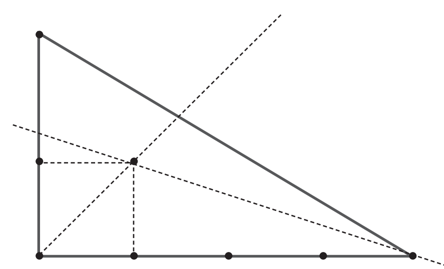
El punto buscado es aquél en que se cortan las mediatrices (recordar la actividad, **El camino**), y el triángulo propuesto es rectángulo de lados 3, 4 y 5: se encuentra en el centro del lado mayor, a lo que se puede llegar mediante consideraciones sobre la simetría de figuras.

La distancia a cada pueblo será de 2’5 km.



22.2. A la misma distancia de los caminos

Aquí el punto es el de corte de las bisectrices (actividad 8, Carreteras). La distancia a cada camino es de 1 km.



Pág. 204

22.3. ¿Otra comarca?

Es un triángulo obtusángulo, en que tanto el incentro como el circuncentro quedan fuera. Quedamos a la espera de posibles iniciativas, y esperamos que el punto propuesto se parezca al centro de gravedad (baricentro).

23. LOS FAROS

Distintas maneras de determinar un triángulo:

- Conociendo los tres lados.
- Conocido un lado y dos ángulos (¿cuáles?)
- ¿Qué ocurre si se conocen los tres ángulos?

Podría ser una buena idea proponer el problema para hacer en casa y comparar en clase las soluciones propuestas, obligando a explicar verbalmente la posición de cada barco.

24. PUNTOS EN UN TRIÁNGULO

24.1. Circuncentro

24.2. Incentro

24.3. Baricentro

Insistiremos en que realice la construcción geométrica propuesta en cada caso, utilizando el material adecuado. Es de gran utilidad poder acceder a un aula de informática y disponer del programa Cabri II o el Geogebra. Recordemos que se puede trabajar con este programa a dos niveles distintos según mostremos opciones como "bisectriz" y "mediatriz" en el menú o bien las ocultemos.

Trataremos de ejemplificar de modo claro que el baricentro es el centro de gravedad del triángulo. Posibles ampliaciones:

- ¿Cuándo coinciden los tres puntos notables?
- ¿En qué casos esos puntos quedan fuera del triángulo? ¿En qué casos quedan siempre dentro?
- Estudiar qué ocurre con las alturas.
- ¿Puede darse el caso de que coincidan mediana, mediatriz y bisectriz, pero no coincidan los tres puntos notables? ¿Cuándo?

24.4. ¿Hay más?

También las alturas se cortan en un mismo punto, pero éste no presenta ninguna peculiaridad destacable.

Pág. 205

24.5. Recta de Euler

El baricentro (B) siempre está situado entre el ortocentro (O) y el circuncentro (C). Siempre es:

$$BO = 2 \times BC.$$

25. TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

25.1. Cuerda con nudos

Se trata del método que utilizaban los egipcios para construir triángulos rectángulos. Deben descubrir por sí mismos que también ocurre con lados múltiplos de éstos.

25.2. Triángulos y cuadrados en un geoplano

Debemos prestar atención a que realmente sean cuadrados las figuras construidas sobre los lados; se suelen encontrar dificultades a la hora de representar cuadrados sobre una cuadrícula cuando los lados no son paralelos a las líneas de dicha cuadrícula, y también hay alumnos o alumnas que tienen problemas para contar los cuadraditos que forman un cuadrado en disposición oblicua. En estos casos se deben fijar en que determinadas zonas son la mitad de otras zonas en que es evidente el área.

El objetivo final es relacionar el hecho de que el triángulo es equilátero con la relación entre las áreas para así deducir el teorema de Pitágoras con su enunciado original.

Una vez trabajada esta actividad por todas nuestras alumnas y alumnos individualmente, puede ser interesante pedir que escriban sus conclusiones, recopilarlas y discutirlas en clase. Éste es el resultado obtenido con un grupo, faltas de ortografía incluidas:

Me ha parecido una actividad bastante fácil, lo malo es que costaba entenderla, pero una vez lo hallas entendido es muy fácil. Creo que es una actividad de las áreas de lo cuadrados, y si son triángulos rectángulos. he aprendido: saber mejor calcular las áreas de los cuadrados...
la conclusion es que si sumas el area del cuadrado mediano y el pequeño te da el área del grande.
para sacar el area de un rectangulo grande, hay que sumar el area del pequeño y la del mediano

he aprendido a sacar el area de cuadrados y a sacar tamben el de los rectángulos He llegado a la conclusión de que si sumas el área del cuadrado pequeño y del mediano te da el resultado del área del cuadrado grande.
Esta actividad iba sobre al aria de los cuadrados y sobre de que clase era el triangulo segun su angulo.
Esta actividad me a parecido muy facil pero no entendia una que otra actividad. Esta actividad es de triangulos y de cuadrados. En esta actividad he aprendido como son los triangulos rectángulos
Mi concluión es q al sumar el área del cuadro mediano y la del peqño te da la del área grande
mi conclusion es que un cuadraqdo es rectangulo si la suma del area del pequeño y el mediano da la medida del grande
La conclusión es que en un triángulo rectángulo, la suma del área de los cuadrados formados a partir de los catetos es igual al área del cuadrado formado a partir de la hipotenusa.
Hemos llegado a la conclusión que en los triángulos rectángulos si se suma el área del cuadrado pequeño más el área del cuadrado mediano, se obtiene el área del cuadrado grande. Y en los triángulos no rectángulos no pasa así.
Cuando es "sí", la suma del área del cuadrado pequeño y grande, da el resultado del cuadrado grande. Y cuando es "no", no da el resulatado de la suma.
he aprendido el area de cuadrados y tambien si son cuadrilateros no podria haver sacado mas al no ser que me he saltado una sin querer. ha sido facil
En esta actividad he aprendido que es y que no es un triangulo rectángulo.
Yo creo que la conclusion es que uno de los tres cuadrados que lo fooorman tiene que ser mas grande que los dos restantes y que la suma del pequeño mas el mediano tiene que darte el cuadrado grande.
Mi conclusión es que en un triángulo rectángulo la suma del cuadrado pequeño y mediano es el total del cuadrado grande, en un triángulo isósceles hay dos cuadrados iguales y uno desigual.
Mi conclusion es ke la suma de el numero de cuadrados ke tiene el pekeño mas el mediano da el area del cuadrado grande.
Después de terminar la última actividad me he dado cuenta de que sumando el área del cuadrado pequeño y la del mediano te da el resultado del grande.
He llegado a una conclusion que es que la suma de los cuadrados pequeños y medianos da la del cuadrado grande.
En este bloque he calculado el area de las figuras cuadradas, he contado cuadritos para poder saber su área, y no era muy dificil y nada mas ya esta.
He sacado la conclusión de que el área de un cuadrado pequeño y el de el cuadradro mediano, la suma te da, el área del cuadrado grande, sólo si es recto.
Yo creo que : la suma del área de los cuadrados pequeño y mediano, si son rectos, te da el área del cuadrado grande. Pero solo si la figura es recta.
Que sumas el pequeño y el mediano y te sale el grande.
He llegado a la conclusión de que si el cuadrado grande da la suma de de los otros dos cuedrados entonces si que es en triangulo-rectangulo.

No creemos conveniente algebrizar más de lo necesario el teorema cuando no se tiene soltura con el cálculo simbólico.